Chenilles, papillons, sphinx et autres mammifères

Michel LAFOND

Vous avez sûrement entendu parler du "théorème du papillon". Or ce genre de papillon a fait des petits, car sous ce nom, on trouve maintenant plusieurs théorèmes qui ont en commun une figure plane évoquant vaguement un papillon.

Comme pour le rallye mathématique de Bourgogne, il semble y avoir une version collèges et une version lycées.

1. VOICI D'ABORD UN PETIT THEOREME DU PAPILLON, QU'ON APPELLERA DONC

Théorème de la chenille :

Si ABCD est un quadrilatère concave tel que AB et CD se coupent en O, alors les triangles AOD et COB ont même aire si et seulement si AC est parallèle à BD.

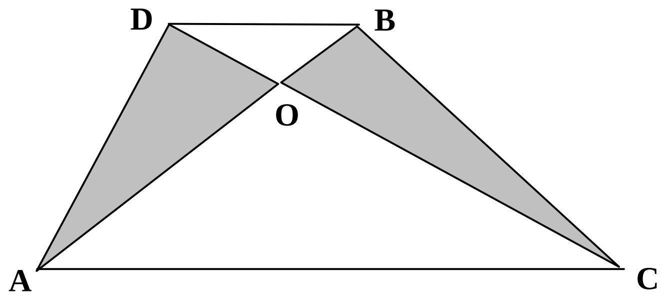

Figure 1

La démonstration est rapide : (Figure 1 ci-dessus)
Les triangles AOD et COB ont des aires égales si et seulement si les triangles ABD et CDB ont des aires égales, ce qui a lieu (à cause de leur base commune BD) si et seulement si leurs hauteurs issues de A et de C sont égales, c'est-à-dire si et seulement si AC est parallèle à BD.

2. L'ENONCE QUE JE CONSIDERE COMME LE "VRAI" THEOREME DU PAPILLON EST : (Figure 2)

Théorème du papillon : (Figure 2)

Si dans un cercle, AB est une corde de milieu I, et si CD et EF sont deux autres cordes passant par I, alors :
Aile 1 : Si FC et DE coupent AB respectivement en M et N alors I est milieu de MN.
Aile 2 : Si FD et EC coupent AB respectivement en P et Q alors I est milieu de PQ.

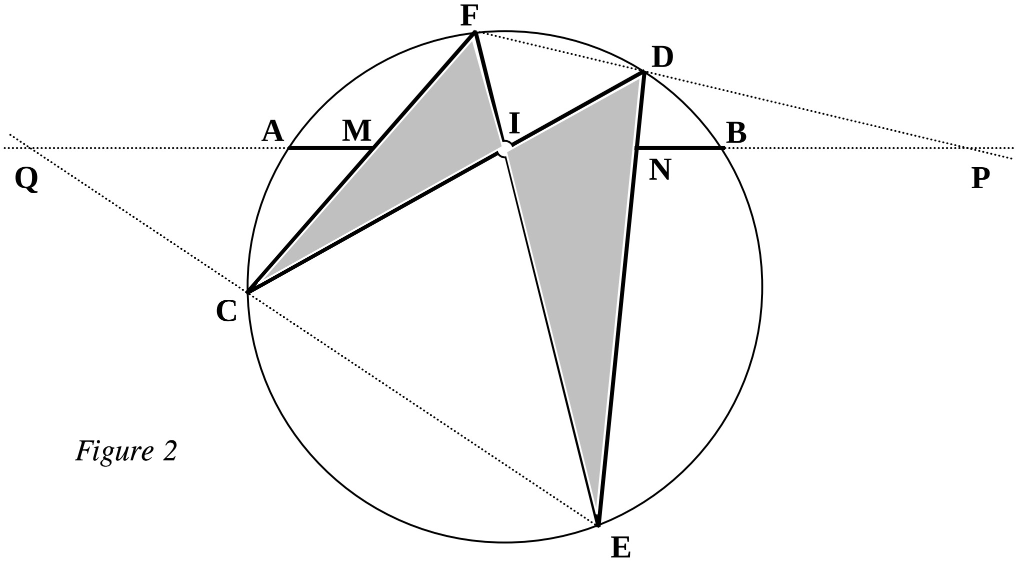

Figure 2

On trouve ce théorème énoncé comme ci-dessus :

- dans "Redécouvrons la géométrie" de Coxeter et Greitzer (DUNOD) et,
- sous le nom de "Butterfly theorem" dans l'encyclopédie de Weisstein.

Les références sont donc sérieuses.

3. REMARQUES

Coxeter indique que Horner (celui de la méthode de Horner pour les racines de polynômes) en a proposé une démonstration dès 1815, mais que, comme d'habitude les Chinois connaissaient déjà ce résultat.

Une coïncidence troublante est qu'il existe un papillon nocturne nommé "géomètre" de la famille des géométridés !

En général, on ne cite dans le théorème du papillon qu'une aile sur les deux, mais pourquoi mutiler cette pauvre bête ?

Revenons à nos moutons :

4. VOICI UNE DEMONSTRATION TRES SIMPLE TROUVEE SUR INTERNET (Figure 3 ci-après)

Elle n'utilise que les propriétés élémentaires des angles inscrits et des triangles semblables.
Elle ne concerne que l'aile 1, mais se généralise sans problème à l'aile 2.

Soient K le milieu de CF, H le milieu de DE.
Les triangles FCI et DEI sont semblables (leurs angles sont égaux).

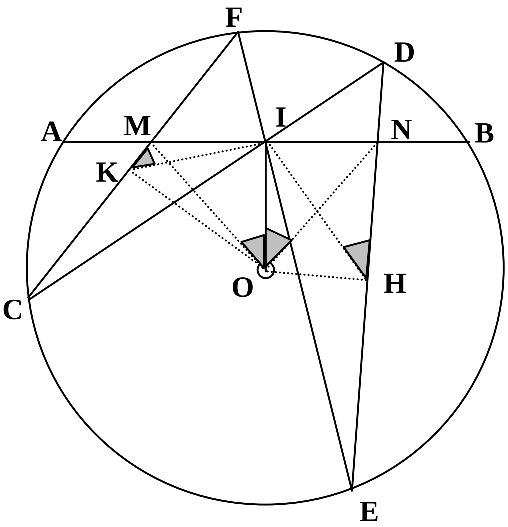

Figure 3

Donc $\frac{FC}{FI} = \frac{DE}{DI}$ ce qui entraîne $\frac{FK}{FI} = \frac{DH}{DI}$ (la moitié des rapports précédents).
Les triangles FKI et DHI sont donc eux aussi semblables d'où l'égalité des angles FKI et DHI en grisé sur la figure.
Les quadrilatères OIMK et OINH étant inscriptibles à causes des angles droits en K,I et H, on en déduit l'égalité des angles FKI et MOI d'une part, et celle des angles DHI et NOI d'autre part, d'où par transitivité l'égalité des angles MOI et NOI donc des segments IM et IN.

- Pour comparer, voici la démonstration de Coxeter, bien plus technique, utilisant à fond les triangles semblables (Figure 4) :

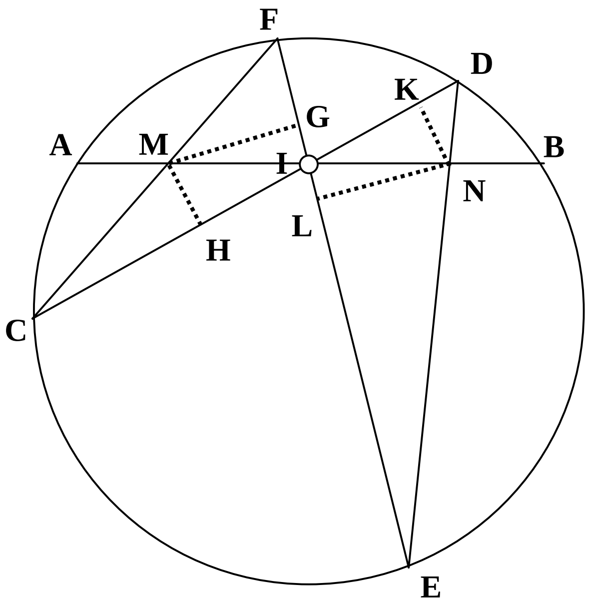

Figure 4

M se projette en H sur CD, en G sur FE.
N se projette en K sur CD, en L sur FE. On pose IA = IB = x.
On a $\frac{IM}{IN} = \frac{MG}{NL}$ (car les triangles IMG et INL sont semblables).
On a $\frac{IM}{IN} = \frac{MH}{NK}$ (car les triangles IMH et INK sont semblables).

On a $\frac{MG}{NK} = \frac{MF}{ND}$ (les triangles MGF et NKD sont semblables car les angles inscrits en F et en D sont égaux).

On a $\frac{MH}{NL} = \frac{MC}{NE}$ (car les triangles HMC et LNE sont semblables).

On en déduit (en utilisant une propriété bien connue des cordes concourantes d'un cercle) :

$$\frac{IM^2}{IN^2} = \frac{MG}{NL} \times \frac{MH}{NK} = \frac{MG}{NK} \times \frac{MH}{NL} = \frac{MF}{ND} \times \frac{MC}{NE} = \frac{MF \times MC}{ND \times NE} = \frac{MA \times MB}{NB \times NA} = \frac{(x - MI)(x + MI)}{(x - NI)(x + NI)} = \frac{x^2 - MI^2}{x^2 - NI^2}.$$

En examinant les deux bouts, on arrive facilement à $IM^2 = IN^2$ d'où $IM = IN$.

Là encore, pas de problème pour l'aile 2 de la démonstration, seules les lettres changent.

- Il existe aussi une démonstration très intéressante mais longue, utilisant l'analytique, qui démontre les deux ailes en même temps, une autre qui utilise la géométrie projective ! et bien d'autres encore paraît-il.

Je pense que ce grand nombre de démonstrations est le signe d'un "bon" théorème.

5. Mais ce n'est pas tout ! La famille s'agrandit encore avec la naissance du petit dernier theoreme qu'on ne sait pas trop comment appeler

Le sphinx étant un grand papillon, voici donc :

Théorème du sphinx : (Figure 5 ci-dessous)

Si dans un cercle, AB est une corde de milieu I, et si CD et EF sont deux autres cordes coupant AB respectivement en K et L avec I milieu de KL, alors :

Aile 1 : Si FC et DE coupent AB respectivement en M et N alors I est milieu de MN.

Aile 2 : Si FD et EC coupent AB respectivement en P et Q alors I est milieu de PQ.

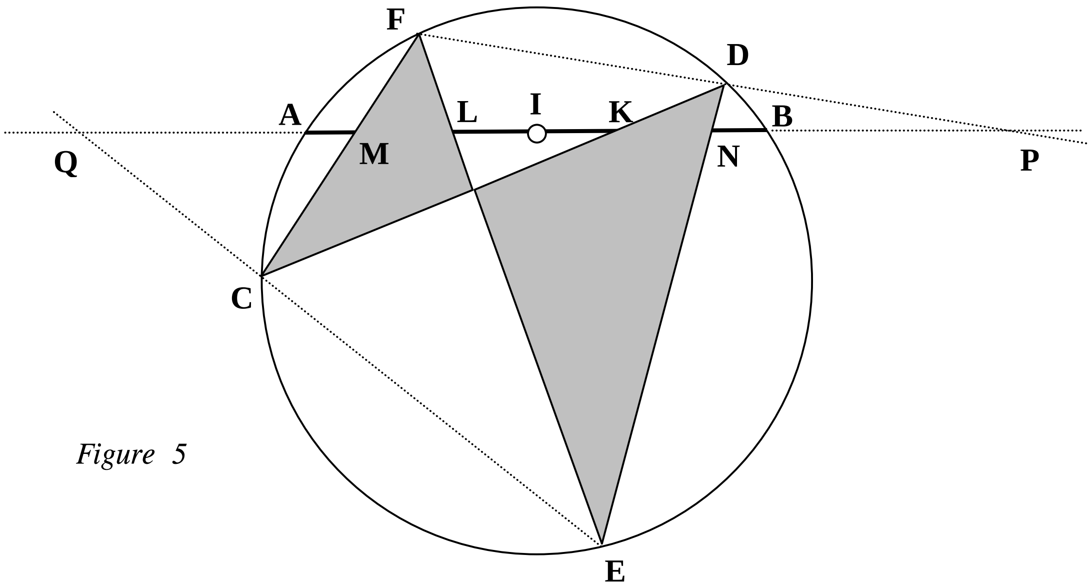

Figure 5

Je n'ai pas essayé de démontrer cette généralisation, mais sans doute, des lecteurs voudront bien s'attaquer à cette énigme du sphinx, que j'ai trouvée dans un numéro récent de MATHEMATICS MAGAZINE. (Octobre 2005).