

Une utilisation de l'inégalité de Bernoulli

Jean-Claude ANDRIEUX, Lycée Clos Maire à Beaune

Résumé : Utilisation de l'inégalité dite de Bernoulli pour étudier la suite $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Mots clés : Bernoulli ; suite.

L'inégalité dite de Bernoulli : $\forall x > -1, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$ est utilisée en Terminale S pour démontrer que, si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

Ce résultat permet alors d'obtenir le résultat essentiel sur les suites géométriques :

$$\text{si } -1 < q < 1, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0.$$

On se propose d'utiliser cette inégalité pour étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

1) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante

Tous les termes de la suite étant strictement positifs, calculons pour tout entier $n \geq 2$ le quotient $\frac{u_n}{u_{n-1}}$:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \times \frac{n}{n-1}.$$

L'inégalité de Bernoulli donne : $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{1}{n} \geq \frac{n-1}{n}$, d'où : $\frac{u_n}{u_{n-1}} \geq 1$.

2) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée

Pour tout entier $n \geq 1$, la croissance sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $x \mapsto x^{2n}$ permet d'écrire : $1 \geq \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)^{2n}$.

$$\text{Or } \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)^{2n} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n} u_{2n} = \left[\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n\right]^2 u_{2n}$$

L'inégalité de Bernoulli et la croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$ donnent :

$$\left[\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n\right]^2 \geq \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4}$$

On en déduit donc que, pour tout entier $n \geq 1$: $1 \geq \frac{1}{4} u_{2n} \Leftrightarrow 4 \geq u_{2n}$.

La croissance de la suite permet alors d'écrire pour tout entier $n \geq 1$: $u_{2n-1} \leq u_{2n} \leq 4$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant croissante et majorée, converge vers un réel $L \leq 4$.