Jeux et Problèmes

Michel LAFOND

JEU - 50

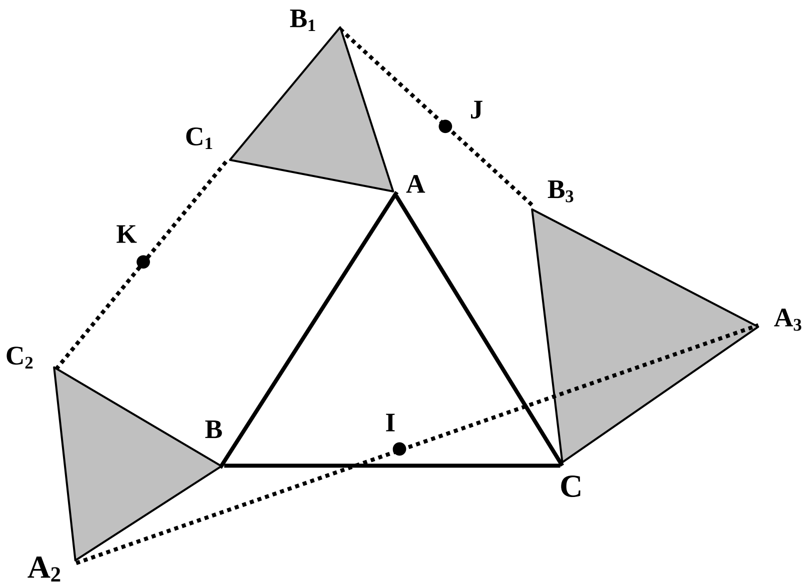
Un joueur A choisit 5 entiers naturels : (x1, x2, x3, x4, x5) = X.
Un joueur B essaie de deviner X.
Pour cela, B pose une question du genre Q = (a1, a2, a3, a4, a5).
A lui répond en lui donnant uniquement le résultat du produit scalaire :

$$a1.x1 + a2.x2 + a3.x3 + a4.x4 + a5.x5$$

Ensuite, B pose une autre question du genre Q = (b1, b2, b3, b4, b5).
A lui donne le résultat du produit scalaire : b1.x1 + b2.x2 + b3.x3 + b4.x4 + b5.x5 etc.
Quel est le nombre minimal de questions que B doit poser pour être certain de trouver X ?

PROBLÈME - 50

ABC est un triangle équilatéral quelconque.
AB_1C_1 (dans le même ordre que ABC) est un triangle équilatéral quelconque.
BC_2A_2 (dans le même ordre que ABC) est un triangle équilatéral quelconque.
CA_3B_3 (dans le même ordre que ABC) est un triangle équilatéral quelconque.
I est le milieu de A_2A_3 J est le milieu de B_1B_3 K est le milieu de C_1C_2.
Démontrer que IJK est un triangle équilatéral.



Solutions

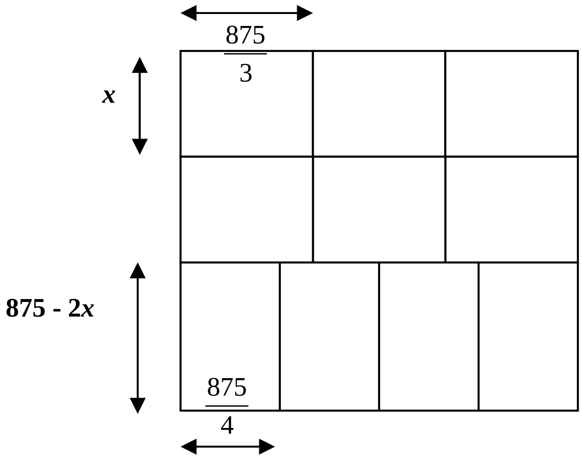
JEU - 49

Dans une zone carrée de 875 m de côté, placer 10 bornes téléphoniques de manière que tout point de la zone soit situé à moins de 200 m d'une borne.

__Solution :__

Si on arrive à paver le carré de côté 875 à l'aide de 10 rectangles de diagonale 400 ou moins, le problème est résolu, puisque tout point de l'intérieur d'un rectangle est situé à moins d'une demi diagonale d'un sommet.

Une idée est le pavage ci-dessous, dans lequel les 6 rectangles du haut ont pour dimensions x et $\frac{875}{3}$, et les 4 rectangles du bas ont pour dimensions 875-2x et $\frac{875}{4}$.



Les diagonales seront égales si $x^2 + \left(\frac{875}{3}\right)^2 = (875 - 2x)^2 + \left(\frac{875}{4}\right)^2$.

On en tire la seule solution inférieure à 875 : $x \approx 271{,}123$.

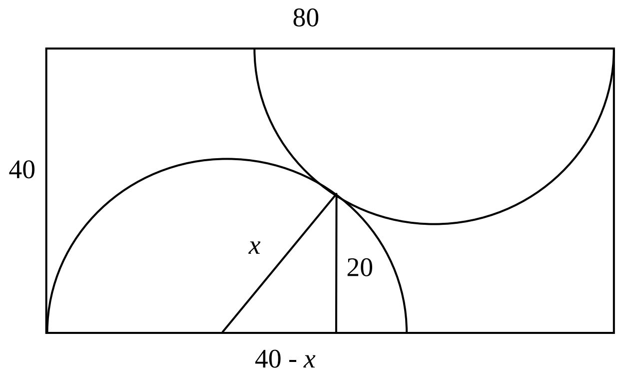
La diagonale commune vaut $D = \sqrt{x^2 + \left(\frac{875}{3}\right)^2} \approx 398{,}217$.

La demi diagonale vaut environ 199,109 qui est bien inférieure à 200.

PROBLÈME - 49

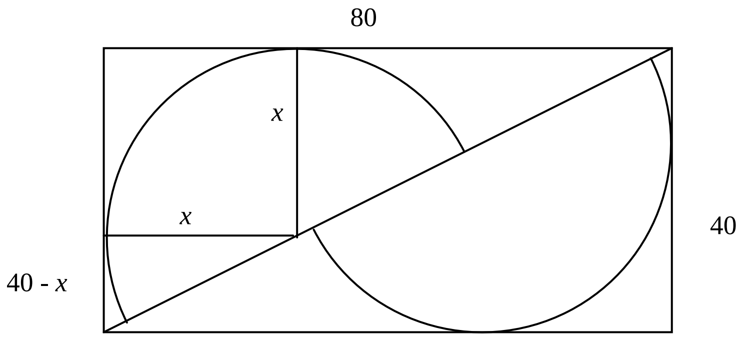
Dans un rectangle de 40×80 cm^2, comment placer sans empiètement, deux demi disques égaux de rayon 27 cm ?
Les premières idées qui viennent à l'esprit ne conviennent pas, il faut creuser davantage.

<u>Solution</u> :
La première idée ci-dessous donne (à l'aide de Pythagore) pour le rayon x des disques la valeur $x = 22{,}5$. C'est bien trop petit.

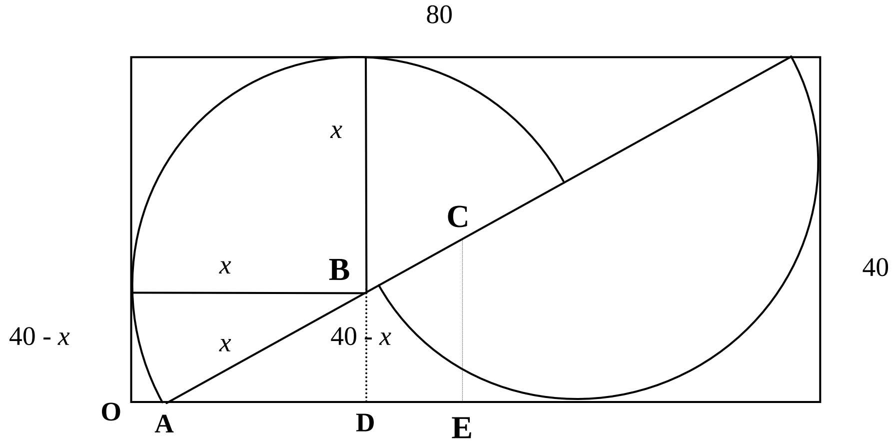


La deuxième idée fait intervenir la diagonale du rectangle. En utilisant Thalès, elle donne pour le rayon x des disques : $\frac{40 - x}{x} = \frac{1}{2}$ soit $x \approx 26{,}667$.

C'est mieux, mais encore trop petit ! Alors que faire ?



Et bien, on remarque que dans les coins, il y a un peu de place perdue, et cela débouche sur la troisième



(et bonne) idée (Remarquer la différence subtile par rapport à la figure précédente) :

Si C est le centre du rectangle, et x le rayon des disques,

Thalès donne : $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{CE}{AE}$

Or $AD = \sqrt{x^2 - (40-x)^2} = \sqrt{80x - 1600}$ implique OA = OD – DA = $x - \sqrt{80x-1600}$

Donc $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{40-x}{\sqrt{80x-1600}} = \dfrac{CE}{AE} = \dfrac{20}{40-OA} = \dfrac{20}{40-x+\sqrt{80x-1600}}$

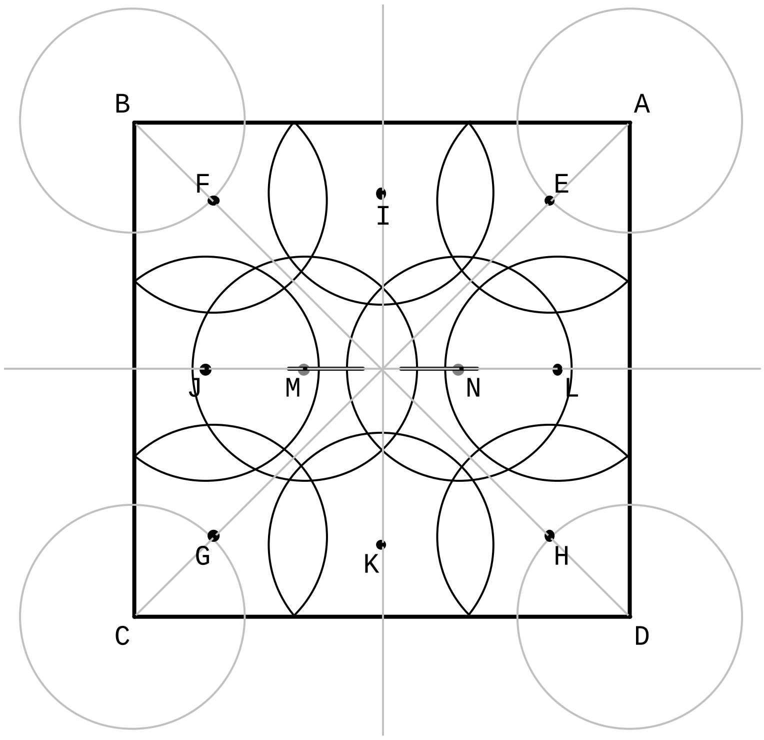
Le produit en croix donne après simplifications :
$x^2 - 80x + 1600 = \sqrt{80x-1600}\,(x-20)$ qui après élévation au carré donne :
$(x-40)^4 = (80x-1600)(x-20)^2$ ou encore :
$(x-40)^4 = 80(x-20)^3$

Cette équation peut, mais difficilement, se résoudre exactement par radicaux, mais une valeur approchée nous suffira : $\boldsymbol{x} \approx$ **27,055.**

Par conséquent, on peut bien découper deux demi disques de rayon 27.

Autres solutions : Monsieur BECKOWSKI a envoyé une solution au jeu 49 et une au problème 49, elles sont reproduites ci-dessous :

Jeu - 49



Le carré a un côté de 8,75 unités.
Les points intérieurs représentent les bornes.
Les cercles et les arcs de cercle ont tous un rayon de deux unités.
Les deux bornes centrales M et N peuvent être déplacées sur les segments représentés

Problème - 49

L'idée directrice est de construire un demi-cercle de rayon 2,7 tangent à deux côtés perpendiculaires du rectangle et de voir si son diamètre est tout entier dans le rectangle.

Prenons pour origine de repère O, le centre du rectangle, et pour axes ses médianes.
Le point O_1 de coordonnées $(1{,}3\,;-0{,}7)$ est à la même distance 2,7 de (AB) et de (AD).
La droite (OO_1), d'équation $0{,}7x+1{,}3y=0$, coupe la droite (CD), d'équation $y=-2$, au point I de coordonnées $\left(\frac{26}{7};-2\right)$ ou $\left(3{,}7+\frac{1}{70};-2\right)$ dont l'abscisse positive est inférieure à 4. Ce point I est donc sur le segment $[CD]$.

On a $O_1I^2=\left(3{,}7-1{,}3+\frac{1}{70}\right)^2+(-2+0{,}7)^2=\left(2{,}4+\frac{1}{70}\right)^2+1{,}3^2$ et donc $O_1I^2>2{,}4^2+1{,}3^2>2{,}7^2$.

En effet $2{,}4^2+1{,}3^2=7{,}65$ alors que $2{,}7^2=7{,}29$.
Il s'ensuit que le point I est extérieur au cercle de centre O_1 de rayon 2,7.
Le demi cercle cherché est centré en O_1. Il est tangent aux segments $[AB]$ et $[AD]$. Son diamètre est porté par la droite (OO_1).
Les positions de I, extérieur au diamètre, et O_1, sur $[OI]$, garantissent l'inclusion du diamètre dans le rectangle. **L'autre demi disque s'obtient par symétrie de centre *O*.**