Jeux et Problèmes

Michel LAFOND

JEU - 49
Dans une zone carrée de 875 m de côté, placer 10 bornes téléphoniques de manière que tout point de la zone soit situé à moins de 200 m d'une borne.

PROBLÈME - 49
Dans un rectangle de 40×80 cm^2, comment placer sans empiètement, deux demi-disques égaux, de rayons 27 cm ?

Solutions

Jeu 48
On part d'un cube :

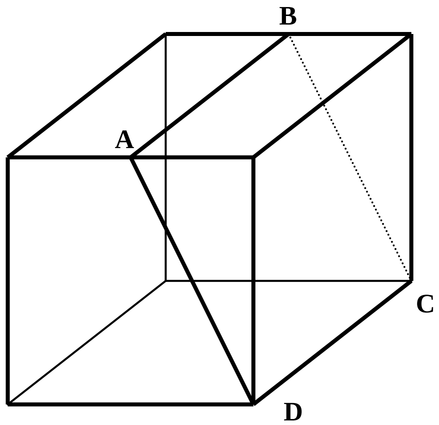


Figure 1

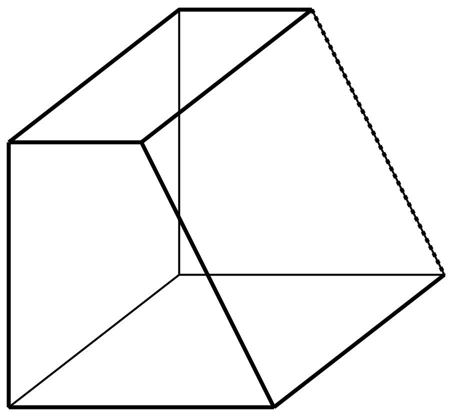


Figure 2

On tronque le cube (Figure 1) par un coup de scie, le long du rectangle ABCD (où AB est une médiane).
On obtient la figure 2 :

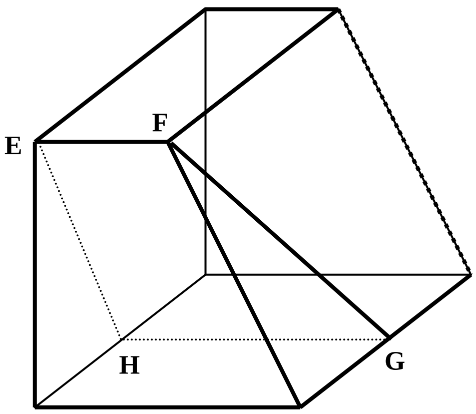


Figure 3

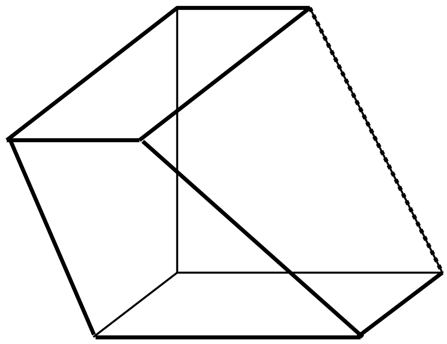


Figure 4

On tronque ce qui reste par un coup de scie le long du trapèze EFGH (où GH est une autre médiane du cube) (Figure 3).

On obtient l'horrible chose de la figure 4.
Cette chose a un **axe de symétrie** ! Trouvez-le.
D'après André DELEDICQ.

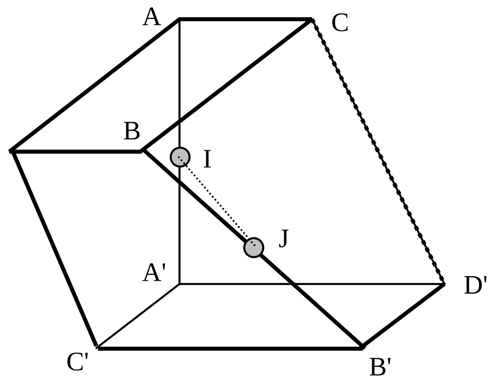


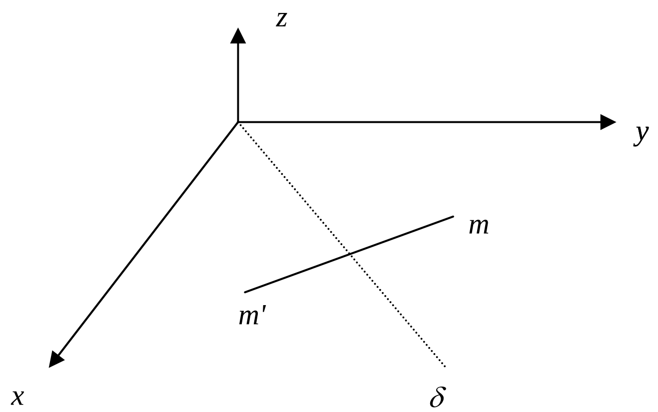
Figure 4

- *Examinons la chose :*

Une arête est atypique : c'est l'arête BB'.
L'axe de symétrie présumé, qui n'est pas BB',
passe peut-être par le milieu J de BB' et dans ce cas,
doit lui être perpendiculaire.
Les deux plans horizontaux de la figure 4 ne demandent qu'à être échangés dans la symétrie.
On en vient vite à penser à la droite $\Delta = (IJ)$ où I est le milieu de AA'.
C'est un bon exercice de démontrer que dans la symétrie orthogonale par rapport à Δ, A devient A', B devient B', etc.
En fait, le prolongement de IJ passe par le milieu d'une arête verticale (invisible ici) du cube initial. IJ est donc un axe de symétrie du cube initial ! ce qui facilite bien les choses.

- *Le point de vue analytique est peut-être plus convaincant :*

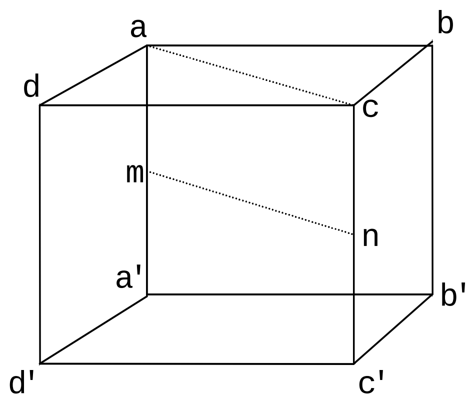
Si on prend comme repère orthonormé (A', $\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'D'}, \overrightarrow{A'A}$)
Si M (x, y, z) a pour symétrique M' par rapport à Δ, alors, M, M', Δ, se projettent sur Oxy selon m, m', δ :



Il est alors évident que la symétrie est $(x, y, z) \to (y, x, 1- z)$ et :

A = (0, 0, 1)	devient	(0, 0, 0) = A'	
B = (1, 1/2, 1)	devient	(1/2, 1, 0) = B'	
C = (0, 1/2, 1)	devient	(1/2, 0, 0) = C'	etc.

- *Et si vous n'êtes toujours pas convaincus,* voici une autre solution proposée par **Daniel Reisz** que j'ai reçue in extremis pour la faire paraître dans ce numéro :



Je reviens au cube initial, noté avec des lettres minuscules sur la figure ci-dessus.
Pour trouver l'axe de symétrie de l'horrible objet il suffit de faire correspondre le rectangle du bas avec le rectangle du haut (figures de l'énoncé).
Cela peut se faire de la façon suivante :
- La translation ***t*** de vecteur $\overrightarrow{a'a}$ remonte le rectangle du bas au niveau du rectangle du haut.
- Ensuite un demi-tour ***r*** d'axe (ac) amène le rectangle remonté par ***t*** sur le rectangle du haut.

La translation ***t*** se décompose en le produit de deux symétries plan : s_1 par rapport au plan parallèle aux faces et passant par le milieu m de aa' suivie de s_2 par rapport au plan (abcd) :

$$t = s_2 \circ s_1$$

Le demi-tour ***r*** se décompose en le produit de deux symétries planes : s_2 déjà définie suivie de s_3 symétrie par rapport au plan diagonal (acc'a') : $r = s_3 \circ s_2$

Alors $r \circ t = s_3 \circ s_2 \circ s_2 \circ s_1 = s_3 \circ s_1$ qui est le demi tour autour de la droite (mn) et c'est donc cette droite qui est l'axe de symétrie de l'horrible objet.

Problème 48

On pose $U_1 = 10$, $U_2 = 401$ et pour $n \geq 0$: $U_{n+2} = U_n - \dfrac{1}{U_{n+1}}$.

Démontrer que $U_{2006} = 0$.
Il y a une erreur dans l'énoncé, c'est $U_{2\times 2006} = U_{4012}$ qui vaut 0 et non U_{2006}.
M. **Lucien Sautereau** a bien décelé l'erreur.

Généralisons un peu :
Si $U_1 = a$ *et* $U_2 = b$, avec la récurrence précédente, on a successivement :

$$U_3 = a - \frac{1}{b} = \frac{ab-1}{b}$$

$$U_4 = b - \frac{b}{ab-1} = \frac{b(ab-2)}{ab-1}$$

$$U_5 = \frac{ab-1}{b} - \frac{ab-1}{b(ab-2)} = \frac{(ab-1)(ab-3)}{b(ab-2)}$$

$$U_6 = \frac{b(ab-2)}{ab-1} - \frac{b(ab-2)}{(ab-1)(ab-3)} = \frac{b(ab-2)(ab-4)}{(ab-1)(ab-3)}$$

Ça devient clair et une petite récurrence montre la propriété ci-dessous :

$$\begin{cases} U_{2n} = \dfrac{b(ab-2)(ab-4)...(ab-(2n-2))}{(ab-1)(ab-3)...(ab-(2n-3))} \\ U_{2n+1} = \dfrac{(ab-1)(ab-3)...(ab-(2n-1))}{b(ab-2)(ab-4)...(ab-(2n-2))} \end{cases}$$

Ici, $a = 10$ et $b = 401$ donc :
le numérateur de $U_{2\times 2006}$ contient le facteur $ab - 4010 = 0$
le dénominateur n'est pas nul.
Ainsi $\mathbf{U_{2\times 2006} = 0}$.
Remarquons que la suite n'est plus définie à partir de $n = 4013$…

Remarques : Si on veut avoir $U_{2006} = 0$, il suffit de prendre pour valeurs initiales :

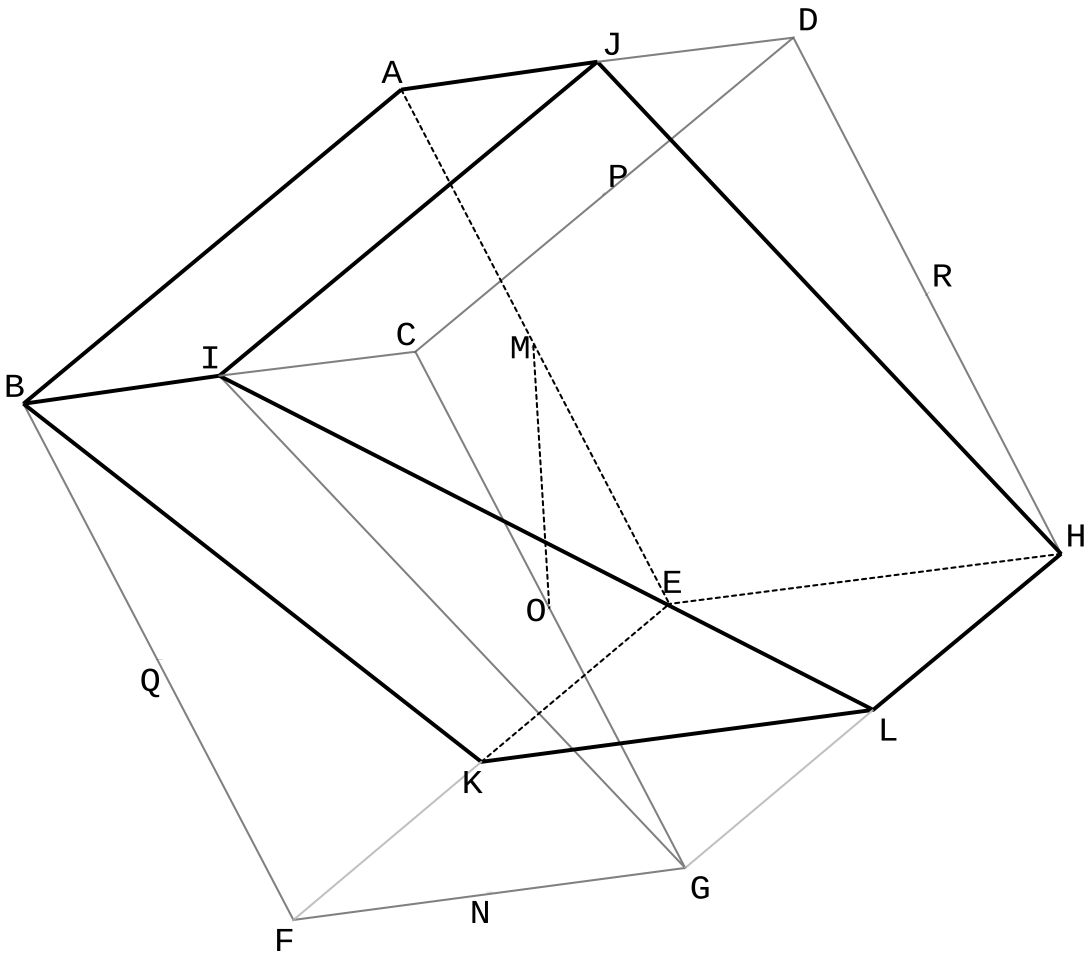
$$U_1 = 12 \qquad \text{et} \qquad U_2 = 167$$

On aura alors $U_{2006} = U_{2\times 1003}$, dont le numérateur contient $ab - (2n\text{-}2) = ab - 2004 = 0$.

M. Sautereau a bien vu que si on pose $V_n = U_n U_{n+1}$ alors la récurrence sur U équivaut en la multipliant membre à membre par U_{n+1} à $\mathbf{V_{n+2} = V_{n+1} - 1}$. (tant que U ne s'annule pas) V est donc arithmétique de raison –1, et comme $V_1 = U_1\, U_2 = 4010$ on a instantanément $V_{4011} = U_{4011} U_{4012} = 0$.
Comme $V_{4010} = U_{4010} U_{4011} = 1$ c'est que U_{4011} n'est pas nul, donc $U_{4012} = 0$.

M. **Beckowski** qui a résolu le problème 48, envoie aussi une solution du jeu 48.
Cette figure inhabituelle a eu du succès !

Jeu 48



Examinons les faces du solide et constatons qu'elles sont deux à deux isométriques :

Les rectangles (A, B, I, J) et (E, H, L, K).

Les trapèzes (A, B, K, E) et (E, H, J, A).

Les trapèzes (K, L, I, B) et (J, I, L, H).

On en déduit que (A, B, I, J) doit avoir pour image (E, H, L, K).
Les milieux M de [AE] et O de [GC] sont équidistants de A et E, de B et H, de I et L, de J et K.
Les plans médiateurs de [AE], [BH], [IL] et [JK] contiennent tous la droite (MO).
Par la symétrie d'axe (MO), (A, B, I, J) et (E, H, L, K) s'échangent et le solide est invariant.

On peut identifier les plans médiateurs cités plus haut à l'aide de milieux d'arêtes du cube :

- celui de [AE] contient le carré de sommets M, Q, O, R.
- celui de [BH] est défini par l'hexagone régulier de sommets M, K, N, O, P, J.
- celui de [IL] est matérialisé par le losange de sommets M, F, O, R.
- celui de [JK] est matérialisé par le losange de sommets M, B, O, H.

D'autre part la composée de la rotation autour de (AE), qui amène B en D, et de la symétrie d'axe (MR), se réduit à la symétrie autour de (MO). On peut constater que (A, B, I, J) devient bien (E, H, L, K) et réciproquement.