Des transformations qui transforment !

Alain MASCRET, Collège La Champagne, Gevrey-Chambertin

Les transformations géométriques au programme du collège conservent l'alignement, les longueurs, les angles, les aires, les milieux, le parallélisme et l'orthogonalité. Ce sont des isométries et même, à part la symétrie axiale, des déplacements.

Nous insistons sur les propriétés de conservation, car ces propriétés sont souvent utiles dans les démonstrations, cependant, pour l'élève, ces transformations ne transforment pas. La figure image ressemble trop à la figure de départ. Il risque également de croire que toutes les transformations possèdent les propriétés de conservation que nous avons l'habitude de lui faire énumérer. De plus, cette énumération apparaîtra souvent comme un rituel vide de sens, une lubie de prof de math !

Si nous voulons que l'élève perçoive le sens et l'intérêt de ces propriétés, il faut lui montrer des transformations qui ne les possèdent pas, et ceci, le plus tôt possible, dès la sixième. Ce travail fournit l'occasion de mesurer des longueurs, des angles et des aires. Il permet également une approche de la notion de contre-exemple et de preuve.

1) Activités en sixième ou « Croyez-vous au Père Noël ? » :

Les activités décrites ici ayant lieu en décembre, c'est le Père Noël qui va se prêter au jeu des transformations.

Les points sont définis par leurs coordonnées.

A (4 ; 12)	B (4 ; 9)	C (8 ; 9)
D (5 ; 5)	E (6 ; 1)	F (0 ; 2)
G (2 ; 8)	H (2 ; 9)	I (1,5 ; 9)
J (2 ; 10)		

L'élève trace ensuite les triangles ABJ, BCD, le quadrilatère BEFG et le pentagone GHIJB.

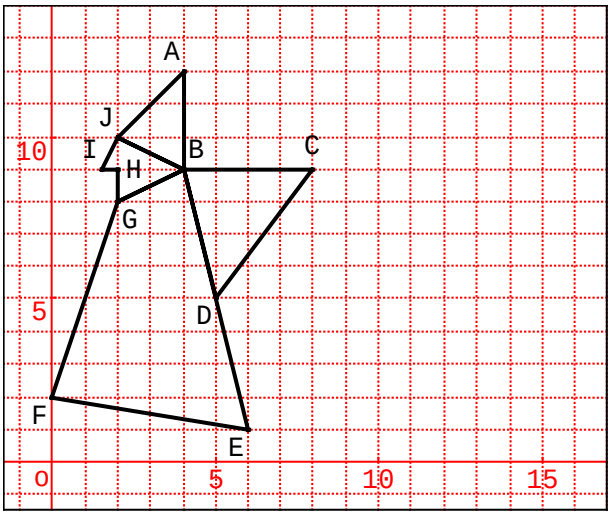


Figure de départ (n° 0)

Les transformations géométriques sont définies par un calcul à effectuer sur les coordonnées des points de la figure de départ. Le calcul doit n'offrir aucune difficulté.

Les élèves tracent une figure par feuille ce qui leur permet de comparer facilement la figure transformée et la figure de départ.

Figure n° 1 :

$$x_1 = 2 \times x$$
$$y_1 = y$$

Les élèves remarquent, en mesurant, que certaines longueurs sont doublées, comme BC et que d'autres ne changent pas, comme AB. C'est le moment de préciser qu'il suffit qu'une longueur change pour que la transformation ne conserve pas les longueurs. En général, les longueurs sont multipliées par un nombre compris entre 1 et 2.

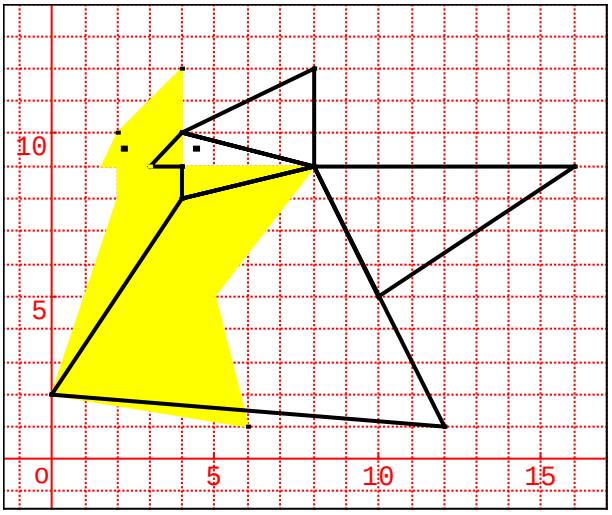


Figure n° 1

De même certains angles augmentent, comme $\widehat{BDC}$ alors que d'autres diminuent, comme $\widehat{BCD}$ ou encore ne changent pas comme $\widehat{ABC}$.

Ils vérifient également que les aires semblent être doublées. Le quadrilatère BEFG posant un problème, une méthode efficace pour évaluer les aires doit être donnée.

Figure n°2 :

$$x_2 = x$$
$$y_2 = 2 \times y$$

La transformation est visiblement du même type que la précédente. (figure non reproduite).

Figure n°3 :

$$x_3 = 2 \times x$$
$$y_3 = 2 \times y$$

C'est la composition des deux transformations déjà rencontrées.

Les longueurs semblent être doublées.

Les aires semblent être multipliées par quatre (et non par deux, ce qui surprend les élèves).

Et surtout les angles semblent être conservés. Les élèves perçoivent que la figure n'est pas déformée, mais simplement agrandie. C'est ce qui se passe, par exemple, sur une photographie. On reconnaît les personnages et les objets bien que leur taille soit différente. *L'absence de déformation correspond en mathématiques à la conservation des angles*.

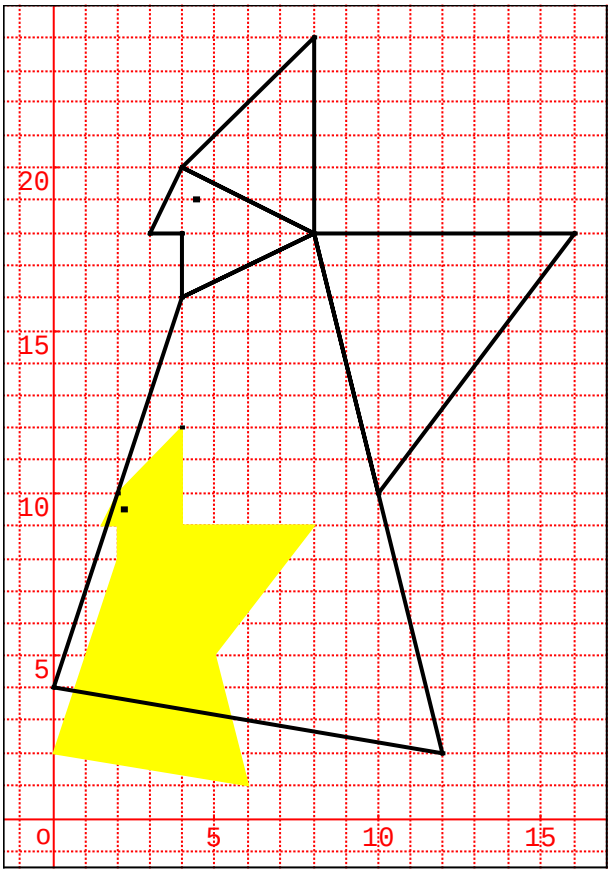


Figure n°3

Il peut être intéressant de parler de points invariants à l'aide des exemples précédents. La transformation 1 admet une droite de points invariants : l'axe des ordonnées. De la même façon, la transformation 2 admet une droite de points invariants : l'axe des abscisses. La transformation 3, qui est la composée des deux précédentes admettra l'intersection de ces deux droites comme point invariant. C'est d'ailleurs le seul.

Nous retrouverons une droite de points invariants en étudiant la symétrie axiale et, si nous présentons la symétrie centrale comme une composition de deux symétries axiales d'axes perpendiculaires, le raisonnement précédent nous donnera le point invariant de la symétrie centrale.

Après avoir vu ces transformations, rien n'empêche, d'ailleurs, d'introduire de la même façon, les transformations que l'on étudiera au collège. Elles apparaîtront ainsi à l'élève comme faisant partie de la même famille.

Figure n°4 : la symétrie axiale

$$x_4 = 16 - x$$
$$y_4 = y$$

Figure n°5 : la translation

$$x_5 = \mathbf{x} + 4$$
$$y_5 = y + 7$$

Figure n°6 : la symétrie centrale

$$x_6 = 14 - x$$
$$y_6 = 22 - y$$

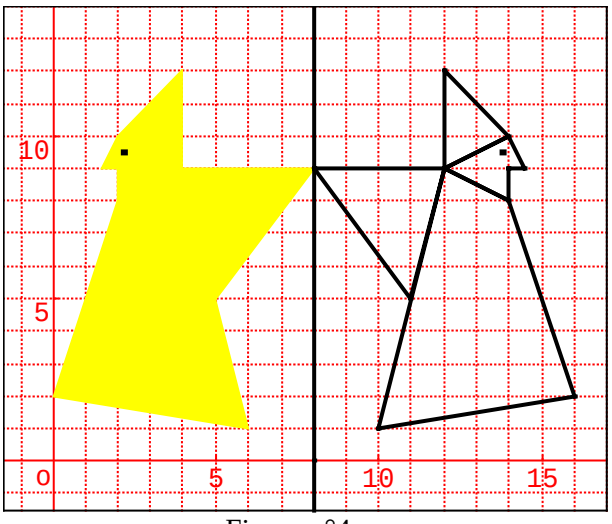


Figure n°4

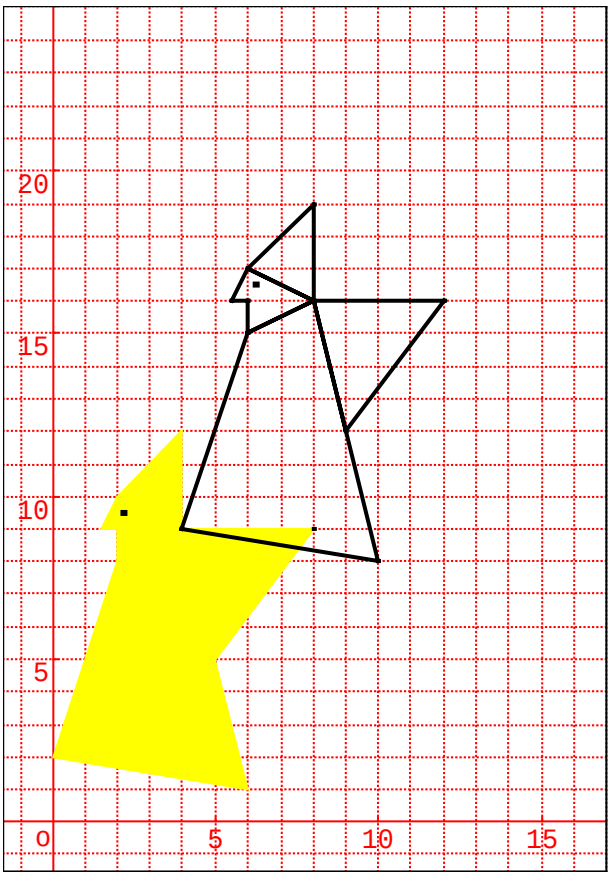


Figure n°5

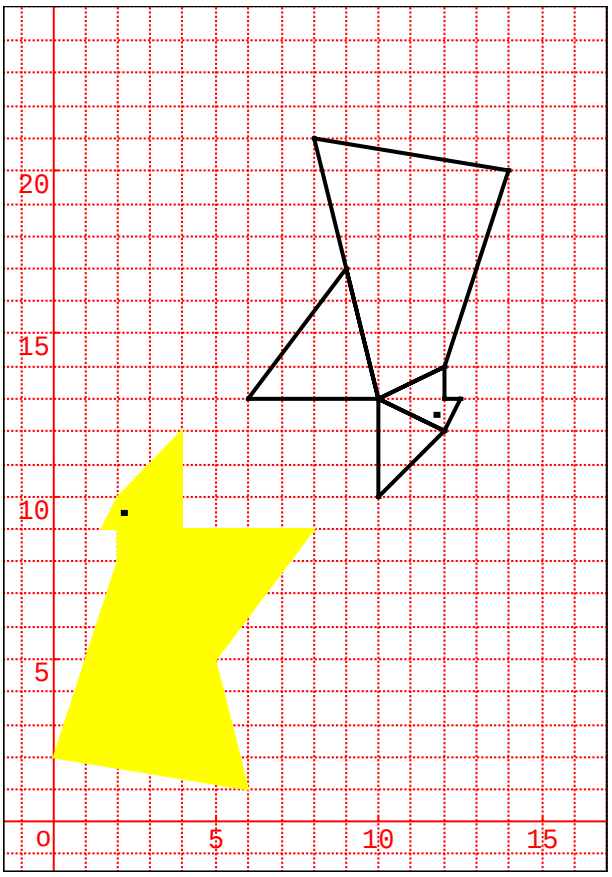


Figure n°6

Voici un autre exemple :

Figure n°7 :

$$x_7 = y + 3$$
$$y_7 = x + 7$$

Ici le Père Noël a tourné. Comme pour la figure n°3, il n'est pas déformé. L'élève peut vérifier que les angles semblent conservés et que les aires semblent avoir été doublées.
D'après la remarque faite sur la figure n°3, il peut se demander par quel nombre sont multipliées les longueurs…

Il peut voir également que la figure n°7 est orientée dans le sens contraire de la figure de départ. Bien qu'absente des programmes, la notion d'orientation est importante. Elle est perçue de façon intuitive par l'élève.

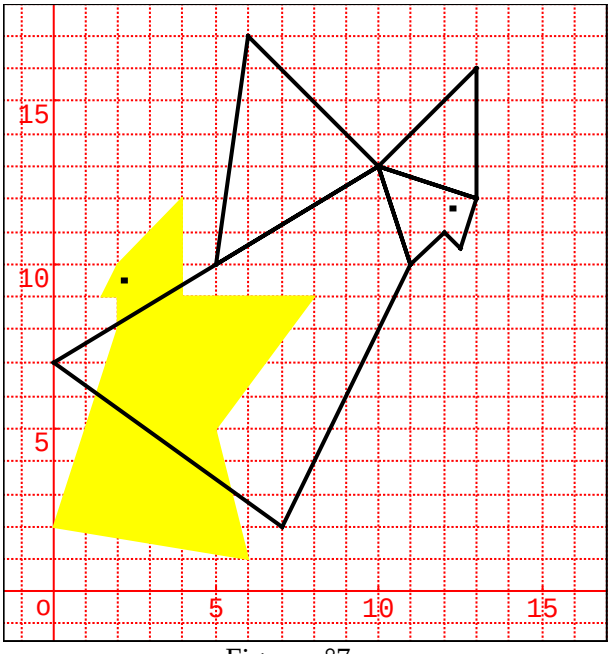


Figure n°7

Par exemple, sur la figure de départ, on amène la demi-droite [BA) sur la demi-droite [BC) en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre. Sur la figure n°7, on doit tourner dans l'autre sens. La transformation n°7 ne conserve donc pas l'orientation des angles.

La même remarque sera faite lors de l'étude de la symétrie axiale.

Enfin, il semble important de montrer aux élèves qu'une transformation géométrique ne conserve pas forcément l'alignement des points.

Figure n°8 :

$$x_8 = x \times x : 6$$
$$y_8 = y \times y : 6$$

Jusque maintenant, nous avons admis implicitement que l'alignement était conservé par les transformations utilisées. L'élève, qui traite cet exercice comme les précédents, va s'apercevoir que les images des points B, D et E ne sont pas alignées, alors que B, D et E le sont sur la figure de départ.

Ceci nous amène à faire tracer la figure n°8 par un logiciel de géométrie qui nous montrera de façon visible qu'en général, les droites ne sont pas transformées en des droites.

L'élève remarque facilement que cette fois, il a fallu multiplier les abscisses et les ordonnées entre elles pour obtenir ce résultat.

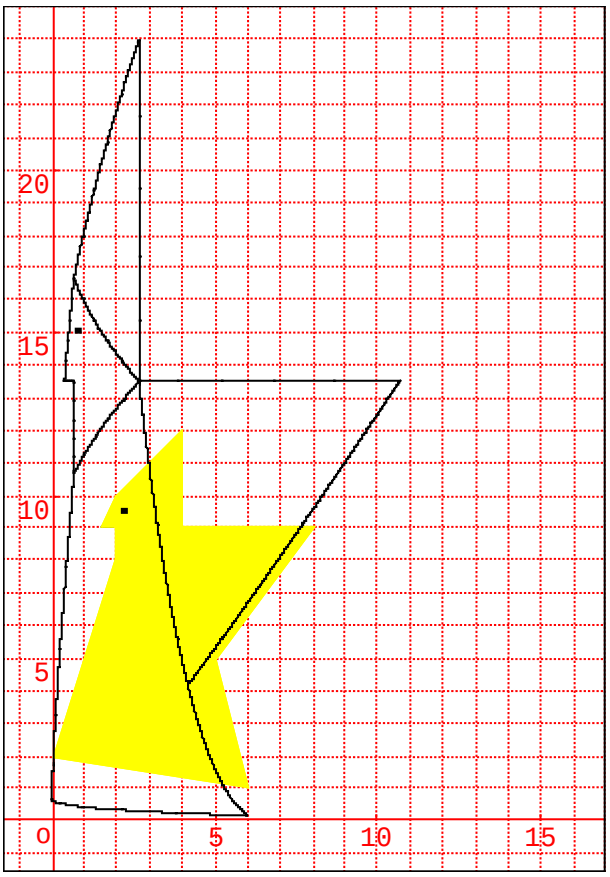


Figure n°8

2) Relations entre les propriétés de conservation :

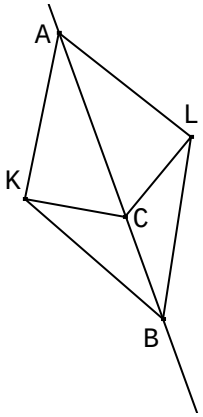
Certains élèves s'aperçoivent que les transformations proposées ci-dessus, à part la transformation n°8, conservent toujours les milieux. Un élève de troisième peut d'ailleurs le prouver. Comme elles conservent aussi l'alignement, la tentation est grande d'associer ces deux propriétés. Pourtant, une transformation peut très bien conserver l'alignement sans conserver les milieux (voir ci-dessous paragraphe 3d).

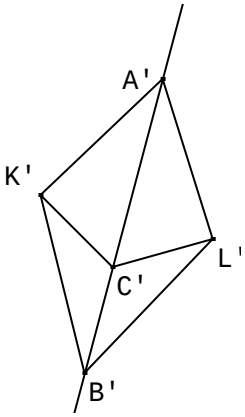
Le professeur doit éviter de transmettre implicitement des idées fausses. Tout au long de l'année et à différents niveaux, d'autres exemples pourront lui permettre de rectifier les idées fausses relevées. Comment fabriquer ces exemples?

Avant tout, il est utile de préciser les liens qui existent entre les différentes propriétés de conservation.

Rappelons tout d'abord que la conservation des longueurs implique la conservation de l'alignement. La réciproque est fausse, il suffit de penser à une homothétie pour s'en convaincre. La démonstration de cette propriété peut se faire avec les connaissances d'un élève de sixième. (Je ne dis pas de donner cette démonstration en exercice en sixième).

Soient A, B, C trois points alignés. Considérons un point K, non situé sur la droite (AB) et son symétrique L, par rapport à (AB). Les points A, B et C sont sur la médiatrice de [KL] et l'on a AK = AL, BK = BL, CK = CL.





Appelons A', B', C', K' et L' les images respectives des points A, B, C, K, et L par la transformation considérée.

En raison de la conservation des longueurs, on

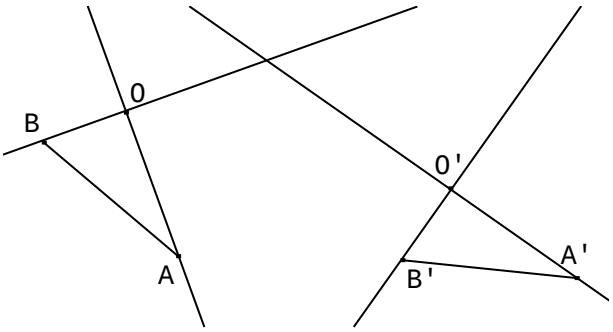
a A'K' = A'L', B'K' = B'L', C'K' = C'L'. Les points A', B' et C', qui sont sur la médiatrice de [K'L'], sont donc alignés.

Nous supposerons désormais que toutes les transformations dont il sera question dans ce paragraphe conservent l'alignement des points.

a) La conservation des longueurs implique celle de l'orthogonalité :

C'est une conséquence immédiate du théorème de Pythagore et de sa réciproque.

Etant données deux droites perpendiculaires d_1 et d_2, sécantes en O. Prenons un point A sur d_1, un point B sur d_2, et appelons d'_1, d'_2, A', B' et O' les images respectives de d_1, d_2, A, B et O par la transformation considérée.



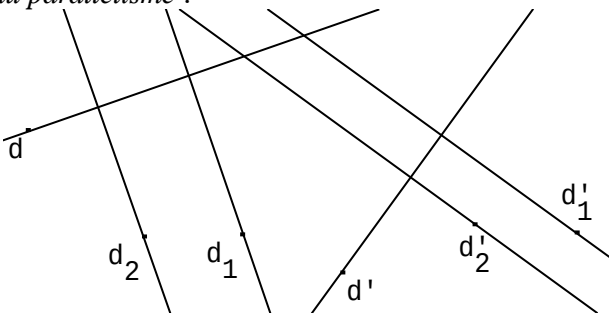
Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABO : $AB^2 = OA^2 + OB^2$. En raison de la conservation des longueurs, on a aussi $A'B'^2 = O'A'^2 + O'B'^2$ et le triangle A'B'O' est rectangle en O'. Les droites d'_1 et d'_2 sont donc perpendiculaires.

b) La conservation de l'orthogonalité implique celle du parallélisme :

Si les droites d_1 et d_2 sont parallèles, traçons d perpendiculicaire à d_1. La droite d est aussi perpendiculaire à d_2.

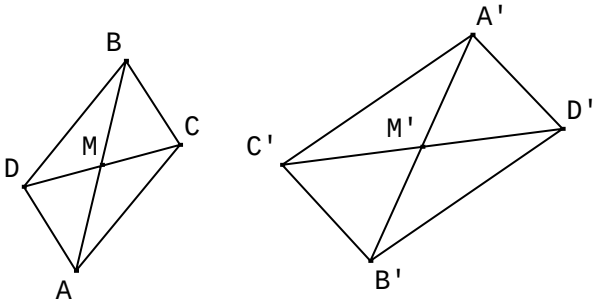
Soient d'_1, d'_2 et d' les images respectives de d_1, d_2 et d par la transformation considérée.

La droite d' est perpendiculaire aux droites d'_1 et d'_2 qui sont donc parallèles.



c) La conservation du parallélisme implique celle des milieux :

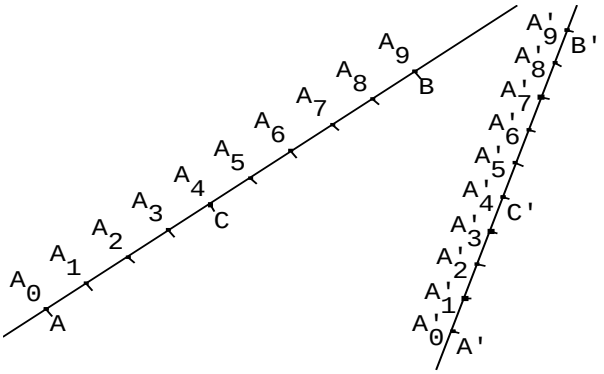
M étant le milieu d'un segment [AB], soit C un point non situé sur la droite (AB) et D son symétrique par rapport à M. Le quadrilatère ACBD est un parallélogramme. Soient A', B', C', D' et M' les images respectives de A, B, C, D et M par la transformation considérée. Le quadrilatère A'C'B'D' est un parallélogramme en raison de la conservation du parallélisme. Le point M étant l'intersection des diagonales (AB) et (CD) du parallélogramme ACBD, son image M' est l'intersection des diagonales de A'C'B'D'. M' est donc le milieu de [A'B'].



d) La conservation des milieux implique la conservation du rapport des longueurs :

Comme pour le théorème de Thalès, je me contente de démontrer ce résultat quand le rapport est rationnel et je l'admets s'il ne l'est pas. Soient trois points alignés A, B et C. Posons $k = \frac{AB}{AC}$ avec k *rationnel*. Comme *k* est rationnel, il existe une longueur AA_1 et deux entiers r et s tels que AB = r AA_1 et AC = s AA_1. Autrement dit, si je prends AA_1 pour unité et A pour origine, l'abscisse de B est r, celle de

C est s et $k=\frac{r}{s}$. Plaçons les points A_n d'abscisses entières n sur la droite (AB). On a : A_0 = A, A_r = B et A_s = C et, pour tout entier n, A_{n+1} est le milieu du segment $[A_nA_{n+2}]$. Soient A', B', C' et A'_n les images de A, B, C et A_n par la transformation considérée. Comme cette transformation conserve les milieux, A'_{n+1} est le milieu du segment $[A'_nA'_{n+2}]$. D'autre part A'_0 = A', A'_r = B' et A'_s = C' donc, sur la droite (A'B'), munie du repère (A' ; A'_1), l'abscisse de B' est r celle de C' est s et l'on a : $\frac{A'B'}{A'C'}=\frac{r}{s}=k$.

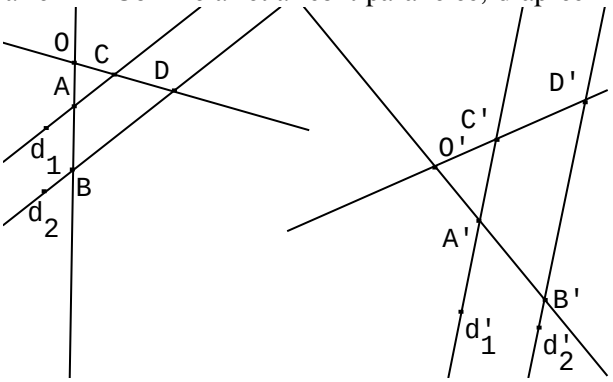


e) La conservation du rapport des longueurs implique celle du parallélisme :

C'est une conséquence immédiate du théorème de Thalès et de sa réciproque.

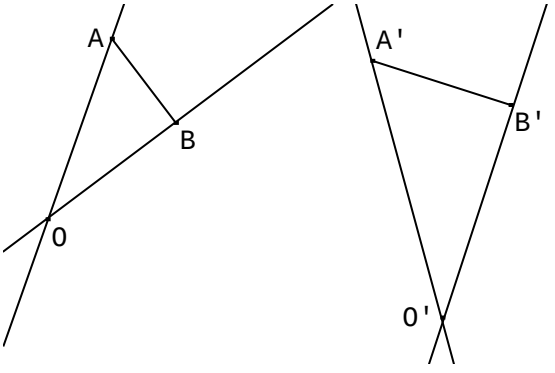
Soient deux droites d_1 et d_2. Par un point O non situé sur l'une d'elles, menons deux autres droites. L'une coupe d_1 en A et d_2 en B, l'autre coupe d_1 en C et d_2 en D. Comme d_1 et d_2 sont parallèles, d'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}$.

Appelons d'_1, d'_2, A', B', C' et D' les images respectives de d_1, d_2, A, B, C et D par la transformation considérée. Les rapports de longueur étant conservés, on obtient $\frac{O'A'}{O'B'}=\frac{O'C'}{O'D'}$, ce qui prouve que les droites (A'C') et (B'D') sont parallèles, d'après la réciproque du théorème de Thalès.



f) La conservation de l'orthogonalité équivaut à la conservation des angles :

Etant données deux droites d_1 et d_2, sécantes en O. Prenons un point A de d_1 et sa projection orthogonale B sur d_2. L'angle saillant $\widehat{AOB}$ peut être défini par son cosinus : $\cos\widehat{AOB}=\frac{OB}{OA}$. Soient O', A' et B' les images respectives de A, B et C par la transformation considérée. L'orthogonalité étant conservée, le triangle A'O'B' est rectangle en B' et le rapport $\frac{OB}{OA}$ est aussi conservé (voir paragraphe d). On obtient donc : $\cos\widehat{AOB}=\frac{OB}{OA}=\frac{O'B'}{O'A'}=\cos\widehat{A'O'B'}$, ce qui prouve la conservation des angles.

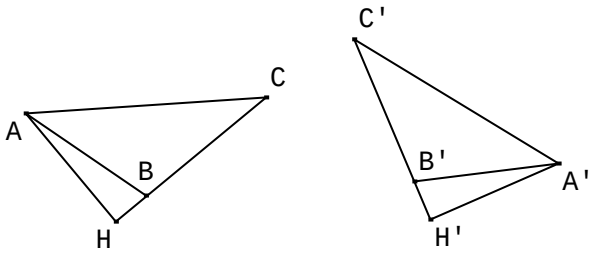


g) La conservation des longueurs implique la conservation des aires :

Comme au paragraphe d, j'admets le résultat pour les aires limitées par des courbes et me contente de le prouver pour les polygones et même pour les triangles, puisque l'aire des polygones s'en déduit aisément.

ABC étant un triangle et H la projection orthogonale de A sur la droite (BC), l'aire de ABC est $\frac{AH.BC}{2}$.

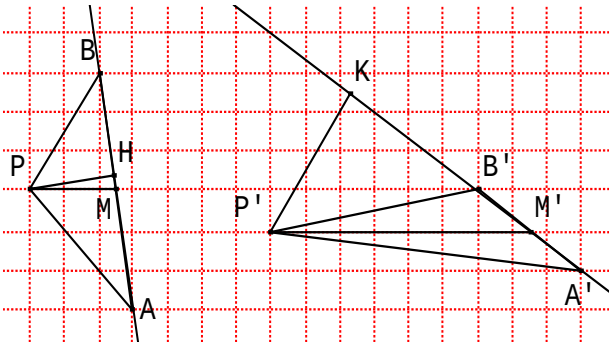
Soient A', B', C' et H' les images respectives de A, B, C et H par la transformation considérée. Comme la conservation des longueurs implique celle de l'orthogonalité, dans le triangle A'B'C', (A'H') est la hauteur relative à (B'C'). L'aire du triangle A'B'C' est $\frac{A'H'.B'C'}{2}$. Comme A'H' = AH et B'C' = BC, elle est égale à celle du triangle ABC.



h) La conservation des aires implique celle des milieux :

Soient un segment [AB] de milieu M, P un point non situé sur la droite (AB) et H sa projection orthogonale sur la droite (AB). Les triangles APM et BPM ont la même aire puisqu'ils ont même base AM=BM et même hauteur PH.

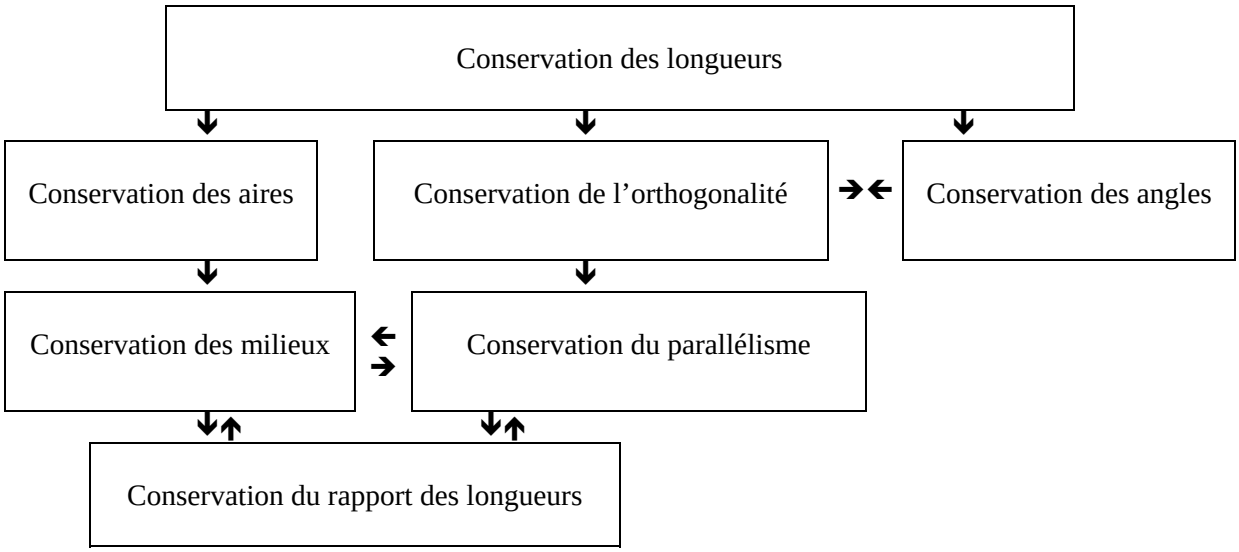
Appelons A', B', M', P' les images respectives de A, B, M, P et H par la transformation considérée et K la projection orthogonale de P' sur la droite (A'B'). (K n'est en général pas l'image de H).



Le point P' ne peut pas être situé sur la droite (A'B') car le triangle A'B'P' aurait alors une aire nulle contrairement au triangle ABP.

Les triangles A'P'M' et B'P'M' ont la même hauteur P'K et la même aire. Ils ont donc la même base A'M' = B'M'. Comme M' est sur la droite (A'B'), le point M' est le milieu de [A'B'].

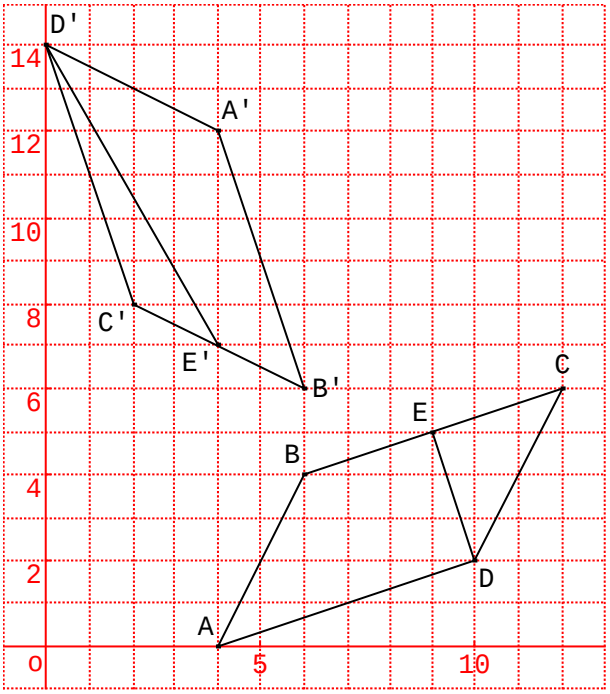
Résumons ces résultats dans un schéma :



3) Quelques contre-exemples :

Il s'agit maintenant de lire le tableau ci-dessus en essayant de trouver un exemple toutes les fois qu'une seule flèche relie deux propriétés, ce qui prouvera qu'elles ne sont pas équivalentes.

a) Transformation qui conserve les aires, les milieux, le parallélisme, mais ne conserve ni les longueurs, ni les angles ni l'orthogonalité :



La transformation doit conserver les aires.

En utilisant un quadrillage, dessinons deux parallélogrammes superposables ABCD et A'B'C'D' en plaçant les points de façon que

$$AB = CD = C'B' = A'D'$$
$$\text{et } BC = AD = A'B' = C'D'$$

Par exemple :

A(4 ; 0)	B(6 ; 4)	C(12 ; 6)
D(10 ; 2)	A'(4 ; 12)	B'(6 ; 6)
C'(2 ; 8)	D'(0 ; 14)	E (9 ; 5)

E est le milieu du segment [BC] et (ED) est sa médiatrice.

Cherchons les relations qui définissent la transformation sous la forme

$$x' = ax + by + c$$
$$y' = a'x + b'y + c'$$

Il suffit de résoudre un système linéaire de trois équations à trois inconnues pour obtenir les coefficients a, b, c, et un autre pour obtenir a', b' et c'. Les coordonnées de trois points et de leurs images suffisent pour écrire ces deux systèmes.

En effet, les relations cherchées étant linéaires, la transformation conservera les milieux donc aussi le parallélisme. La connaissance des images des points A, B et C, par exemple, entraîne donc celle de E et D et détermine la transformation.

Nous obtenons : $x' = 8 + y - x$

$y' = 8 + x - 2y$

Cet exemple a été proposé en contrôle en classe de cinquième. Les deux parallélogrammes superposables suggèrent la conservation des aires. Cependant la déformation de la figure est telle que beaucoup d'élèves n'y croient pas et veulent vérifier que les triangles CDE et C'D'E' d'une part, et les quadrilatères ABED et A'B'E'D' d'autre part ont bien la même aire. Bien entendu, l'élève se contentera de dire que les aires semblent conservées.

Le déterminant principal du système en donnera la preuve au professeur. Le produit de ce déterminant par l'aire de la figure de départ est égal, au signe près, à l'aire de la figure transformée. Ici ce déterminant a une valeur absolue égale à 1. La transformation conserve donc les aires.

b) Transformation qui conserve les angles et l'orthogonalité, les milieux, le parallélisme, mais ne conserve ni les longueurs, ni les aires :

L'homothétie remplit ces conditions.

c) Transformation qui conserve les milieux, le parallélisme, mais ne conserve ni l'orthogonalité, ni les angles, ni les longueurs, ni les aires :

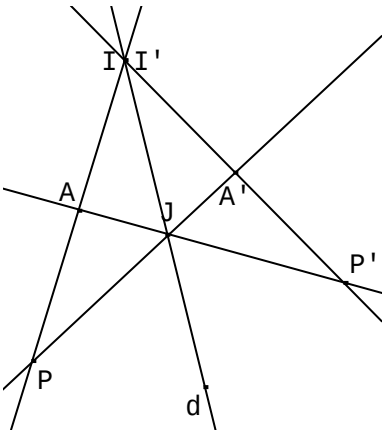
Les transformations n°1 et n°2 du paragraphe 1 sont dans ce cas. Ce sont des affinités.

Les deux transformations présentées par Claude Rigollet dans cette même *Feuille de Vigne*, sont d'autres exemples de ce type. La première est une affinité orthogonale de rapport négatif (ou le produit d'une symétrie orthogonale par une affinité orthogonale de même axe et de rapport positif). La seconde est le produit d'une symétrie orthogonale par une affinité oblique de même axe. Mais la direction de l'affinité n'est pas celle de la rampe !

d) Transformation qui conserve l'alignement, mais ne conserve ni les milieux, ni le parallélisme, ni l'orthogonalité, ni les angles, ni les longueurs, ni les aires :

Toutes les transformations de la forme : $x' = ax + by + c$
$y' = a'x + b'y + c'y$
conservent l'alignement, les milieux et le parallélisme.

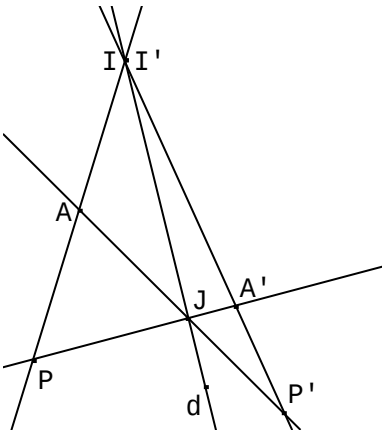
Il est utile de montrer une transformation ne conservant pas les milieux : l'involution.



Symétrie axiale
A est milieu de [PI]
A' est milieu de [P'I']

Elle se rencontre assez naturellement en construisant le symétrique d'un point par rapport à une droite *à la règle seulement,* connaissant l'image P' d'un point P.

En utilisant la même méthode, mais en fixant le point image P' arbitrairement, la transformation obtenue est une homologie qui est ici involutive, d'où son nom d'involution.



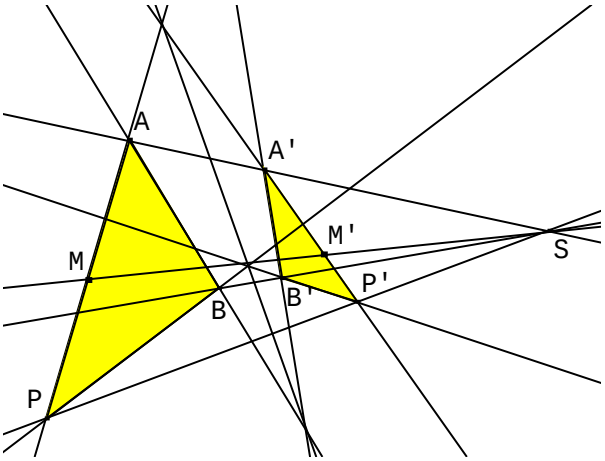
Involution
A est milieu de [PI]
A' n'est pas milieu de [P'I']

Si nous construisons l'image d'un triangle quelconque, nous retrouvons la configuration des triangles homologiques de Desargues.

Les transformations qui conservent l'alignement sont les homographies qui sont les transformations linéaires du plan projectif. (voir : Gaston Darboux ; Principes de géométrie analytique ; Gauthier-Villars ; Paris 1946 ; n°26).

Elles peuvent être définies par des relations qui s'écrivent simplement en coordonnées homogènes :

$$X' = aX + bY + cT ;$$
$$Y' = a'X + b'Y + c'T ;$$
$$T' = a''X + b''Y + c''T$$



Pour retrouver les coordonnées habituelles posons : $X = Tx$; $Y = Ty$; $X' = T'x'$; $Y' = T'y'$

Calculons x' : $T'x' = aTx + bTy + cT$

avec : $T' = a''Tx + b''Ty + c''T$

d'où : $(a''Tx + b''Ty + c''T)\,x' = aTx + bTy + cT$

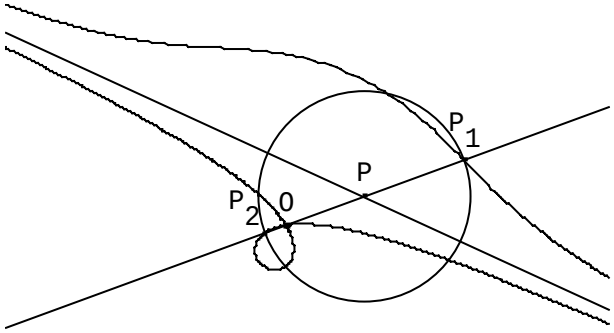
En simplifiant par T qui est non nul pour les points à distance finie, on obtient :

$$x' = \frac{ax + by + cT}{a''x + b''y + c''} \qquad \text{et de même :} \qquad y' = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''}$$

Ces formules peuvent permettre de fabriquer d'autres exemples.

4) Transformations qui ne conservent pas l'alignement :

a) Les conchoïdes :



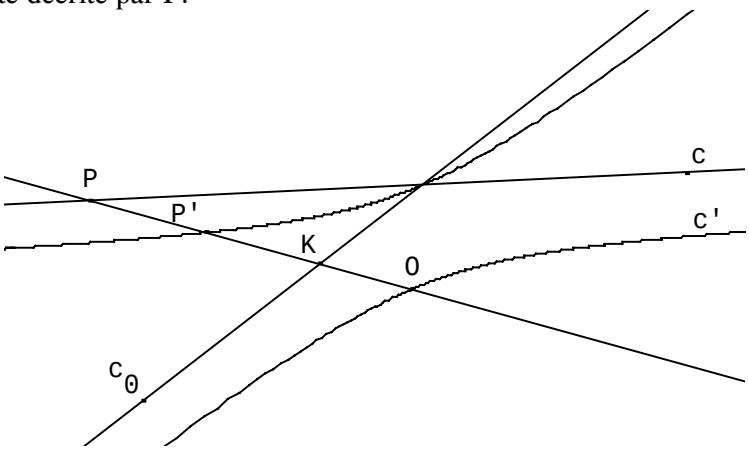
Sur le site du Rectorat de Dijon (www.ac-dijon.fr), Olivier Crouzet présente une série d'activités sur les conchoïdes pour une classe de troisième.

Un point O appelé pôle, étant donné, l'image d'un point P est le point P' de la droite (OP) obtenu en ajoutant ou en retranchant une longueur constante l au segment [OP].

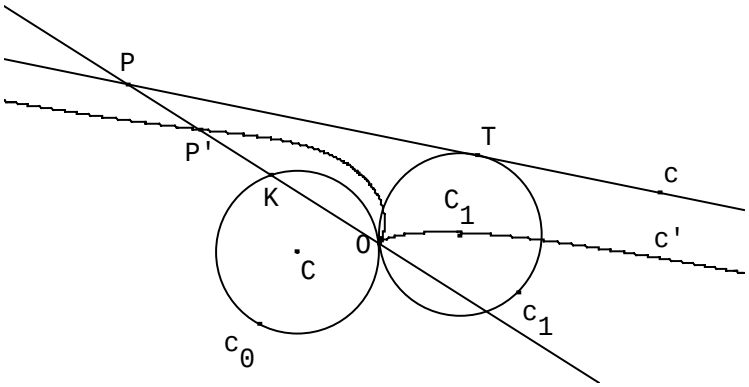
$OP'_1 = OP + l$ ou $OP'_2 = OP - l$.

Quand P décrit une droite, P_1 et P_2 décrivent chacun une courbe. On choisit l'une ou l'autre comme image de la droite suivant la définition de la transformation. Ces deux courbes sont les deux branches de la conchoïde de pôle O et de module l de la droite décrite par P.

b) Les courbes cissoïdales et les courbes médianes de deux courbes :



Dans le même état d'esprit, les courbes cissoïdales et les courbes médianes de deux courbes permettent de construire des transformations qui ne conservent pas l'alignement. Je me limiterai aux courbes médianes, les courbes cissoïdales s'en déduisant par une homothétie de rapport deux dont le centre est le pôle.



Etant donnés un point O, le pôle, et une courbe c_0, l'image P' de P est le milieu du segment [PK], où K est l'intersection de la droite (OP) et de la courbe c_0. Si P décrit une courbe c, le point P' décrit une courbe c', appelée médiane de c et de c_0 relativement au pôle O.

Si c_0 et c sont deux droites sécantes, la médiane est une hyperbole.

Si c_0 est un cercle passant par O et c une droite, la médiane est une cissoïde proprement dite, quand le cercle c_1 symétrique de c_0 par rapport à O est tangent en T à la droite c. La cissoïde est droite quand c est perpendiculaire à la droite (OT).

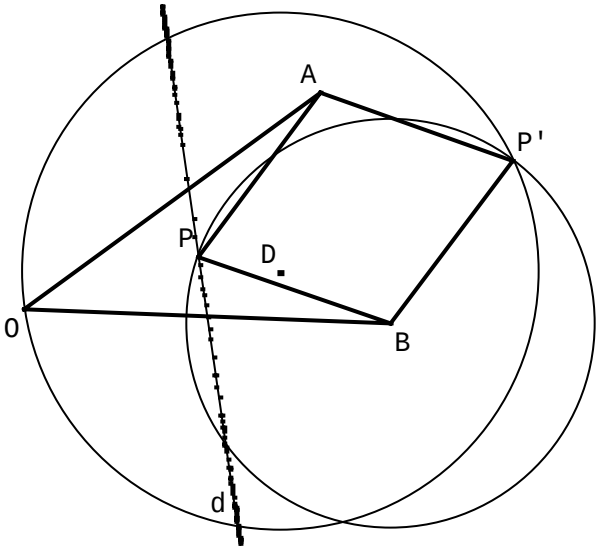
Si O est centre du cercle c_0, nous retrouvons les conchoïdes du paragraphe précédent. L'image de c est la conchoïde de son homothétique dans une homothétie centrée au pôle et de rapport $\frac{1}{2}$.

Pour plus de détails sur ces courbes (et sur beaucoup d'autres), voir le site : www.mathcurve.com.

c) Les transformateurs :

De telles transformations ont été utilisées voici déjà un certain temps, par un groupe de l'IREM de Dijon qui travaillait avec des « transformateurs », c'est-à-dire des instruments de dessin réalisant des transformations. (Voir : Jacques Laurent ; Transformateurs ; IREM ; Dijon ; 1982). Le groupe n'existe plus mais la plupart de ses membres sont toujours à l'IREM.

Pour se faire une idée, je vous recommande le site italien du musée d'histoire naturelle et des instruments scientifiques de l'Université de Modène : museo.unimo.it.



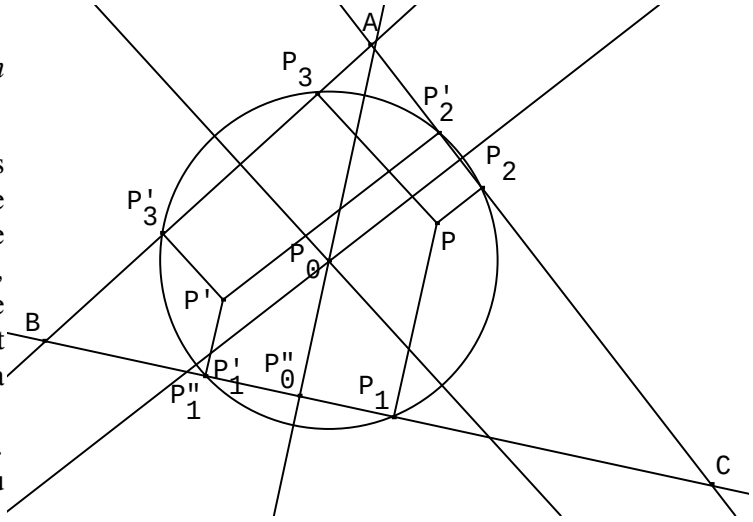
Voici à titre d'exemple, *l'inverseur de Peaucellier*. Il est formé par un losange articulé APBP' et deux tiges de même longueur OA et OB. Le pôle de l'inversion est O. Quand P décrit la droite *d*, P' décrit le cercle de centre D, privé du point O.

En effet, la puissance de O par rapport au cercle de centre B et de rayon BP est égale d'une part à $OP \times OP'$, d'autre part à $OB^2 - BP^2$. Mais cette dernière quantité est constante car OB et PB sont des tiges de l'inverseur. $OP \times OP'$ est donc constant et les points P et P' sont inverses l'un de l'autre.

Pratiquement, P ne peut décrire qu'un segment de la droite *d*, P' ne décrit donc qu'un arc de cercle.

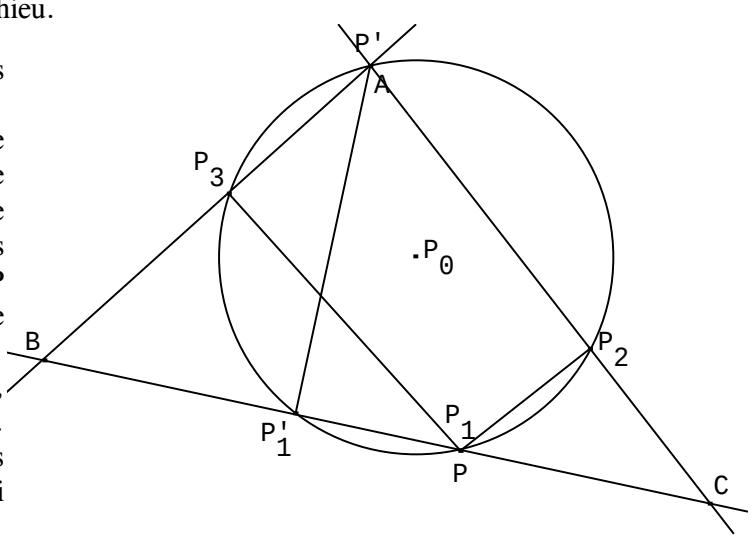
d) La transformation de Mathieu :

Toutes les projections dont il sera question dans ce paragraphe sont orthogonales.



Un point P est projeté sur les trois côtés d'un triangle ABC donné, en P_1, P_2, P_3. Le cercle circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$ recoupe les côtés du triangle ABC en trois points P'_1, P'_2, P'_3. Le théorème de Mathieu affirme que ces trois points sont les projections d'un point P'. Ce point P' sera l'image de P par la transformation de Mathieu.

Démontrons tout d'abord ce théorème. Soit P' le symétrique de P par rapport au centre P_0 du cercle circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$. Projetons P', P_0, et P sur (BC). Appelons provisoirement $P"_1$ le projeté de P' et $P"_0$ celui de P_0. $(P_0P"_0)$ est médiatrice de $[P'_1P_1]$ et $P"_0$ est milieu de $[P'_1P_1]$. Mais $P"_0$ étant la projection du milieu P_0 de [PP'], est aussi milieu de $[P"_1P_1]$. Les points $P"_1$ et P'_1 coïncident et la projection de P' est bien sur le cercle circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$. On peut recommencer le même raisonnement pour chacun des côtés du triangle ABC, les projections de P' sur les côtés du triangle ABC sont donc sur le cercle circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$,qu'on appellera cercle de Mathieu.



Observons maintenant quelques propriétés immédiates de cette transformation.

Pour tout point P non situé sur le cercle circonscrit au triangle ABC, le cercle de Mathieu est défini. Par contre, si P est sur le cercle circonscrit au triangle ABC, les points P_1, P_2 et P_3 sont sur la droite de Simson et P n'a pas d'image, tout au moins à distance finie.

Si P est sur un des côtés du triangle ABC, son image est le sommet opposé à ce côté. L'image de la droite (BC), privée toutefois des points B et C est le point A. En effet, si P est sur (BC), les triangles rectangles APP_1,

APP_2 et APP_3 sont inscrits dans le cercle de diamètre [AB]. Les points P'_2 et P'_3 sont confondus avec A qui est donc l'image de P.

Réciproquement, l'image d'un sommet du triangle ABC est indéterminée sur le côté opposé.

Si une droite passe par un sommet du triangle ABC, son image est une droite. Si une droite *d* passe par A, son image *d'* est symétrique de *d* par rapport à la bissectrice de l'angle de sommet A. De telles droites sont appelées isogonales.

Démontrons cette proposition.

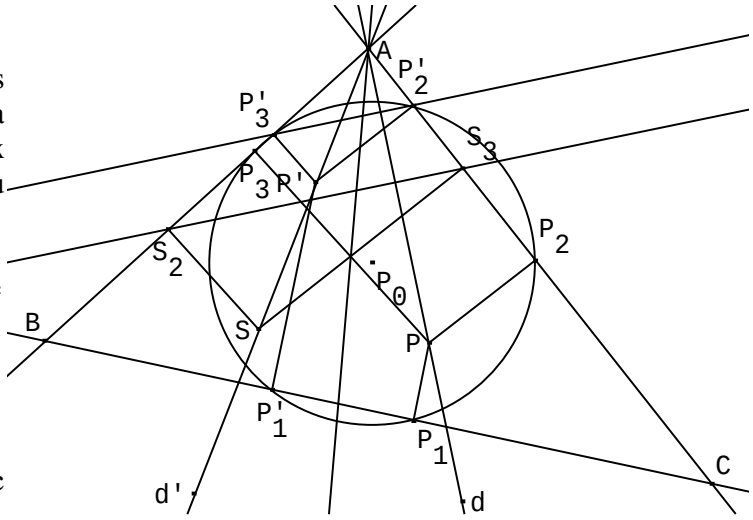
Soient S, S_2 et S_3 les symétriques respectifs de P, P_2 et P_3 par rapport à la bissectrice de l'angle. Ecrivons de deux façons la puissance de A par rapport au cercle de Mathieu :

$$AP_2.AP'_2 = AP_3.AP'_3$$

Mais $AP_2 = AS_2$ et $AP_3 = AS_3$

Donc $AS_2.AP'_2 = AS_3.AP'_3$

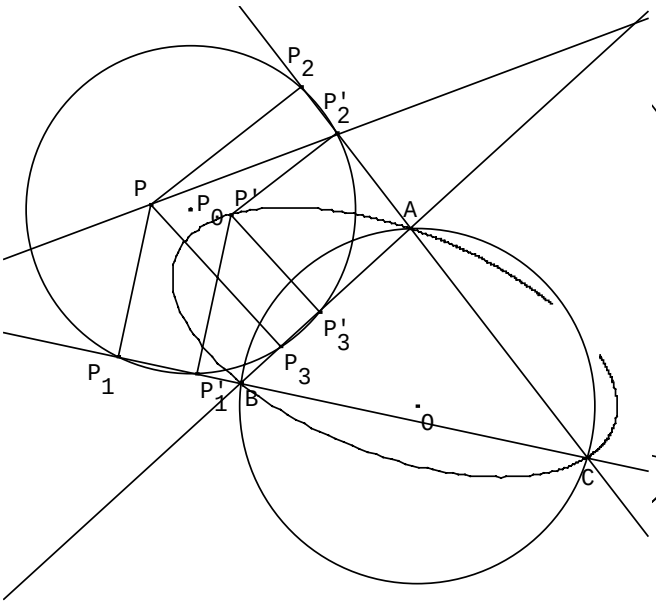
Ou encore : $\dfrac{AP'_2}{AS_3} = \dfrac{AP'_3}{AS_2}$



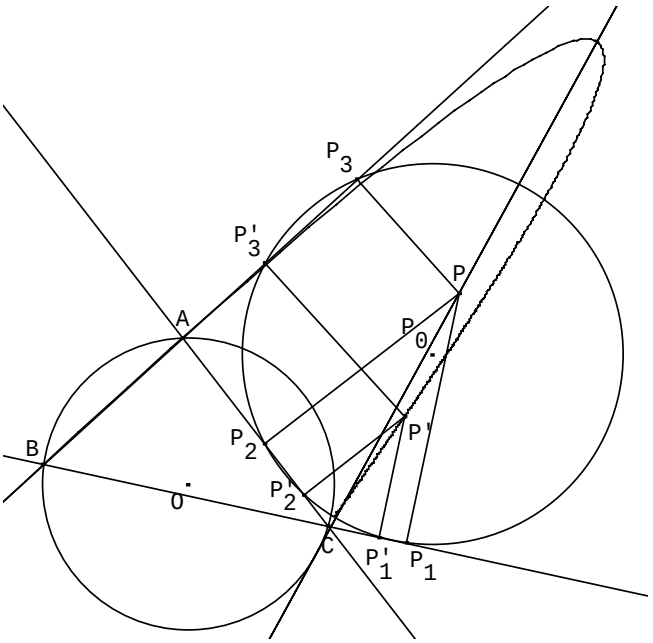
Les droites $(P'_2P'_3)$ et (S_2S_3) sont donc parallèles.

Les droites (P'P'₂), (SS₃), d'une part et (P'P'₃), (SS₂) le sont aussi puisqu'elles sont perpendiculaires respectivement à (AC) et à (AB). Les triangles $P'P'_2P'_3$ et SS_3S_2 dont les côtés sont parallèles, sont homothétiques, le centre de l'homothétie étant A. Le point P' est donc situé sur la droite (AS), symétrique de (AP) par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

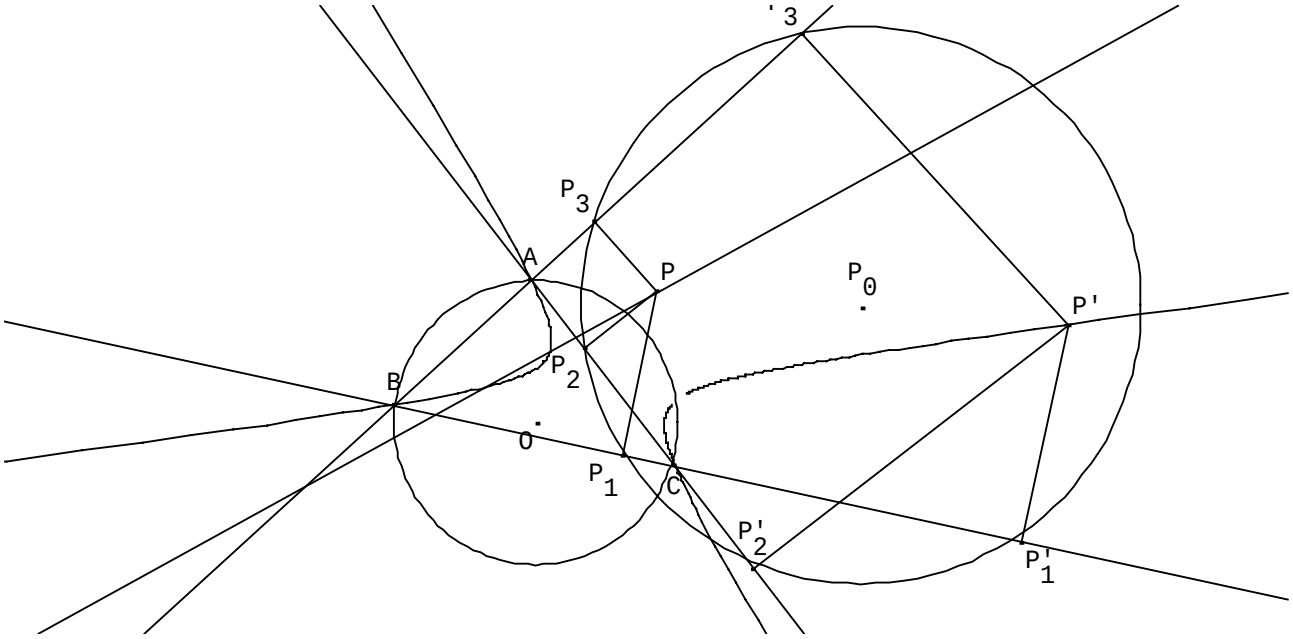
L'image d'une droite qui ne passe pas par un sommet du triangle ABC est une conique qui passe par A, B et C. Si la droite ne coupe pas le cercle circonscrit, c'est une ellipse. Si elle lui est tangente, c'est une parabole et si elle le coupe, une hyperbole. Il est possible de préciser, grâce à un théorème de Brianchon et Poncelet que si l'hyperbole est équilatère, elle passe par l'orthocentre de ABC, donc que dans ce cas, la droite passe par le centre du cercle circonscrit.



La droite ne coupe pas le cercle circonscrit



La droite est tangente au cercle circonscrit



La droite coupe le cercle circonscrit

La transformation de Matthieu admet quatre points invariants qui sont les centres des cercles inscrits et exinscrits du triangle ABC puisque dans ce cas le cercle de Mathieu est tangent aux côtés.

Si P est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, le cercle de Mathieu se confond avec le cercle d'Euler. L'image du centre du cercle circonscrit au triangle ABC est donc l'orthocentre de ce triangle

Si P est le centre de gravité du triangle ABC, le point P' est le point de concours des symétriques des médianes par rapport aux bissectrices intérieures du triangle. Ces droites portent le nom de symédianes et leur point de concours s'appelle le point de Lemoine.

L'image d'un cercle est en général une quartique, qui possède des branches infinies si le cercle rencontre le cercle circonscrit du triangle. Mais s'il passe par deux sommets du triangle, c'est un cercle qui passe par les deux mêmes sommets. La démonstration repose sur le théorème des arcs capables.

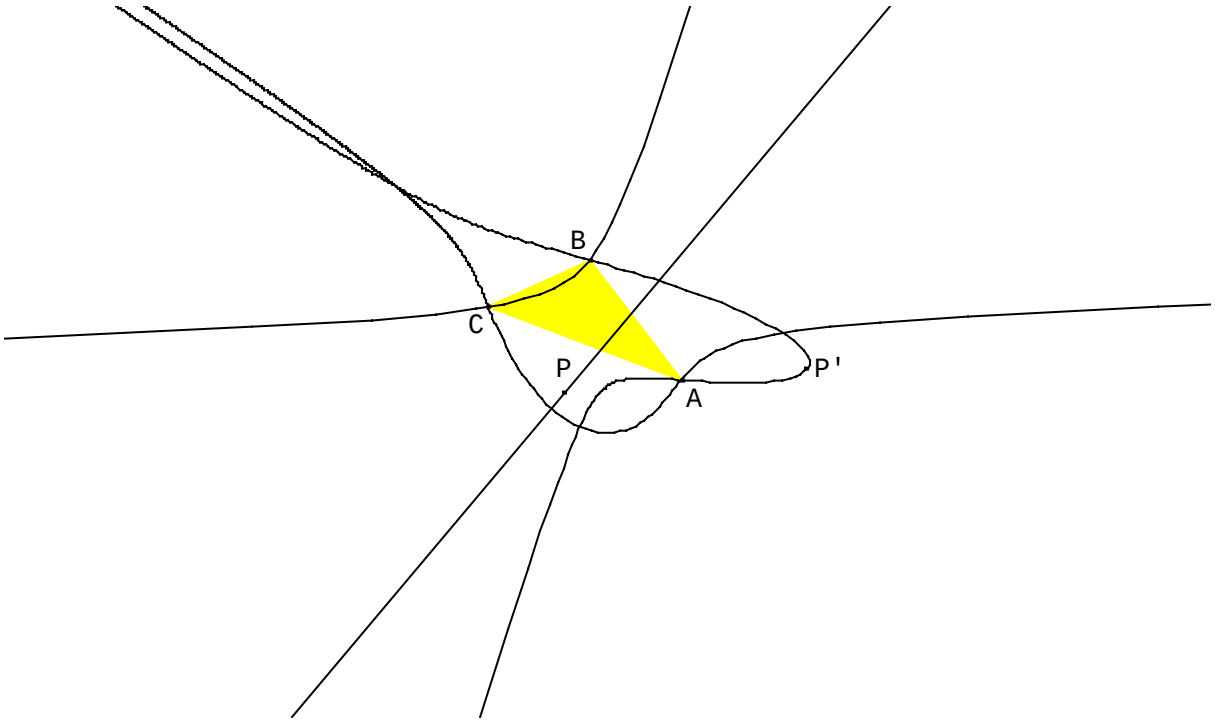
e) La transformation de Terquem :

Le théorème de Terquem est analogue à celui de Mathieu. Joignons un point P aux trois sommets d'un triangle ABC. Les droites (AP), (BP) et (CP) coupent les cotés (BC), (CA) et (AB) respectivement en P_1, P_2 et P_3. Le cercle circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$ recoupe les côtés du triangle ABC en P'_1, P'_2 et P'_3.

Le théorème de Terquem affirme que les droites (AP'_1), (AP'_2) et (AP'_3) concourent en un point P'. Ce point P' sera l'image de P par la transformation de Terquem.

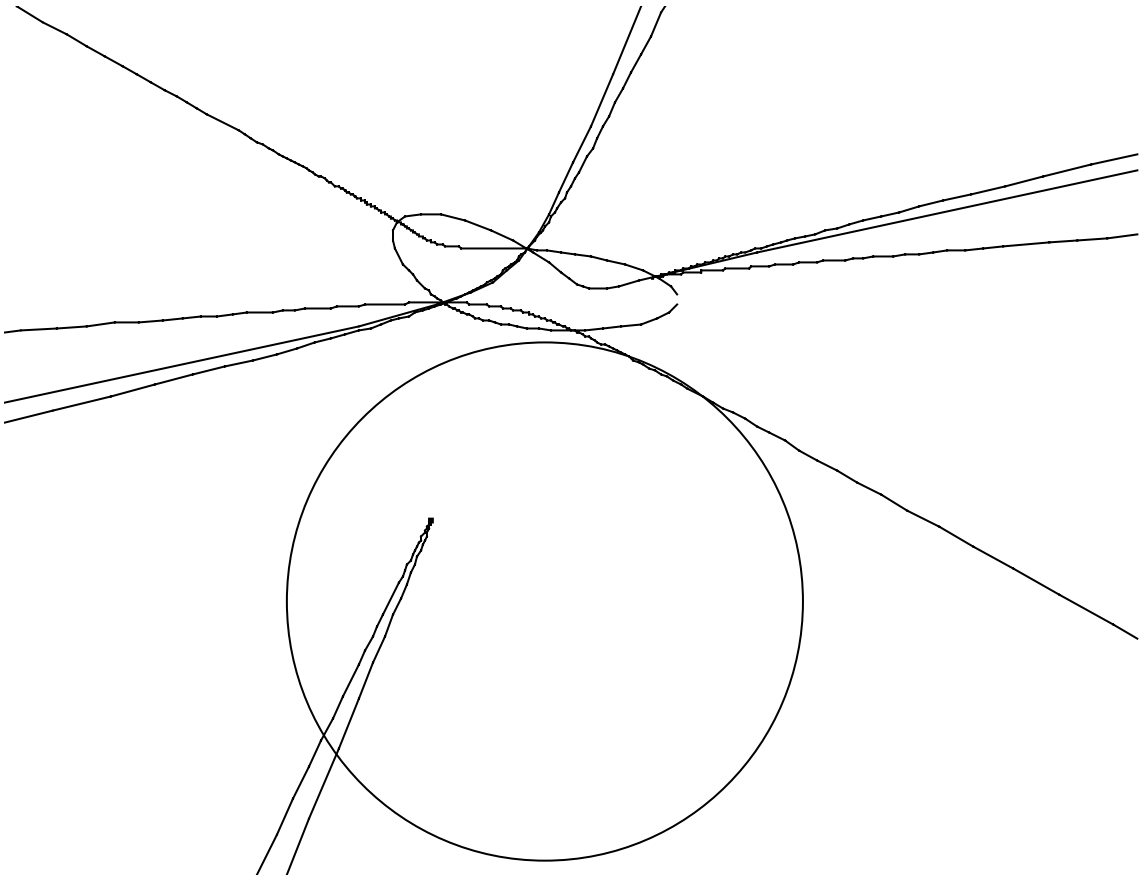
La démonstration résulte du théorème de Céva et de sa réciproque ainsi que des puissances des sommets du triangle ABC par rapport au cercle circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$.

Les transformées des droites sont beaucoup plus compliquées que pour la transformation de Mathieu, comme le montre la figure suivante où sont tracés le triangle, une droite et son image.



Evidemment, de telles transformations ne peuvent pas être étudiées par nos élèves. Par contre un logiciel de géométrie permet de leur en montrer les effets souvent inattendus. Le côté étrange et spectaculaire a des chances de capter leur attention et de susciter quelques questions.

A nous d'y répondre et d'en profiter pour développer leur intérêt pour la géométrie!



Et pour terminer, cette espèce de grillon n'est autre qu'un cercle et son image par la transformation de Terquem. A vous de deviner où se trouve le triangle de départ !