Jeux et Problèmes

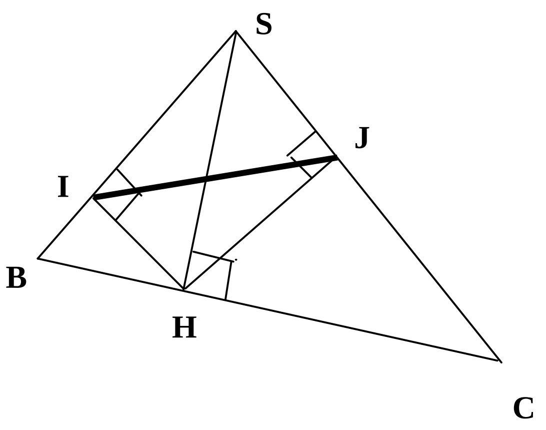
Michel LAFOND

JEU - 52.

Un entier est dit BIDIGITAL si, en base 10, il s'écrit en utilisant au plus 2 chiffres différents.
Exemples : 2666262 et 3300303033300 sont bidigitaux.
123456 = 90090 + 33366 est la somme de deux entiers bidigitaux.
Ecrire 1234567, 12345678 et 123456789 comme sommes de trois entiers bidigitaux.

PROBLÈME- 52.

Dans un triangle acutangle, soit H le pied de la hauteur issue d'un des 3 sommets : S.
H se projette en I et J sur les deux côtés passant par S.
Démontrer que la longueur IJ ne dépend pas du sommet choisi.



Solutions

JEU - 51

Ma montre avance d'une minute toutes les 44 minutes. Elle est à l'heure à midi.
A quelle heure (exacte) les deux aiguilles seront-elles de nouveau en coïncidence ?

Solution :

En ce qui concerne les heures (fausses) indiquées par la montre, dans une heure, la grande aiguille sera sur 12 et la petite sur 5. Il y a "5 minutes" à rattraper pour avoir la prochaine coïncidence, la vitesse de la grande aiguille par rapport à la petite étant de "55 minutes" par heure.

La prochaine coïncidence aura lieu dans $60 + 5 \div \frac{55}{60} = \frac{720}{11}$ minutes (de la montre)

Mais 44 minutes réelles correspondent à 45 minutes de la montre.

Le délai réel avant la coïncidence sera donc de $\frac{720}{11} \times \frac{44}{45} = 64$ minutes (réelles).

Il sera donc exactement **1 heure 04**.

PROBLÈME – 51

La somme des chiffres de $2^{67} = 147573952589676412928$ est égale à 110.
Celle de $2^{103} = 10141204801825835211973625643008$ est aussi égale à 110.

Démontrer que si les écritures décimales de 2^m et 2^n ont la même somme de chiffres, alors $m - n$ est un multiple de 6.

Solution :

Soit $\sum_{i=0}^{k} c_i \, 10^i$ la décomposition en base 10 de 2^n.

modulo 9 on a : $2^n \equiv \sum_{i=0}^{k} c_i \, 1^i = \sum_{i=0}^{k} c_i$ c'est à dire la somme des chiffres de n.

Par conséquent, si 2^m et 2^n ont la même somme de chiffres, alors $2^m \equiv 2^n$ modulo 9.
Or la suite des puissances de 2 modulo 9 : [1, 2, 4, 8, 7, 5, 1, 2, 4, 8, 7, 5 ---] est périodique de période 6.
Cela vient du fait que $2^6 = 64 \equiv 1 \mod 9$ implique $2^{n+6} = 2^n \, 2^6 \equiv 2^n \mod 9$
$2^m \equiv 2^n \mod 9$ implique donc que $m - n$ est multiple de la période 6. CQFD.

Attention, la réciproque est fausse : si $m - n$ est multiple de 6, il n'est pas sûr que 2^m et 2^n aient des écritures avec la même somme de chiffres, c'est même plutôt rare.