Douce France, le monde entier nous l'envie : la suite !

Michel Bridenne, lycée G. Eiffel et Irem de Dijon

La première partie de cet article proposait un regard particulier sur des évaluations usuelles que sont les épreuves de mathématiques de baccalauréats, pour en signaler un certain flou, un écart évident entre des attentes supposées et la réalité de ce que d'aucun produit (évalué ou évaluateur).
Et l'article devait se conclure par cette deuxième partie : préciser un peu mieux ce qui est à évaluer, sans illusion excessive, et exemplifier.
Des impératifs éditoriaux –que la raison nous dit d'accepter– repoussent cependant l'exemplification à la prochaine Feuille de Vigne.
Patience, et bonne lecture.

Mots clés *: exercices, problèmes, évaluations, tâches, techniques, technologies, théories, contrat didactique.*

1. Ne nous y trompons pas.

C'est bien de l'ordinaire du quotidien d'un enseignant qu'il s'agit. Vous savez cet enseignant qu'on dénomme souvent « lambda », ou son dérivé quand on veut prétendre à un peu d'humour.
Les évaluations dont il est question ici, se restreignent à celles appelées « interrogations écrites », « devoirs surveillés », « devoirs en temps limité », voire « devoirs à la maison ».
Et on les trouve dans les pratiques enseignantes communes : elles apparaissent à, ou sont, des moments réputés opportuns et adaptés aux réalités particulières des classes. Importants sans doute[1].

La possibilité de l'arrêt des transactions didactiques n'étant pas à l'ordre du jour[2], une telle évaluation a pour fonction d'aider l'enseignant, à l'issue d'un certain processus, **à prendre une décision** quant à la façon de « poursuivre le cours ».

[1] Je parle des moments.
[2] Sauf en fin d'année scolaire dans notre système actuel.

Faudra-t-il par exemple revenir sur certains points étudiés ? Individualiser les interventions en utilisant différents dispositifs éventuellement disponibles (aide individualisée en seconde, etc) ?
Et cette décision est prise en s'appuyant sur des matériaux censés renseigner sur ce que l'on a nommé, et nomme encore parfois, suivant les lieux, le degré d'atteinte d'objectifs, le niveau de maîtrise dans l'utilisation de connaissances, de savoir-faire, ou autres niveaux de compétences des élèves du groupe concerné. On s'y perd un peu[3].
La littérature est abondante et diverse sur tous ces termes : je renvoie à la lecture d'Antoine Bodin qui les a spécifiés dans notre champ disciplinaire[4].
Ceci dit, à l'heure du socle commun de compétences[5], je ne fais pas vraiment tache.

Le côté global de la décision peut gêner, parce que trop général. J'avais fait allusion à un processus, revenons sur lui. En gros, le dit processus consiste à prendre, de fait, un ensemble de micro décisions (pour chaque élève, pour chaque réponse apportée à chacune des « questions » présentes dans l'évaluation concernée), puis à réunir l'ensemble de ces micros décisions pour aboutir à des décisions au niveau de chaque élève et au niveau de la classe.

Il est banal de déclarer que tout texte d'évaluation se résume alors, ***sous contraintes de consignes plus ou moins explicites*** (calculatrice autorisée, à la règle seule, formulaire autorisé, feuille de pompe interdite[6] ...), à un ensemble de **questions posées** (quelle est la nature de tel objet mathématique ?, quelles propriétés possèdent telle configuration ?, combien cette équation possède-t-elle de solutions ?, ..., quelle est la valeur maximale de ... ?, ...) ou d'**injonctions** (compléter, faire, cocher, démontrer, calculer ..., résoudre ...), relatives à un groupe d'énoncés d'exercices[7].
Pour la commodité du propos, j'associerai questions et injonctions sous le même vocable générique « **question** ». Et répondre à une question, c'est résoudre tout ou partie d'un exercice de mathématiques, ou encore un ensemble de « petits » exercices suivant la difficulté.

---

[3] Y. Chevallard parle d'un sémantisme profus.
[4] Bodin A. (1997), L'évaluation du savoir mathématique – Questions et méthodes. Recherches en Didactique des Mathématiques, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.
[5] L'INRP a créé un service de veille scientifique et technologique (VST) dont l'intérêt n'échappera à personne. L'un des dossiers de synthèse s'intitule « Standards, compétences de base et socle commun », accessible à l'adresse http://www.inrp.fr/vst/Dossiers/Standards/sommaire.htm. Le lecteur est vivement invité à consulter cette adresse.
[6] Ou non ! Comme certains l'ont lu ou le savent, il m'arrive de demander aux élèves de préparer une « feuille de pompe » - officiellement nommée « feuille d'aide » - qu'ils peuvent utiliser lors de l'évaluation ; seules contraintes : recto simple d'une feuille format A4, manuscrite.
[7] Comme déjà écrit : je ne distinguerai plus exercices et problèmes. Au moins un exercice.

Pour des raisons assez évidentes, pour chaque question, je n'emploierai plus le terme micro décision mais simplement décision.

Pour chaque question, la résolution de l'exercice qui lui est associé, aboutit à une réponse écrite (dessin, texte, ...) que j'appellerai **produit**.
Pour l'évaluateur, il s'agit alors, à partir des matériaux[8] que contiennent ces produits, de décider de la bonne ou de la mauvaise résolution de l'exercice. Certes, l'échelle est un peu restreinte : il serait plus exact de parler du degré de bonne[9] résolution de l'exercice.

En fait, il y a lieu de distinguer un produit attendu par le concepteur, intimement lié aux intentions de ce dernier[10], des produits obtenus qui sont symptomatiques d'actions d'élèves dans un contexte particulier.

Ceci étant dit, pour chaque question, pour chaque élève, la décision prise par l'évaluateur me semble rendre compte de l'écart entre le produit attendu[11] et le produit obtenu, sous contrainte, je l'ai dit, des consignes accompagnant la question. Ce n'est pas que négatif, l'évaluateur acceptant le plus souvent[12] certaines variabilités, et révisant au besoin son propre produit en l'enrichissant d'informations qu'il n'avait pas toujours prévues.

Quels que soient les écarts, il s'ensuit des mises en scènes didactiques particulières, significatives des décisions que l'enseignant a prises.

2. Les questions : qu'est-ce qu'elles mettent en jeu au sens de l'évaluation ?

L'examen de chaque question des d.l., d.s., e.l., ..., ou encore d.m.[13] que j'ai eus entre les mains[14], montre que résoudre l'exercice qui lui est lié suppose, d'une part, la reconnaissance du type d'exercice, d'autre part, la mobilisation et l'utilisation d'outils, de moyens ou de savoirs mathématiques, et la prise en compte des consignes associées (explicites ou non[15]), et, enfin, une présentation de tout ou partie de la résolution en accord avec les dites consignes (allant jusqu'à la validation des actions mathématiques).

---

[8] On parle d'indicateurs.
[9] Ou de mauvais. Mais dans ce cas, on introduit une péjoration regrettable.
[10] Intimement liées à ses rapports aux mathématiques, à l'institution, ...
[11] Il faudra revenir là-dessus, pour faire suite à ce qui était écrit dans la première partie de cet article.
[12] A quelques rares exceptions près.
[13] Dans l'ordre : devoir en temps limité, devoir surveillé, épreuve longue, devoir à la maison ...
[14] En xx années de « carrière », à raison de ... On ressent comme un coup de vieux, dans ces moments là. Et c'est pas fini.
[15] Les us et coutumes locales ou non peuvent être très présentes.

Des exemples (farfelus) que l'on peut imaginer, autour du même sujet ordinaire :
« Dans **R**, quel est le nombre de solutions de $x^2 - 3x - 4 = 0$? »
« Dans **R**, quel est le nombre de solutions de $x^2 - 3x - 4 = 0$? Expliquer la réponse. » « Dans **R**, quel est le nombre de solutions de $x^2 - 3x - 4 = 0$? Prouver l'affirmation. »
« Dans **R**, quel est le nombre de solutions de $x^2 - 3x - 4 = 0$? En démontrant d'abord que $x^2 - 3x - 4$ peut aussi s'écrire $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$, prouver l'affirmation. ».

Dans ces exemples, en ignorant les effets de contrat, les consignes déterminent des milieux mathématiques différents, et les produits attendus peuvent aller d'un nombre sec (2), à des preuves « dures », en passant par des explications de natures différentes.
Quant à l'évaluation proprement dite, en décidant du degré d'adéquation entre le produit attendu et le produit obtenu, elle prend position sur la façon de comprendre question et consignes, sur la pertinence des outils ou des savoirs mathématiques mobilisés, sur la maîtrise de leur utilisation dans cette situation, et éventuellement sur la qualité du discours mathématique explicatif.

Question, exercice, consignes et produit attendu, cernant l'objet de l'évaluation et caractéristiques des intentions du (des) concepteurs(s), me semblent pouvoir être analysés et construits à l'aide de la théorie anthropologique de Chevallard, notamment avec les notions de tâches et d'organisations mathématiques.

Un court rappel : en simplifiant[16], Chevallard[17], pour « préciser la notion de compétence », considère que l'enseignement a pour objectif de mettre en place, d'étudier et de maîtriser un certain nombre d'organisations mathématiques $(T, \tau, \theta, \Theta)$, où T est un type de tâches pouvant être traitées par les techniques τ, elles-mêmes validées par des discours ou énoncés θ qualifiés de technologies, ces dernières étant justifiées par des théories Θ.

L'idée que je retiens est donc que l'évaluation consiste à tester le degré de maîtrise d'organisations mathématiques. A quelques remarques près.

Les premières remarques concernent T et Θ dans une organisation mathématique $(T, \tau, \theta, \Theta)$. On n'a accès au type de tâches T qu'au travers certaines de ses tâches t_i : l'ensemble des t_i ne sera qu'un sous-ensemble de T, qu'il faut souhaiter assez « représentatif » de T.
Restons au niveau d'une classe de seconde. Par exemple, en demandant la résolution de l'équation $(3x + 7)(-5x + 6) = 0$ dans **R**, je ne peux pas prétendre

[16] Voir les notes de la première partie de cet article.
[17] Y. Chevallard (1997), Omettre ou transmettre ? Les choix curriculaires et leurs enjeux, Ecole d'été.

avoir testé sur la « résolution des équations polynomiales », fussent-elles du second degré.

De même, et toujours à ce niveau de seconde, je puis être amené à demander l'explicitation du théorème du produit nul – un exemple de θ – pour valider une technique τ de résolution, mais il ne m'arrive pas de demander la justification de ce dernier : Θ reste dans l'ombre.

Les tests sur les degrés de maîtrise de la partie (θ, Θ)[18], en tant que telle, ne semblent être abordés que dans certaines classes à certains niveaux[19].

Ce qui semble réduire le test sur le degré de maîtrise de l'organisation mathématique $(T, \tau, \theta, \Theta)$, en espérant que les t_i sont pertinents, à des tests sur des $(t_i, \tau, \theta[, \Theta])$[20].

Les deuxièmes remarques sont issues d'un constat, d'une réalité tenace. Il nous faut aller plus loin, et réduire encore beaucoup. Perdre quelques illusions, encore.

Supposons que nous ayons, pour T, quelques t_i sous la main.

Il semblerait alors que tester le degré de maîtrise des $(t_i, \tau, \theta[, \Theta])$, revienne à tester le degré de maîtrise de $(t_i, \tau_{ij}, \theta_{ijk}[, \Theta])$, les τ_{ij} permettant, d'une manière ou d'une autre, de traiter t_i, et les θ_{ijk} validant les τ_{ij}.

C'est en tous cas la forme, que je qualifie d'illusoire, que l'on rencontre le plus souvent dans beaucoup de textes d'évaluations.

Ce qui est illusoire c'est le produit attendu : il relève du fantasme, et les faits mettent à mal cette regrettable illusion.

J'appelle « faits » ce que produisent des enseignants patentés, certifiés conformes : ce que j'avais essayé de montrer dans la première partie de l'article avec les épreuves de baccalauréat.

Reprenons un autre exemple[21], toujours de la classe de seconde.

Enoncé de l'évaluation

> SABCD désigne une pyramide dont la base ABCD est un quadrilatère. Les points I, J et K sont respectivement sur les arêtes [SA], [SB] et [SC]. On suppose de plus que les droites (IJ) et (KJ) ne sont pas parallèles au plan (ABC).
> **1.** Justifier que les droites (IJ) et (KJ) interceptent chacune le plan (ABC).

---

[18] Nommée bloc technologico-théorique par Y. Chevallard.

[19] J'ai signalé dans la première partie de cet article que les ROC du baccalauréat S me semblaient, elles, se rapporter au bloc technologico-théorique. Certaines épreuves des CAPES et d'agrégations sont également concernées. Et pour les anciens, ils pourront se rappeler les épreuves des baccalauréats avant 1966.

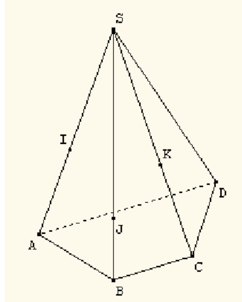
[20] Cette notation pour indiquer que Θ, certes présent pour l'enseignant, ne l'est pas explicitement pour l'élève.

[21] Dû à un collègue (que je remercie très sincèrement de m'avoir autorisé à utiliser son travail).

2. On note alors M le point d'intersection de (IJ) avec le plan (ABC) et N celui de la droite (KJ) avec le plan (ABC).

a. Construire sur la figure de l'énoncé[22] les points M et N. Justifier la construction de M.

b. Déterminer l'intersection des plans (IJK) et (ABC) en justifiant votre réponse.
Représenter sur la figure cette intersection.



Rapide analyse, et commentaires.
Le support de l'évaluation fait apparaître deux tâches : l'une (t_1) est <u>un</u> problème d'intersection de deux plans dans l'espace (type de tâches T_1), et l'autre (t_2) est <u>un</u> problème de la représentation de cette intersection dans une perspective cavalière (second type de tâches T_2). Remarquons que la seconde tâche t_2, liée dans l'énoncé à la première t_1, est évocatrice de technique(s) pour la résolution des deux tâches. La seconde tâche t_2 n'est cependant pas nécessaire pour résoudre la première : (MN) est l'intersection des plans (IJK) et (ABC).
De plus, pour des raisons que l'on devine facilement, ces deux tâches ont été elles-mêmes subdivisées.
Le dessin qui accompagne l'énoncé, est, implicitement, représenté en perspective cavalière. Il est porteur d'informations.
Les techniques de résolution oscillent entre l'emploi d'implications et l'utilisation de la perspective cavalière : elles sont validées par les énoncés usuels (règles d'incidence dans l'espace, positions de droites et de plans dans l'espace, règles de la perspective cavalière ...).

Le texte de l'évaluation organise à la fois la façon de résoudre les deux tâches, et annonce ce qu'il faudra produire, le produit attendu donc :

dans 1) : une justification, c'est-à-dire ici un (t_{11}, τ_{11j}, θ_{11jk}[, Θ]) adapté à une (sous-)tâche t_{11} de t_1

dans 2) a) un dessin (construire), c'est-à-dire ici un résultat associé à un (t_{21}, τ_{21m}) adapté à une (sous-)tâche t_{21} de t_2, et une justification, c'est-à-dire ici un (t_{12}, τ_{12j}, θ_{12jk}[, Θ]) adapté à une (sous-)tâche t_{12} de t_1

dans 2) b) une justification, c'est-à-dire ici un (t_{13}, τ_{13j}, θ_{13jk}[, Θ]) adapté à une (sous-)tâche t_{13} de t_1, et un dessin c'est-à-dire ici un résultat associé à un (t_{22}, τ_{22m}) adapté à une (sous)tâche t_{22} de t_2.

Sur cinq produits attendus, trois sont des (t, τ, θ[, Θ]).
C'est là où se situent en partie l'illusion et des nécessités conséquentes. Les évaluations ont ceci de spécifique, qu'il ne s'agit pas seulement de résoudre (où je puis me permettre beaucoup de raccourcis, d'allusions, d'ellipses, ...) mais suppose

[22] Cette figure, reproduite ci-contre, est jointe au devoir (avec plus de place que dans cette page).

aussi que l'on sait montrer que l'on sait[23], que l'on sait aussi ne pas insister sur les évidences mais rendre évident ce qui ne l'était pas.

Un produit attendu de la forme (t_i, τ_{ij}, θ_{ijk}[, Θ]) est souvent difficile et long à mettre en place : développer une technique et l'accompagner, par écrit, des éléments justificatifs, ce n'est pas rien.
Il suffit encore une fois, pour s'en convaincre, de lire les corrigés ou autres éléments de corrigés que nous proposons, les uns et les autres, à la suite de nos ds, dl ou dm, pour se rendre compte que … ce n'est pas fait. Si la partie τ_{ij} est souvent développée, la partie θ_{ijk} est non moins souvent allusive, voire absente. Quelles que soient les présentations choisies.
Il y a quelque chose de contractuel, inévitablement.

Se pose la question suivante : s'il s'agit de tester le degré de maîtrise d'un (t, τ, θ[, Θ]), comment le faire si les θ sont absents ? Au mieux, si les τ sont bien utilisées, peut-on dire parler de présomption.
Alors les décisions : maîtrise ou pas ? degré de maîtrise ? peut-on maîtriser une technique sans avoir conscience de la technologie qui la valide[24] ? … degré de maîtrise de quoi ? qu'est-ce qui est finalement, évalué ?

Le concepteur de l'évaluation a lui-même réalisé un corrigé, que je reproduis ci-dessous. Il ne déroge pas aux habitudes.

Eléments de corrigé.

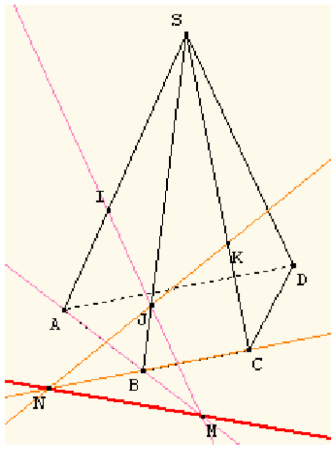
SABCD désigne une pyramide dont la base ABCD est un quadrilatère. Les points I, J et K sont respectivement sur les arêtes [SA], [SB] et [SC].
On suppose de plus que les droites (IJ) et (KJ) ne sont pas parallèles au plan (ABC).
1. Les droites (IJ) et (KJ) sont deux droites non parallèles au plan (ABC) [par hypothèse] donc d'après le cours, elles interceptent chacune ce plan.
2. On note alors M le point d'intersection de (IJ) avec le plan (ABC) et N celui de la droite (KJ) avec le plan (ABC).

[23] Lors d'une « colle », j'ai posé la question de cours suivante : sachant que a et L sont des réels et f une fonction définie sur **R**, prouver que si une suite u_n converge vers a et si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.

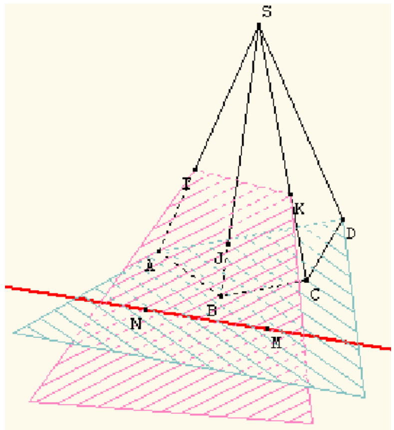
Un étudiant a écrit : u_n converge vers a et $\lim_{x\to a} f(x) = L$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim_{x\to a} f(x) = L$ d'où $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.

Je ne me suis pas satisfait de sa réponse, et je l'ai invité à me montrer un peu plus.

[24] Oui, bien sûr, comme on peut utiliser une technologie sans être très au point sur la théorie qui la justifie.



a. Les droites (IJ) et (AB) sont deux droites du plan (SAB) : elles sont donc parallèles ou sécantes dans ce plan.
Comme (IJ) et (AB) ne sont pas parallèles, (IJ) et (AB) sont sécantes.
Ce point d'intersection est alors sur (IJ) et comme il appartient à (AB), il est dans (ABC) : c'est donc le point M, intersection de (IJ) et (ABC).
Remarque : le point N est obtenu de la même manière, comme intersection des droites (JK) et (BC).



b. **P**ar hypothèse, M est sur (IJ) et (ABC) : comme il est sur (IJ), il est dans le plan (IJK).
Ainsi, M appartient à (IJK)$\cap$(ABC).
Par hypothèse, N est sur (JK) et (ABC) : comme il est sur (JK), il est dans le plan (IJK).
Ainsi, N appartient à (IJK)$\cap$(ABC).
Ces deux plans sont sécants en au moins deux points, et comme ils sont distincts, ils sont sécants en une droite qui passe par M et N : c'est donc la droite (MN) l'intersection des deux plans.

Quelques remarques à la suite de ces éléments de corrigé.
Dans 1), il est fait allusion au cours, précisément pour justifier.
Dans 2)a), concernant la justification, rien n'est dit sur « (IJ) dans le plan (ABC) », pas plus que sur « (IJ) et (AB) ne sont pas parallèles », et aucun énoncé de propriété ou de théorème ne vient étayer la technique développée.
De même dans 2)b).

On pourrait discuter longtemps sur le fait de savoir si ce qui est omis relève d'évidences, mais là n'est pas la question.
A mon sens, cela conduit à au moins une nécessité : distinguer légèrement les tâches liées aux résolutions de celles liées aux évaluations.

Pour insister sur une deuxième la nécessité, si ce n'était pas assez clair (et c'est un point sur lequel j'essaie de travailler) : il convient de mieux cerner et distinguer les tâches d'évaluation que sont :

- produire un résultat qui sera indicateur de l'utilisation d'une τ_{ij} – éventuellement validée de manière privée – associée à un (t_i, τ_{ij}), sans exhiber τ_{ij},
- produire une τ_{ij} associée à un (t_i, τ_{ij}),
- produire des (θ_{ijk}[, Θ]) à propos d'un (t_i, τ_{ij}),
- produire un (t_i, τ_{ij}, θ_{ijk}[, Θ]).

Concernant ma pratique, en classe de seconde par exemple, beaucoup des évaluations en temps limité se focalisent sur la partie (T, τ)[25] (les deux premiers points), dans une moindre mesure sur quelques technologies θ se rapportant à des (t_i, τ_{ij}) proposées, puis, beaucoup plus modérément à des (t_i, τ_{ij}, θ_{ijk}[, Θ]).
Un devoir à la maison est souvent plus preneur de (t_i, τ_{ij}, θ_{ijk}[, Θ]).

Les troisièmes remarques ont trait à la difficulté, peut-être, à cerner certaines organisations mathématiques. Certaines tâches, qui me semblent faire partie intégrante des activités mathématiques « usuelles », se prêtent encore mal à l'analyse suivant les techniques, technologies et théories, ou elles restent au stade de généralités.
Je pense par exemple à des tâches telles que « reconnaître un type de tâche », « modéliser », « analyser un texte mathématique », « critiquer un texte mathématique », etc …
Elles me semblent devoir être prises en charge dans les évaluations. En cas de besoin, j'utiliserai la notation $\tilde{t}$ pour y faire référence.

Les dernières remarques ne sont qu'un rappel inutile qui resterait valable en dehors des évaluations.
Suivant que c'est l'enseignant ou que c'est la personne à titre privé qui produit, (t, τ, θ, Θ) peut être très différent.

3. Résumé et pistes de mises en oeuvre.

Du côté de l'enseignant, pour une question particulière, évaluer signifie prendre une décision quant au degré de maîtrise, dans des conditions particulières imposées (durée, matériels autorisés, « méthode », …), de tout ou partie d'une organisation mathématique (t, τ, θ[, Θ]) ou associée à une tâche $\tilde{t}$.
Au-delà des tâches mathématiques, les tâches relatives à l'évaluation aboutissent à des productions (attendues de la part du concepteur, effectives de la part de l'évalué).
Les prises de décision ne s'exercent que sur des productions effectives.
Il y a donc déjà lieu, autant que faire se peut,

- de préciser le produit attendu
    - résultat qui sera indicateur de l'utilisation d'une τ, sans exhiber τ,
    - une τ « obligée » ou choisie librement associée à une t,
    - des (θ[, Θ]) à propos d'un (t, τ),
    - un (t, τ, θ[, Θ]),
    - …

[25] Appelé bloc pratico-technique par Chevallard.

- de faire en sorte que la partie de l'organisation mathématique de la tâche soit importante dans cette organisation[26], et que la tâche dont elle dépend relève d'un type de tâches significatif, notamment assez représentatif des activités mathématiques du corpus[27] concerné,
- de veiller à ce que les productions attendues soient significatives de la réalisation souhaitée de la partie de la tâche concernée. On peut certainement intervenir, à l'aide de consignes particulières et d'autres moyens (feuilles réponses imposant des limitations d'espace par exemple) pour préciser la nature et la forme des productions attendues[28].

Du côté de l'évalué, répondre à une question dans une évaluation signifie
- résoudre tout ou partie d'un exercice, c'est-à-dire exécuter tout ou partie d'une tâche t d'un certain type de tâches T (ou d'une tâche $\tilde{t}$) suivant des conditions imposées (durée, matériels autorisés, « méthode », …)
- **et** produire un résultat en accord avec les consignes de présentation des productions.

4. Mises en œuvre sur quelques exemples autour du programme de seconde.

Exemple 1 : problèmes d'intersection en géométrie dans l'espace.

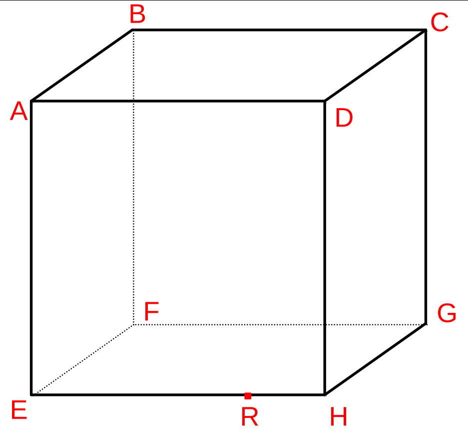
Il est divisé en trois parties :
1. un problème d'intersection d'une droite et d'un plan : la production attendue est un dessin (codé !) complétant un dessin en perspective cavalière. Je suppose donc que le codage et le dessin seront des indicateurs fiables de (t, τ), techniques adaptées (tracés en perspectives cavalières).
2. un problème de parallélisme de droites dans l'espace : la production attendue est l'énoncé de propriétés validant une affirmation, c'est-à-dire l'énoncé de θ validant (t, τ). On peut remarquer que le dessin n'intervient pas dans cette production.
3. un problème d'intersection (concourance) de droites dans l'espace : la production attendue, une démonstration, est cette fois un (t, τ, θ), laissant le choix de τ et de θ.

[26] Il n'est pas question d'ignorer la variabilité des pratiques et des points de vue, il n'est pas non plus question, par exemple, d'accepter n'importe quelle marginalité dans le contexte de la classe.

[27] C'est-à-dire le contenu du programme de la classe, les commentaires, et autres informations (motivations, références, …).

[28] Elles spécifient donc les productions. Cependant il ne s'agit pas de créer de nouvelles illusions …

L'énoncé[29] (exercice 1)

1) Sur la feuille réponse, ABCDEFGH est une représentation en perspective cavalière d'un cube d'arête 10 cm, et le point R est sur l'arête [EH]. On appelle d la droite parallèle à (BH) et passant par R. On appelle J le second point d'intersection de d et des faces du cube.	

Placer J sur le dessin, en faisant apparaître les traits nécessaires à sa construction et les conventions usuelles permettant de comprendre la construction (par exemple : codage de la perpendicularité ou des angles droits, angles égaux, segments de même longueur, couleur identique pour des points coplanaires, ...).

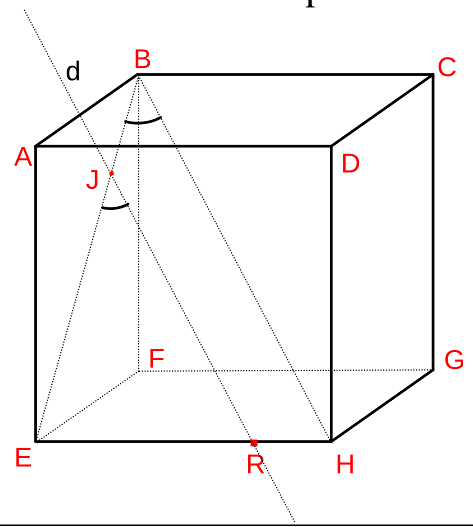
N.B. : aucune justification n'est à produire.

2) On coupe le cube ABCDEFGH par le plan (BDR), et on obtient alors deux solides dont l'un est appelé ABDRES, le point S étant situé sur l'arête [EF] du cube. Citer ci-contre le(s) théorème(s) permettant d'affirmer que (RS) est parallèle à (BD). **N.B. : on ne demande pas de présenter une démonstration.**	.

3) Démontrer que, quand R n'est pas le point H, les droites (AE), (BS) et (DR) sont concourantes (on dit aussi qu'elles ont un et un seul point commun).

[29] La présentation retenue ici n'est pas celle distribuée aux élèves : pour les élèves, la feuille réponse est dissociée de l'énoncé proprement dit.

Les éléments de corrigé[30] (de l'exercice 1)

1) L'intersection se réduit au point J.  	2) Th.1 : deux plans distincts et sécants se coupent suivant une droite. Th.2 : si deux plans sont distincts et parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre ; de plus les intersections sont des droites parallèles.

3) Démonstration de : R n'étant pas le point H, les droites (AE), (BS) et (DR) sont concourantes (on dit aussi qu'elles ont un et un seul point commun).

A, E, H, D et R sont sur le plan P contenant la face AEHD, donc (th.3) les droites (AE) et (DR) sont dans P. Le point R étant distinct de H, (propriétés des faces d'un cube et axiome d'Euclide) (AE) et (DR) ne sont pas parallèles et sont donc sécantes en un point qu'on nomme I. Le point I est sur (DR) et sur (AE) donc (th.3) dans le plan (BDR) et dans le plan (AEB), il est donc (th.1) sur la droite d'intersection des plans (BDR) et (AEB). Or B est un point commun des (BDR) et (AEB). De plus S, par construction, est sur (BDR) et sur [EF] donc (th.3) sur (AEB) ; c'est donc un point commun des plans (BDR) et (AEB). Par suite (th.1) (BS) est la droite d'intersection des plans étant sur l'intersection des plans (BDR) et (AEB). Par suite, I est sur (BS). Les droites (BS), (AE) et (DR) sont donc concourantes en I.	Th.3 : Si un plan contient deux points distincts, alors il contient la droite passant par ces deux points.

Exemple 2 : résolutions d'une même équation de type f(x) = λ, où f est une fonction définie sur un intervalle [a ; b] et λ une constante.

Il a été construit pour suivre l'énoncé de l'exercice 1, en prenant un support dans la géométrie dans l'espace (calcul de volumes). Le support peut être le garde-fou servant à rejeter des candidates-solutions clairement fausses.

[30] Ce sont donc des exemples de produits attendus. On revient à l'idée d'une certaine variabilité à accepter. Incontournable.

Il est divisé en quatre parties, correspondant à quatre façons, quatre techniques de résolution de l'équation :

1. une première technique de résolution, partiellement exposée, consiste à supposer la fonction f affine sur un intervalle, et à utiliser la proportionnalité des accroissements de f sur cet intervalle ; la technique n'est pas menée à son terme. La production attendue est la conjonction d'une fin de (t, τ, θ) et d'un résultat numérique sous une forme imposée ; elle passe par exemple par une technique expliquée ou validée de « produit en croix ». Une seconde tâche me semble ici présente, et elle entre dans les tâches que j'ai notées $\tilde{t}$ **: s'approprier un texte mathématique exposé par autrui, et y reconnaître les savoirs et techniques utilisés**.
2. la seconde partie concerne une technique graphique de résolution de l'équation, la représentation graphique étant à préciser dans un dessin. C'est la question 5) : c'est le résultat de l'utilisation d'une technique qui est attendu. Cette question est précédée de 4 questions : dans chaque cas, la production attendue est un résultat de l'emploi de techniques. Il faut noter que la calculatrice peut faire partie des outils disponibles : aucune interdiction n'a été formulée.
3. la troisième partie concerne une technique de résolution par encadrements successifs : les productions attendues sont des nombres écrits sous une forme particulière. La calculatrice a été clairement sollicitée.
4. la quatrième partie propose une partie d'une technique algébrique de résolution de l'équation, en fait des écritures équivalentes de l'équation ; deux produits sont attendus. On retrouve des tâches $\tilde{t}$ (appropriation d'une technique développée par autrui, va et vient entre modèle mathématique et réalité ...). Les produits attendus sont cette fois « des » résultats numériques pour le premier, des technologies pour le second.

L'énoncé[31] (exercice 2)

Dans la suite, on veut savoir où placer le point R sur l'arête [EH] pour que le solide ABDRES de l'**exercice 1** ait un volume de 250 cm^3, et on envisage plusieurs méthodes pour donner une réponse à ce problème.

I. Méthode 1 : des patrons.

De l'imagination. Un élève patient a construit 9 patrons, correspondant à des valeurs différentes de ER, en laissant une face ouverte pour chaque solide construit.

[31] La présentation retenue ici n'est pas celle distribuée aux élèves : pour les élèves, la feuille réponse est dissociée de l'énoncé proprement dit.

En notant le volume d'eau nécessaire pour remplir l'intérieur de chaque solide, et en arrondissant au cm et à la dizaine de cm^3 les plus proches, il a obtenu le tableau ci-dessous :

mesure de ER (en cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
volume d'eau mesuré (en cm^3)	180	210	230	260	290	330	370	410	450

Puis il fait le raisonnement suivant : "On remarque que 250 est entre 230 et 260. D'autre part, pour un accroissement d'une unité de ER, il y a un accroissement de 30 unités pour les volumes, donc pour un accroissement 20 unités sur le volume il y aurait un accroissement de x unités de ER, d'où le tableau de proportionnalité :

1	x
30	20

."

En supposant ce raisonnement acceptable, quelle valeur de ER obtient-on ? Expliquer la réponse. La valeur de ER sera écrite sous la forme d'un quotient irréductible de deux entiers.

II. Méthode 2 : vers une résolution graphique.

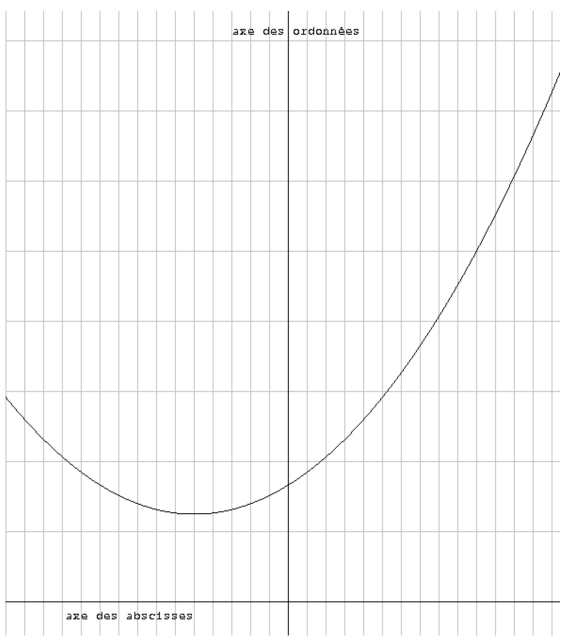
En fait, le volume du solide ABDRES est fonction de ER.

Dans la suite on note v le volume (exprimé en cm^3) du solide ABDRES, et t le mesure de ER (en cm).

La formule permettant de calculer v connaissant t est : $v = \frac{5}{3}\left(100 + 10t + t^2\right)$.

Le dessin de la feuille-réponse contient la représentation graphique de la fonction décrite précédemment, avec les conventions d'usage. Le quadrillage correspond à des graduations d'une unité sur l'axe des abscisses.

1) Dessiner en rouge sur ce dessin, l'ensemble T de définition de cette fonction, avec les conventions usuelles.
2) Dessiner en vert sur ce dessin, la représentation graphique de cette fonction.
3) Dessiner en bleu sur ce dessin, l'ensemble V des valeurs possibles prises par la variable v, avec les conventions usuelles.



4) Ecrire les ensembles T et V sous forme d'intervalles, les bornes devant être écrites sous forme de nombres rationnels.	
5) Donner une réponse au problème par une méthode graphique, en faisant apparaître sur le graphique de la feuille réponse, tous les traits utiles à une bonne compréhension de la démarche.	

III. Méthode 3 : une méthode d'approximations successives.

On se propose d'améliorer la méthode 2 en utilisant la calculatrice, par une méthode dite d'approximations successives.

1) Ecrire un tableau de valeurs en allant de 1 en 1 pour les valeurs de t à partir de 0. Les valeurs de v seront des **troncatures** à la deuxième décimale.

2) Compte tenu du tableau de valeurs, valeurs entières consécutives entre lesquelles choisir t pour que v soit égal à 250.	

3) Ecrire un tableau de valeurs de la fonction avec un pas 0,1 pour les valeurs de t comprises entre les valeurs trouvées en 2). Les valeurs de v seront des **troncatures** à la deuxième décimale.

4) On prolonge la procédure développée en 1) 2) et 3). Ecrire un intervalle [a ; b] dans lequel choisir t pour obtenir $v = 250$, avec $b - a = 0{,}001$.	

IV. Méthode 4 : une méthode algébrique.

On envisage ici une résolution algébrique du problème. En seconde il ne s'agit pas de mener à bien, seul, cette méthode, mais il faut être capable de la valider (expliquer pourquoi elle est mathématiquement exacte).

La résolution algébrique s'appuie sur des transformations d'écritures, en partant de $\frac{5}{3}\left(100 + 10t + t^2\right) = 250$, jusqu'à obtenir une écriture permettant de donner les solutions de l'équation.

On obtient les équivalences suivantes :

$$\frac{5}{3}\left(100+10t+t^2\right) = 250$$

$$\downarrow\uparrow \qquad \text{a)}$$

$$100 + 10t + t^2 = 150$$

$$\downarrow\uparrow$$

$$t^2 + 10t + 25 + 75 = 150$$

$$\downarrow\uparrow \qquad \text{b)}$$

$$(t + 5)^2 = 75$$

$$\downarrow\uparrow$$

$$(t + 5)^2 - 75 = 0$$

$$\downarrow\uparrow \qquad \text{c)}$$

$$(t+5)^2-\left(5\sqrt{3}\right)^2=0$$

$$\downarrow\uparrow \qquad \text{d)}$$

$$\left(t+5-5\sqrt{3}\right)\left(t+5+5\sqrt{3}\right)=0$$

$$\downarrow\uparrow \qquad \text{e)}$$

$$t+5-5\sqrt{3}=0 \quad \text{ou} \quad t+5+5\sqrt{3}=0$$

$$\downarrow\uparrow$$

$$t=-5+5\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad t=-5-5\sqrt{3}$$

1) Ecrire toutes les solutions exactes du problème posé, à savoir les valeurs de ER pour obtenir le volume de ABDRES égal à 250.	

2) Ecrire sur la feuille - réponse, les propriétés, formules ou théorèmes assurant l'exactitude des transformations faites en a), b), c), d) et e).

a)	
b)	
c)	
d)	

e)	

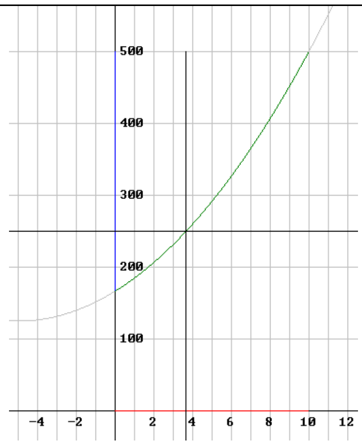
Les éléments de corrigé[32] (de l'exercice 2)

I. Méthode 1 : des patrons

En expliquant la réponse, valeur de ER obtenue par l'élève. Le résultat sera écrit sous la forme d'un quotient irréductible de deux entiers.

Du tableau de proportionnalité $\begin{array}{c\|c} 1 & x \\ \hline 30 & 20 \end{array}$ on obtient (th. dit du produit en croix) 30x = 20 donc x = 2/3. Par suite, ER étant entre 3 et 4, ER = 3 + 2/3, c'est-à-dire ER = 11/3.

II. Méthode 2 : vers une résolution graphique.

1) 2), et 3) Dessins en rouge sur ce dessin, de l'ensemble T de définition de cette fonction, avec les conventions usuelles, en vert sur ce dessin, la représentation graphique de cette fonction, et en bleu sur ce dessin, l'ensemble V des valeurs possibles prises par la variable v, avec les conventions usuelles.	
4) Ecrire les ensembles T et V sous forme d'intervalles, les bornes devant être écrites sous forme de nombres rationnels.	T = [0 ; 10] $V = \left[\dfrac{500}{3} ; 500\right]$
5) Donner une réponse au problème par une méthode graphique, en faisant apparaître sur le graphique de la feuille réponse, tous les traits utiles à une bonne compréhension de la démarche.	(le dessin est à compléter !) On lit que la solution est environ 3,6 (ou 3,7 ...).

III. Méthode 3 : une méthode d'approximations successives.

On se propose d'améliorer la méthode 2 en utilisant la calculatrice, par une méthode dite d'approximations successives.

[32] N.B. : comme pour toute évaluation, ce sont des exemples de produits attendus. On revient à l'idée d'une certaine variabilité à accepter. Incontournable.

1) Tableau de valeurs en allant de 1 en 1 pour les valeurs de t à partir de 0. Les valeurs de v seront des **troncatures** à la deuxième décimale.

Valeurs de t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeurs de v	166,66	185	206,66	231,66	260	291,66	326,66	365	406,66	451,66	500

2) Compte tenu du tableau de valeurs, valeurs entières consécutives entre lesquelles choisir t pour que v soit égal à 250.	3 et 4

3) Tableau de valeurs de la fonction avec un pas 0,1 pour les valeurs de t comprises entre les valeurs trouvées en 2). Les valeurs de v seront des **troncatures** à la deuxième décimale.

Valeurs de t	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
Valeurs de v	231,66	234,35	237,06	239,81	242,6	245,41	248,26	251,15	254,06	257,01	260

4) On prolonge la procédure développée en 1) 2) et 3). Ecrire un intervalle [a ; b] dans lequel choisir t pour obtenir v = 250, avec b – a = 0,001.	[3,66 ; 3,661]

IV. Méthode 4 : une méthode algébrique.

1) Ecriture de toutes les solutions exactes du problème posé.	$-5+5\sqrt{3}$

2) Propriétés, formules ou théorèmes[33] assurant l'exactitude des transformations faites en a), b), c), d) et e).

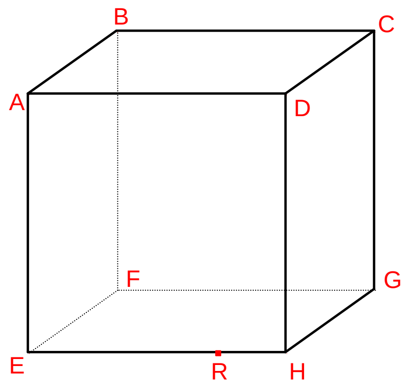
a)	Th.1 : (avec b non nul) $\frac{a}{b}c = \frac{ac}{b}$ Th.2 : (avec b non nul) $\frac{a}{b} = c \leftrightarrows a = bc$
b)	Th.3 : $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ Th.4 : $a = b \leftrightarrows a - c = b - c$
c)	Th.5 : (avec a positif ou nul) $a = \left(\sqrt{a}\right)^2$; Th.6 : $(ab)^2 = a^2b^2$
d)	Th.7 : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
e)	Th.8 : (dit du produit nul) $ab = 0 \leftrightarrows a = 0$ ou $b = 0$.

Exemple 3 : un devoir à la maison consistant à établir une formule.

Ce devoir à la maison peut faire suite aux évaluations 1 et 2 ci-dessus.

[33] On pourra noter qu'une convention est ici présente : l'universalité est supposée, et n'apparaissent que les éventuelles restrictions. Us et coutumes.

Le dessin ABCDEFGH ci-contre est une représentation en perspective cavalière d'un cube d'arête 10 cm, et le point R est sur l'arête [EH].
On coupe le cube par le plan (BDR), et on obtient alors deux solides dont l'un est appelé ABDRES, le point S étant situé sur l'arête [EF] du cube.
Le volume du solide ABDRES est fonction de ER.
Dans la suite on note v le volume (exprimé en cm^3) du solide ABDRES, et t le mesure de ER (en cm).
Sur feuille, pour le ..., établir la formule :



$$\text{(pour t dans [0 ; 10]) } v = \frac{5}{3}\left(100 + 10t + t^2\right).$$

Il me semble clair qu'ici nous nous situons sur des (t, τ, θ), chaque t étant à identifier, et pas tout à fait identiques suivant que le devoir suit ou non les évaluations.

5. *Pour conclure ... provisoirement.*

On trouvera, dans le prochain numéro (le 108), d'autres exemples, variés mais sans commentaires, ou plutôt laissant aux lecteurs le soin de faire tous les commentaires qu'ils souhaitent.

Bien évidemment, en attendant, j'aurais plaisir à lire toute suggestion, toute critique constructive, toute idée et toute proposition de devoir.

Le taux d'erreur est rarement nul, et le lecteur voudra bien admettre que si erreur il y a, elle est conséquente d'un bogue (cervical, neuronal ou au niveau des doigts), et je remercie par avance quiconque me signalera tel ou tel lapsus.

A suivre ... bientôt.