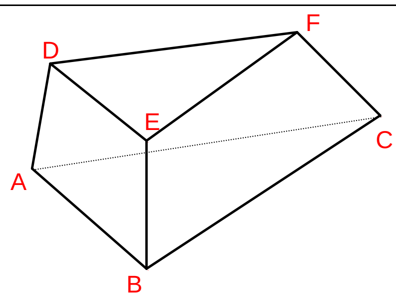
Douce France, le monde entier nous l'envie : suite et fin !

Michel Bridenne, lycée G. Eiffel et Irem de Dijon
michel.bridenne@wanadoo.fr

La première partie de cet article proposait un regard particulier sur des évaluations usuelles que sont des épreuves de mathématiques de baccalauréats, pour en signaler un certain flou, un écart évident entre des attentes supposées et la réalité de ce que d'aucun produit (évalué ou évaluateur), la deuxième esquissait une problématique de référence pour élaborer des textes d'évaluation « ordinaires ».
Cette troisième partie exemplifie au niveau d'une classe de seconde.

Autres exemples

Exemple 4

Après avoir examiné le dessin ci-contre avec la légende qui l'accompagne, expliquer pourquoi ce dessin n'est pas en accord avec la légende. * partie d'une pyramide à base triangulaire coupée par un plan.	 représentation, en perspective cavalière, d'un tronc de tétraèdre*.

Les éléments de corrigé (de l'exemple 4)

On se place dans une perspective cavalière adaptée. On appelle abcs le tétraèdre, où s est le sommet. S'il est coupé par un plan (def), avec d sur (as), e sur (bs) et f sur (cs) alors, suivant les règles énoncées ci-contre, les droites (ad), (be) et (cf) ayant le point s en commun, devraient être représentées par des droites (AD), (BE) et (CF) ayant un point en commun. Ce qui n'est pas le cas.	R1 : La perspective d'une droite est une droite. R2 : Des droites concourantes dans l'espace restent concourantes dans toute perspective cavalière.

Exemple 5

On appelle E l'ensemble de tous les nombres solutions du système d'inéquations suivant : $\begin{cases} -7x+3>1 \\ 3x+11 \geq -\dfrac{2}{5} \end{cases}$.

1) Démontrer que le système donné est équivalent à un système de la forme $\begin{cases} x>a & (1) \\ x \geq b & (2) \end{cases}$ ou $\begin{cases} x>a & (1) \\ x \leq b & (2) \end{cases}$ ou $\begin{cases} x<a & (1) \\ x \geq b & (2) \end{cases}$ ou $\begin{cases} x<a & (1) \\ x \leq b & (2) \end{cases}$ (où a et b sont des nombres connus), permettant de dessiner l'ensemble E et de l'écrire à l'aide des notations d'intervalles. Les nombres a et b devront être écrits sous la forme de quotients de nombres entiers.
2) Suivant le résultat obtenu et sur la droite orientée proposée sur la feuille réponse, dessiner en rouge l'ensemble des solutions de (1), et en bleu l'ensemble des solutions de (2), puis en vert l'ensemble E.

2) $\longrightarrow$

3) Ecrire E, avec les notations d'intervalles, sous deux formes différentes.

Les éléments de corrigé (de l'exemple 5)

1) $\begin{cases} -7x+3>1 \\ 3x+11 \geq -\dfrac{2}{5} \end{cases}$ $\downarrow\uparrow$ théorèmes ci-contre) $\begin{cases} x<\dfrac{2}{7} \\ x \geq \dfrac{-57}{15} \end{cases}$ (ou $\begin{cases} x<\dfrac{2}{7} \\ x \geq \dfrac{-19}{5} \end{cases}$.)	Avec les conventions d'usage, on peut par exemple citer Th.1 : $a > b \leftrightarrows a + c > b + c$ Th.2 : (avec b et c non nuls) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{ac}{bc}$ Th.3 : (avec b non nul) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}=\dfrac{a+c}{b}$ Th.4 : (avec $c < 0$) $a > b \leftrightarrows ac < bc$ Th.5 : (avec $c > 0$) $a \geq b \leftrightarrows ac \geq bc$ Th.6 : (avec b et d non nuls) $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$
2) --[(2/7) $\longrightarrow$ (-57/15)[--- (-57/15)[-----------------------------------[(2/7)	
3) $E = \left]-\infty\,;\dfrac{2}{7}\right[\cap \left[\dfrac{-57}{15}\,;+\infty\right[$; $E = \left[\dfrac{-57}{15}\,;\dfrac{2}{7}\right[$	

Exemple 6

On connaît une fonction f par son tableau de variations, donné ci-dessous :

Valeurs et variations de la variable libre t	- 15	- 12	7	10
Valeurs et variations de f(t)	5 ↗	14 ↘	- 3 ↗	15

On sait par ailleurs que les croissances ou décroissances de f sont strictes et que la représentation graphique de f est d'un seul tenant (sans trou), Remplis le tableau ci-dessous

1) Quel est la plus grande valeur de f(t) ? ➔		**1)** Quel est la plus petite valeur de f(x) ? ➔	
3) Compléter à l'aide de < ou de > ➔		f(2,3) ….. f(2,4)	
Justifier la réponse. 🡇			
4) Combien y a t-il de nombres a dans [- 15 ; 10] et tels que f(a) = 4. ➔			

Les éléments de corrigé (de l'exemple 6)

1) Quel est la plus grande valeur de f(t) ? ➔	**15**	**2)** Quel est la plus petite valeur de f(t) ? ➔	**-3**

2) Compléter à l'aide de < ou de > ➔	f(2,3) **>** f(2,4)
Justifier la réponse. 🡇	
2,3 et 2,4 sont dans l'intervalle [-12 ; 7], et 2,3 < 2,4 et f est strictement décroissante sur [-12 ; 7].	
4) Combien y a - t -il de nombres a dans [- 15 ; 10] et tels que f(a) = 4. ➔	2

Exemple 7

Soit f la fonction affine dont la représentation graphique a $-\frac{2}{3}$ pour coefficient directeur et 5 comme ordonnée à l'origine, g la fonction définie sur **R** et telle que g(t) = t – 3, et c est la fonction « élévation au carré ».

On construit la fonction h par la chaîne ci-dessous :

$$\text{sur } [-10\ ;\ 7],\quad \_\_\_ \xrightarrow{g(\ )} \_\_\_ \xrightarrow{c(\ )} \_\_\_ \xrightarrow{f(\ )} \_\_\_$$

1) Compléter le schéma ➔	$x \xrightarrow{g(\ )} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{c(\ )} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{f(\ )} \ldots\ldots\ldots$

2) A l'aide de tableaux de valeurs, de représentations graphiques, et d'un peu d'expérience, on conjecture que h est strictement croissante sur [-10 ; 3] et strictement décroissante sur [3 ; 7].

a) Pour confirmer les sens de variations de la fonction h sur [-10 ; 3], on propose la méthode ci-dessous. Il s'agit de citer les théorèmes, propriétés employés. On admet que la conjecture est exacte sur [3 ; 7].

Preuve que h est strictement croissante sur [-10 ; 3]	Propriétés, théorèmes … utilisés dans
Soit $a \in [-10\ ;\ 3]$, $b \in [-10\ ;\ 3]$ et $a < b$	
alors (1)	(1)
$g(a) < g(b) \leq 0$	
donc (2)	(2)
$(a-3)^2 > (b-3)^2$	
donc (3)	(3)
$h(a) < h(b)$.	
c.q.f.d.	

b) Compléter le tableau suivant (pas de valeur approchée ; les résultats seront écrits sous forme de quotients d'entiers irréductibles).	valeurs et variations de x	-10 … 7
	valeurs et variations de h(x)	… ↗ … ↘ …

3) Pour représenter la fonction h sur l'écran graphique de la calculatrice, en cohérence avec le tableau de variations (« pour tout voir »), comment organiser sa « fenêtre » (window) ? ➔	

Les éléments de corrigé (de l'exemple 7)

1) Compléter le schéma ➔	$x \xrightarrow{g(\ )} x-3 \xrightarrow{c(\ )} (x-3)^2 \xrightarrow{f(\ )} -\frac{2}{3}(x-3)^2+5$

2) A l'aide de tableaux de valeurs, de représentations graphiques, et d'un peu d'expérience, on conjecture que h est strictement croissante sur [-10 ; 3] et strictement décroissante sur [3 ; 7].

a) Pour confirmer les sens de variations de la fonction h sur [-10 ; 3], on propose la méthode ci-dessous. Il s'agit de citer les théorèmes, propriétés employés. On admet que la conjecture est exacte sur [3 ; 7].

Preuve que h est strictement croissante sur [-10 ; 3]	Propriétés, théorèmes … utilisés dans
Soit a $\in$[-10 ; 3], b $\in$ [-10 ; 3] et a $<$ b alors (1) $g(a) < g(b) \leq 0$ donc (2) $(a-3)^2 > (b-3)^2$ donc (3) $h(a) < h(b)$. c.q.f.d.	(1) **toute fonction affine sur J dont le « coefficient directeur » est strictement positif, est strictement croissante sur J** et calcul de g(3) (2) **la fonction « carrée » est strictement décroissante sur]-∞ ; 0]** (3) **toute fonction affine sur J dont le « coefficient directeur » est strictement négatif, est strictement décroissante sur J** **et substitution** (déf. de h)

b) Compléter le tableau suivant (pas de valeur approchée ; les résultats seront écrits sous forme de quotients d'entiers irréductibles).	valeurs et variations de x valeurs et variations de h(x)	-10 **3** 7 $\frac{-323}{3}$ ↗ 5 ↘ $\frac{-17}{3}$

3) Pour représenter la fonction h sur l'écran graphique de la calculatrice, en cohérence avec le tableau de variations (« pour tout voir »), comment organiser sa « fenêtre » (window) ? ➔	Par exemple : x_{min} = -10 x_{max} = 7 pas : 1 y_{min} = -110 y_{max} = 10 pas : 10

Exemple 8

Ici J = [0 ; 100]. Une fonction g est telle que, pour x dans J, $g(x) = \frac{x}{2x+3}$ (écriture n°1).

1) Prouver, par le calcul algébrique, que, pour x dans J, on peut aussi écrire $g(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2(2x+3)}$ (écriture n°2). <u>*Remarque :*</u> *les théorèmes essentiels doivent être cités.*
2) Mettre chaque écriture de f sous la forme d'une chaîne de fonctions. Chaque maillon de la chaîne doit être l'un des maillons suivants :

3) $\sqcup \xrightarrow{a(\ )+b} \sqcup$ (dans ce cas, a et b doivent être précisés), $\sqcup \xrightarrow{(\ )^2} \sqcup$, $\sqcup \xrightarrow{\frac{1}{(\ )}} \sqcup$, $\sqcup \xrightarrow{\sqrt{(\ )}} \sqcup$, $\left.\begin{array}{l}\sqcup\\ \\ \sqcup\end{array}\right\} \xrightarrow{+} \sqcup$, $\left.\begin{array}{l}\sqcup\\ \\ \sqcup\end{array}\right\} \xrightarrow{\times} \sqcup$ (ces deux derniers cas interviennent dans les chaînes à deux rangs). <u>*Remarque :*</u> *aucune « preuve » n'est demandée, mais il n'est pas inutile de contrôler ce que l'on fait … sur un brouillon.*

4) On choisit a et b dans J tels que a $>$ b. Lequel de g(a) et de g(b) est le plus grand ? Prouver l'affirmation.

Les éléments de corrigé (de l'exemple 8)

1) Pour x dans J, $\frac{1}{2}-\frac{3}{2(2x+3)} = \frac{(2x+3)-3}{2(2x+3)}$ (th.1 et th.2) donc (développement et th.1) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2(2x+3)} = \frac{x}{2x+3}$ d'où (écriture n°1) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2(2x+3)} = g(x)$.	Th.1 : pour tous b et c non nuls, $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ Th.2 : pour tout b non nul, $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$
2) Ecriture n°1 Sur J, $\sqcup \left.\begin{array}{l}\xrightarrow{\quad(\ )\quad} \sqcup \\ \\ \xrightarrow{2(\ )+3} \sqcup \xrightarrow{\frac{1}{(\ )}} \sqcup\end{array}\right\} \xrightarrow{\times} \sqcup$	
Ecriture n°2 Sur J, $\sqcup \xrightarrow{2(\ )+3} \sqcup \xrightarrow{\frac{1}{(\ )}} \sqcup \xrightarrow{-\frac{3}{2}(\ )+\frac{1}{2}} \sqcup$	

3) On choisit a et b dans J tels que a $>$ b. Lequel de g(a) et de g(b) est le plus grand ? Prouver l'affirmation.

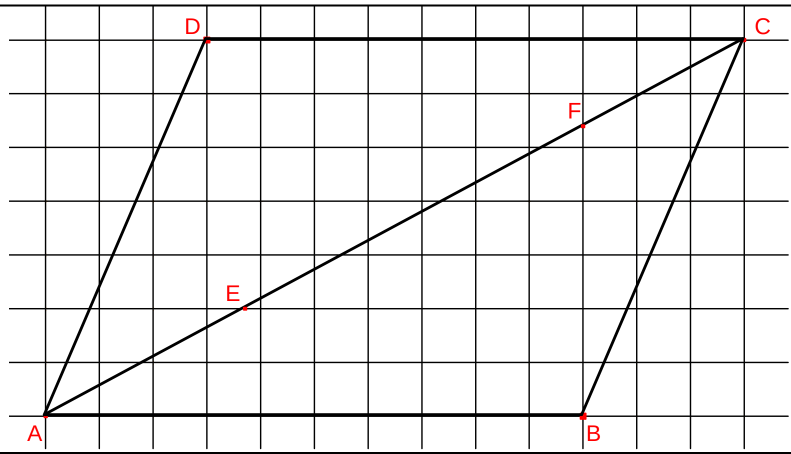
Soit a et b dans J tels que a $>$ b, alors (déf.) a $>$ b $>$ 0 donc (th.1) 2a + 3 $>$ 2b + 3 $>$ 3 d'où (th.2) $\frac{1}{2a+3} < \frac{1}{2b+3}$ d'où (th.3)	Déf. : traduction de l'appartenance à un intervalle Th.1 : toute fonction affine sur J dont le « coefficient directeur » est strictement positif, est strictement croissante sur J Th.2 : la fonction « inverse » est strictement décroissante sur]0 ; $+\infty$[. Th.3 : toute fonction affine sur J dont le « coefficient directeur » est

$-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2a+3}\right)+\frac{1}{2}>-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2b+3}\right)+\frac{1}{2}$ soit, par définition de g, g(a) > g(b).	strictement négatif, est strictement décroissante sur J.

Exemple 9

Le quadrillage ci-dessous est un quadrillage carré : toutes ses ressources sont utilisables. L'unité de longueur est le côté des carrés de ce quadrillage. Sur le dessin ci-dessous, ABCD représente un parallélogramme. Les points A, B, C et D sont aux intersections de droites du quadrillage. Les points E et F sont à l'intersection de la droite (AC) et des droites du quadrillage.

<table>
<tr><td>1. Compléter les égalités ci-contre :</td><td>$\overrightarrow{AE} = \quad .\overrightarrow{CF}$</td><td>$\overrightarrow{CF} = \quad .\overrightarrow{AC}$</td></tr>
<tr><td>2. Compléter les égalités ci-contre :</td><td>$\overrightarrow{EF} = \quad .\overrightarrow{AC}$</td><td>(valeur exacte dans l'unité donnée) EF =</td></tr>
<tr><td colspan="2">ou 2'. Quelle est la valeur exacte de EF, dans l'unité donnée ? (aucune justification ne doit être fournie).</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>3. Construire, sur ce dessin, les points J et K définis par les égalités vectorielles :
$\overrightarrow{DB} = 7.\overrightarrow{DJ}$ et $6.\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DK}$.
Les traits de construction doivent permettre de lever toute ambiguïté sur la position des points J et K.</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">4. Soit l'affirmation suivante : <u>les droites (AJ) et (CK) sont parallèles</u>.
Pour résoudre cette conjecture, on veut utiliser une méthode vectorielle pour prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont colinéaires ou non, puis conclure.</td></tr>
<tr><td>4.1 Décomposer chacun des vecteurs ci-contre sous la forme $a.\overrightarrow{DA} + b.\overrightarrow{DC}$, où a et b sont des nombres.</td><td>$\overrightarrow{AJ}$ =</td><td>$\overrightarrow{CK}$ =</td></tr>
<tr><td colspan="3">4.2 Prouver que les résultats obtenus en 4.1 sont exacts. (Utiliser le verso de cette feuille en cas de besoin.)</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
</table>

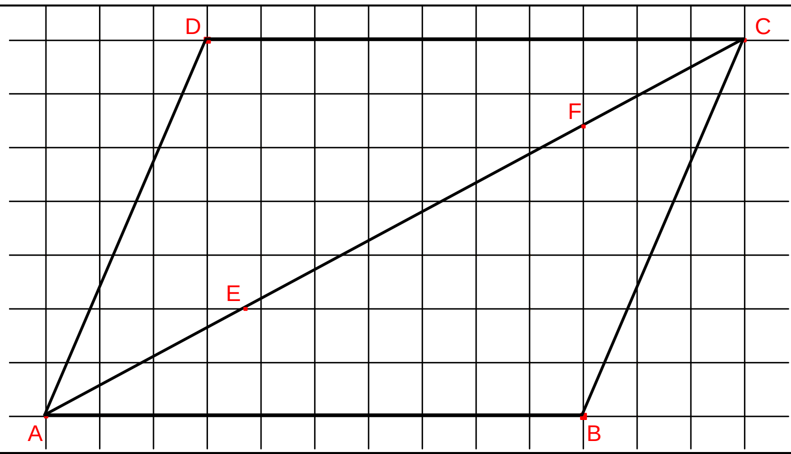
4.3 Résolution de la conjecture (du problème), démonstration. (Utiliser le verso de cette feuille en cas de besoin.)	

5. La droite (AJ) coupe la droite (DC) en X, et coupe la droite (BC) en Y. Parmi les réponses présentées, quelle est celle correspondant à la valeur exacte de DX, dans l'unité donnée ? Entourer la réponse choisie, et compléter éventuellement (aucune justification ne doit être fournie).	a. $\frac{10}{7}$ b. $\frac{7\sqrt{2}}{6}$ c. 1,7 d. $\frac{7}{4}$ e. autre, à préciser ici ⇨
6. Ecrire une relation de colinéarité liant les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{YC}$ (aucune justification ne doit être fournie).	

Les éléments de corrigé (de l'exemple 9)

Le quadrillage ci-dessous est un quadrillage carré : toutes ses ressources sont utilisables. L'unité de longueur est le côté des carrés de ce quadrillage. ABCD représente un parallélogramme, A, B, C et D sont aux intersections de droites du quadrillage, E et F sont à l'intersection de la droite (AC) et des droites du quadrillage.

1. Compléter les égalités suivantes :	$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{7}.\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{CF} = -\frac{3}{13}.\overrightarrow{AC}$
2. Compléter les égalités ci-contre :	$\overrightarrow{EF} = \frac{44}{91}.\overrightarrow{AC}$	(valeur exacte dans l'unité donnée) $EF = \frac{44\sqrt{218}}{91}$
2. Quelle est la valeur exacte de EF, dans l'unité donnée ? (aucune justification ne doit être fournie).		$\frac{44\sqrt{218}}{91}$
3. Construire, sur ce dessin, les points J et K définis par les égalités vectorielles : $\overrightarrow{DB} = 7.\overrightarrow{DJ}$ et $6.\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DK}$.		



4. On s'intéresse à l'affirmation suivante : **<u>les droites (AJ) et (CK) sont parallèles</u>**. Pour résoudre cette conjecture, on propose d'utiliser une méthode vectorielle pour prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont colinéaires ou non, puis de conclure.

4.1 Décomposition de chacun de ces vecteurs sous la forme a.$\overrightarrow{DA}$ + b.$\overrightarrow{DC}$, où a et b sont des nombres.

$\overrightarrow{AJ} = -\frac{6}{7}.\overrightarrow{DA} + \frac{1}{7}.\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{CK} = \frac{6}{7}.\overrightarrow{DA} - \frac{1}{7}.\overrightarrow{DC}$

4.2 Preuve que les résultats obtenus en 4.1 sont exacts.

Par exemple : $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}$ (th.1)

donc (th.2, th.3) $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{DA} + \frac{1}{7}.\overrightarrow{DB}$

donc (th.2, th.1)

$$\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{DA} + \frac{1}{7}.\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\right)$$

donc (th.4, th.5)

$$\overrightarrow{AJ} = -\frac{6}{7}.\overrightarrow{DA} + \frac{1}{7}.\overrightarrow{DC}$$

Th.1 : relation de Chasles

Th.2 : pour tous A et B, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Th.3 : substitution

Th. 4 : pour tout réel α, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\alpha.(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha.\vec{u} + \alpha.\vec{v}$

Th. 4 : pour tous réels α et β, pour tout vecteur $\vec{u}$, $(\alpha + \beta).\vec{u} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{u}$

Et, par analogie : $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DK}$

donc $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CD} + 6.\overrightarrow{DJ}$

donc $\overrightarrow{CK} = -\overrightarrow{DC} + 6.\left(\frac{1}{7}.\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\right)\right)$

donc $\overrightarrow{CK} = \frac{6}{7}.\overrightarrow{DA} - \frac{1}{7}.\overrightarrow{DC}$

4.3 Résolution de la conjecture (du problème), démonstration.

Par exemple, les résultats de 4.2 permettent d'écrire :

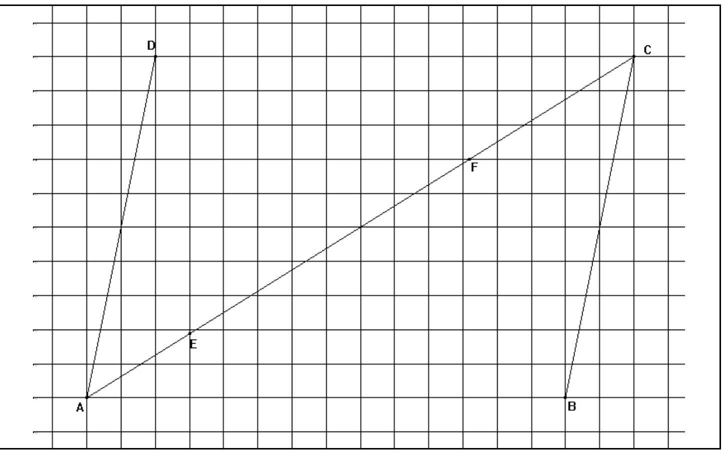
$$\overrightarrow{AJ} = -\frac{6}{7}.\overrightarrow{DA} + \frac{1}{7}.\overrightarrow{DC}$$

donc (th.4, th.6) $\overrightarrow{AJ} = -\left(\frac{6}{7}.\overrightarrow{DA} - \frac{1}{7}.\overrightarrow{DC}\right)$

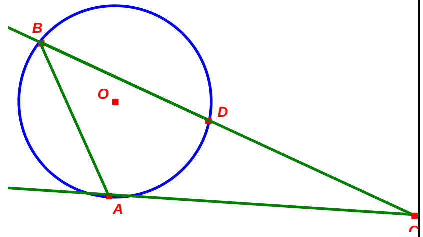
th. 6 : pour tout vecteur $\vec{u}$, $-1.\vec{u} = -\vec{u}$

donc (th.3) $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{CK}$ Les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont opposés donc (déf.) colinéaires. De plus, A et J étant distincts, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ ne sont pas nuls donc (th. 7) les droites (AJ) et (CK) sont parallèles.	Déf. : vecteurs colinéaires Th.7 : Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.

5. La droite (AJ) coupe la droite (DC) en X, et coupe la droite (BC) en Y. Parmi les réponses présentées, quelle est celle correspondant à la valeur exacte de DX, dans l'unité donnée ? Entourer la réponse choisie, et compléter éventuellement (aucune justification ne doit être fournie).	a. $\frac{10}{7}$ b. $\frac{7\sqrt{2}}{6}$ c. 1,7 d. $\frac{7}{4}$ e. autre, à préciser ici ⇨ $\frac{5}{3}$
6. Ecrire une relation de colinéarité liant les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{YC}$ (aucune justification ne doit être fournie).	$\overrightarrow{YC} = 5.\ \overrightarrow{CB}$

L'exemple 9 peut être repris avec le dessin ci-contre.	

Exemple 10

Le triangle ABC est tel que $\widehat{BAC} > 90°$. Le cercle Γ, de centre O, passe par A et B, ne passe pas par C et il est tangent en A à la droite (AC). On admet que dans ce cas, la droite (BC) recoupe le cercle Γ en D et D est sur [BC]. Le but de cet exercice est de démontrer que $AC^2 = CD \times CB$. Dans la suite on appelle K le milieu du segment [AD].	

1) Pour démontrer que $AC^2 = CD \times CB$, il suffit de prouver que deux triangles sont semblables. Lesquels ? →

2) Pour les deux triangles trouvés, compléter le tableau suivant, où les points homologues seront écrits l'un en dessous de l'autre.

Points du premier triangle			
Points du second triangle			

3) Avec les seuls points nommés, écrire le nom d'un angle complémentaire à la fois à $\widehat{CAD}$ et à $\widehat{AOK}$. →

4) Justifier la réponse au 3).

5) Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AOK}$ ont même mesure. Citer (en les numérotant dans leur ordre d'utilisation) les théorèmes ou propriétés permettant de prouver cette affirmation.

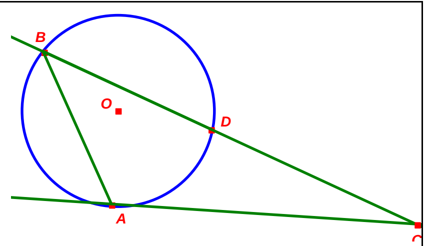
6) Au dos de cette feuille, en utilisant les données précédentes (de l'énoncé ou prouvées) et les résultats de cours, prouver alors que $AC^2 = CD \times CB$.

Les éléments de corrigé (de l'exemple 10)

Le triangle ABC est tel que $\widehat{BAC} > 90°$. Le cercle Γ, de centre O, passe par A et B, ne passe pas par C et il est tangent en A à la droite (AC). On admet que dans ce cas, la droite (BC) recoupe le cercle Γ en D et D est sur [BC].
Le but de cet exercice est de démontrer que

$$AC^2 = CD \times CB.$$

Dans la suite on appelle K le milieu du segment [AD].



1) Pour démontrer que $AC^2 = CD \times CB$, il suffit de prouver que deux triangles sont semblables. Lesquels ? ➔	Par exemple ABC, ADC

2) Pour les deux triangles trouvés, compléter le tableau suivant, où les points homologues seront écrits l'un en dessous de l'autre.

Points du premier triangle	A	B	C
Points du second triangle	D	A	C

3) Avec les seuls points nommés, écrire le nom d'un angle complémentaire à la fois à $\widehat{CAD}$ et à $\widehat{AOK}$. ➔	Par exemple $\widehat{OAK}$ ou $\widehat{OAD}$

4) Justifier la réponse au 3).

(CA) étant tangente à Γ en A (hypothèse) alors (th.1) $(OA)\perp(CA)$, et par suite (« évident ») $\widehat{OAD} + \widehat{DAC} = 90°$. K étant le milieu de [AD] (hypothèse) et AOD étant un triangle isocèle (évident), alors $(KA)\perp(AD)$, et par suite $\widehat{AOK} + \widehat{OAK} = 90°$. Or $\widehat{OAK} = \widehat{OAD}$ (th.2) et $\widehat{DAC} = \widehat{CAD}$. On en déduit : $\widehat{OAK} + \widehat{CAD} = 90°$. et $\widehat{AOK} + \widehat{OAK} = 90°$, donc (déf.) $\widehat{OAK}$ est complémentaire à la fois à $\widehat{CAD}$ et à $\widehat{AOK}$.	Th.1 : Si d est une droite tangente en A à un cercle de centre O, alors $(OA)\perp d$. Th.2 : Si A, B et C sont non alignés et si D est sur [AC], alors $\widehat{BAD} = \widehat{BAC}$. Déf. : deux angles sont complémentaires si la somme de leurs mesures en degré est égale à 90°.

5) Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AOK}$ ont même mesure. Citer (en les numérotant dans leur ordre d'utilisation) les théorèmes ou propriétés permettant de prouver cette affirmation.

Th.2
Th.3 : Dans tout triangle isocèle, la hauteur relative à la base est aussi bissectrice de l'angle au sommet.
Th.4 : La mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre interceptant le même arc.

6) En utilisant les données précédentes (de l'énoncé ou prouvées) et les résultats de cours, prouver alors que $AC^2 = CD \times CB$.

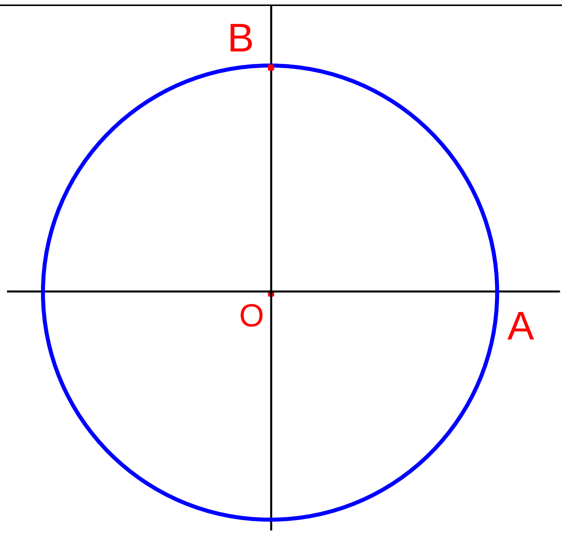
Par exemple. De 4) et 5), on déduit que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CAD}$ ont même complément $\widehat{OAK}$, donc (th.5) ils ont même mesure. Les triangles ABC et CAD ont un angle commun en C, et $\widehat{ABC} = \widehat{CAD}$, donc (th.6) les triangles ABC et CAD sont semblables. Par suite (th.7), à l'aide de 2), on obtient $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}$, soit (th.8) $AC^2 = CD \times CB$.	Th.5 : deux angles ayant même complément ont même mesure. Th.6 : Deux triangles ayant deux angles deux à deux de mêmes mesures sont semblables. Th.7 : Si deux triangles sont semblables, alors les rapports des côtés homologues sont égaux. Th.8 : th. dit du produit en croix.

Exemple 11

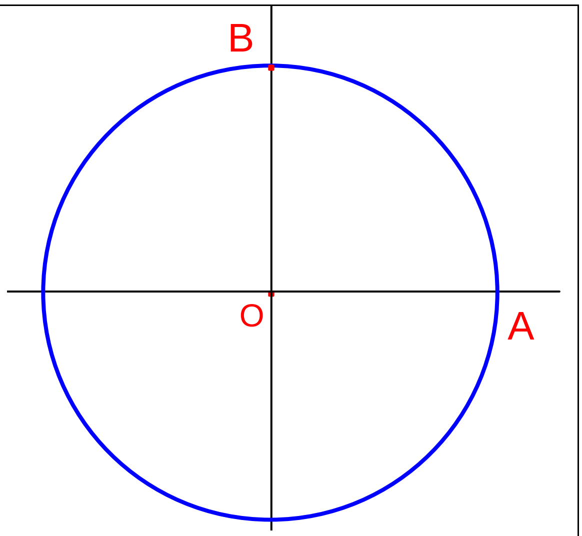
Question 1

Les nombres suivants sont représentés par des points notés U, V, etc. sur le cercle trigonométrique. Regrouper les nombres représentés par le même point : $\frac{-533\pi}{8}$; $\frac{32905}{8}\pi$; $\frac{25707\pi}{8}$; $\frac{27\pi}{8}$; $-\frac{4313\pi}{8}$

Question 2 Le point C est le symétrique de A par rapport à O. On sait qu'un point R est situé sur l'arc $\overset{\frown}{BC}$ (extrémités non comprises) ne contenant pas A et qu'il représente un nombre α négatif compris -4π et -2π.

<table>
<tr><td colspan="2">a) Placer un point R sur le cercle trigonométrique respectant les contraintes.</td><td rowspan="4">
</td></tr>
<tr><td colspan="2">b) Dans ce cas, dessiner le point P représentant le nombre $\pi - \alpha$, en laissant apparents les traits de construction et en portant les codages utiles à une bonne compréhension de la construction.</td></tr>
<tr><td>c) Ecrire le plus petit encadrement de α respectant l'énoncé.</td><td></td></tr>
<tr><td>d) Ecrire le plus petit encadrement de $\pi - \alpha$, respectant l'énoncé.</td><td></td></tr>
</table>

Question 3 Le point S est associé au nombre $\frac{11}{4}\pi$ et le point T est associé au nombre $-\frac{5\pi}{12}$. On s'intéresse à l'ensemble E de tous les nombres compris entre 0 et 2π et représentés sur l'arc de cercle $\overset{\frown}{ST}$ (extrémités comprises) ne contenant pas le point A.

<table>
<tr><td colspan="2">1) Dessiner E sur le cercle trigonométrique.</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>2) Ecrire trois nombres représentés sur l’arc de cercle $\overset{\frown}{ST}$ (extrémités comprises) ne contenant pas le point A, mais ne se trouvant pas dans E.</td><td></td></tr>
<tr><td>3) Ecrire l’ensemble E sous la forme d’un intervalle.</td><td></td></tr>
</table>

Question 4 Quelles sont les valeurs exactes de :

$\sin \frac{28072\pi}{3}$	$\cos \frac{-3199\pi}{6}$	Citer les résultats du cours utilisés pour trouver les réponses.

Question 5

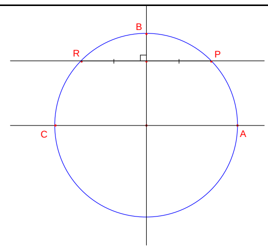
Ecrire toutes les solutions de l’équation $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.	

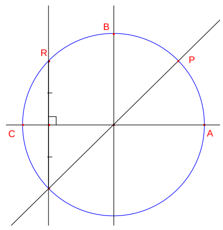
Les éléments de corrigé (de l’exemple 11)

Question 1

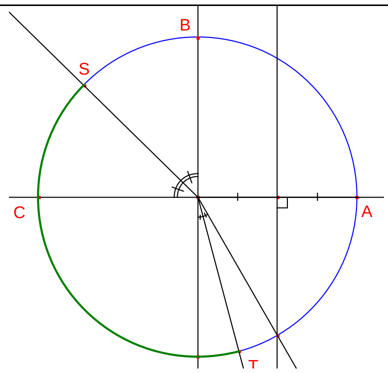
Les nombres suivants sont représentés par des points notés U, V, etc. sur le cercle trigonométrique. Regrouper les nombres représentés par le même point : $\frac{-533\pi}{8}$; $\frac{32905}{8}\pi$; $\frac{25707\pi}{8}$; $\frac{27\pi}{8}$; $-\frac{4313\pi}{8}$
$\frac{-533\pi}{8}$, $\frac{25707\pi}{8}$ et $\frac{27\pi}{8}$ sont représentés par un point U ; $\frac{32905}{8}\pi$ est représenté par V et V $\neq$ U ; $-\frac{4313\pi}{8}$ est représenté par un point W et W $\neq$ U et W $\neq$ V.

Question 2 Le point C est le symétrique de A par rapport à O. On sait qu'un point R est situé sur l'arc $\overset{\frown}{BC}$ (extrémités non comprises) ne contenant pas A et qu'il représente un nombre α négatif compris -4π et -2π.

<table>
<tr><td colspan="2">a) Placer un point R sur le cercle trigonométrique respectant les contraintes.</td><td rowspan="4">

ou

</td></tr>
<tr><td colspan="2">b) Dans ce cas, dessiner le point P représentant le nombre $\pi - \alpha$, en laissant apparents les traits de construction et en portant les codages utiles à une bonne compréhension de la construction.</td></tr>
<tr><td>c) Ecrire le plus petit encadrement de α respectant l'énoncé.</td><td>$-\frac{7\pi}{2} < \alpha < -3\pi$</td></tr>
<tr><td>d) Ecrire le plus petit encadrement de $\pi - \alpha$, respectant l'énoncé.</td><td>$\frac{9\pi}{2} > \pi - \alpha > 4\pi$</td></tr>
</table>

Question 3 Le point S est associé au nombre $\frac{11}{4}\pi$ et le point T est associé au nombre $-\frac{5\pi}{12}$. On s'intéresse à l'ensemble E de tous les nombres compris entre 0 et 2π et représentés sur l'arc de cercle $\overset{\frown}{ST}$ (extrémités comprises) ne contenant pas le point A.

<table>
<tr><td colspan="2">1) Dessiner E sur le cercle trigonométrique.
En vert, extrémités comprises</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>2) Ecrire trois nombres représentés sur l'arc de cercle $\overset{\frown}{ST}$ (extrémités comprises) ne contenant pas le point A, mais ne se trouvant pas dans E.</td><td>Par exemple : -5π ;
$-\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5}{6}\pi + 2\pi$</td></tr>
<tr><td>3) Ecrire l'ensemble E sous la forme d'un intervalle.</td><td>$E = \left[\frac{3\pi}{4};\frac{19\pi}{12}\right]$</td></tr>
</table>

Question 4 Quelles sont les valeurs exactes de :

$\sin\frac{28072\pi}{3}$	$\cos\frac{-3199\pi}{6}$	Citer les résultats du cours utilisés pour trouver les réponses.
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	Th. : pour tout réel x, sin (x + k×2π) = sin x et cos (x + k×2π) = cos x (k étant un entier relatif) Th. : pour tout réel x, sin (x + π) = - sin x et cos (x + π) = - cos x Th. : $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Question 5

Ecrire toutes les solutions de l'équation sin x = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.	$-\frac{\pi}{4}+2k\pi$; $-\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ avec k entier relatif.