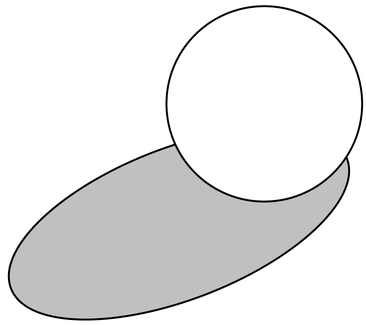
Quelle est l'ombre d'un ballon ?

Michel LAFOND

Résumé : *Aire de l'ombre d'un ballon.*

Mots clés : *ombre ; ombre d'un ballon ; aire ellipse.*



- Une sphère de rayon r est posée sur un plan, et éclairée par une source ponctuelle S.

Si l'éclairage est suffisamment haut, l'ombre de la sphère sur le plan est une ellipse (intersection d'un cône et d'un plan).
Quelle est l'aire de cette ellipse ?

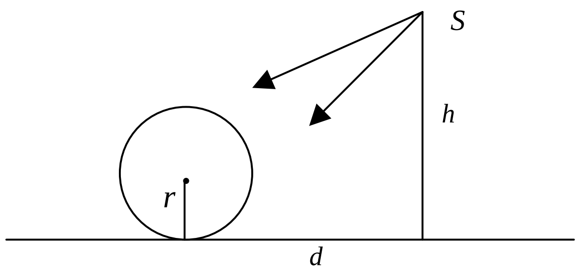


Figure 1

Les paramètres sont :
Le rayon r de la sphère, la hauteur h de la source **S** et la distance d au sol (Voir la figure 1).
On suppose évidemment $h > 2r$ pour avoir une ombre ellipsoïdale, et $d > r$ pour la commodité des schémas. Mais le résultat final sera valable pour $d < r$.

- On suppose la sphère posée sur un plan horizontal, et voici ce qu'on voit en coupant le tout par le plan vertical de symétrie :

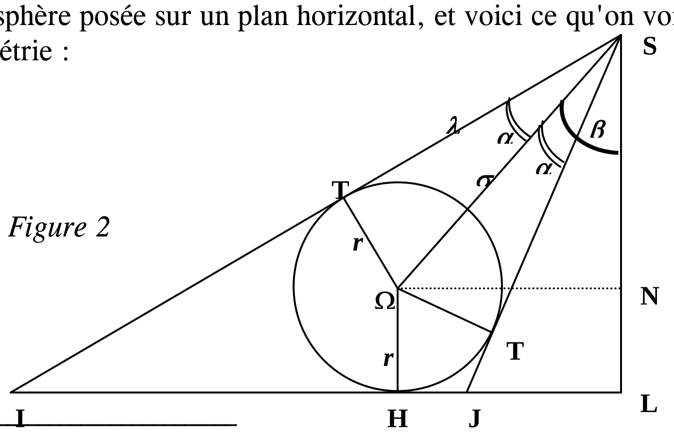


Figure 2

ST et ST' sont des tangentes au cercle de centre Ω.
Posons $\lambda =$ ST, $\sigma =$ SΩ et rappelons que HL = ΩN = d.
Dans le triangle rectangle SΩN, on a : $S\Omega^2 = SN^2 + \Omega N^2 = (h - r)^2 + d^2$.

D'où : $$\sigma = S\Omega = \sqrt{(h-r)^2 + d^2} \qquad (1)$$

Dans le triangle rectangle SΩT, on a :
$ST^2 = S\Omega^2 - \Omega T^2 = (h - r)^2 + d^2 - r^2 = h^2 - 2\,h\,r + d^2$.

D'où : $$\lambda = ST = \sqrt{h^2 - 2\,h\,r + d^2} \qquad (2)$$

Dans le triangle rectangle SΩN : $\tan(\beta) = \dfrac{\Omega N}{SN} = \dfrac{d}{h-r}$ (3)

Dans le triangle rectangle SΩT : $\tan(\alpha) = \dfrac{\Omega T}{ST} = \dfrac{r}{\lambda}$ (4)

d'où $\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} = \dfrac{2\,\lambda\,r}{\lambda^2 - r^2}$

Dans le triangle rectangle SIL : $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{IL}{h}$

d'où $IL = h\tan(\alpha + \beta) = h\dfrac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$.

En utilisant (3) et (4), on arrive à : $IL = \dfrac{h(\lambda d + hr - r^2)}{\lambda(h-r) - rd}$ (5)

Dans le triangle rectangle SJL : $\tan(\beta - \alpha) = \dfrac{JL}{SL}$

d'où $JL = h\tan(\beta - \alpha) = h\dfrac{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$.

En utilisant (3) et (4), on arrive à : $JL = \dfrac{h(\lambda d - hr + r^2)}{\lambda(h-r) + rd}$ (6)

(Remarque : si $d < r$ il faut changer le signe de JL)

L'un des axes de l'ellipse est a = IJ.
Or IJ = IL – JL.

(Remarque : si $d < r$ IJ = IL + JL ce qui compense le changement de signe précédent de JL car $\alpha < \beta$)

(5) et (6) donnent :

$$a = IJ = h\left(\frac{\lambda d + hr - r^2}{\lambda(h-r) - rd} - \frac{\lambda d - hr + r^2}{\lambda(h-r) + rd}\right) = \frac{2\,\lambda\,h\,r\left((h-r)^2 + d^2\right)}{\lambda^2(h-r)^2 - r^2 d^2}$$ après développement.

Or le dénominateur de cette dernière expression, en utilisant (2), devient :

D = $h^4 - 4h^3 r + h^2(5r^2 + d^2) - 2\,h\,r(d^2 + r^2)$ qui se factorise en :
D = $h\,(h - 2r)\left((h-r)^2 + d^2\right)$

On peut donc simplifier a et obtenir pour **le premier axe :** $IJ = a = \dfrac{2\,\lambda\,r}{h - 2\,r}$ (7)

- Calcul de l'autre axe de l'ellipse :

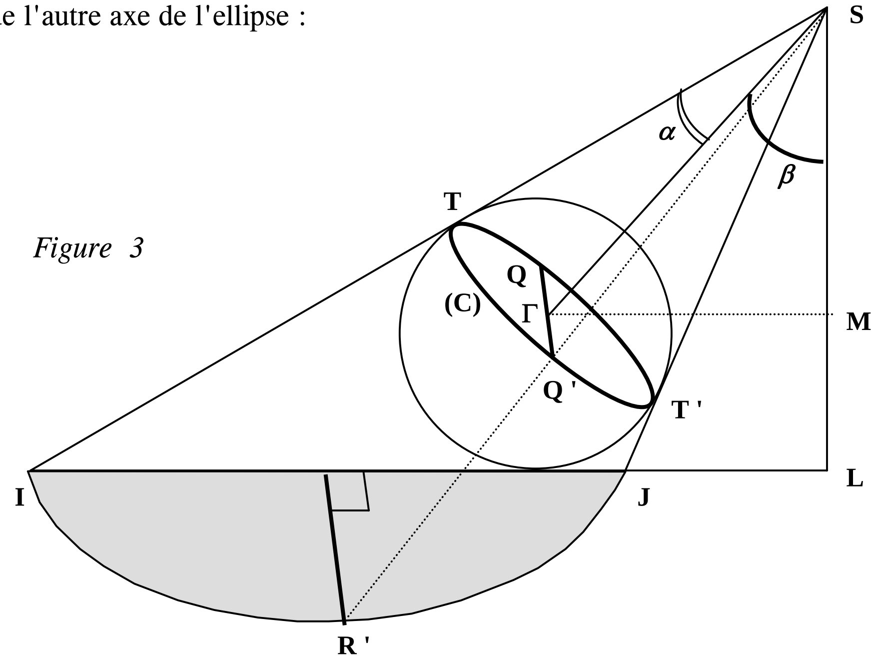


Figure 3

Soit (C) le cercle de contact (intersection de la sphère et du cône tangent) de centre Γ.
Le deuxième axe de l'ellipse (Voir figure 3) est RR', homothétique de QQ' dans une homothétie de centre S et de rapport $\frac{\text{SL}}{\text{SM}}$. [R *est invisible sur la figure*3]

Cet axe mesure donc $b = \text{QQ}' \times \frac{\text{SL}}{\text{SM}}$

Or $\text{QQ}' = 2\,\Gamma\text{Q} = 2\,\text{SQ}\sin(\alpha) = 2\,\text{ST}\sin(\alpha) = 2\,\lambda\sin(\alpha)$.
Et $\text{SM} = \text{S}\Gamma \times \cos(\beta) = \lambda\cos(\alpha)\cos(\beta)$.

Donc $b = 2\,\lambda\sin(\alpha) \times \dfrac{h}{\lambda\cos(\alpha)\cos(\beta)} = \dfrac{2h\tan(\alpha)}{\cos(\beta)}$

avec $\tan(\alpha) = \dfrac{r}{\lambda}$ et $\cos^2(\beta) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\beta)} = \dfrac{(h-r)^2}{(h-r)^2+d^2}$ d'après (3).

Ce qui donne pour le deuxième axe : $b = \dfrac{2h\tan(\alpha)}{\cos(\beta)} = \dfrac{2hr\sqrt{(h-r)^2+d^2}}{\lambda(h-r)}$ (8)

Pour calculer l'aire de l'ellipse, il suffit de remarquer que si ses demi-axes sont u, v alors, une multiplication des ordonnées par $\dfrac{u}{v}$ transforme l'ellipse en un cercle de rayon u, d'aire πu^2. L'ellipse a donc une aire de $\pi u^2 \dfrac{v}{u} = \pi u v$.

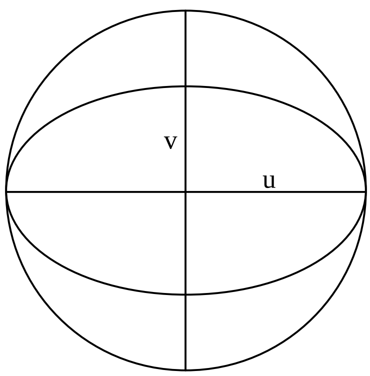


Figure 4

Ainsi l'aire de notre ellipse est : A $= \pi \frac{a}{2}\frac{b}{2} = \pi \frac{ab}{4} = \pi \frac{h r^2 \sqrt{(h-r)^2 + d^2}}{(h-r)(h-2r)}$ (9)

- Remarque :

Le rapport entre l'aire de l'ombre A, et l'aire de la sphère ($4\pi r^2$) vaut : $\rho = \frac{h\sqrt{(h-r)^2 + d^2}}{4(h-r)(h-2r)}$.

Ainsi, un ballon de foot de rayon 21 cm, éclairé par une source située à 68 cm de distance (au sol) et 72 cm de hauteur, a une ombre dont l'aire est exactement celle du ballon ($\rho = 1$).

Autres valeurs remarquables :

r	d	h	rapport ρ
44	63	128	1
57	116	144	2
93	164	216	3
33	52	72	5