Suite de Farey et inégalité de Legendre

Emmanuel MOREAU, Lycée Davier à Joigny

Résumé : *Etude des suites (cos n)^n et –cos n)^{n2} à l'aide des suites de Farey.*

Mots clés : *Suites de Farey ; inégalité de Legendre ; fractions continues ; cosinus.*

On trouve dans la Feuille de Vigne n° 98 un article consacré à l'étude de la suite de terme général $(\cos n)^{n^2}$, qui est une suite au comportement assez surprenant. Rappelons quelques observations associées à cette suite :

- pour $10\ 000 \le n \le 100\ 000$, on observe qu'aucun terme n'excède 10^{-17} en valeur absolue.
- pour $10\ 000 \le n \le 1\ 000\ 000$, dix termes seulement excèdent 10^{-6} en valeur absolue.

On trouve néanmoins, dans l'article mentionné, une démonstration accessible à des élèves de Terminale S du fait que cette suite ne tend pas vers 0 !
La démonstration proposée, que l'on peut retrouver sur le serveur académique[1] sous forme d'activité «clé en main», est basée sur une inégalité attribuée à Legendre. Rappelons de quoi il s'agit : à tout irrationnel x on peut, en utilisant le développement en fractions continues de x, associer une suite d'approximations rationnelles $\frac{p_n}{q_n}$, appelées réduites de x, vérifiant pour tout n : $\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^{\ 2}}$. Cette dernière inégalité est l'inégalité de Legendre. Elle est établie dans le n° 98, mais il a fallu pour cela se consacrer aux fractions continues. Ce dernier sujet est intéressant et important sur le plan mathématique. Il peut donner lieu d'autre part à de nombreuses activités formatrices en classe, mais il demande une chose qui nous manque cruellement dans l'exercice de notre métier : du temps.

L'article du n° 98 était déjà sous presse quand j'ai lu le bel article consacré aux suites de Farey, dans le n° 96. Le sujet proposé par Robert Ferachoglou est séduisant par plusieurs aspects : la simplicité de la définition des suites de Farey, la multitude des propriétés associées, aisées à conjecturer par les élèves, sans oublier le côté ludique … il est d'autant plus heureux de constater que l'on peut, à l'aide des suites de Farey, établir assez aisément −et rapidement− une inégalité similaire à l'inégalité que nous avons attribué à Legendre. Voici donc un moyen, pour qui aurait choisi d'aborder les fractions de Farey avec sa classe, d'en donner une application à l'étude des suites $\left((\cos n)^n\right)$ et $\left((\cos n)^{n^2}\right)$, sans recourir au lourd arsenal des fractions continues.

Cet article est donc consacré au théorème suivant, dont nous donnons une démonstration basée sur les suites de Farey.

> ***Théorème***
>
> Pour tout irrationnel x, il existe une suite de nombres rationnels $\left(\frac{h_n}{k_n}\right)_{n\ge1}$ vérifiant :
>
> - pour tout n : $\left|x-\frac{h_n}{k_n}\right|<\frac{1}{k_n^{\ 2}}$.
> - (k_n) est une suite strictement croissante d'entiers, et donc $\lim k_n=+\infty$.
> - $\lim h_n=+\infty$ si $x>0$ et $\lim h_n=-\infty$ si $x<0$.

[1] http://webpublic.ac-dijon.fr/pedago/maths/index.html.

La démonstration de ce théorème sera facilitée par les deux résultats suivants :

***Une propriété des suites de Farey*[2]**

Si $\frac{h}{k}$ et $\frac{h'}{k'}$ sont deux termes consécutifs de la suite F_n, alors $k+k'>n$.

<u>Preuve de cette propriété</u> :

On a $0 \leq \frac{h}{k} < \frac{h+h'}{k+k'} < \frac{h'}{k'} \leq 1$. Supposons que $k+k' \leq n$, la fraction $\frac{h+h'}{k+k'}$, plus précisément la forme irréductible de cette fraction, appartiendrait par définition à F_n, ce qui contredit le fait que $\frac{h}{k}$ et $\frac{h'}{k'}$ sont deux termes consécutifs de la suite F_n. La propriété est ainsi établie.

Lemme

Pour tout réel x et tout entier n non nul, il existe une fraction $\frac{h}{k}$ irréductible telle que

$$0<k\leq n \text{ et } \left|x-\frac{h}{k}\right| \leq \frac{1}{k(n+1)}.$$

<u>Preuve du lemme</u> :

Il suffit de prouver ce lemme pour tout réel α vérifiant $0 \leq \alpha < 1$.
En effet pour un réel x quelconque on peut écrire $x = E(x)+\alpha$ avec $0 \leq \alpha < 1$, or

$$\alpha-\frac{h}{k}=x-E(x)-\frac{h}{k}=x-\frac{kE(x)+h}{k}$$

donc $\left|\alpha-\frac{h}{k}\right| \leq \frac{1}{k(n+1)}$ implique $\left|x-\frac{kE(x)+h}{k}\right| \leq \frac{1}{k(n+1)}$, et la fraction $\frac{kE(x)+h}{k}$ est irréductible, comme la fraction $\frac{h}{k}$.

Supposons donc $0 \leq \alpha < 1$.

α tombe entre deux termes consécutifs $\frac{h}{k}$ et $\frac{h'}{k'}$ de la suite F_n, donc dans l'un des intervalles $\left[\frac{h}{k},\frac{h+h'}{k+k'}\right]$ et $\left[\frac{h+h'}{k+k'},\frac{h'}{k'}\right]$.

Or $\frac{h+h'}{k+k'}-\frac{h}{k}=\frac{kh'-k'h}{k(k+k')}=\frac{1}{k(k+k')} \leq \frac{1}{k(n+1)}$ et $\frac{h'}{k'}-\frac{h+h'}{k+k'}=\frac{kh'-k'h}{k'(k+k')} \leq \frac{1}{k'(n+1)}$.

Nous avons utilisé ici une propriété fondamentale des suites de Farey (pour deux termes consécutifs $\frac{h}{k}$ et $\frac{h'}{k'}$ on a $kh'-k'h=1$) et la propriété démontrée ci-dessus.

On déduit de ces calculs que l'une des fractions $\frac{h}{k}$ et $\frac{h'}{k'}$ satisfait les conditions du lemme.

<u>Remarque</u> :

La démonstration de ce lemme ne devrait pas poser de difficultés à des élèves de Première ou Terminale S.

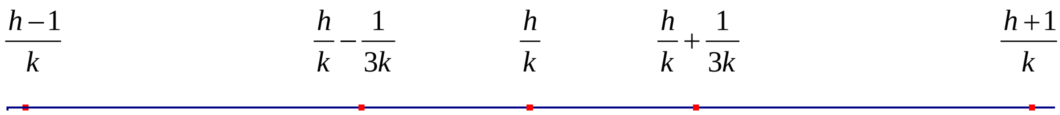
---

[2] Pour $n \geq 1$, la $n^{ème}$ suite de Farey est la suite, rangée dans l'ordre croissant, des fractions irréductibles comprises entre 0 et 1, dont le dénominateur ne dépasse pas n. On note F_n cette suite.

Or de $\left|x-\frac{h}{k}\right| \leq \frac{1}{k(n+1)}$, avec $0<k \leq n$, nous déduisons immédiatement $\left|x-\frac{h}{k}\right| \leq \frac{1}{k^2}$. Nous reconnaissons une inégalité semblable à celles spécifiées dans le théorème que nous souhaitons démontrer, qui intuitivement peut sembler acquis (car il serait étonnant que lorsque n parcourt l'ensemble des entiers naturels, l'ensemble des fractions $\frac{h}{k}$ ne soit pas infini). On peut, s'il on veut gagner du temps ou si l'on est face à une classe que l'on juge un peu faible, profiter de ce fait pour demander aux élèves d'admettre ce théorème[3] que nous allons maintenant démontrer, car une preuve rigoureuse requiert un peu de technique.

Preuve du théorème :

❖ Remarquons tout d'abord que si $n \geq 2$ alors, pour k fixé, il existe un unique h vérifiant $\left|x-\frac{h}{k}\right| \leq \frac{1}{k(n+1)}$. En effet on a alors $\left|x-\frac{h}{k}\right| \leq \frac{1}{3k}$: le schéma qui suit pourrait tenir lieu d'explication.



Par le calcul :

$$\left|x-\frac{h'}{k}\right| = \left|x-\frac{h}{k}+\frac{h-h'}{k}\right| \geq \left|\frac{h-h'}{k}\right| - \left|x-\frac{h}{k}\right| \geq \left|\frac{h-h'}{k}\right| - \frac{1}{3k} = \frac{3|h-h'|-1}{3k} \geq \frac{2}{3k} \text{ si } h' \neq h .$$

❖ Soit x un irrationnel. Nous allons construire par récurrence une suite $\left(\frac{h_n}{k_n}\right)$ vérifiant les conditions du théorème.

❖ Posons $n_1 = 2$. Le lemme précédent montre qu'il existe une fraction $\frac{h}{k}$ vérifiant :

$$C_1 : 0<k \leq n_1 \text{ et } \left|x-\frac{h}{k}\right| \leq \frac{1}{k(n_1+1)} .$$

k peut prendre n_1 valeurs donc, d'après la remarque précédente, il y a au plus n_1 fractions vérifiant les conditions C_1. On pose $\frac{h_1}{k_1}$ celle de ces fractions dont le dénominateur est minimal.

❖ x est irrationnel donc $x-\frac{h_1}{k_1} \neq 0$. Il existe donc une valeur de n à partir de laquelle on a $\frac{1}{k_1(n+1)} < \left|x-\frac{h_1}{k_1}\right|$. Soit n_2 la plus petite de ces valeurs. On applique le lemme avec $n = n_2$: il existe une fraction $\frac{h}{k}$ vérifiant C_2 : $0<k \leq n_2$ et $\left|x-\frac{h}{k}\right| \leq \frac{1}{k(n_2+1)}$

On prend parmi l'ensemble fini de fractions vérifiant les conditions C_2 celle de dénominateur minimal : $\frac{h_2}{k_2}$.

[3] Ou les prémisses utilisées dans les activités proposées sur le serveur.

❖ Montrons que $k_2 > k_1$.

On a par définition de n_2 : $\frac{1}{k_1(n_2+1)} < \left|x - \frac{h_1}{k_1}\right| \le \frac{1}{k_1(n_1+1)}$, on a donc $n_2 > n_1$.

- Si $k_2 > n_1$ alors $k_2 > k_1$.
- Si $k_2 \le n_1$ alors la fraction $\frac{h_2}{k_2}$ vérifie les conditions C_1 car $\left|x - \frac{h}{k}\right| \le \frac{1}{k(n_2+1)}$ implique $\left|x - \frac{h}{k}\right| \le \frac{1}{k(n_1+1)}$. De plus $\frac{h_2}{k_2} \ne \frac{h_1}{k_1}$ car $\frac{h_2}{k_2}$ vérifie les conditions C_2 mais pas $\frac{h_1}{k_1}$. On en déduit d'après la remarque préliminaire que $k_2 \ne k_1$. $\frac{h_1}{k_1}$ et $\frac{h_2}{k_2}$ sont donc deux fractions vérifiant les conditions C_1, avec $k_2 \ne k_1$, or par définition k_1 est le plus petit dénominateur possible des fractions vérifiant les conditions C_1, on a donc $k_2 > k_1$.

❖ On peut itérer le procédé : à chaque pas on définit une fraction $\frac{h_p}{k_p}$ vérifiant :

- C_p : $0 < k_p \le n_p$ et $\left|x - \frac{h_p}{k_p}\right| \le \frac{1}{k_p(n_p+1)}$, ce qui implique $\left|x - \frac{h_p}{k_p}\right| \le \frac{1}{k_p{}^2}$.
- $k_p > k_{p-1}$: la suite (k_n) est donc une suite strictement croissante d'entiers, donc $\lim k_n = +\infty$.

❖ On a donc pour tout $n \ge 1$: $\left|x - \frac{h_n}{k_n}\right| \le \frac{1}{k_n{}^2}$ avec $\lim k_n = +\infty$, on en déduit que $\lim \frac{h_n}{k_n} = x$ et donc $\lim h_n = +\infty$ si $x > 0$ et $\lim h_n = -\infty$ si $x < 0$.

<u>Remarque :</u>

On peut démontrer que la suite $\left(\frac{h_n}{k_n}\right)_{n\ge1}$ ainsi définie coïncide avec la suite des réduites.

Plus précisément : on pose $x = E(x) + \alpha$ avec $0 \le \alpha < 1$.

- Si $0 \le \alpha \le \frac{1}{3}$ alors $\left(\frac{h_n}{k_n}\right)_{n\ge1} = \left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\ge0}$.
- Si $\frac{1}{3} < \alpha \le \frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{3} \le \alpha < 1$ alors $\left(\frac{h_n}{k_n}\right)_{n\ge1} = \left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\ge1}$.
- Si $\frac{1}{2} < \alpha \le \frac{2}{3}$ alors $\left(\frac{h_n}{k_n}\right)_{n\ge1} = \left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\ge2}$.