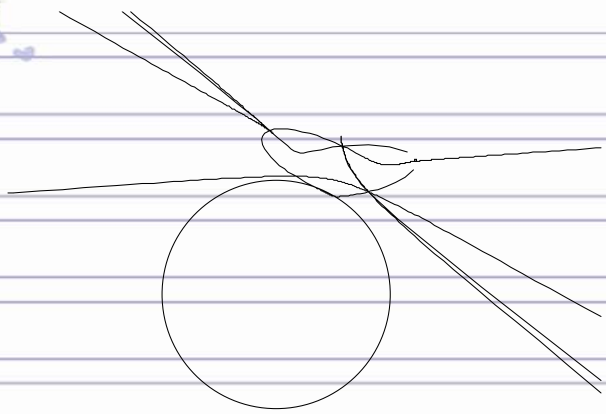
N° 100 – Juin 2006

# Feuille de Vigne

Irem de Dijon





Revue Trimestrielle

Issn 0246-5752

# Sommaire

MISE EN PAGE :
Françoise BESSE

COMITÉ DE RÉDACTION ET DE LECTURE :
Patrick GABRIEL
Michel LAFOND
Alain MASCRET
Frédéric METIN
Marie-Noëlle RACINE

RÉDACTEUR EN CHEF :
Patrick GABRIEL

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Patrick GABRIEL, Directeur de l'IREM

N° D'ENREGISTREMENT :
0411 B 07793

DÉPÔT LÉGAL :
n° 175 – 1ER semestre 2006

IMPRESSION :
Service Reprographie

**FEUILLE DE VIGNE**
Université de Bourgogne – UFR Sciences et Techniques
**IREM**
9 Avenue Alain Savary – BP 47870 – 21078 Dijon cedex
☎ 03 80 39 52 30 – Fax 03 80 39 52 39
@ : iremsecr@u-bourgogne.fr.
http://www.u-bourgogne.fr/irem

# *Editorial*

## *La Feuille de Vigne, une longue histoire...*

*Numéro 100 ! Eh oui, le temps passe !*

*Mais pourquoi ce titre la "Feuille de Vigne" ? L'IREM de Dijon a été ouvert le 1<sup>er</sup> septembre 1974 sous la direction de Jean Arbault, et dans les ADIREM*[1] *on avait constaté que des IREM plus anciens éditaient un journal interne. Grenoble avait sa "Feuille de choux", d'où l'idée venue à Jean Arbault : à Dijon, ce ne sera pas une "feuille de choux", mais bien évidemment une "feuille de vigne" et... le titre est resté !*

*Qu'y avait-t-il dans le numéro 1 du 1er octobre 1976 ? J'avoue ne plus m'en souvenir, mais avec des hauts et des bas, avec différents formats, notre* Feuille de Vigne *a suivi son petit bonhomme de chemin. Elle a ainsi crée un lien entre tous ceux qui de près ou de loin participent ou s'intéressent aux activités de notre IREM.*

*Si la* Feuille de Vigne *a survécu, on le doit à plusieurs collègues dévoués qui se sont succédés. Je citerai, en espérant ne pas en oublier, Roland Durier, deuxième Directeur après Jean Arbault, puis Gérard Bouillot, Michel Bridenne, Robert Ferachoglou, Richard Beczkowski, etc. Sans leur pugnacité, leur incitation permanente à fournir des articles, qu'en serait-il aujourd'hui ?*

*Mais, pour qu'une publication dure, il faut bien sûr des rédacteurs en chef efficaces mais il faut aussi des "techniciens" et là rendons un immense hommage à Françoise Besse qui tout au long de ces trente années en a été la cheville ouvrière pour la conception et la mise en page, et puis n'oublions pas l'excellent travail des "imprimeurs" d'abord Jean-Pierre Lallemand puis Jacqueline Alexandre.*

*Ah, j'allais oublier, sans doute le plus important, pour qu'il y ait un journal, il faut... des articles !*

*Il n'est pas question de citer tous les auteurs, il y en a tellement eu, ils auront droit à toute notre reconnaissance.*

*J'évoquerai cependant quelques noms comme Daniel Reisz, fidèle à l'IREM depuis sa création d'abord comme animateur puis comme IPR, ou encore Henry Plane qui nous a fait apprécier l'Histoire des Mathématiques, un numéro spécial de la* Feuille de Vigne *lui avait rendu hommage lors de son départ en retraite. N'oublions pas non plus les traditionnels jeux de Michel Lafond.*

*Grâce à tous ces "cerveaux", notre* Feuille de Vigne *n'a cessé de se bonifier tout au long de ces années.*

*Malgré les menaces qui pèsent sur les IREM, même si cela fait plus de vingt ans que ces menaces planent, je souhaite encore longue vie à la* Feuille de Vigne ; *c'est d'ailleurs peut être grâce à elle que l'IREM pourra continuer à assurer ses missions.*

*François MARCHIVIE*[2]

[1] Assemblée des Directeurs d'IREM

[2] Directeur Adjoint de 1974 à 1980 puis Directeur de 1980 à 1983 et de 1988 à 1995.

# Jeux et Problèmes

*Michel LAFOND*

**JEU - 50**

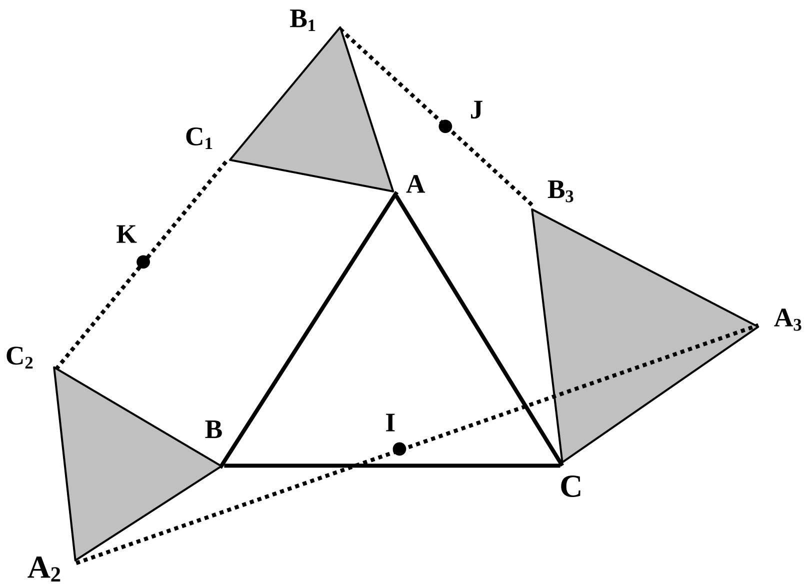
Un joueur A choisit 5 entiers naturels : (x1, x2, x3, x4, x5) = X.
Un joueur B essaie de deviner X.
Pour cela, B pose une question du genre Q = (a1, a2, a3, a4, a5).
A lui répond en lui donnant uniquement le résultat du produit scalaire :

$$a1.x1 + a2.x2 + a3.x3 + a4.x4 + a5.x5$$

Ensuite, B pose une autre question du genre Q = (b1, b2, b3, b4, b5).
A lui donne le résultat du produit scalaire : b1.x1 + b2.x2 + b3.x3 + b4.x4 + b5.x5 etc.
Quel est le nombre minimal de questions que B doit poser pour être certain de trouver X ?

**PROBLÈME - 50**

ABC est un triangle équilatéral quelconque.
$AB_1C_1$ (dans le même ordre que ABC) est un triangle équilatéral quelconque.
$BC_2A_2$ (dans le même ordre que ABC) est un triangle équilatéral quelconque.
$CA_3B_3$ (dans le même ordre que ABC) est un triangle équilatéral quelconque.
I est le milieu de $A_2A_3$ J est le milieu de $B_1B_3$ K est le milieu de $C_1C_2$.
Démontrer que IJK est un triangle équilatéral.




***Solutions***

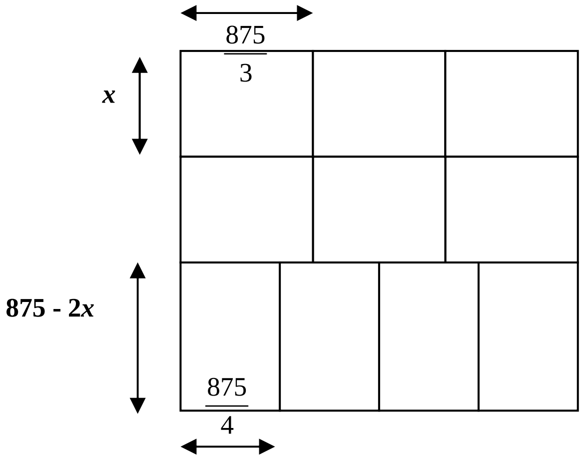
**JEU - 49**

Dans une zone carrée de 875 m de côté, placer 10 bornes téléphoniques de manière que tout point de la zone soit situé à moins de 200 m d'une borne.

**<u>Solution :</u>**

Si on arrive à paver le carré de côté 875 à l'aide de 10 rectangles de diagonale 400 ou moins, le problème est résolu, puisque tout point de l'intérieur d'un rectangle est situé à moins d'une demi diagonale d'un sommet.

Une idée est le pavage ci-dessous, dans lequel les 6 rectangles du haut ont pour dimensions $x$ et $\frac{875}{3}$, et les 4 rectangles du bas ont pour dimensions 875-2$x$ et $\frac{875}{4}$.




Les diagonales seront égales si $x^2 + \left(\frac{875}{3}\right)^2 = (875-2x)^2 + \left(\frac{875}{4}\right)^2$.

On en tire la seule solution inférieure à 875 : $x \approx$ 271,123.

La diagonale commune vaut D = $\sqrt{x^2 + \left(\frac{875}{3}\right)^2} \approx 398,217$.

La demi diagonale vaut environ 199,109 qui est bien inférieure à 200.

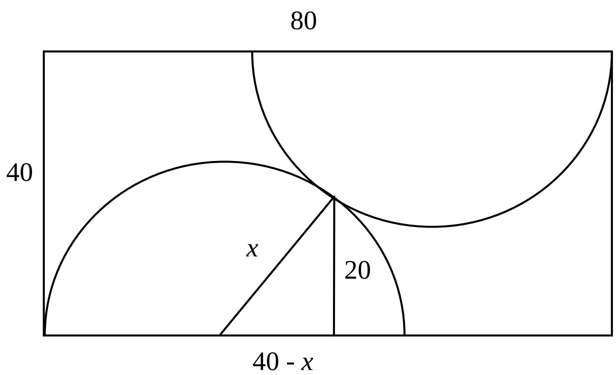
**PROBLÈME - 49**

Dans un rectangle de $40 \times 80$ cm$^2$, comment placer sans empiètement, deux demi disques égaux de rayon 27 cm ?

Les premières idées qui viennent à l'esprit ne conviennent pas, il faut creuser davantage.

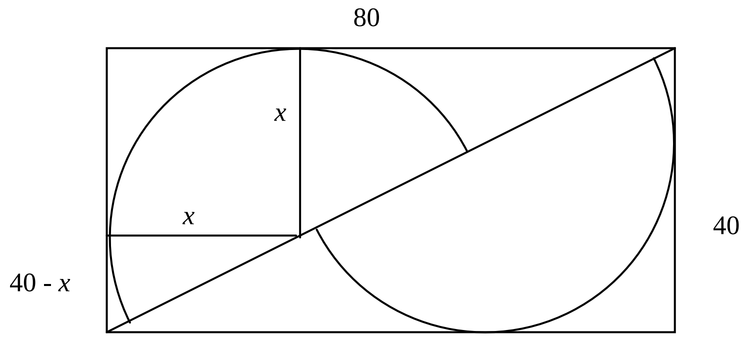
**<u>Solution</u>** :

La première idée ci-dessous donne (à l'aide de Pythagore) pour le rayon $x$ des disques la valeur $x = 22,5$. C'est bien trop petit.

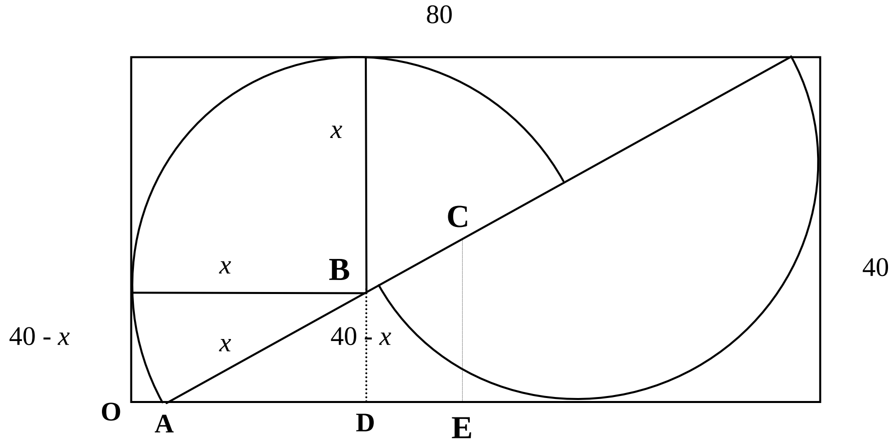



La deuxième idée fait intervenir la diagonale du rectangle. En utilisant Thalès, elle donne pour le rayon $x$ des disques : $\frac{40-x}{x} = \frac{1}{2}$ soit $x \approx 26,667$.

C'est mieux, mais encore trop petit ! Alors que faire ?




Et bien, on remarque que dans les coins, il y a un peu de place perdue, et cela débouche sur la troisième




(et bonne) idée (Remarquer la différence subtile par rapport à la figure précédente) :

Si C est le centre du rectangle, et $x$ le rayon des disques,

Thalès donne : $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{CE}{AE}$

Or $AD = \sqrt{x^2 - (40-x)^2} = \sqrt{80x - 1600}$ implique OA = OD – DA = $x - \sqrt{80x-1600}$

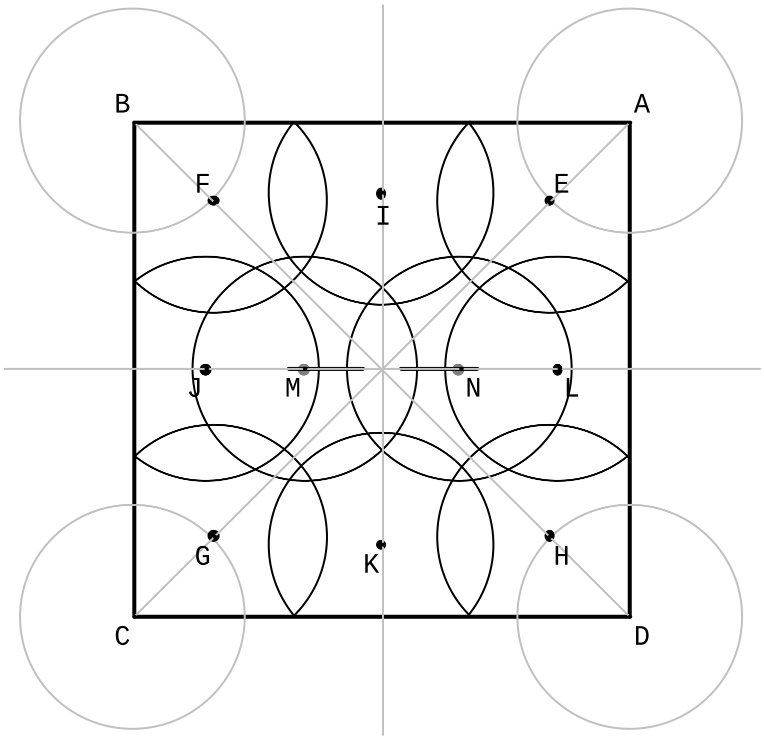
Donc $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{40-x}{\sqrt{80x-1600}} = \dfrac{CE}{AE} = \dfrac{20}{40-OA} = \dfrac{20}{40-x+\sqrt{80x-1600}}$

Le produit en croix donne après simplifications :
$x^2 - 80x + 1600 = \sqrt{80x-1600}\,(x-20)$ qui après élévation au carré donne :
$(x-40)^4 = (80x-1600)(x-20)^2$ ou encore :
$(x-40)^4 = 80(x-20)^3$

Cette équation peut, mais difficilement, se résoudre exactement par radicaux, mais une valeur approchée nous suffira : $\boldsymbol{x \approx}$ **27,055.**

Par conséquent, on peut bien découper deux demi disques de rayon 27.

**Autres solutions** : Monsieur BECKOWSKI a envoyé une solution au jeu 49 et une au problème 49, elles sont reproduites ci-dessous :




### Jeu - 49

Le carré a un côté de 8,75 unités.
Les points intérieurs représentent les bornes.
Les cercles et les arcs de cercle ont tous un rayon de deux unités.
Les deux bornes centrales M et N peuvent être déplacées sur les segments représentés

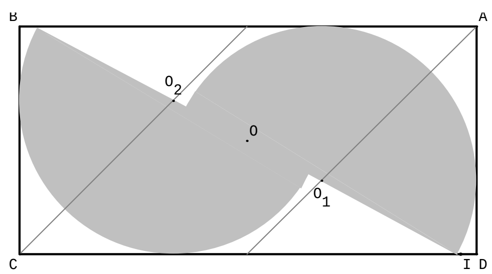
### Problème - 49

L'idée directrice est de construire un demi-cercle de rayon 2,7 tangent à deux côtés perpendiculaires du rectangle et de voir si son diamètre est tout entier dans le rectangle.

Prenons pour origine de repère O, le centre du rectangle, et pour axes ses médianes.
Le point $O_1$ de coordonnées $(1{,}3\,;-0{,}7)$ est à la même distance 2,7 de $(AB)$ et de $(AD)$.
La droite $(OO_1)$, d'équation $0{,}7x+1{,}3y=0$, coupe la droite $(CD)$, d'équation $y=-2$, au point $I$ de coordonnées $\left(\frac{26}{7};-2\right)$ ou $\left(3{,}7+\frac{1}{70};-2\right)$ dont l'abscisse positive est inférieure à 4. Ce point $I$ est donc sur le segment $[CD]$.

On a $O_1I^2=\left(3{,}7-1{,}3+\frac{1}{70}\right)^2+(-2+0{,}7)^2=\left(2{,}4+\frac{1}{70}\right)^2+1{,}3^2$ et donc $O_1I^2>2{,}4^2+1{,}3^2>2{,}7^2$.

En effet $2{,}4^2+1{,}3^2=7{,}65$ alors que $2{,}7^2=7{,}29$.
Il s'ensuit que le point $I$ est extérieur au cercle de centre $O_1$ de rayon 2,7.
**Le demi cercle cherché est centré en $O_1$. Il est tangent aux segments $[AB]$ et $[AD]$. Son diamètre est porté par la droite $(OO_1)$.**
Les positions de $I$, extérieur au diamètre, et $O_1$, sur $[OI]$, garantissent l'inclusion du diamètre dans le rectangle. **L'autre demi disque s'obtient par symétrie de centre *O*.**



# De l'usage des aires

*Henry PLANE, un des rédacteurs depuis le numéro 1*

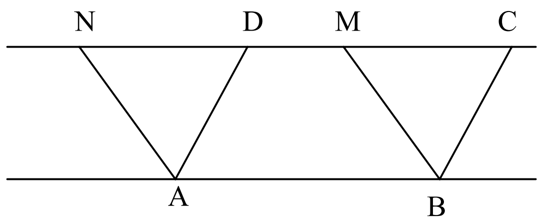
Résumé : *Utilisation d'aires pour démontrer ces deux colonnes du Temple Mathématique que sont le théorème de Pythagore et celui de Thalès ! Démonstration de la relation de Pythagore en s'inspirant de Pappus.*

Mots clés : *Théorème de Pythagore ; Pappus ; aires ; Théorème de Thalès.*

Maints résultats de base en géométrie plane peuvent être établis simplement en usant de la notion d'aire et même, le plus souvent sans évaluer celle-ci.
En voici deux exemples.

## *Avec l'égalité*

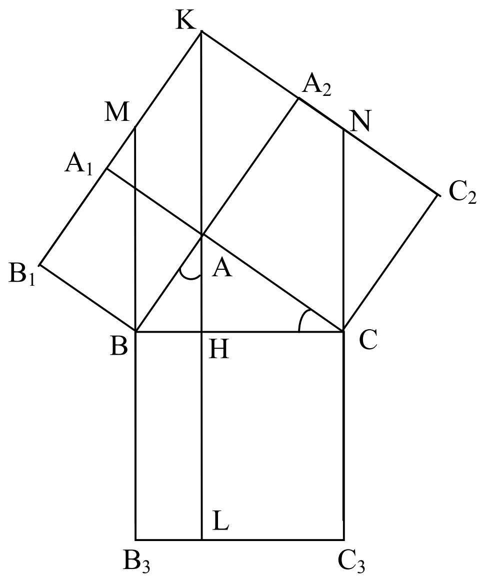
Dans une bande entre deux parallèles, les parallélogrammes de même base ont même aire.




On dira, par exemple : $(ABCD)$-$(BCM)+(ADN) = (ABMN)$, par simple addition, ou soustraction selon les cas, de figures égales dont l'aire n'a pas été évaluée.

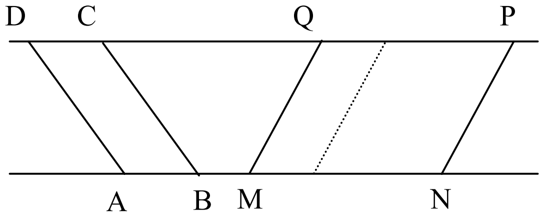
***<u>PYTHAGORE, en s'inspirant de PAPPUS :</u>***

Soient : triangle ABC rectangle en A, $ABB_1A_1$ et $ACC_2A_2$ les carrés construits sur AB et AC.
Les droites $(A_1 B_1)$ et $(A_2C_2)$ se coupent en K.
(AK) recoupe (BC) en H et les parallèles à (AK) issues de B et C recoupent, la première, $(A_1 B_1)$ en M, et la seconde, $(A_2C_2)$ en N.
Sur ces trois parallèles on définit les points $B_3$, L et $C_3$ tels que $BB_3 = HL = CC_3 = KA$.
Les triangles ABC et $A_2KA$ sont égaux, donc AK = BC et $\widehat{KAA_2} = \widehat{BCA}$.
Puisque $\widehat{HAB} = \widehat{KAA_2}$, il est complémentaire de $\widehat{ABH}$ (complémentaire de $\widehat{BCA}$) et donc $\widehat{AHB}$ est droit. $BB_3C_3$ est un carré.
Alors, avec les aires
$(ABB_1A_1) = (ABMK) = (LHBB_3)$ et
$(ACC_2A_2) = (ACNK) = (LHCC_3)$
$(ABB_1A_1) + (ACC_2A_2) = (LHBB_3) + (LHCC_3) = (BCC_3B_3)$



## *Avec les rapports*

Dans une bande de deux droites parallèles, le rapport des aires de deux parallélogrammes est égal à celui de leurs bases.



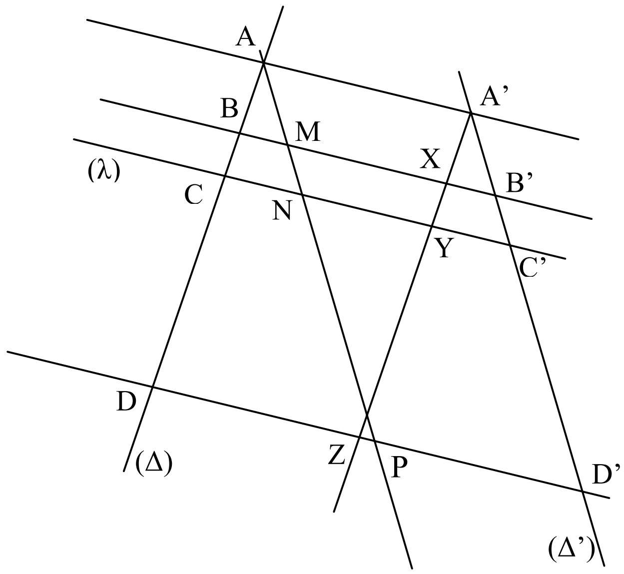

$$\frac{(ABCD)}{(MNPQ)} = \frac{AB}{MN}$$

Que ce rapport soit dans $\mathbb{Q}$ ou dans $\mathbb{R}$ il n'y a rien à ajouter à ce qui fut fait au sujet des longueurs.

***<u>Le "Théorème rayonnant".</u>***

En Allemagne il est appelé "strahensatz", en France le nom de THALES lui a été associé en 1882.

Deux droites $(\Delta)$ et $(\Delta')$ sont coupées par quatre parallèles $(\lambda)$ respectivement en $A$, $B$, $C$, $D$ et $A'$, $B'$, $C'$ et $D'$.
La parallèle à $(\Delta')$ menée par A recoupe les parallèles $(\lambda)$ en $M$, $N$ et $P$.
La parallèle à $(\Delta)$ menée par A' recoupe les parallèles $(\lambda)$ en $X$, $Y$, $Z$.




Il est ainsi créé quatre parallélogrammes deux à deux égaux :

$(ABXA') = (AMB'A')$ et $(CDZY) = (NPD'C')$ de bases égales à AA'.

Dans les bandes de direction $(\Delta)$, puis $(\Delta')$ il est possible d'écrire

$$\frac{AB}{CD} = \frac{(ABXA')}{(CDZY)} = \frac{(AMB'A')}{(NPD'C')} = \frac{A'B'}{C'D'}.$$

Tous les cas particuliers sont acceptés : $(\Delta)$ et $(\Delta')$ sécantes sur la figure, deux droites $(\lambda)$ confondues...
Que n'a-t-on orienté plus tôt les aires ! ...

Et ainsi peuvent être reliées deux colonnes du Temple Mathématique.

# *Création aléatoire de labyrinthes*

*Sébastien COURAULT, sebastiencourault@hotmail.fr*
*Claude ROUGEOL, clauderougeol@hotmail.com*
*Master MIGS 2ème Année 2005/06*

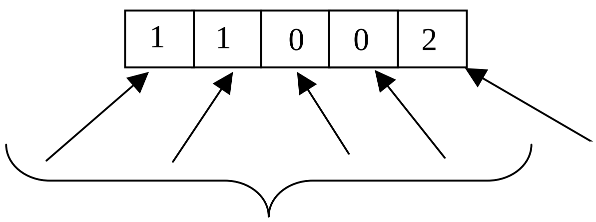
Résumé : *Deux étudiants en master expliquent brièvement comment ils ont mis au point un logiciel permettant de créer des labyrinthes.*

Mots clés : *Labyrinthe ; création de labyrinthes.*

Dans le cadre de notre cursus à l'Université de Bourgogne, nous avons programmé pour le projet de 2ème année de Master MIGS un logiciel permettant la création aléatoire de labyrinthe. Nous allons vous exposer notre méthode.

Tout d'abord, nous symbolisons l'environnement par une matrice en 3 dimensions de taille n*m*5, n*m étant la taille du labyrinthe. Ainsi chaque point du labyrinthe contiendra l'information de lien avec ses voisins :

Exemple pour le point en haut à gauche (au départ) on n'a que deux directions possibles : droite ou bas.

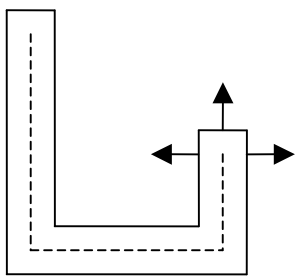



Nombre de 1 dans le tableau

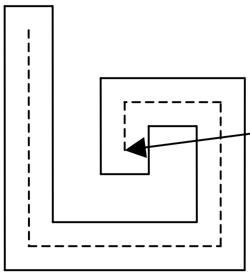
Liens possibles vers un point voisin :
[droite, bas, gauche, haut]
code 1 : lien possible, 0 sinon

Ce tableau est ajouté pour améliorer la rapidité.

Pour créer le labyrinthe, on commence à un point donné, puis on crée aléatoirement un lien vers un voisin possible, en remplaçant le 1 par un 0. Puis on enregistre l'information entre les 2 points que l'on vient de « lier » dans un graphe bidirectionnel.
Ainsi, en un point donné, on a *k* possibilité(s) de direction(s) différente(s). On choisit la direction par une fonction aléatoire. On imagine alors aisément pondérer les directions pour avoir des formes de labyrinthes voulues : si on préfère avoir de « grands couloirs », il faudra alors avantager le même sens que la direction précédente, ou au contraire, si on préfère un labyrinthe sinueux, il faudra donc plutôt désavantager la direction précédente.



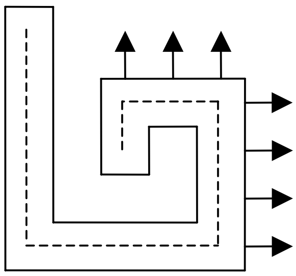
On continue jusqu'à être bloqué (ou avoir rempli tout l'espace), comme dans l'exemple suivant :



Dans ce cas, il ne reste plus de direction possible

pour continuer le chemin déjà créé :

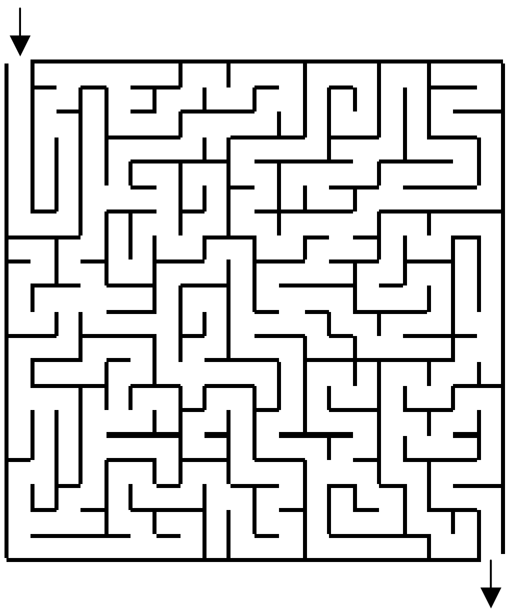
Alors, on énumère le nombre de directions possibles sur tout le chemin



Dans cet exemple, on a 7 possibilités pour repartir dans une direction.

On choisit alors aléatoirement la nouvelle, et on continue.

On répète ces étapes jusqu'à voir rempli l'espace du labyrinthe. On obtient alors un graphe connexe et sans boucle. Il reste alors à construire le « dual » du graphe, afin de modéliser les murs, ce qui nous donne par exemple :



* Le programme effectuant de tels labyrinthes sera prochainement activé sur le site de l'IREM.

# *Des transformations qui transforment !*

*Alain MASCRET, Collège La Champagne, Gevrey-Chambertin*

Les transformations géométriques au programme du collège conservent l'alignement, les longueurs, les angles, les aires, les milieux, le parallélisme et l'orthogonalité. Ce sont des isométries et même, à part la symétrie axiale, des déplacements.

Nous insistons sur les propriétés de conservation, car ces propriétés sont souvent utiles dans les démonstrations, cependant, pour l'élève, ces transformations ne transforment pas. La figure image ressemble trop à la figure de départ. Il risque également de croire que toutes les transformations possèdent les propriétés de conservation que nous avons l'habitude de lui faire énumérer. De plus, cette énumération apparaîtra souvent comme un rituel vide de sens, une lubie de prof de math !

*Si nous voulons que l'élève perçoive le sens et l'intérêt de ces propriétés, il faut lui montrer des transformations qui ne les possèdent pas, et ceci, le plus tôt possible, dès la sixième.* Ce travail fournit l'occasion de mesurer des longueurs, des angles et des aires. Il permet également une approche de la notion de contre-exemple et de preuve.

### *1) Activités en sixième ou « Croyez-vous au Père Noël ? » :*

Les activités décrites ici ayant lieu en décembre, c'est le Père Noël qui va se prêter au jeu des transformations.

Les points sont définis par leurs coordonnées.

| | | |
|---|---|---|
| A (4 ; 12) | B (4 ; 9) | C (8 ; 9) |
| D (5 ; 5) | E (6 ; 1) | F (0 ; 2) |
| G (2 ; 8) | H (2 ; 9) | I (1,5 ; 9) |
| J (2 ; 10) | | |

L'élève trace ensuite les triangles ABJ, BCD, le quadrilatère BEFG et le pentagone GHIJB.

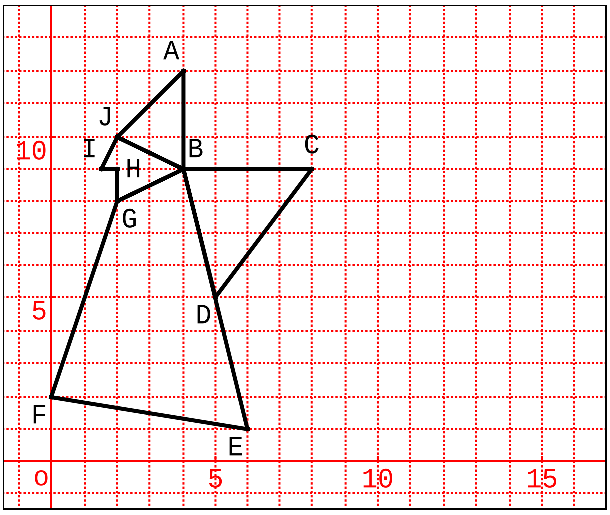



Figure de départ (n° 0)

Les transformations géométriques sont définies par un calcul à effectuer sur les coordonnées des points de la figure de départ. Le calcul doit n'offrir aucune difficulté.

Les élèves tracent une figure par feuille ce qui leur permet de comparer facilement la figure transformée et la figure de départ.

Figure n° 1 :

$$x_1 = 2 \times x$$
$$y_1 = y$$

Les élèves remarquent, en mesurant, que certaines longueurs sont doublées, comme BC et que d'autres ne changent pas, comme AB. C'est le moment de préciser qu'il suffit qu'une longueur change pour que la transformation ne conserve pas les longueurs. En général, les longueurs sont multipliées par un nombre compris entre 1 et 2.

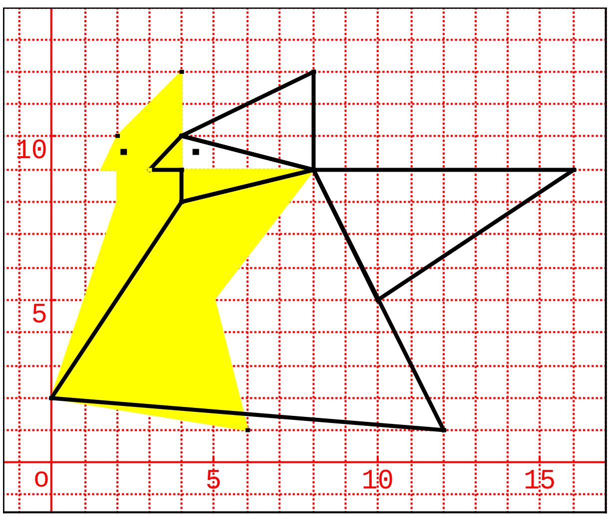



Figure n° 1

De même certains angles augmentent, comme $\widehat{BDC}$ alors que d'autres diminuent, comme $\widehat{BCD}$ ou encore ne changent pas comme $\widehat{ABC}$.

Ils vérifient également que les aires semblent être doublées. Le quadrilatère BEFG posant un problème, une méthode efficace pour évaluer les aires doit être donnée.

Figure n°2 :

$$x_2 = x$$
$$y_2 = 2 \times y$$

La transformation est visiblement du même type que la précédente. (figure non reproduite).

Figure n°3 :

$$x_3 = 2 \times x$$
$$y_3 = 2 \times y$$

C'est la composition des deux transformations déjà rencontrées.

Les longueurs semblent être doublées.

Les aires semblent être multipliées par quatre (et non par deux, ce qui surprend les élèves).

Et surtout les angles semblent être conservés. Les élèves perçoivent que la figure n'est pas déformée, mais simplement agrandie. C'est ce qui se passe, par exemple, sur une photographie. On reconnaît les personnages et les objets bien que leur taille soit différente. *L'absence de déformation correspond en mathématiques à la conservation des angles*.

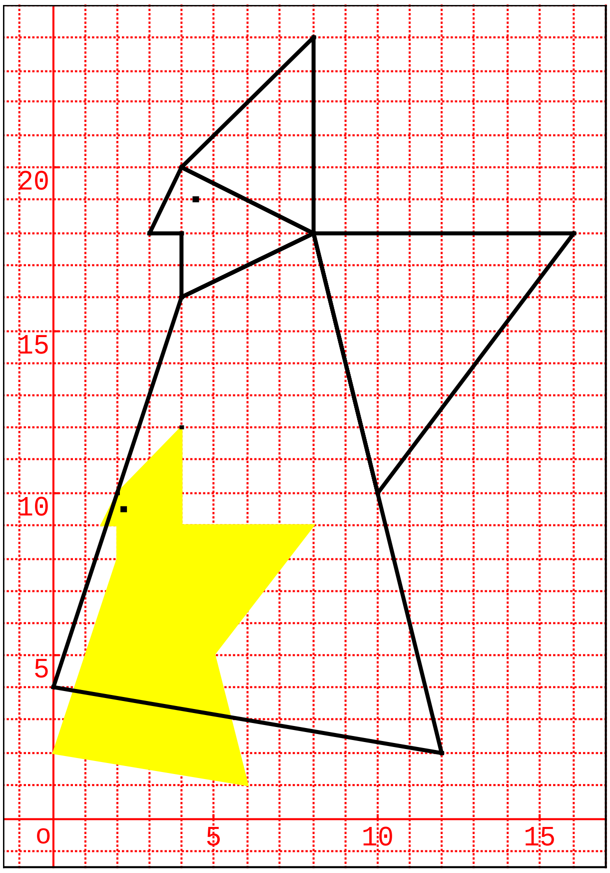


Figure n°3

Il peut être intéressant de parler de points invariants à l'aide des exemples précédents. La transformation 1 admet une droite de points invariants : l'axe des ordonnées. De la même façon, la transformation 2 admet une droite de points invariants : l'axe des abscisses. La transformation 3, qui est la composée des deux précédentes admettra l'intersection de ces deux droites comme point invariant. C'est d'ailleurs le seul.

Nous retrouverons une droite de points invariants en étudiant la symétrie axiale et, si nous présentons la symétrie centrale comme une composition de deux symétries axiales d'axes perpendiculaires, le raisonnement précédent nous donnera le point invariant de la symétrie centrale.

Après avoir vu ces transformations, rien n'empêche, d'ailleurs, d'introduire de la même façon, les transformations que l'on étudiera au collège. Elles apparaîtront ainsi à l'élève comme faisant partie de la même famille.

Figure n°4 : la symétrie axiale

$$x_4 = 16 - x$$
$$y_4 = y$$

Figure n°5 : la translation

$$x_5 = \mathbf{x} + 4$$
$$y_5 = y + 7$$

Figure n°6 : la symétrie centrale

$$x_6 = 14 - x$$
$$y_6 = 22 - y$$

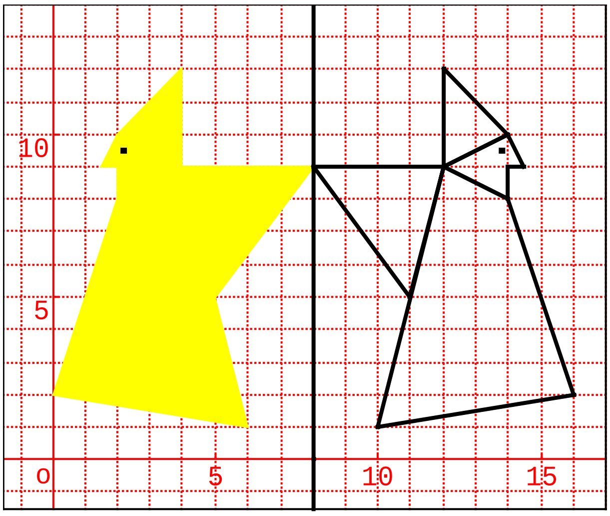


Figure n°4

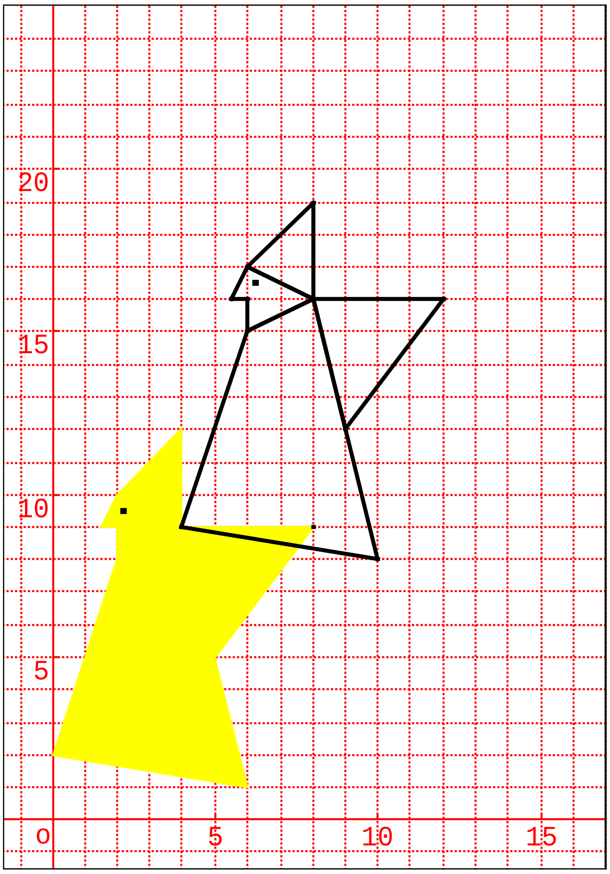


Figure n°5

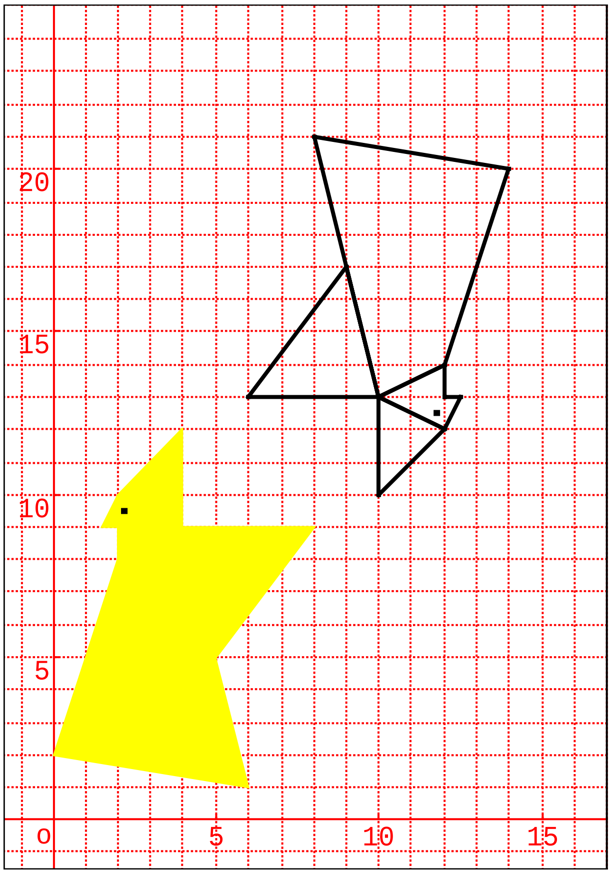


Figure n°6

Voici un autre exemple :

Figure n°7 :

$$x_7 = y + 3$$
$$y_7 = x + 7$$

Ici le Père Noël a tourné. Comme pour la figure n°3, il n'est pas déformé. L'élève peut vérifier que les angles semblent conservés et que les aires semblent avoir été doublées.
D'après la remarque faite sur la figure n°3, il peut se demander par quel nombre sont multipliées les longueurs…

Il peut voir également que la figure n°7 est orientée dans le sens contraire de la figure de départ. Bien qu'absente des programmes, la notion d'orientation est importante. Elle est perçue de façon intuitive par l'élève.

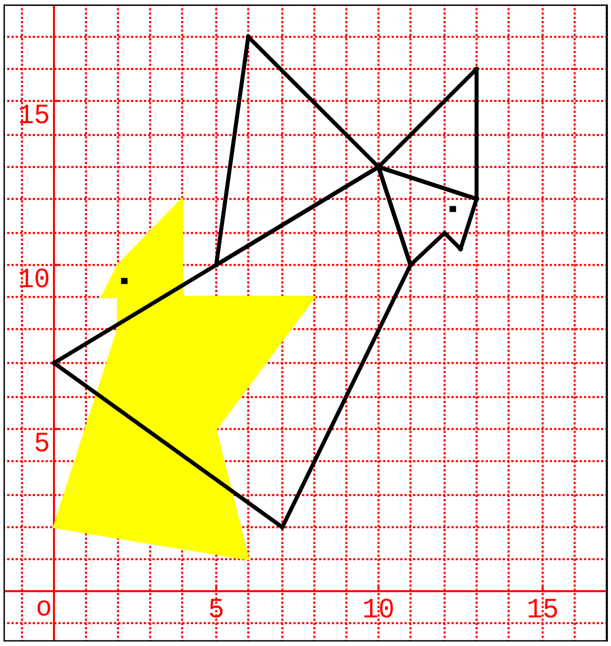


Figure n°7

Par exemple, sur la figure de départ, on amène la demi-droite [BA) sur la demi-droite [BC) en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre. Sur la figure n°7, on doit tourner dans l'autre sens. La transformation n°7 ne conserve donc pas l'orientation des angles.

La même remarque sera faite lors de l'étude de la symétrie axiale.

Enfin, il semble important de montrer aux élèves qu'une transformation géométrique ne conserve pas forcément l'alignement des points.

Figure n°8 :

$$x_8 = x \times x : 6$$
$$y_8 = y \times y : 6$$

Jusque maintenant, nous avons admis implicitement que l'alignement était conservé par les transformations utilisées. L'élève, qui traite cet exercice comme les précédents, va s'apercevoir que les images des points B, D et E ne sont pas alignées, alors que B, D et E le sont sur la figure de départ.

Ceci nous amène à faire tracer la figure n°8 par un logiciel de géométrie qui nous montrera de façon visible qu'en général, les droites ne sont pas transformées en des droites.

L'élève remarque facilement que cette fois, il a fallu multiplier les abscisses et les ordonnées entre elles pour obtenir ce résultat.

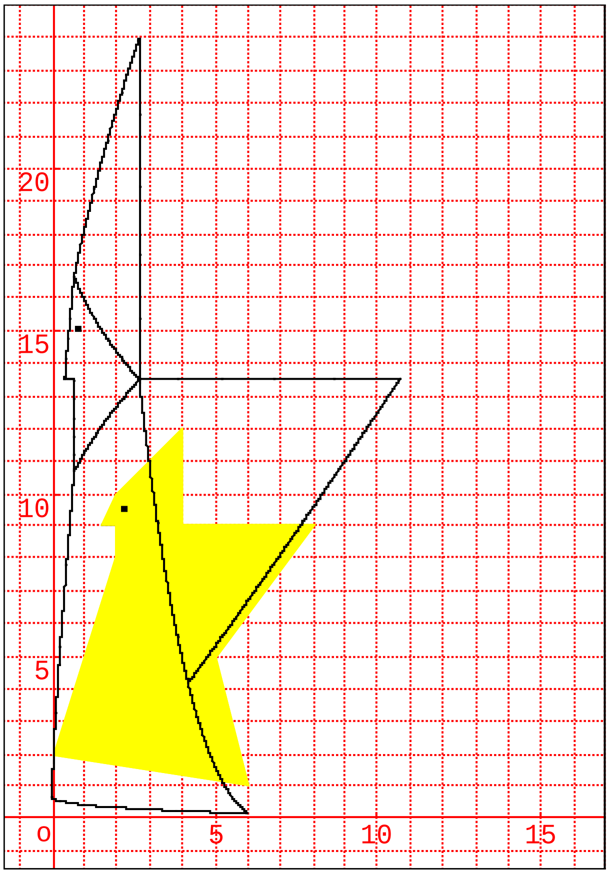


Figure n°8

## *2) Relations entre les propriétés de conservation :*

Certains élèves s'aperçoivent que les transformations proposées ci-dessus, à part la transformation n°8, conservent toujours les milieux. Un élève de troisième peut d'ailleurs le prouver. Comme elles conservent aussi l'alignement, la tentation est grande d'associer ces deux propriétés. Pourtant, une transformation peut très bien conserver l'alignement sans conserver les milieux (voir ci-dessous paragraphe 3d).

Le professeur doit éviter de transmettre implicitement des idées fausses. Tout au long de l'année et à différents niveaux, d'autres exemples pourront lui permettre de rectifier les idées fausses relevées. Comment fabriquer ces exemples?

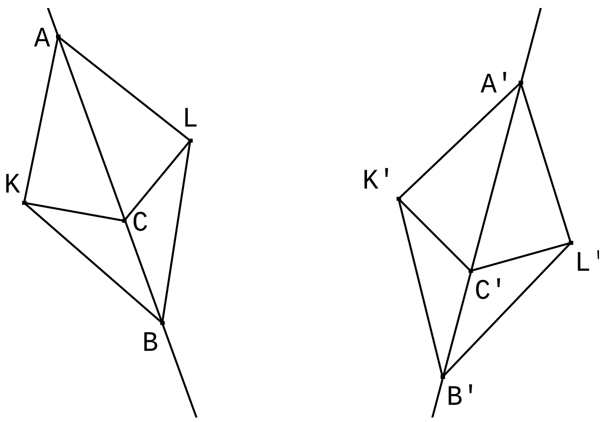
Avant tout, il est utile de préciser les liens qui existent entre les différentes propriétés de conservation.

Rappelons tout d'abord que la conservation des longueurs implique la conservation de l'alignement. La réciproque est fausse, il suffit de penser à une homothétie pour s'en convaincre. La démonstration de cette propriété peut se faire avec les connaissances d'un élève de sixième. (Je ne dis pas de donner cette démonstration en exercice en sixième).

Soient A, B, C trois points alignés. Considérons un point K, non situé sur la droite (AB) et son symétrique L, par rapport à (AB). Les points A, B et C sont sur la médiatrice de [KL] et l'on a AK = AL, BK = BL, CK = CL.

Appelons A', B', C', K' et L' les images respectives des points A, B, C, K, et L par la transformation considérée.

En raison de la conservation des longueurs, on



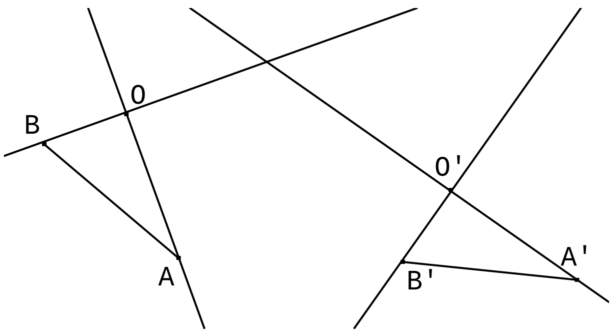
a A'K' = A'L', B'K' = B'L', C'K' = C'L'. Les points A', B' et C', qui sont sur la médiatrice de [K'L'], sont donc alignés.

*Nous supposerons désormais que toutes les transformations dont il sera question dans ce paragraphe conservent l'alignement des points.*

*a) La conservation des longueurs implique celle de l'orthogonalité :*

C'est une conséquence immédiate du théorème de Pythagore et de sa réciproque.

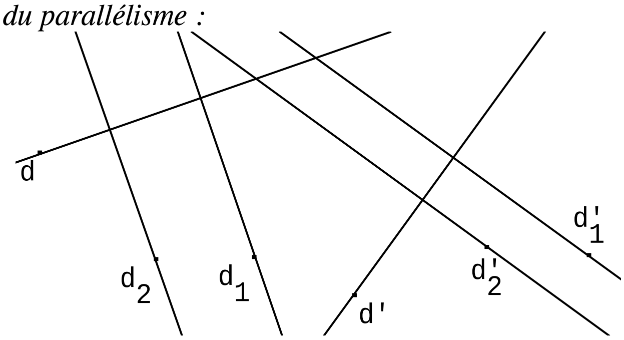
Etant données deux droites perpendiculaires $d_1$ et $d_2$, sécantes en O. Prenons un point A sur $d_1$, un point B sur $d_2$, et appelons $d'_1$, $d'_2$, A', B' et O' les images respectives de $d_1$, $d_2$, A, B et O par la transformation considérée.




Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABO : $AB^2 = OA^2 + OB^2$. En raison de la conservation des longueurs, on a aussi $A'B'^2 = O'A'^2 + O'B'^2$ et le triangle A'B'O' est rectangle en O'. Les droites $d'_1$ et $d'_2$ sont donc perpendiculaires.

*b) La conservation de l'orthogonalité implique celle du parallélisme :*

Si les droites $d_1$ et $d_2$ sont parallèles, traçons $d$ perpendiculicaire à $d_1$. La droite $d$ est aussi perpendiculaire à $d_2$.

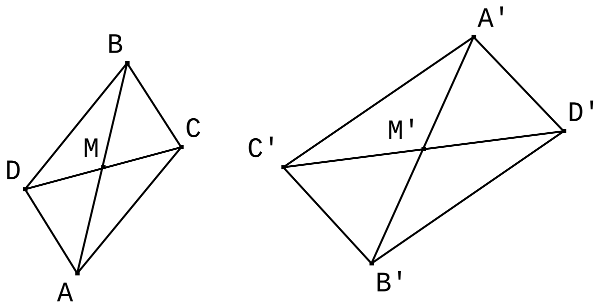



Soient $d'_1$, $d'_2$ et $d'$ les images respectives de $d_1$, $d_2$ et $d$ par la transformation considérée.

La droite $d'$ est perpendiculaire aux droites $d'_1$ et $d'_2$ qui sont donc parallèles.

*c) La conservation du parallélisme implique celle des milieux :*

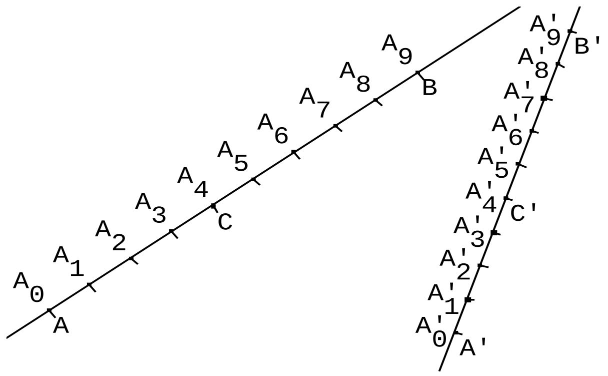
M étant le milieu d'un segment [AB], soit C un point non situé sur la droite (AB) et D son symétrique par rapport à M. Le quadrilatère ACBD est un parallélogramme. Soient A', B', C', D' et M' les images respectives de A, B, C, D et M par la transformation considérée. Le quadrilatère A'C'B'D' est un parallélogramme en raison de la conservation du parallélisme. Le point M étant l'intersection des diagonales (AB) et (CD) du parallélogramme ACBD, son image M' est l'intersection des diagonales de A'C'B'D'. M' est donc le milieu de [A'B'].




*d) La conservation des milieux implique la conservation du rapport des longueurs :*

Comme pour le théorème de Thalès, je me contente de démontrer ce résultat quand le rapport est rationnel et je l'admets s'il ne l'est pas. Soient trois points alignés A, B et C. Posons $k = \frac{AB}{AC}$ avec k *rationnel.* Comme $k$ est rationnel, il existe une longueur $AA_1$ et deux entiers r et s tels que AB = r $AA_1$ et AC = s $AA_1$. Autrement dit, si je prends $AA_1$ pour unité et A pour origine, l'abscisse de B est r, celle de

C est s et $k = \frac{r}{s}$. Plaçons les points $A_n$ d'abscisses entières n sur la droite (AB). On a : $A_0 = A$, $A_r = B$ et $A_s = C$ et, pour tout entier n, $A_{n+1}$ est le milieu du segment $[A_nA_{n+2}]$. Soient A', B', C' et $A'_n$ les images de A, B, C et $A_n$ par la transformation considérée. Comme cette transformation conserve les milieux, $A'_{n+1}$ est le milieu du segment $[A'_nA'_{n+2}]$. D'autre part $A'_0 = A'$, $A'_r = B'$ et $A'_s = C'$ donc, sur la droite (A'B'), munie du repère (A' ; $A'_1$), l'abscisse de B' est r celle de C' est s et l'on a : $\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{r}{s} = k$ .

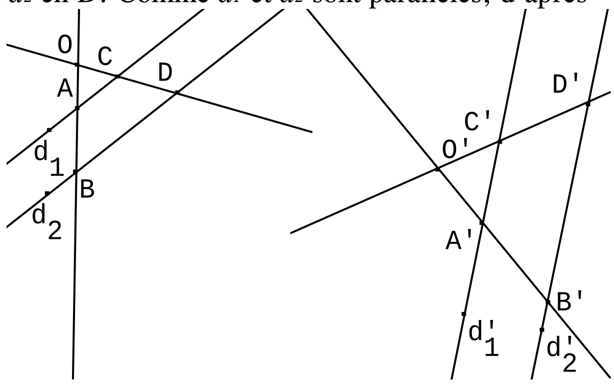



*e) La conservation du rapport des longueurs implique celle du parallélisme :*

C'est une conséquence immédiate du théorème de Thalès et de sa réciproque.

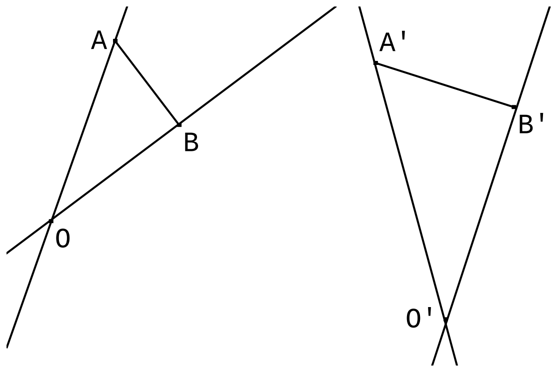
Soient deux droites $d_1$ et $d_2$. Par un point O non situé sur l'une d'elles, menons deux autres droites. L'une coupe $d_1$ en A et $d_2$ en B, l'autre coupe $d_1$ en C et $d_2$ en D. Comme $d_1$ et $d_2$ sont parallèles, d'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$.

Appelons $d'_1$, $d'_2$, A', B', C' et D' les images respectives de $d_1$, $d_2$, A, B, C et D par la transformation considérée. Les rapports de longueur étant conservés, on obtient $\frac{O'A'}{O'B'} = \frac{O'C'}{O'D'}$, ce qui prouve que les droites (A'C') et (B'D') sont parallèles, d'après la réciproque du théorème de Thalès.




*f) La conservation de l'orthogonalité équivaut à la conservation des angles :*

Etant données deux droites $d_1$ et $d_2$, sécantes en O. Prenons un point A de $d_1$ et sa projection orthogonale B sur $d_2$. L'angle saillant $\widehat{AOB}$ peut être défini par son cosinus : $\cos\widehat{AOB} = \frac{OB}{OA}$. Soient O', A' et B' les images respectives de A, B et C par la transformation considérée. L'orthogonalité étant conservée, le triangle A'O'B' est rectangle en B' et le rapport $\frac{OB}{OA}$ est aussi conservé (voir paragraphe d). On obtient donc : $\cos\widehat{AOB} = \frac{OB}{OA} = \frac{O'B'}{O'A'} = \cos\widehat{A'O'B'}$, ce qui prouve la conservation des angles.

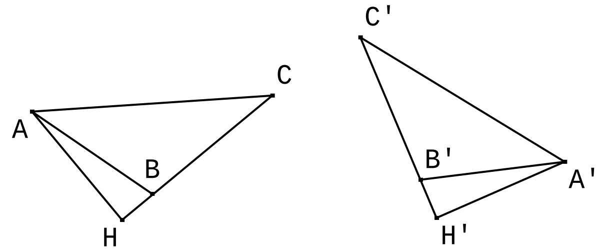



*g) La conservation des longueurs implique la conservation des aires :*

Comme au paragraphe d, j'admets le résultat pour les aires limitées par des courbes et me contente de le prouver pour les polygones et même pour les triangles, puisque l'aire des polygones s'en déduit aisément.

ABC étant un triangle et H la projection orthogonale de A sur la droite (BC), l'aire de ABC est $\frac{AH.BC}{2}$.

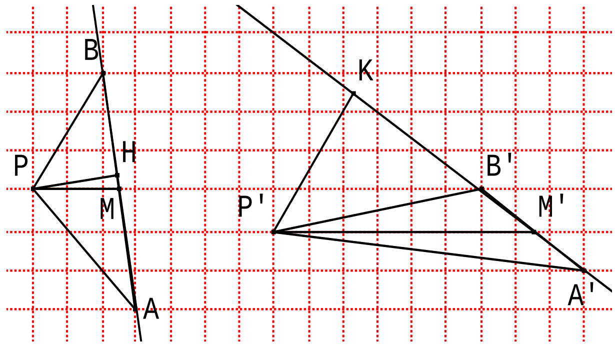
Soient A', B', C' et H' les images respectives de A, B, C et H par la transformation considérée. Comme la conservation des longueurs implique celle de l'orthogonalité, dans le triangle A'B'C', (A'H') est la hauteur relative à (B'C'). L'aire du triangle A'B'C' est $\frac{A'H'.B'C'}{2}$. Comme A'H' = AH et B'C' = BC, elle est égale à celle du triangle ABC.




*h) La conservation des aires implique celle des milieux :*

Soient un segment [AB] de milieu M, P un point non situé sur la droite (AB) et H sa projection orthogonale sur la droite (AB). Les triangles APM et BPM ont la même aire puisqu'ils ont même base AM=BM et même hauteur PH.

Appelons A', B', M', P' les images respectives de A, B, M, P et H par la transformation considérée et K la projection orthogonale de P' sur la droite (A'B'). (K n'est en général pas l'image de H).




Le point P' ne peut pas être situé sur la droite (A'B') car le triangle A'B'P' aurait alors une aire nulle contrairement au triangle ABP.

Les triangles A'P'M' et B'P'M' ont la même hauteur P'K et la même aire. Ils ont donc la même base A'M' = B'M'. Comme M' est sur la droite (A'B'), le point M' est le milieu de [A'B'].

Résumons ces résultats dans un schéma :

Conservation des longueurs

Conservation des aires | Conservation de l'orthogonalité ➔➔ Conservation des angles

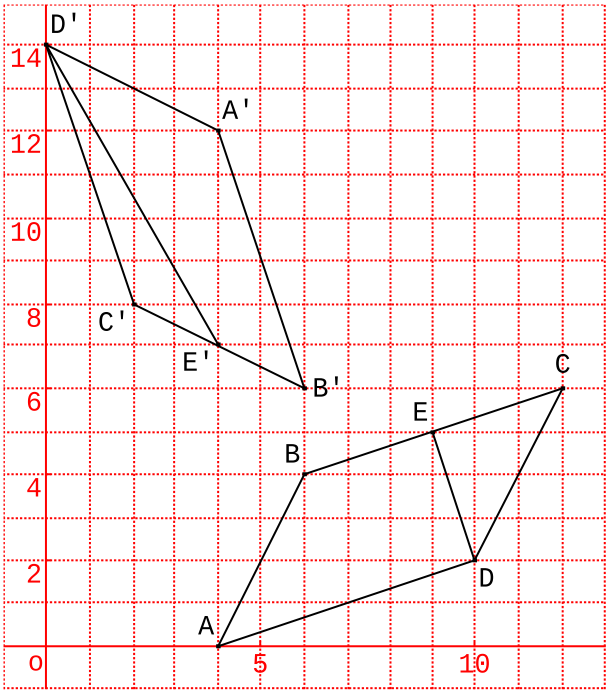
Conservation des milieux ⇄ Conservation du parallélisme

Conservation du rapport des longueurs

## 3) Quelques contre-exemples :

Il s'agit maintenant de lire le tableau ci-dessus en essayant de trouver un exemple toutes les fois qu'une seule flèche relie deux propriétés, ce qui prouvera qu'elles ne sont pas équivalentes.

*a) Transformation qui conserve les aires, les milieux, le parallélisme, mais ne conserve ni les longueurs, ni les angles ni l'orthogonalité :*




La transformation doit conserver les aires.

En utilisant un quadrillage, dessinons deux parallélogrammes superposables ABCD et A'B'C'D' en plaçant les points de façon que

AB = CD = C'B' = A'D'

et BC = AD = A'B' = C'D'

Par exemple :

| | | |
|---|---|---|
| A(4 ; 0) | B(6 ; 4) | C(12 ; 6) |
| D(10 ; 2) | A'(4 ; 12) | B'(6 ; 6) |
| C'(2 ; 8) | D'(0 ; 14) | E (9 ; 5) |

E est le milieu du segment [BC] et (ED) est sa médiatrice.

Cherchons les relations qui définissent la transformation sous la forme

$$x' = ax + by + c$$
$$y' = a'x + b'y + c'$$

Il suffit de résoudre un système linéaire de trois équations à trois inconnues pour obtenir les coefficients a, b, c, et un autre pour obtenir a', b' et c'. Les coordonnées de trois points et de leurs images suffisent pour écrire ces deux systèmes.

En effet, les relations cherchées étant linéaires, la transformation conservera les milieux donc aussi le parallélisme. La connaissance des images des points A, B et C, par exemple, entraîne donc celle de E et D et détermine la transformation.

Nous obtenons : $x' = 8 + y - x$

$y' = 8 + x - 2y$

Cet exemple a été proposé en contrôle en classe de cinquième. Les deux parallélogrammes superposables suggèrent la conservation des aires. Cependant la déformation de la figure est telle que beaucoup d'élèves n'y croient pas et veulent vérifier que les triangles CDE et C'D'E' d'une part, et les quadrilatères ABED et A'B'E'D' d'autre part ont bien la même aire. Bien entendu, l'élève se contentera de dire que les aires semblent conservées.

Le déterminant principal du système en donnera la preuve au professeur. Le produit de ce déterminant par l'aire de la figure de départ est égal, au signe près, à l'aire de la figure transformée. Ici ce déterminant a une valeur absolue égale à 1. La transformation conserve donc les aires.

*b) Transformation qui conserve les angles et l'orthogonalité, les milieux, le parallélisme, mais ne conserve ni les longueurs, ni les aires :*

L'homothétie remplit ces conditions.

*c) Transformation qui conserve les milieux, le parallélisme, mais ne conserve ni l'orthogonalité, ni les angles, ni les longueurs, ni les aires :*

Les transformations n°1 et n°2 du paragraphe 1 sont dans ce cas. Ce sont des affinités.

Les deux transformations présentées par Claude Rigollet dans cette même *Feuille de Vigne*, sont d'autres exemples de ce type. La première est une affinité orthogonale de rapport négatif (ou le produit d'une symétrie orthogonale par une affinité orthogonale de même axe et de rapport positif). La seconde est le produit d'une symétrie orthogonale par une affinité oblique de même axe. Mais la direction de l'affinité n'est pas celle de la rampe !

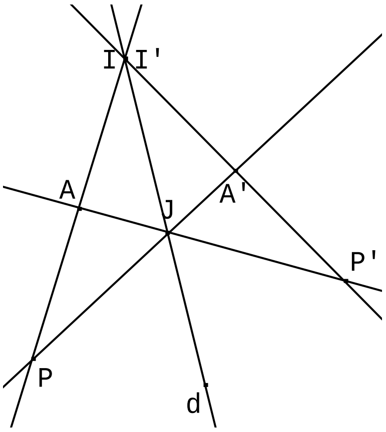
*d) Transformation qui conserve l'alignement, mais ne conserve ni les milieux, ni le parallélisme, ni l'orthogonalité, ni les angles, ni les longueurs, ni les aires :*

Toutes les transformations de la forme :

$$x' = ax + by + c$$
$$y' = a'x + b'y + c'y$$

conservent l'alignement, les milieux et le parallélisme.

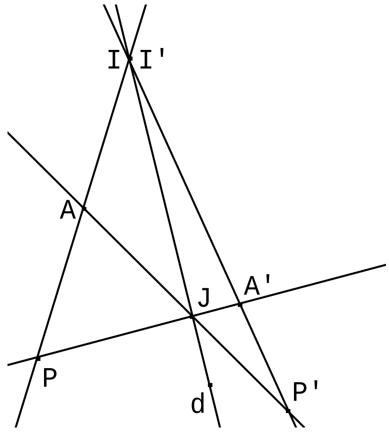
Il est utile de montrer une transformation ne conservant pas les milieux : l'involution.




**Symétrie axiale**
A est milieu de [PI]
A' est milieu de [P'I']

Elle se rencontre assez naturellement en construisant le symétrique d'un point par rapport à une droite *à la règle seulement,* connaissant l'image P' d'un point P.

En utilisant la même méthode, mais en fixant le point image P' arbitrairement, la transformation obtenue est une homologie qui est ici involutive, d'où son nom d'involution.

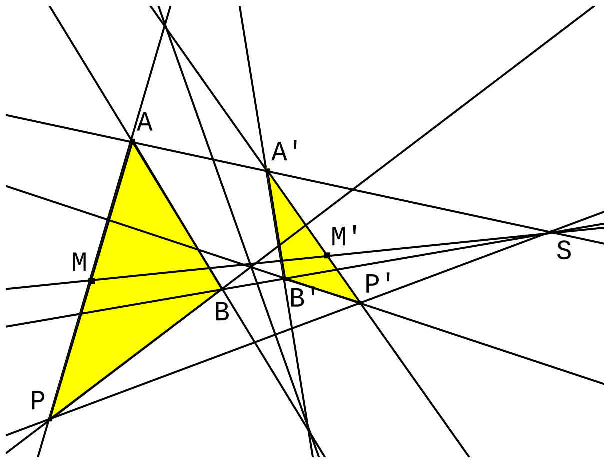



**Involution**
A est milieu de [PI]
A' n'est pas milieu de [P'I']

Si nous construisons l'image d'un triangle quelconque, nous retrouvons la configuration des triangles homologiques de Desargues.

Les transformations qui conservent l'alignement sont les homographies qui sont les transformations linéaires du plan projectif. (voir : Gaston Darboux ; Principes de géométrie analytique ; Gauthier-Villars ; Paris 1946 ; n°26).

Elles peuvent être définies par des relations qui s'écrivent simplement en coordonnées homogènes :




$$X' = aX + bY + cT\,;$$
$$Y' = a'X + b'Y + c'T\,;$$
$$T' = a''X + b''Y + c''T$$

Pour retrouver les coordonnées habituelles posons : $X = Tx\,;\ Y = Ty\,;\ X' = T'x'\,;\ Y' = T'y'$

Calculons x' : $T'x' = aTx + bTy + cT$

avec : $T' = a''Tx + b''Ty + c''T$

d'où : $(a''Tx + b''Ty + c''T)\,x' = aTx + bTy + cT$

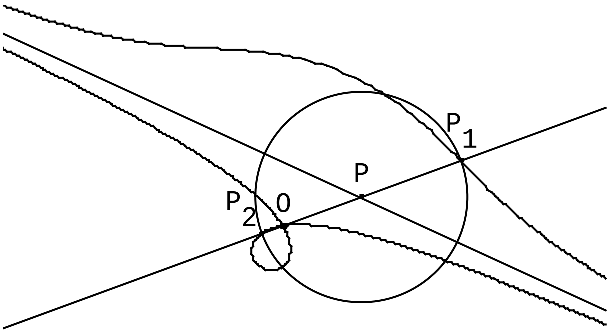
En simplifiant par $T$ qui est non nul pour les points à distance finie, on obtient :

$$x' = \frac{ax + by + cT}{a''x + b''y + c''} \qquad \text{et de même :} \qquad y' = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''}$$

Ces formules peuvent permettre de fabriquer d'autres exemples.

### 4) Transformations qui ne conservent pas l'alignement :

*a) Les conchoïdes :*



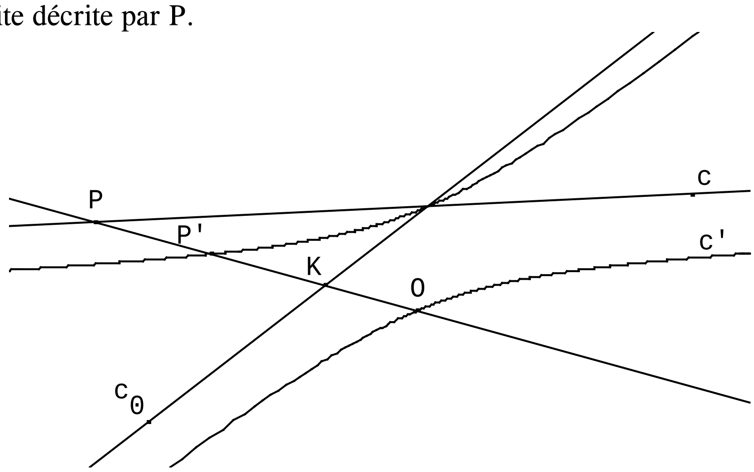

Sur le site du Rectorat de Dijon (www.ac-dijon.fr), Olivier Crouzet présente une série d'activités sur les conchoïdes pour une classe de troisième.

Un point O appelé pôle, étant donné, l'image d'un point P est le point P' de la droite (OP) obtenu en ajoutant ou en retranchant une longueur constante *l* au segment [OP].

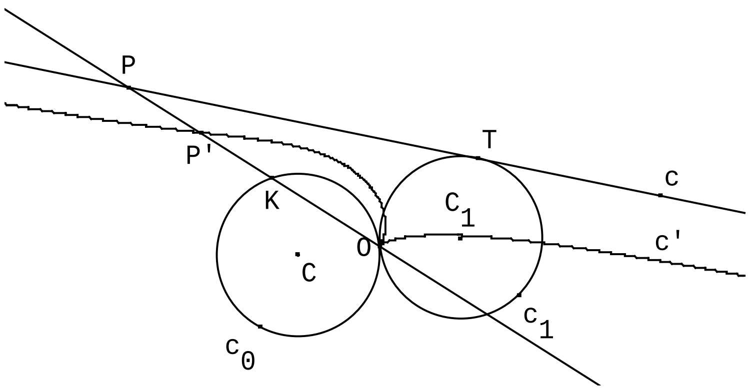
$OP'_1 = OP + l$ ou $OP'_2 = OP - l$.

Quand P décrit une droite, $P_1$ et $P_2$ décrivent chacun une courbe. On choisit l'une ou l'autre comme image de la droite suivant la définition de la transformation. Ces deux courbes sont les deux branches de la conchoïde de pôle O et de module *l* de la droite décrite par P.

*b) Les courbes cissoïdales et les courbes médianes de deux courbes :*




Dans le même état d'esprit, les courbes cissoïdales et les courbes médianes de deux courbes permettent de construire des transformations qui ne conservent pas l'alignement. Je me limiterai aux courbes médianes, les courbes cissoïdales s'en déduisant par une homothétie de rapport deux dont le centre est le pôle.




Etant donnés un point O, le pôle, et une courbe $c_0$, l'image P' de P est le milieu du segment [PK], où K est l'intersection de la droite (OP) et de la courbe $c_0$. Si P décrit une courbe $c$, le point P' décrit une courbe $c'$, appelée médiane de $c$ et de $c_0$ relativement au pôle O.

Si $c_0$ et $c$ sont deux droites sécantes, la médiane est une hyperbole.

Si $c_0$ est un cercle passant par O et $c$ une droite, la médiane est une cissoïde proprement dite, quand le cercle $c_1$ symétrique de $c_0$ par rapport à O est tangent en T à la droite $c$. La cissoïde est droite quand $c$ est perpendiculaire à la droite (OT).

Si O est centre du cercle $c_0$, nous retrouvons les conchoïdes du paragraphe précédent. L'image de $c$ est la conchoïde de son homothétique dans une homothétie centrée au pôle et de rapport $\frac{1}{2}$.

Pour plus de détails sur ces courbes (et sur beaucoup d'autres), voir le site : www.mathcurve.com.

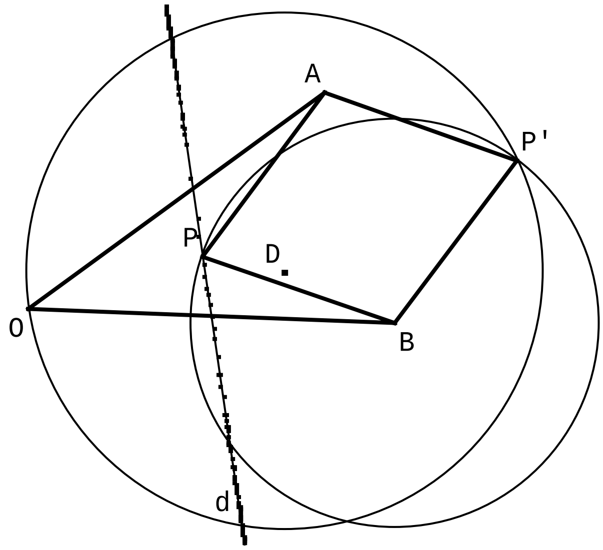
*c) Les transformateurs :*

De telles transformations ont été utilisées voici déjà un certain temps, par un groupe de l'IREM de Dijon qui travaillait avec des « transformateurs », c'est-à-dire des instruments de dessin réalisant des transformations. (Voir : Jacques Laurent ; Transformateurs ; IREM ; Dijon ; 1982). Le groupe n'existe plus mais la plupart de ses membres sont toujours à l'IREM.

Pour se faire une idée, je vous recommande le site italien du musée d'histoire naturelle et des instruments scientifiques de l'Université de Modène : museo.unimo.it.
Voici à titre d'exemple, *l'inverseur de Peaucellier*. Il est formé par un losange articulé APBP' et deux tiges de même longueur OA et OB. Le pôle de l'inversion est O. Quand P décrit la droite *d*, P' décrit le cercle de centre D, privé du point O.

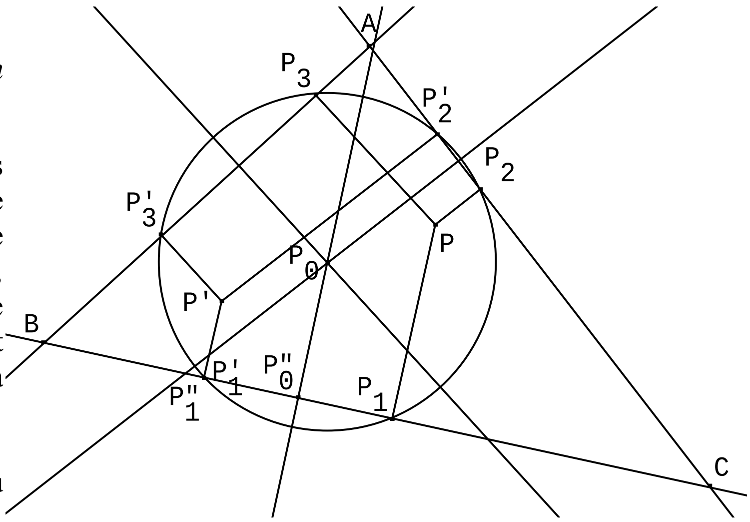
En effet, la puissance de O par rapport au cercle de centre B et de rayon BP est égale d'une part à OP × OP', d'autre part à $OB^2 - BP^2$. Mais cette dernière quantité est constante car OB et PB sont des tiges de l'inverseur. OP×OP' est donc constant et les points P et P' sont inverses l'un de l'autre.

Pratiquement, P ne peut décrire qu'un segment de la droite *d*, P' ne décrit donc qu'un arc de cercle.




*d) La transformation de Mathieu :*

*Toutes les projections dont il sera question dans ce paragraphe sont orthogonales.*



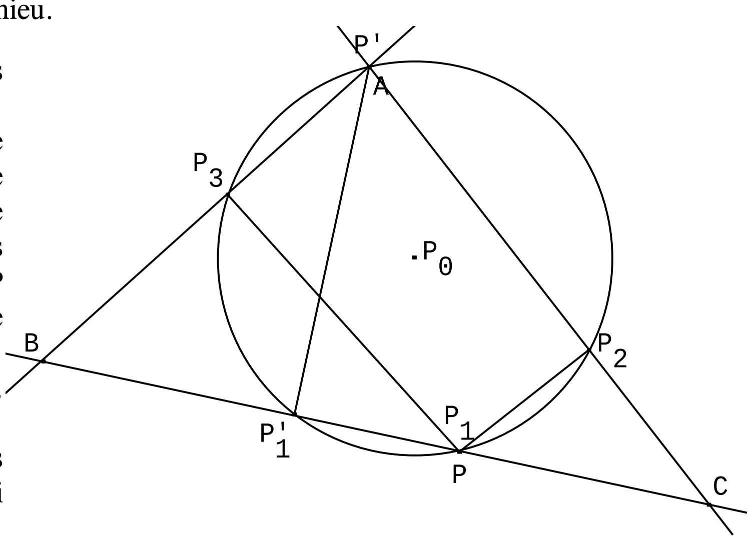

Un point P est projeté sur les trois côtés d'un triangle ABC donné, en $P_1$, $P_2$, $P_3$. Le cercle circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$ recoupe les côtés du triangle ABC en trois points $P'_1$, $P'_2$, $P'_3$. Le théorème de Mathieu affirme que ces trois points sont les projections d'un point P'. Ce point P' sera l'image de P par la transformation de Mathieu.

Démontrons tout d'abord ce théorème. Soit P' le symétrique de P par rapport au centre $P_0$ du cercle circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$. Projetons P', $P_0$, et P sur (BC). Appelons provisoirement $P''_1$ le projeté de P' et $P''_0$ celui de $P_0$. $(P_0P''_0)$ est médiatrice de $[P'_1P_1]$ et $P''_0$ est milieu de $[P'_1P_1]$. Mais $P''_0$ étant la projection du milieu $P_0$ de [PP'], est aussi milieu de $[P''_1P_1]$. Les points $P''_1$ et $P'_1$ coïncident et la projection de P' est bien sur le cercle circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$. On peut recommencer le même raisonnement pour chacun des côtés du triangle ABC, les projections de P' sur les côtés du triangle ABC sont donc sur le cercle circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$,qu'on appellera cercle de Mathieu.

Observons maintenant quelques propriétés immédiates de cette transformation.

Pour tout point P non situé sur le cercle circonscrit au triangle ABC, le cercle de Mathieu est défini. Par contre, si P est sur le cercle circonscrit au triangle ABC, les points $P_1$, $P_2$ et $P_3$ sont sur la droite de Simson et P n'a pas d'image, tout au moins à distance finie.

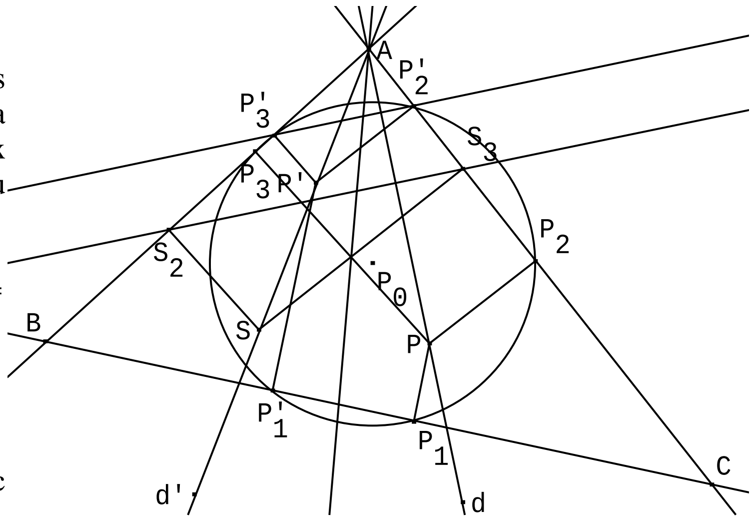
Si P est sur un des côtés du triangle ABC, son image est le sommet opposé à ce côté. L'image de la droite (BC), privée toutefois des points B et C est le point A. En effet, si P est sur (BC), les triangles rectangles $APP_1$,



$APP_2$ et $APP_3$ sont inscrits dans le cercle de diamètre [AB]. Les points $P'_2$ et $P'_3$ sont confondus avec A qui est donc l'image de P.

Réciproquement, l'image d'un sommet du triangle ABC est indéterminée sur le côté opposé.

Si une droite passe par un sommet du triangle ABC, son image est une droite. Si une droite *d* passe par A, son image *d'* est symétrique de *d* par rapport à la bissectrice de l'angle de sommet A. De telles droites sont appelées isogonales.




Démontrons cette proposition.

Soient S, $S_2$ et $S_3$ les symétriques respectifs de P, $P_2$ et $P_3$ par rapport à la bissectrice de l'angle. Ecrivons de deux façons la puissance de A par rapport au cercle de Mathieu :

$$AP_2.AP'_2 = AP_3.AP'_3$$

Mais $AP_2 = AS_2$ et $AP_3 = AS_3$

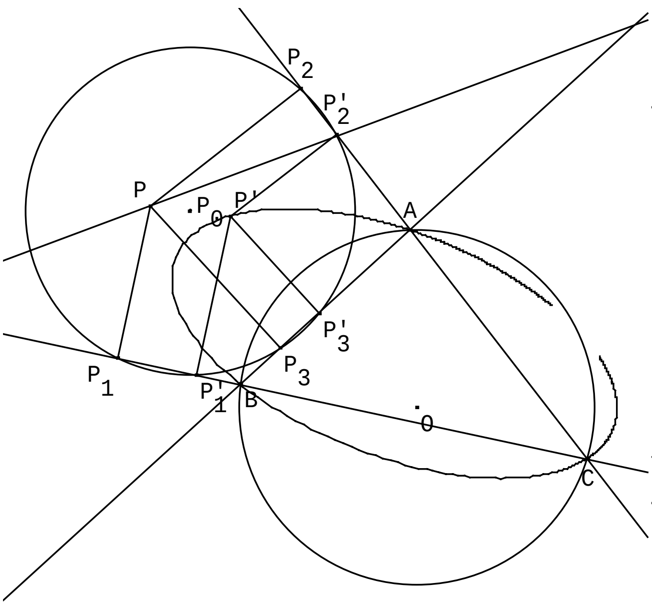
Donc $AS_2.AP'_2 = AS_3.AP'_3$

Ou encore : $\dfrac{AP'_2}{AS_3} = \dfrac{AP'_3}{AS_2}$

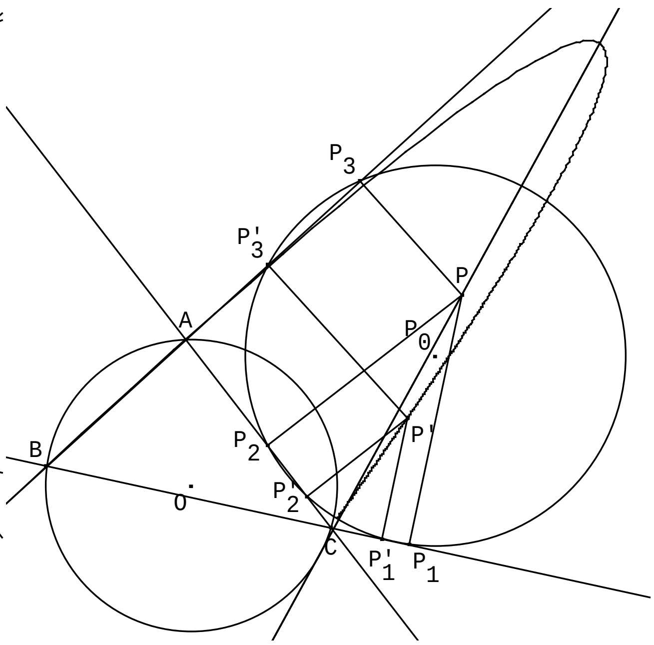
Les droites $(P'_2P'_3)$ et $(S_2S_3)$ sont donc parallèles.

Les droites $(P'P'_2)$, $(SS_3)$, d'une part et $(P'P'_3)$, $(SS_2)$ le sont aussi puisqu'elles sont perpendiculaires respectivement à (AC) et à (AB). Les triangles $P'P'_2P'_3$ et $SS_3S_2$ dont les côtés sont parallèles, sont homothétiques, le centre de l'homothétie étant A. Le point P' est donc situé sur la droite (AS), symétrique de (AP) par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ .

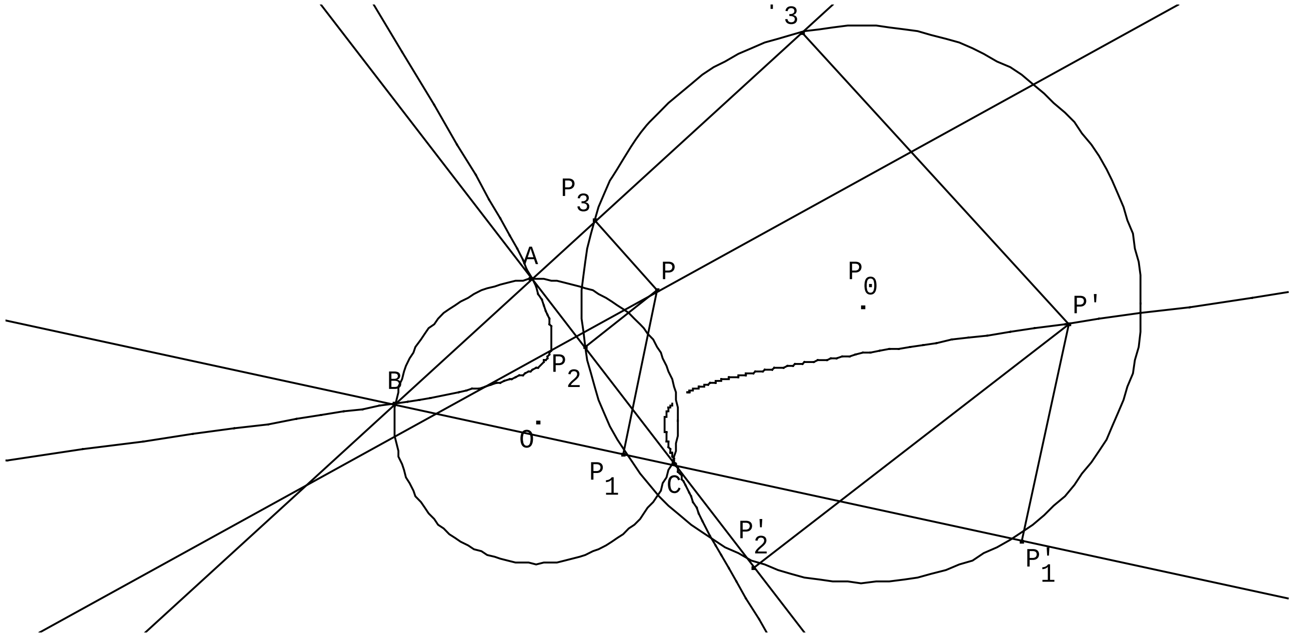
L'image d'une droite qui ne passe pas par un sommet du triangle ABC est une conique qui passe par A, B et C. Si la droite ne coupe pas le cercle circonscrit, c'est une ellipse. Si elle lui est tangente, c'est une parabole et si elle le coupe, une hyperbole. Il est possible de préciser, grâce à un théorème de Brianchon et Poncelet que si l'hyperbole est équilatère, elle passe par l'orthocentre de ABC, donc que dans ce cas, la droite passe par le centre du cercle circonscrit.




La droite ne coupe pas le cercle circonscrit




La droite est tangente au cercle circonscrit




La droite coupe le cercle circonscrit

La transformation de Matthieu admet quatre points invariants qui sont les centres des cercles inscrits et exinscrits du triangle ABC puisque dans ce cas le cercle de Mathieu est tangent aux côtés.

Si P est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, le cercle de Mathieu se confond avec le cercle d'Euler. L'image du centre du cercle circonscrit au triangle ABC est donc l'orthocentre de ce triangle

Si P est le centre de gravité du triangle ABC, le point P' est le point de concours des symétriques des médianes par rapport aux bissectrices intérieures du triangle. Ces droites portent le nom de symédianes et leur point de concours s'appelle le point de Lemoine.

L'image d'un cercle est en général une quartique, qui possède des branches infinies si le cercle rencontre le cercle circonscrit du triangle. Mais s'il passe par deux sommets du triangle, c'est un cercle qui passe par les deux mêmes sommets. La démonstration repose sur le théorème des arcs capables.

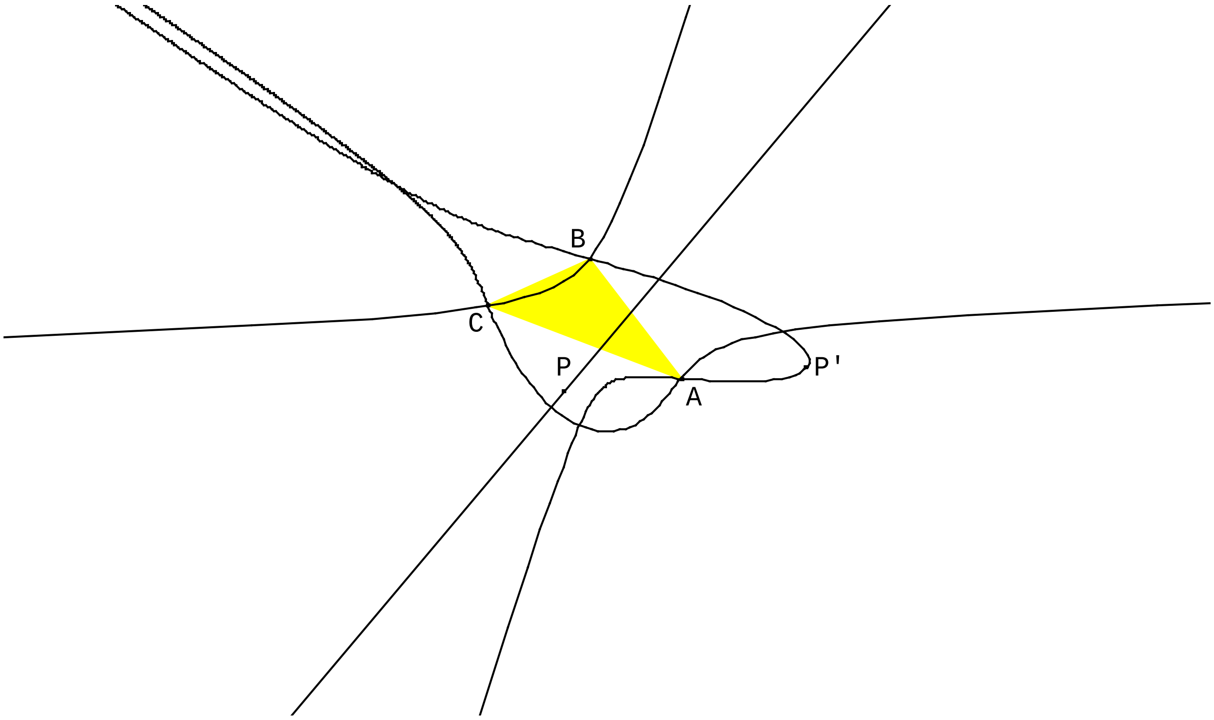
*e) La transformation de Terquem :*

Le théorème de Terquem est analogue à celui de Mathieu. Joignons un point P aux trois sommets d'un triangle ABC. Les droites (AP), (BP) et (CP) coupent les cotés (BC), (CA) et (AB) respectivement en $P_1$, $P_2$ et $P_3$. Le cercle circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$ recoupe les côtés du triangle ABC en $P'_1$, $P'_2$ et $P'_3$.

Le théorème de Terquem affirme que les droites ($AP'_1$), ($AP'_2$) et ($AP'_3$) concourent en un point P'. Ce point P' sera l'image de P par la transformation de Terquem.

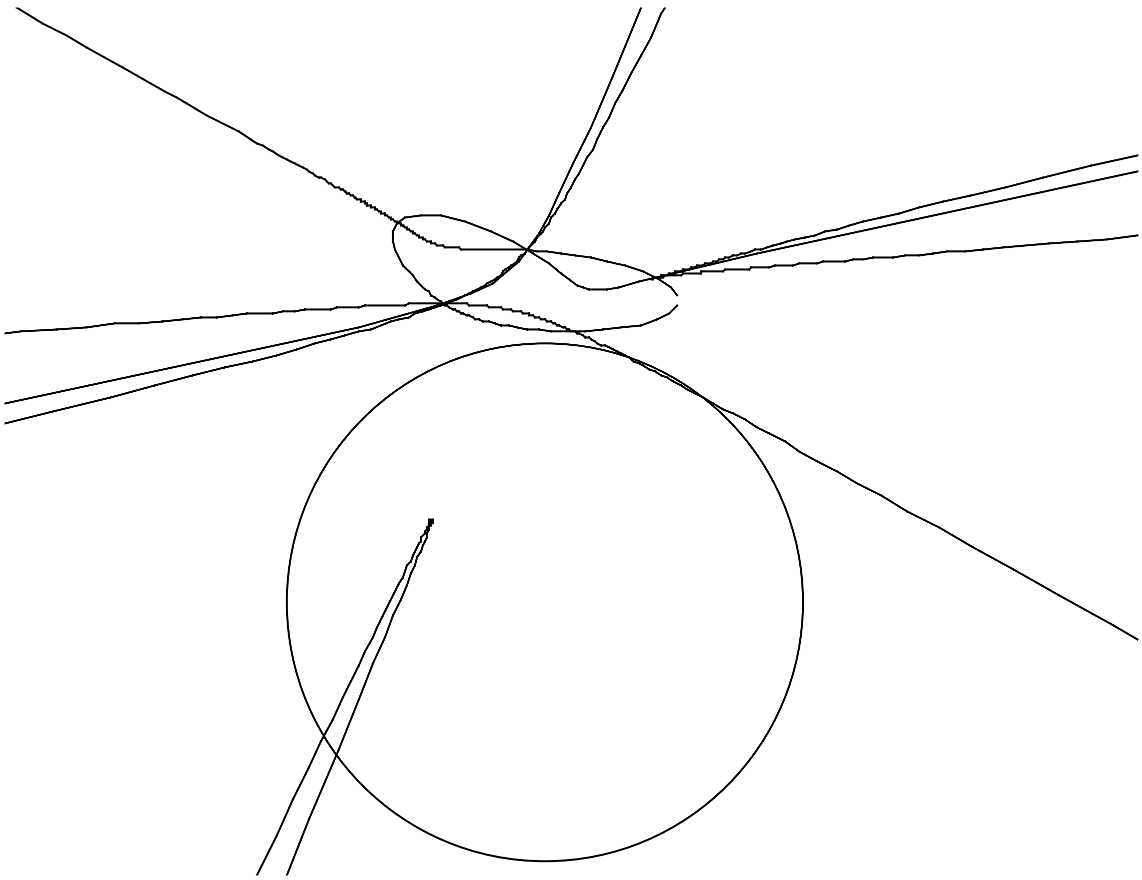
La démonstration résulte du théorème de Céva et de sa réciproque ainsi que des puissances des sommets du triangle ABC par rapport au cercle circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$.

Les transformées des droites sont beaucoup plus compliquées que pour la transformation de Mathieu, comme le montre la figure suivante où sont tracés le triangle, une droite et son image.




Evidemment, de telles transformations ne peuvent pas être étudiées par nos élèves. Par contre un logiciel de géométrie permet de leur en montrer les effets souvent inattendus. Le côté étrange et spectaculaire a des chances de capter leur attention et de susciter quelques questions.

A nous d'y répondre et d'en profiter pour développer leur intérêt pour la géométrie!



Et pour terminer, cette espèce de grillon n'est autre qu'un cercle et son image par la transformation de Terquem. A vous de deviner où se trouve le triangle de départ !

# *Les Nouveaux Jeux*

*Michel LAFOND,*

Résumé : *Présentation de quelques nouveaux jeux apparus en même temps que le sudoku en 2005.*

Mots clés : *Sudoku ; boucle ; kakuro ; casse-tête.*

Vous avez tous vu depuis juillet 2005, dans la plupart des hebdomadaires et aussi au voisinage du rayon mots croisés des librairies, des problèmes ou même des fascicules entiers de jeux qu'on ne voyait presque pas avant.
En voici quelques-uns :

- ***Le SUDOKU***

Dans le sudoku "**classique**" on donne une grille carrée de 9 × 9 cases partagée en 9 **blocs** carrés de 3 × 3 cases.
Certaines cases contiennent un chiffre (de 1 à 9).
Le but est de remplir toutes les cases vides avec les chiffres de 1 à 9 et les contraintes suivantes :
1) chaque ligne doit contenir {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
2) chaque colonne doit contenir {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
3) chaque bloc doit contenir {1,2,3,4,5,6,7,8,9}

Un exemple avec sa solution:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |
| | 8 | | | | 5 | 6 | 1 | |
| | 2 | | 8 | 7 | | 4 | | |
| | | 4 | | 9 | 6 | 1 | | |
| | | | | | | | | |
| | | | 4 | | | 7 | | |
| | | | | | | | | |
| 2 | 9 | | 7 | 3 | | | 4 | |
| 3 | 1 | | 2 | | | | 5 | |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 | 9 | 1 | 6 | 4 | 2 | 7 | 8 |
| 4 | 8 | 7 | 9 | 2 | 5 | 6 | 1 | 3 |
| 6 | 2 | 1 | 8 | 7 | 3 | 4 | 9 | 5 |
| 8 | 7 | 4 | 5 | 9 | 6 | 1 | 3 | 2 |
| 9 | 6 | 2 | 3 | 1 | 7 | 5 | 8 | 4 |
| 1 | 5 | 3 | 4 | 8 | 2 | 7 | 6 | 9 |
| 7 | 4 | 8 | 6 | 5 | 9 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 9 | 5 | 7 | 3 | 1 | 8 | 4 | 6 |
| 3 | 1 | 6 | 2 | 4 | 8 | 9 | 5 | 7 |

- ***VARIANTE de SUDOKU***

La seule différence par rapport au sudoku "classique" est que **les blocs ont une forme quelconque** (mais contiennent toujours 9 cases).

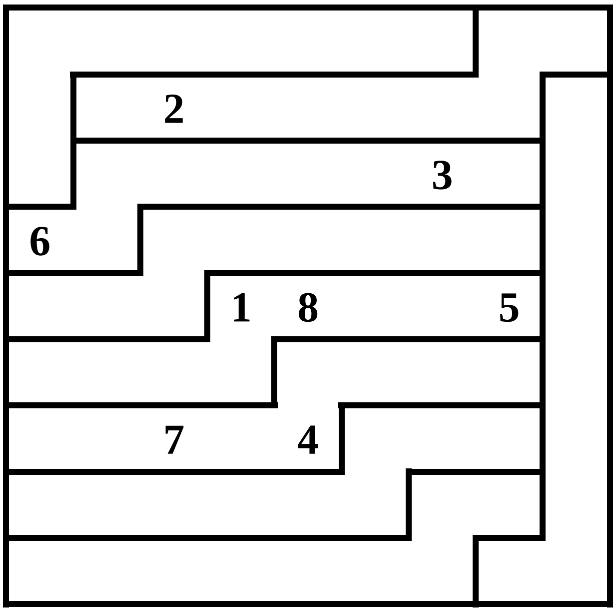
Le but est le même : remplir toutes les cases vides avec les chiffres de 1 à 9 et les contraintes suivantes :

1) chaque ligne doit contenir {1,2,3,4,5,6,7,8,9}

2) chaque colonne doit contenir {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
3) chaque bloc doit contenir {1,2,3,4,5,6,7,8,9}

Le problème ci-dessous n'est pas difficile.
On n'a que 8 chiffres connus. C'est le minimum pour cette variante, sachant que la solution est unique.

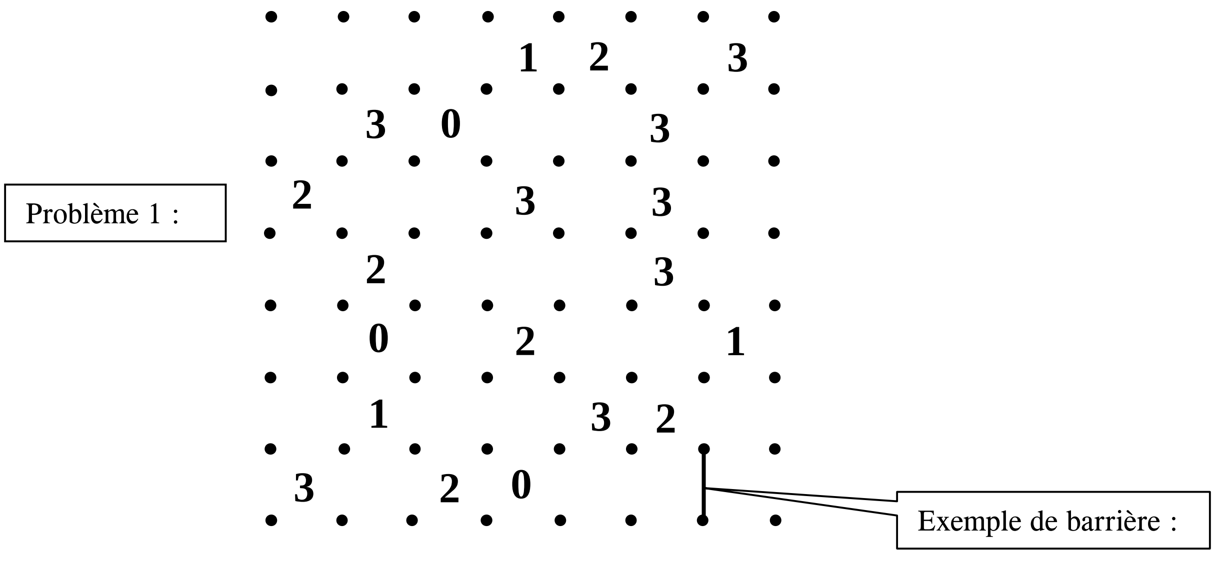
Pensez "Géométrie".




- ***LE JEU DE LA BOUCLE***

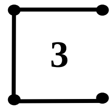
Une grille est donnée avec des chiffres 0, 1, 2, ou 3 dans certaines cases.

Il faut mettre des barrières entre les points de manière à former **une seule boucle qui se referme**.

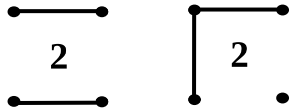


Il y a des **conditions** :

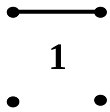
Une case qui a un **3** doit avoir exactement 3 barrières. Exemple :



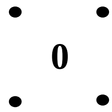

Une case qui a un **2** doit avoir exactement 2 barrières. Exemples :




Une case qui a un **1** doit avoir exactement 1 barrière. exemple :




Une case qui a un **0** ne doit pas avoir de barrière. exemple :



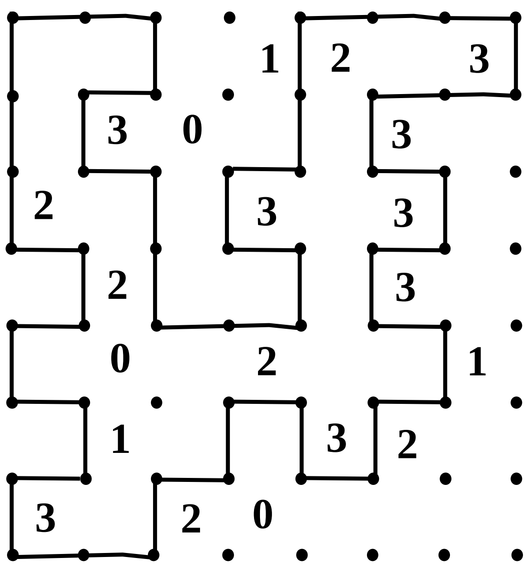

Une case qui n'a pas de chiffre, peut avoir un nombre quelconque de barrières (de 0 à 3)

Il doit y avoir une seule boucle.

Ci-après : la solution du problème 1, et un autre problème à chercher :

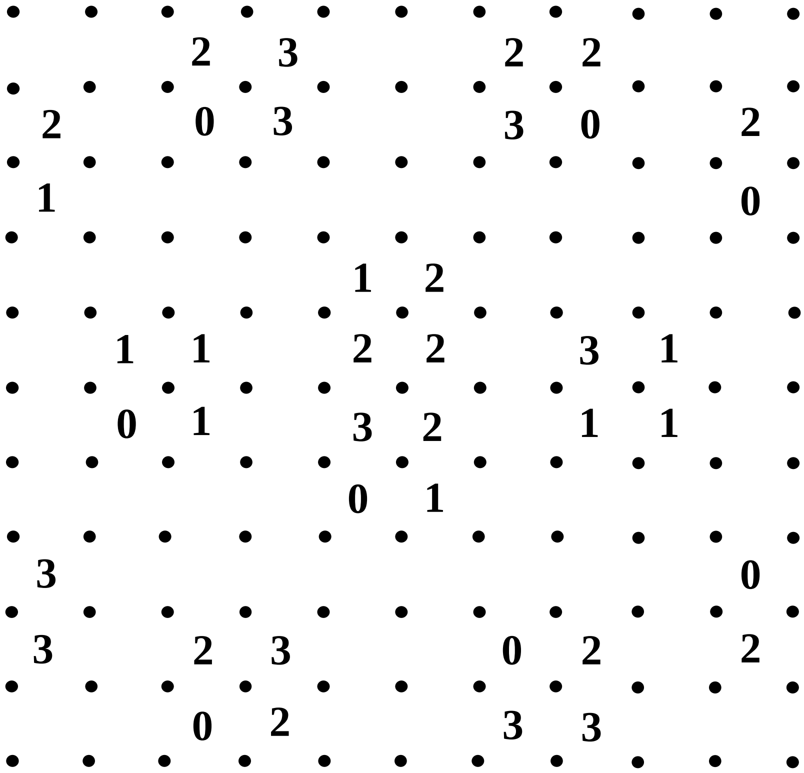
Comme pour le Sudoku, **la solution à un problème est toujours unique**.

*Solution du problème 1 : (vérifiez bien que toutes les conditions sont remplies).*



**<u>Problème</u>** à chercher :

Problème 2 :

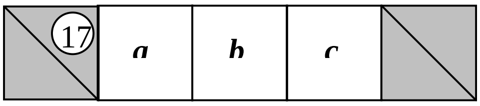



- ***LE KAKURO***

Il faut remplir les cases blanches vides d'une grille donnée par les chiffres **de 1 à 9** en respectant la **somme** indiquée <u>en ligne ou en colonne</u>.

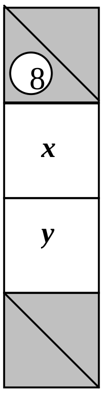
Cette somme est indiquée dans un cercle :

Les cercles situés dans le triangle supérieur indiquent une somme en LIGNE à droite:




Signifie $a + b + c = 17$

Les cercles situés dans le triangle inférieur indiquent une somme en COLONNE en bas :

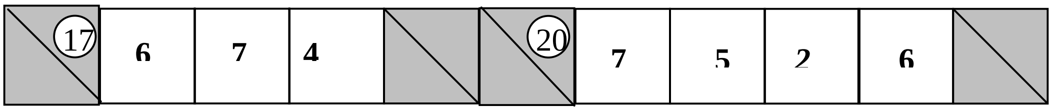



Signifie $x + y = 8$

Dernière contrainte : dans un bloc quelconque (ligne ou colonne) de somme donnée, les chiffres de la somme doivent être <u>tous différents</u>.

Ainsi (Voir plus haut), on peut avoir $a = 4 \quad b = 8 \quad c = 5$ mais pas $a = 6 \quad b = 5 \quad c = 6$.

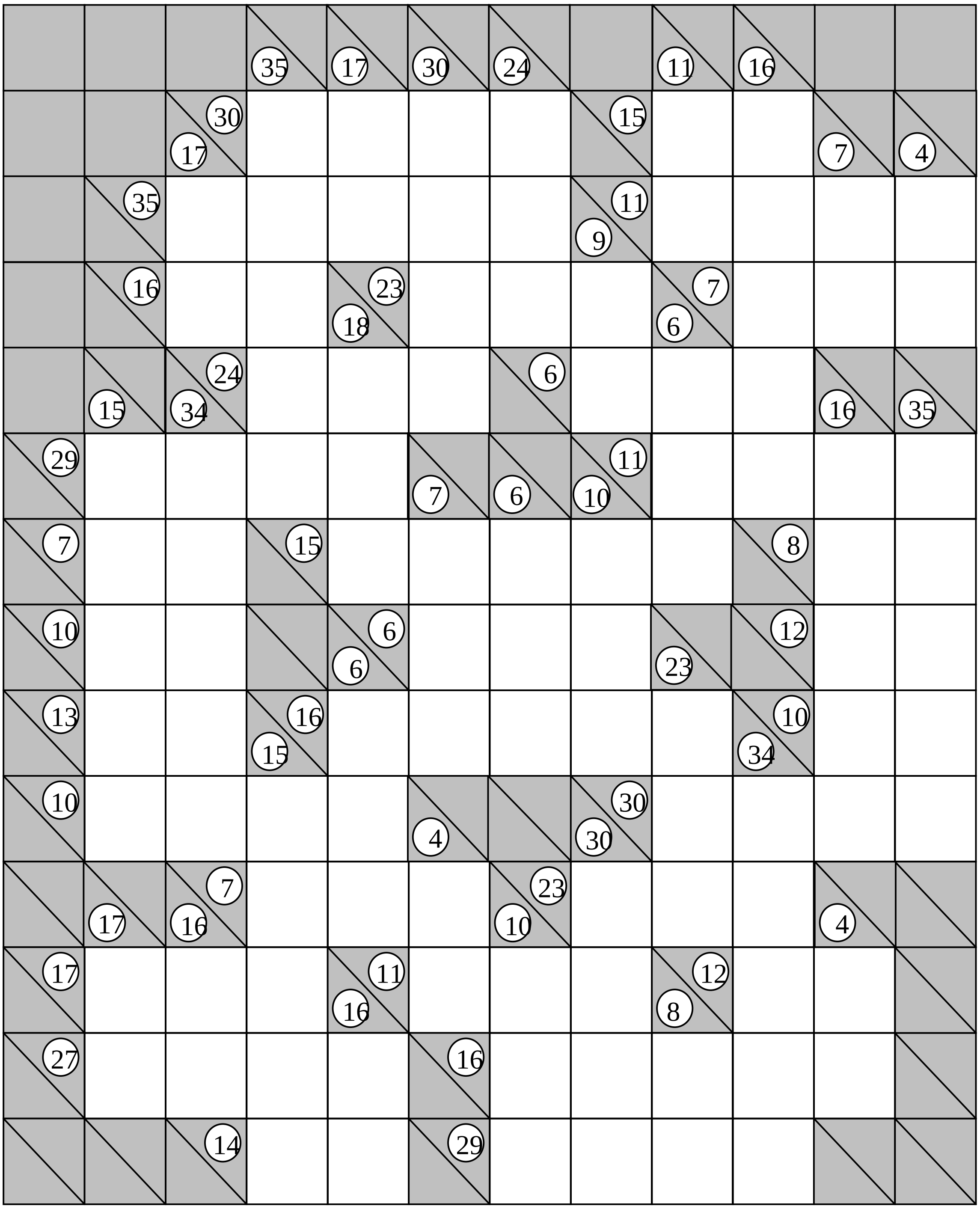
Bien sûr, un même chiffre peut apparaître plus d'une fois dans une même ligne (ou une colonne) mais à condition que ce soit dans des blocs différents. Exemple :




Enfin, la solution est bien entendu UNIQUE.

Régalez-vous avec l'exemple simple ci-dessous :

On progresse de proche en proche…



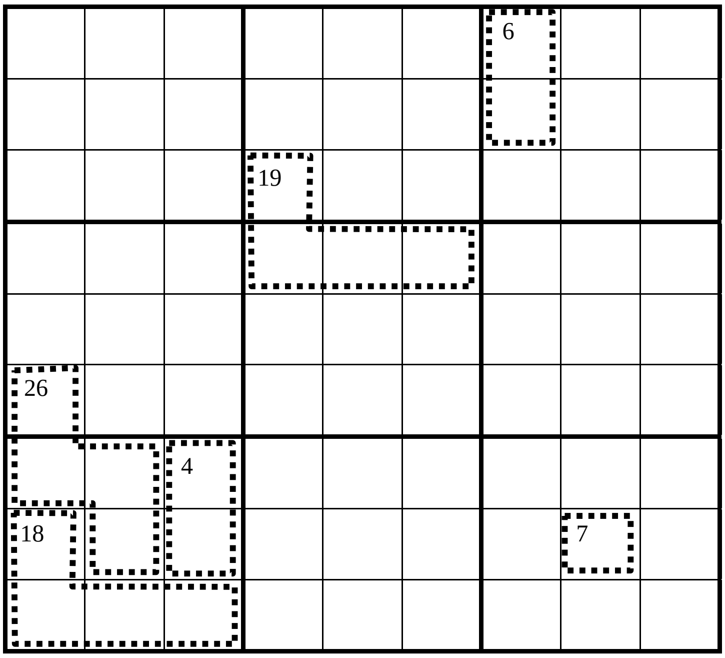
- Peut-être êtes-vous devenu un expert en sudoku et en kakuro. Peut-être pas.

En tous cas voici un compromis délicieux entre le sudoku et le kakuro :

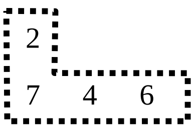
## • *LE KILLER SUDOKU*

Une grille 9 × 9 est donnée. A la fin, chaque ligne, chaque colonne, et chaque bloc de 3 × 3 cases, doit contenir les 9 chiffres : 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Jusque là, c'est comme le sudoku ordinaire.
Mais la différence c'est qu'au lieu de donner certains chiffres pour démarrer, on donne pour certains groupes de cases la somme des chiffres du groupe. Chaque groupe est entouré de pointillés. La somme des chiffres du groupe est toujours indiquée, en haut et à gauche du groupe.

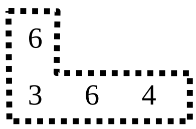
Exemples :




Le 7 du carré en bas à droite signifie que la case contient le 7.
Le 6 du groupe Nord Est signifie que la somme des deux cases vaut 6. C'est peut être (1 et 5) ou (2 et 4), mais pas (3 et 3) puisqu'on est dans une même colonne. Si c'est (1 et 5) encore faut-il trouver l'ordre... Le 19 du groupe central signifie qu'on a dans ce groupe 4 chiffres de somme 19.
C'est peut-être :




ou même

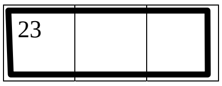



puisque les 6 seraient dans des blocs différents.

Bien sûr, la solution de la grille complète est UNIQUE.

Pour démarrer :
on peut utiliser la propriété 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45 qui permet en général de remplir plusieurs cases. Ainsi, le carré Sud-Ouest contient un groupe de 18 et un groupe de 4 (soit 22 au total). Il reste donc 45 – 22 = 23 pour les trois cases blanches inférieures du groupe "26". Cela veut dire que la case supérieure du groupe "26" vaut 26 – 23 = **3**.

Dans certains cas, on n'a pas le choix. Exemple :



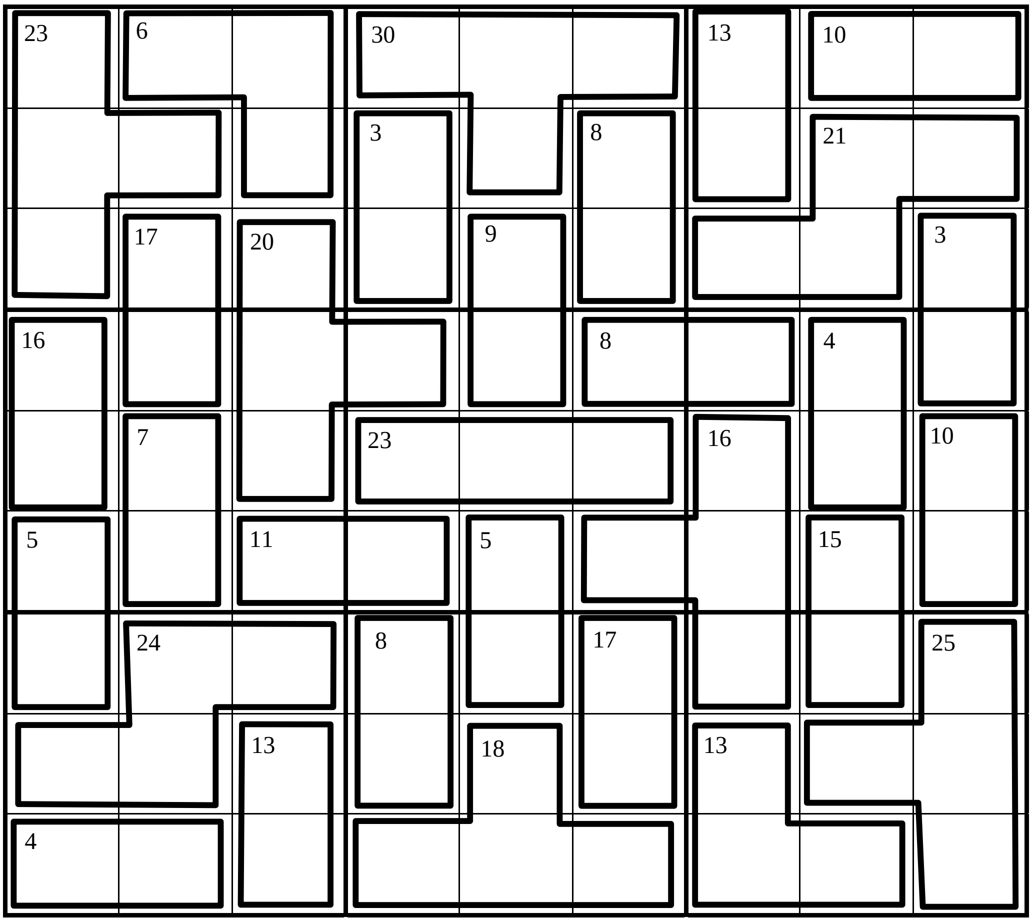

Ne peut-être rempli que par **6**, **8**, **9** seule combinaison valable.

Mais attention à l'ordre ! C'est peut-être

| | | |
|---|---|---|
| **8** | **9** | **6** |

Vous trouverez vous-même les nombreuses techniques qui permettent de débloquer la situation.
Il y a évidemment toutes les techniques du sudoku "classique", plus celles liée à l'arithmétique élémentaire (addition, soustraction). C'est bien plus riche, mais aussi plus compliqué que le sudoku. Comptez le double de temps.

Voici un killer sudoku **facile** :




Amusez-vous bien.

# Recherche et rédaction de problèmes au Collège

*Jean-François MUGNİER, Collège de SOMBERNON*

Les programmes qui sont entrés ou qui entrent en application à l'École et au Collège présentent des améliorations incontestables qui tiennent compte de travaux en didactique parfois vieux de plusieurs dizaines d'années[1]. On ne peut que se féliciter de leur cohérence verticale et souhaiter que la lettre et l'esprit de ces programmes soient partout appliqués... Néanmoins, une observation attentive des manuels (donc des pratiques) montre que certains points nécessaires aux apprentissages mathématiques sont un peu oubliés ou négligés. Je pense en particulier :
- aux activités de dénombrements (utiles aux statistiques et aux probabilités plus tard),
- au sens des opérations et aux problèmes (de type École Primaire),
- aux grandeurs et aux unités[2].

J'aborderai ici le second point et, par voie de conséquence, mais plus succinctement, le troisième.

İl y a une vingtaine d'années que j'ai été sensibilisé à ce problème (c'est le cas de le dire !) par des travaux de G. VERGNAUD, quelques stages CM/6e, la brochure « MOTS - tome VI - grandeurs mesure » de l'APMEP (n°46-1982) et surtout en constatant les différences considérables entre les productions d'élèves venant de nombreuses écoles différentes. Au cours d'une réunion CM/6e de 1984, nous étions parvenu à un accord avec les instituteurs du secteur et, dès l'année suivante, des conséquences positives étaient apparues. Malheureusement les İDEN (puis İEN) n'ont pas pu (ou voulu) reconduire de pareilles rencontres, les enseignants ont changé ... et je me retrouve rajeuni de vingt ans, avec les mêmes diversités et obligé de « ramer » à nouveau, obstiné que je suis ! Certains diront têtu, mais convaincu maintenant que certaines pratiques ont du bon. Restons modeste toutefois !

Je constate avec plaisir que les nouveaux documents d'accompagnement des nouveaux programmes vont dans ce sens sur plusieurs points (grandeurs, unités, fractions et décimaux...). En particulier, j'ai eu le bonheur d'assister à un exposé d'André PRESSİAT[3] sur les quotients, les décimaux et les grandeurs qui m'a motivé à écrire cet article

Mais, trêve de bavardages, aux faits ! Pour mieux comprendre mes propos, prenez connaissance de la fiche annexe 1.

On peut introduire un travail sur les problèmes par une question du genre : « Si vous aviez à dire à votre petit frère (sœur) qui va sortir de l'école primaire, ce qu'il faut savoir d'essentiel sur les problèmes, que lui diriez vous ? ». Propositions et débat dans la classe... Parfois on s'approche de l'essentiel, souvent non. Des choses importantes sont dites : bien lire l'énoncé, noter les données du problème, rédiger, etc.

Le professeur peut induire "fortement" sa réponse... ou la donner :

l'essentiel c'est l'existence de **deux types** de problèmes et seulement deux : les problèmes additifs (+,–) et les problèmes multiplicatifs (×,÷, proportionnalité).

En outre, l'autre point important pour le professeur me semble être d'habituer les élèves à **représenter** un problème. Tout problème additif (normalement constitué !) peut se représenter par ce que nous appellerons un **schéma** : des segments adjacents ou emboîtés sur une ou plusieurs lignes. Tout problème multiplicatif peut se représenter par un **tableau** de proportionnalité **avec ses** deux **titres** de colonnes et ses deux (ou plus) titres de lignes[4].

---

[1] Voir les travaux de Guy BROUSSEAU, Régine DOUADY et M-J. PERRİN GLORİAN sur les décimaux et les fractions.

[2] Sans parler des fractions et des décimaux qui mériteraient des activités plus appropriées à leur réelle compréhension (cf. IREM de Lyon, Strasbourg, Paris Nord et Rennes).

[3] À la commission İnter-İREM 1er cycle, Paris, 11/03/2006.
André PRESSİAT est le responsable des programmes ; il devrait venir à Dijon en janvier 2007.

[4] Suivant son goût ou le problème, on peut intervertir ligne et colonne, bien sûr.

***Faire des schémas :***

L'expérience montre que cette capacité à représenter n'est pas évidente en début de 6$^{e}$. Spontanément, certains élèves font des dessins des objets ou des personnages du problème. On peut motiver la nécessité (au moins le bienfait) d'une représentation par des exercices inspirés des évaluations à l'entrée en 6$^{e}$, par exemple :

## *İl y a comme un problème…*

### ❶ Dites-le avec des fleurs !

Un grand hôtel de luxe de la Côte d'Azur a demandé à un célèbre fleuriste de confectionner **deux** énormes bouquets de **roses** et de **tulipes**.

- Dans les 2 bouquets, il y a 288 roses.
- Dans le premier bouquet, il y a 201 tulipes et 132 roses.
- Dans le second bouquet, il y a 468 fleurs[5].

➢ Combien y a-t-il de tulipes dans le 2$^{e}$ bouquet ?

### ❷ On en mangerait…

À la pâtisserie, Claude et ses 6 amis veulent acheter 2 croissants et 5 tartelettes.

- İls ne disposent que de 6 € .
- İls s'aperçoivent alors qu'il leur manque 1,40 € [6].
  - İls décident donc de ne prendre que 3 tartelettes et 2 croissants.
  - Après avoir payé, il leur reste exactement 1 € .

➢ Combien coûte une tartelette ?

➢ Combien coûte un croissant ?

Bien sûr, certains élèves résolvent ces problèmes "de tête", mais il ne leur est pas toujours évident de les représenter par un schéma. Est-ce ajouter une difficulté inutile puisqu'ils "savent faire" ? Peut-être, pour eux, faudrait-il commencer par un problème "infaisable" ? Mais il existe des élèves qui ne savent pas le résoudre et, dans ce cas, la difficulté me semble suffisante. Chacun adaptera au niveau de ses classes…
Pour les problèmes de proportionnalité, on peut aussi donner des exercices simples ou attendre quelques mois, lorsque le travail "tournera autour" de la proportionnalité plus spécifiquement. Nous y reviendrons.
İl me semble important de faire de tels schéma car ce sont des activités de **pré-algébrisation** auxquelles, de toutes façons, nous n'accordons pas assez de temps lorsque nous "sommes dans" l'algèbre. Les segments sont les **x** ou les **y** que nous mettrons plus tard. İl y a quelques jours, un futur retraité qui fut architecte (donc, on peut le penser, bon géomètre), me confiait qu'il avait eu beaucoup de difficultés lorsqu'on lui avait fait aborder l'algèbre. Elle lui avait semblé trop abstraite ; il ne « voyait » pas ce qu'étaient ces **x**. S'il est vrai qu'à cette époque, on "prenait moins de gants" qu'à l'heure actuelle, le danger subsiste, sinon tous nos élèves seraient bons !

---

5 Les nombres sont choisis volontairement « grands ».

6 İl n'est pas évident de penser à **deux** lignes qui se correspondent et de placer les 1,40 € en moins et l'euro en plus par rapport au taquet des 6 € !

## ***Pourquoi faire écrire les hypothèses ?*** *Quelques remarques :*

D'abord, pourquoi ne pas introduire ce mot assez tôt (en l'expliquant) ? On a facilement tendance à le réserver à la géométrie. Cela devient vite une (mauvaise) habitude en 4e, même si on essaie d'être vigilant.
Ensuite ne faut-il pas faire dans l'interdisciplinarité ? Vous remarquerez que pour un élève faible, il y a une énorme différence entre « Le rôti coûte… » et « Le prix du rôti est de… ». D'une part, les énoncés utilisent plus souvent les tournures **verbales**. D'autre part, trouver **le nom qui nomme** la chose donnée ou à calculer est une réelle difficulté pour certains élèves.
On entre là dans le domaine des noms de **grandeurs**. Je pense aussi aux : prix d'achat, prix de vente, prix de revient, bénéfice, perte, frais… Tout un vocabulaire qui me semble, aujourd'hui, moins pratiqué à l'École que du temps du Certificat d'Études ! On peut imaginer un travail avec le collègue de français qui s'étalerait sur plusieurs mois. Je trouve que l'on fait beaucoup de français en mathématiques, le renvoi d'ascenseur devrait être plus fréquent[7]. Je côtoie des élèves qui ont réellement besoin que les mathématiques prennent toute leur place dans le nécessaire enrichissement d'un vocabulaire très limité.
İl me semble donc préférable de NOMMER les hypothèses. La présentation en trois colonnes (fictives) aide à la clarté et à leur (re)lecture… et à ne rien oublier.
On peut faire suivre cette introduction aux problèmes, d'exercices sur le sens des opérations ou sur la rédaction d'énoncés. Voyez ceux en annexe 2, inspirés du manuel HACHETTE 6e (R. Delord) 1990 page 7.
Vous trouverez en annexe 1 la fiche que je distribue aux élèves qui la collent dans leur cours.
Viennent ensuite les sept consignes de rédaction (§❹) que je vais commenter plus loin.

## ***Sur la proportionnalité,*** *quelques mots :*

Au Collège, nous devons faire passer :
➢ de la notion d'opérateur **interne** : « Si j'achète **3 fois plus** de croissants, cela me coûtera **3 fois plus** cher ». Cet opérateur n'a pas d'unité (ce sont des "fois plus", comme Π-pi).
➯ C'est le "**k**" de : f(**k**x) = **k** f(x) — la linéarité.
➢ à la notion d'opérateur **externe** : par exemple le prix unitaire en €/kg. Celui-ci **a** une unité, et c'est même une **unité quotient** qui fait passer des kg aux €. Dans l'autre sens, les kg/€ sont moins fréquentés mais ont du sens… Que peut-on acheter avec un euro ?
➯ C'est le "**a**" de y = f(x) = **a**x de la fonction linéaire qui sera vue en 3e.
Le programme de 4e aborde clairement les grandeurs et les unités quotients. C'est, à mon sens, trop tard et pourquoi ne pas commencer par ce que l'on rencontre sur toutes les étiquettes de supermarchés ?
Un scoop : les commentaires officiels vont vous y inciter fortement et même pire… alors essayez de bonne grâce ! Là aussi, on éclaire le présent et on prépare l'avenir, même proche. Par exemple, vous verrez que vos élèves comprennent bien que :
$\mathrm{kg}\times\frac{€}{\mathrm{kg}}$ c'est structurellement comme $3\times\frac{2}{3} = 2$ ; on simplifie par kg ou par 3.
Des calculs comme : $10\times\frac{27}{100}$ sont clairement au programme de 6e. ainsi que : $a\times\frac{b}{a} = b$ pour définir le quotient exact.
Pire encore : 3h×60 min/h = 180 min ou 15 m = 15 m×100 cm/m = 1 500 cm.
Vous constaterez que lorsqu'on DİT oralement, lentement et clairement :
« Oui, il y a soixante minutes par heure. » ou « Oui, il y a cent centimètres par mètre. », le "Saint Esprit" descend sur les têtes et il y a des "évidences" qui font du bien. Bien sûr c'est à placer au bon moment et à consommer avec modération, au début du moins. Mais j'en connais, depuis bien des années, qui en redemandent et qui s'amusent bien avec cela. Au fait, comment vous y prenez-vous pour convertir des km/h en m/s ou des gallons par mile en litres aux 100 km ou des g/cm² en lb/ft² (livres par pieds-carrés)[8] ?

---

[7] Avis personnel, bien sûr ! Mais avez-vous pensé, par exemple, à ces "sacrés" compléments de noms franco-français ? La somme **de** 2 produits commence par le calcul … des produits. « Le livre **de** John », c'est « John qui a un livre ». Nos amis anglais écrivent plus naturellement : « John**'s** book », isn't it ?
[8] On consultera avec bonheur les articles d'Yves CHEVALLARD et Marianna BOSCH dans la revue « petit x » n°55, pp 5 à 32, 2000-2001 et n°59, pp 43 à 76, 2002 (plus théorique) qui se trouvent à la bibliothèque de l'İREM.

**Annexe 1** **Les types de problèmes**

Il existe **deux** types de problèmes simples :

**(A)** ceux qui utilisent l'*addition* ou la *soustraction*
⇨ on les appelle : **problèmes additifs.**

Rappel : La soustraction est, **par définition**, une addition " à trou ".

**(B)** ceux qui utilisent la *multiplication* ou la *division*
⇨ on les appelle : **problèmes multiplicatifs.**

Rappel : La division est, **par définition**, une multiplication “à trou”.

## Méthode de résolution et de rédaction

❶ **On lit** très attentivement, une ou plusieurs fois, TOUT l'énoncé.

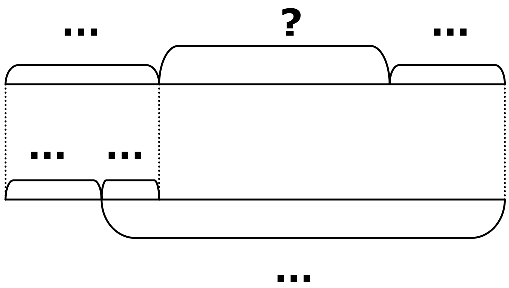
❷ On note toutes les **hypothèses** sur **3** colonnes (non tracées).

| | NOMMER (ce que c'est) | un NOMBRE donné | son UNİTÉ complète |
|---|---|---|---|
| Exemples : | Prix unitaire de la viande | 16,90 | €/kg |
| | Prix d'achat du rôti | 27,30 | € |

❸ **On représente** le problème par un **schéma** ou un **tableau**.

**(A)** Problème **additif**

Un ou plusieurs groupes de segments adjacents ou emboîtés.




**(B)** Problème **multiplicatif**

Un tableau de proportionnalité avec ses **4 titres**.

| | Grandeur **1** en $\mathbf{U_1}$ | Grandeur **2** en $\mathbf{U_2}$ |
|---|---|---|
| Situation **a** | Nombre connu | connu |
| Situation **b** | connu | **?** |

X...

X ... $U_2/U_1$

❹ Pour **rédiger la solution** du problème, on respecte les sept **consignes** suivantes:

(1) On écrit UNE **phrase** pour CHAQUE opération à effectuer.
Donc une seule opération par étape, très rarement 2 opérations inséparables.

(2) La phrase est écrite AVANT le calcul.
Elle annonce et se termine avec le résultat.
Exception : pour une conversion, on écrit seulement une (des) égalité(s).

(3) Chaque phrase contient un NOM qui indique CE QUE l'on va calculer.

(4) Tous les **nombres** figurant dans un calcul sont **accompagnés** de leur UNİTÉ **complète** (voir 7).

(5) Si on applique une **formule**, il faut la citer DEVANT le calcul.
Exemples : périmètres, superficies, volumes, …

(6) Dans la solution, aucun nombre ne doit "tomber du ciel". Un nombre vient de **l'énoncé** ou bien il a été **calculé** AVANT ; même un nombre simple ou "évident".

(7) L'écriture des **unités** est **codifiée** par une norme AFNOR qu'il faut respecter.[9]
Les abréviations sont **invariables** : pas de kms , frs , …

Exemples :
Mètre(s): **m** , km , mm — Gramme(s): **g** , kg , q , t
Franc/euro(s): **F** , c , **€** — Litre(s): **L** , hL , mL = $cm^3$
an , j , h , min , **s** — Degré(s): 20**°C** mais 90**°**=1droit
Et des unités-quotients : €/kg , €/ $m^2$ , $m^3$/s , L/h , km/h , m/s , g/$cm^3$ , tr/min , hab/$km^2$ , kW/hab , …
Et des unités-produits : **$m^2$** , **$m^3$** , kWh , t.km , km.voyageur (SNCF) , …
Et en physique : J , N , Ω , A , V , W , $ms^{-2}$ , K , …
Etc.

***<u>Pourquoi ces 7 consignes ? Quelques remarques au fil de mon … humeur…</u>***

D'abord 7 est le chiffre magique, comme disent ceux qui ne savent pas que c'est un nombre d'un chiffre ! C'est de l'humour numérologique…

➢ **Consigne (3) :**
Les arguments sont les mêmes que pour les hypothèses. Ce n'est qu'en **nommant** que l'on sait bien CE QUE l'on calcule.
Par ailleurs, les phrases ne sont pas très riches et se terminent, bien sûr, souvent par : « est de : ». Mais on peut faire plus littéraire ( ! ), dans certains cas.
Par exemple : « L'aire du rectangle mesure : » car une aire n'EST pas un nombre[10], fut-il suivi d'une unité, c'est une classe d'équivalence de surfaces.

➢ **Consigne (1) :**
J'ai souvent observé que des (bons) élèves écrivent un programme de calculs qui donne le résultat attendu mais ils ne savent pas dire ce que calcule **chaque** opération à l'intérieur de programme. La solution est-elle

[9] Voir ROUSSEL Y., Le Système Métrique, hier et aujourd'hui, Amiens : Association pour le Développement de la Culture Scientifique, p. 104-106.
[10] Voir la brochure APMEP n°46 déjà citée en 1ère page.

vraiment claire pour eux ? Détailler est donc formateur, sans être totalement systématique et sans exclure de résumer (ensuite) un problème par un programme contenant des parenthèses ou des crochets (avec les priorités en 5e).
Pour le périmètre d'un rectangle, on peut écrire par exemple :

$P = 2 \times (L+l) = 2\times(AB+BC) = 2 \times ( 4 \text{ m} + 3 \text{ m} ) = 2 \text{ x } 7 \text{ m} = \underline{\mathbf{14\ m}}$

Néanmoins, il me semble bon de faire constater (et apprendre le mot) que la notion de **demi-périmètre** (P/2) peut se révéler fort utile lorsqu'il faut calculer une dimension connaissant l'autre et le périmètre.

### ➢ Consigne (2) :

Une "belle" solution mathématique est souvent une solution courte. Aussi le paresseux que je suis souffre toujours en voyant des élèves que l'on a habitué à écrire 2 fois, voire 3 fois, la même chose. Cela donne :
« Je calcule le machin...
Pour calculer le machin, je multiplie le truc par le bidule.
Et à la fin une phrase qui dit que le machin coûte 13,45 € ».
Les hypothèses sont là pour dire ce que sont "truc" et "bidule". Si la phrase est écrite AVANT, on est prévenu avant de ce qui va arriver et un homme averti...
Enfin, la phrase complétée du résultat (que l'on souligne pour mieux le voir) constitue une réponse tout à fait acceptable et claire. Cela donne :

**La distance de Bordeaux à Toulouse est de :**
110 km + 140 km = **250 km**

Cela ne veut pas dire que l'élève qui **cherche** ne va pas commencer par trouver le calcul **puis** écrire la phrase. Lorsque nous cherchons un problème de géométrie, nous partons souvent de la conclusion pour remonter vers les hypothèses ; pourtant la **rédaction** est, ensuite, hypothético-déductive, comme on dit.

### *L'exception des conversions :*

Il est inutile d'écrire : « Je[11] convertis » ou « conversion : », on le voit bien !
La brochure APM Mots 6 affirme haut et fort qu'il est juste (et bon) d'écrire :
25 hm = 2 500 m car c'est bien une égalité VRAIE ! Alors pourquoi voit-on fleurir dans certains manuels des flèches ? Nous faut-il une fonction ?
En revanche, il est FAUX et donc inacceptable d'écrire un calcul comme : $4 + 3 = 7$ m .
Mais 2 m + 137 cm = 337 cm est juste.
Un problème insoluble au Collège subsiste : nous écrivons tantôt AB = 5, tantôt AB = 5 cm...[12]

### ➢ Consigne (4) : les unités !

Le document d'accompagnement des programmes de 3e indique :

> « Historiquement, c'est bien à partir d'un travail sur les grandeurs qu'ont été construits la plupart des concepts et théories mathématiques. Il serait d'autant plus dommageable de perdre de vue cette **filiation** que, [...] c'est elle qui permet d'assurer les liens avec les autres disciplines. »

Par ailleurs, Stella Baruk distinguait, dans son *Dictionnaire des mathématiques élémentaires*[13], les « nombres » et les « nombres de... ». Je vous invite à lire ces articles, et d'autres....
Enfin, ne trouve-t-on pas une rubrique « Grandeurs et mesures » dans le tableau récapitulatif de l'ensemble du programme de Collège ?
La mode encore majoritairement répandue (voir les manuels) de ne mettre, au mieux, l'unité qu'au seul résultat final est un avatar de la folie de mathématiques dites"modernes"[14]. Les nombres devaient être "purs" et vivent les structures et... les élèves, purs esprits ? ! Consultez les manuels de ma jeunesse, nos

---

[11] De plus les formes personnelles ne sont pas recommandées dans des textes scientifiques. Distancions donc assez tôt. Voir les conseils pratiques des annales du Brevet, Éditions NATHAN.
[12] Voir Mots 6 page 114.
[13] 1992, Éd. Seuil.
[14] Néanmoins, chapeau bas à Gilbert Walusinski qui vient de nous quitter. Père de nos IREM et éminent animateur du CLEA (Comité de Liaison Enseignants Astronomes), il n'y a certainement pas reconnu ses idées...

maîtres n'avaient pas peur des unités et ce qui est écrit est plein du bon sens des hussards rouges (ou noirs) de la République !
J'ai aujourd'hui la totale conviction que l'utilisation, dès la 6e, d'écritures du type :
$km/h \times h = km$ ou $bonbons/paquet \times paquets = bonbons$
non seulement apparaît rapidement facile aux élèves, mais prépare bien le calcul **compris** sur les fractions et l'algèbre[15], en donnant du sens et du concret à certains mécanismes. Cela vaut mieux que les "produits en croix" « balancés »[16] avant la 3e !
Si vous avez posé la question, vous avez, comme moi constaté que des mètres +, −, × ou ÷ par des mètres, ça fait toujours des mètres ! Il me semble que cela mérite attention.
Et quelle est l'unité de pi : $\Pi = P/D = S/R^2$ ? Pourquoi ?
On peut aussi remarquer : $3\ m + 4\ m = 7\ m$ c'est comme : $3x + 4x = 7x$.
Et $3\ m \times 4\ m = 12\ m^2$ c'est comme : $3x \times 4x = 12x^2$. Etc.
Les arguments sont nombreux et l'APM a publié des articles à ce sujet.

### ➢ Consigne (5) :

Pas de problème, si ce n'est que les formules de périmètres et d'aires doivent être construites progressivement pour être comprises. Cela demande du temps pour des activités et j'avoue ne pas toujours en avoir autant qu'il faudrait…
Les formules et leur application à la figure (si possible) jouent le même rôle que nos bons théorèmes dans les démonstrations. Alors on exige les deux ou rien du tout.
En passant :
La formule $P = \Pi \times D$ mérite d'être justifiée au moins par le périmètre de l'hexagone inscrit dont le périmètre est exactement $6R = 3D$. Donc $\Pi > 3$.
La formule $S = \Pi \times R^2$ mérite d'être justifiée par le carré circonscrit d'aire exactement $4R^2$. Donc $\Pi < 4$.

### ➢ Consigne (7) :

La lecture du « Lexique des règles de typographie en usage à l'Imprimerie Nationale »[17] édité par elle-même, 2002, est intéressante. On trouve en page 174 les décrets de 1961 à 1985 qui réglementent [avec un é] l'usage des unités et qui en donnent la liste avec leurs abréviations et les préfixes. Ami fonctionnaire, tu DOIS appliquer la LOI et la transmettre ! On peut rechercher cela aussi sur Internet.
Quelques remarques[18] :
Les unités sont invariables : kms, ce serait kilomètre-seconde, à ne pas confondre avec km/s qui est une vitesse. Avez-vous rencontré des "kilométreurs" qui kilométraient des distances ? On aimerait entendre des kilomètres **par** heure à la météo ! Cela nous aiderait…
Minute(s) s'abrège **min** et non mn. Litre(s) est **L** et non l. Heure(s) **h** et non H (henry). Kilo est **k** et non K (kelvin), comme on le voit beaucoup (K€).

---

15 Ne parle-t-on pas de « l'algèbre des grandeurs »…
16 Et justifiés comment ? Leur VRAIE justification se trouve au confluent des deux opérateurs externe et interne cités plus haut…
17 Vous verrez que les sciences n'y sont pas oubliées (on les publie !) et c'est le seul ouvrage dans lequel les règles des chiffres romains sont clairement indiquées.
Par ailleurs, je vous invite à lire la rubrique « Accents », histoire de tordre le cou à quelques idées fausses… À, É, È, … ça existe et c'est même RECOMMANDÉ (RECOMMANDE ?). Nos amis québécois sont plus vigilants que nous et ont même poursuivi Monsieur (**M.** pas Mr) Microsoft en justice ! Voir : http://noms.avec.accents.free.fr.
18 L'APISP (Association des Professeurs d'Initiation aux Sciences Physiques) a publié une « Étymologie des noms d'unités » dans le n°169 d'avril 2006, pp. 37-41, que l'on peut aussi trouver sur Internet : http://www.industrie.gouv.fr/metro/aquoisert/ . Le n°164 de février 2005 donne l'étymologie des noms d'éléments chimiques et le n°117 de septembre 1995 donne l'origine de préfixes des unités.
On peut prendre un abonnement groupé à leur bulletin avec celui de l'APMEP ; je le lis avec plaisir. Les associations ne vivent que par leurs adhérents !

**Annexe 2 :** ***SENS DES OPÉRATİONS – LECTURE D'ÉNONCÉS***

## Exercice 1 :

### Sens et classement

**REFAİRE** un tableau semblable au tableau ci-contre.
Compléter la colonne de droite afin de classer les énoncés en fonction de l'opération qui permet de le résoudre.

| La solution s'obtient …* | Numéro du problème |
|---|---|
| *… en faisant une addition :* | … ; … |
| *… en faisant une soustraction :* | |
| *… en faisant une multiplication :* | |
| *… en faisant une division :* | |
| *… autre : (préciser)* | |

**A** İl ne reste à Sylvie que 15€ . Si elle n'avait pas perdu 3€, elle aurait eu assez d'argent pour s'acheter un collier.
Quel est le prix du collier ?

**B** La municipalité a commandé 32 tables à 8 places pour équiper la cantine scolaire.
Combien faut-il commander de chaises ?

**C** La différence entre 2 nombres est 135, le plus petit est 42.
Quel est le plus grand ?

**D** Carine a fait les courses, il lui reste 23€. Elle doit encore acheter une revue à 4,5€.
Avec quelle somme va-t-elle rentrer chez elle si elle n'achète rien d'autre ?

**E** Je pense à un nombre. Je le triple et je trouve 963.
Quel est ce nombre ?

**F** Amélie fait un trajet en 250 pas et Béatrice fait le même trajet en 230 pas.
Qui a fait les plus grands pas ?

**G** Cinq personnes qui ont joué ensemble, ont gagné 800€ au Loto sportif.
Quelle somme revient à chacune d'elles ?

**H** 20 chèvres, 10 moutons et 5 matelots naviguent à bord d'un bateau.
Quel est l'âge du capitaine ?

**İ** TOULOUSE 110 | BORDEAUX 140 Voici ce que l'on lit à un carrefour. Quelle est la distance Bordeaux-Toulouse ?

**J** Une équipe de basket possède des shorts de 2 couleurs différentes et des maillots de 3 couleurs. Combien peut-elle arborer de tenues différentes ?

## Exercice 2 : Lecture et rédaction

**a)** RECOPIER l'énoncé ci-dessous en mettent à leur place les quatre nombres donnés dans le désordre.

26 17 34 21

Une citerne parallélépipédique fuit. On mesure la hauteur d'eau à ☐ h et on trouve ☐ cm. À ☐ h, on ne mesure plus que ☐ cm d'eau.

**b)** De combien le niveau de la citerne baisse-t-il en une heure ?
RÉDİGER correctement la solution de ce problème (phrases et opérations en lignes).

* On ne demande pas de les résoudre. Certains pourront être rédigés plus tard.

## *En guise de conclusion…*

À la relecture, je trouve le ton un peu trop “donneur de leçon” ! Pourtant l’enseignement au quotidien rend modeste ! Qu’on me pardonne, c’est manque de temps et manque de formation littéraire… J’ai simplement voulu faire partager (avec la fougue de la jeunesse !) des convictions qui se sont progressivement installées en confrontant des écrits à mon vécu quotidien d’enseignant. On peut ne pas être d’accord et une demi-journée de débat autour de ces sujets pourrait avoir lieu l’an prochain. Mais la venue d’André PRESSIAT sera sans doute l’occasion d’un débat animé…
À défaut d’être démonstratif, j’ai voulu que ces fiches soient assez directement utilisables pour des jeunes collègues qui n’auraient pas encore perçu l’importance de poursuivre et de synthétiser la résolution de problème en 6$^e$.
Pour les plus anciens, j’ai défendu des options qui me paraissent avoir une certaine efficacité et qui relèvent d’une certaine conception des mathématiques. Les lectures complémentaires que je propose, me semblent montrer que le “vent souffle” maintenant dans ce sens.
Enfin, si vous voulez traiter vos insomnies, lisez les 75 pages du rapport sur « l’enseignement des disciplines scientifiques dans le primaire et le secondaire » de l’Assemblée Nationale du 2 mai 2006. Il semble que l’on veuille aller vers une plus grande cohérence des enseignements et vers un travail en équipe des professeurs des disciplines scientifiques et techniques. On le souhaitait déjà lorsque j’étais étudiant au CPR ! Qui vivra verra…
Et vous vous demanderez à quel âge est-il souhaitable de savoir poser des divisions à virgule ; autre sujet de débat pour la communauté mathématique !

En

# Quelques constructions géométriques inspirées des métiers de la ferronnerie d'art

*Claude RIGOLLET, SEP du Lycée Clos Maire BEAUNE*

Résumé : *Explications de diverses constructions géométriques pour obtenir des proportions spécifiques à la ferronnerie et transformations permettant l'allongement (par un balcon) ou l'inclinaison (par une rampe d'escalier).*

Mots clés : *Constructions géométriques ; ferronnerie d'art et géométrie ; géométrie en lycée professionnel...*

L'enseignement des mathématiques avec des élèves de lycées professionnels nécessite bien souvent une relation étroite avec les activités et supports utilisés dans les domaines techniques.

Cette relation avec d'autres disciplines permet d'enrichir les supports pour enseigner notre matière et donner un « sens à des apprentissages pour des élèves qui arrivent au L.P. avec un sentiment profond d'échec et de refus des mathématiques.

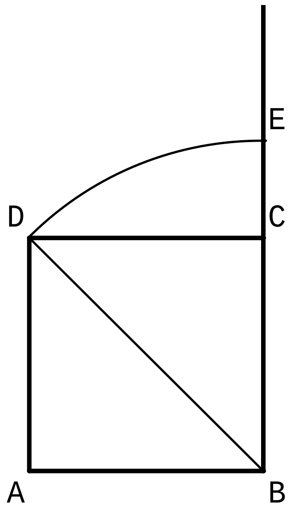
Les supports choisis dans cet article sont inspirés de techniques de tracés utilisés en ferronnerie d'art depuis plusieurs siècles. Les relations avec les professeurs des disciplines artistiques et de l'enseignement des métiers de la métallerie sont particulièrement fructueuses et permettent d'enrichir notre discipline.

## ***Quelques rappels de tracés permettant d'obtenir des rapports de longueurs :***

Les constructions suivantes, bien connues, nécessitent seulement l'utilisation de la règle et du compas. Elles permettent facilement d'obtenir des cadres rectangulaires dont les longueurs de deux côtés consécutifs sont dans un rapport donné.

<table>
<tr><td colspan="2">Les quadrilatères ABCD sont des carrés</td></tr>
<tr><td>

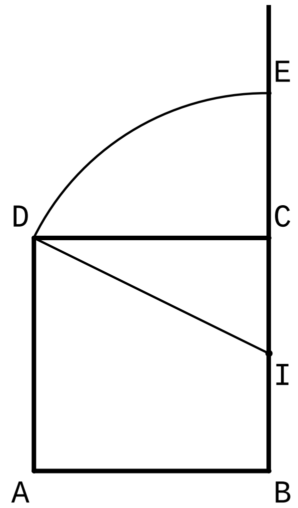
**Porte d'harmonie**




On obtient bien sûr $\dfrac{BE}{AB} = \sqrt{2}\ (BD = BE)$

</td><td>

**Nombre d'or**

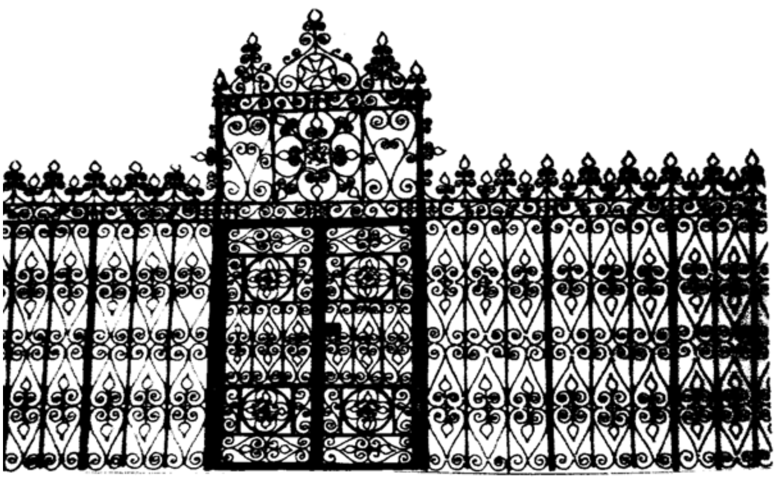



I est le milieu de [BC] ID = IE

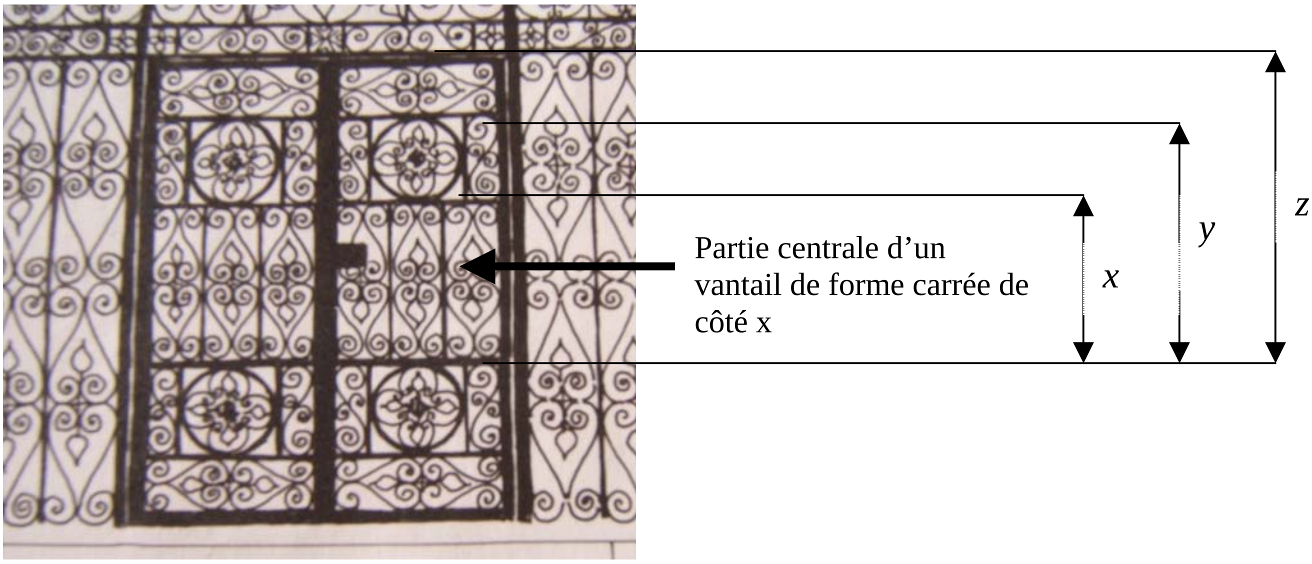
On peut facilement établir que $\dfrac{BE}{AB} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ .

</td></tr>
</table>

Une représentation de la grille reproduite ci-dessous (17ème siècle) a semble-t-il été conçue en utilisant les deux méthodes qui viennent d'être décrites.



On peut supposer que les motifs d'un vantail de part et d'autre du carré central sont obtenus en utilisant des rapports proches de ceux indiqués auparavant

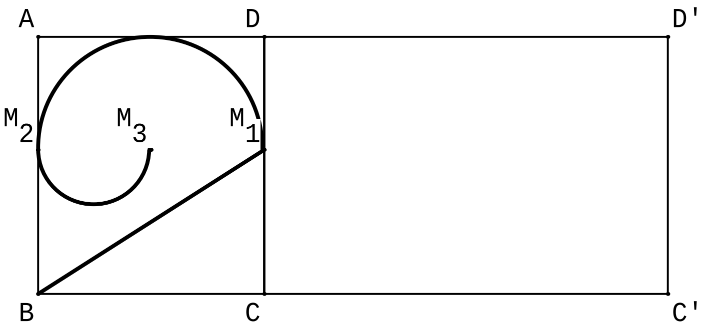



Si on admet que la partie centrale d'un vantail est de forme carrée (de côté x), les différents motifs respectent les proportions suivantes : $\frac{y}{x} \approx 1,414$ et $\frac{z}{x} \approx 1,618$ (nombre d'or)

Les motifs d'un vantail sont reproduits de manière symétrique par rapport à son centre.
Par contre la photo a déformé ces différentes proportions.

***<u>Allongement d'un motif : (applications : balcons)</u>***

Le motif (1) représenté ci-dessous est uniquement choisi pour permettre de visualiser l'effet obtenu. Ce motif n'a fait appel à aucune recherche d'esthétisme. Les dessins sont obtenus à partir d'une figure du logiciel GEOPLANW.

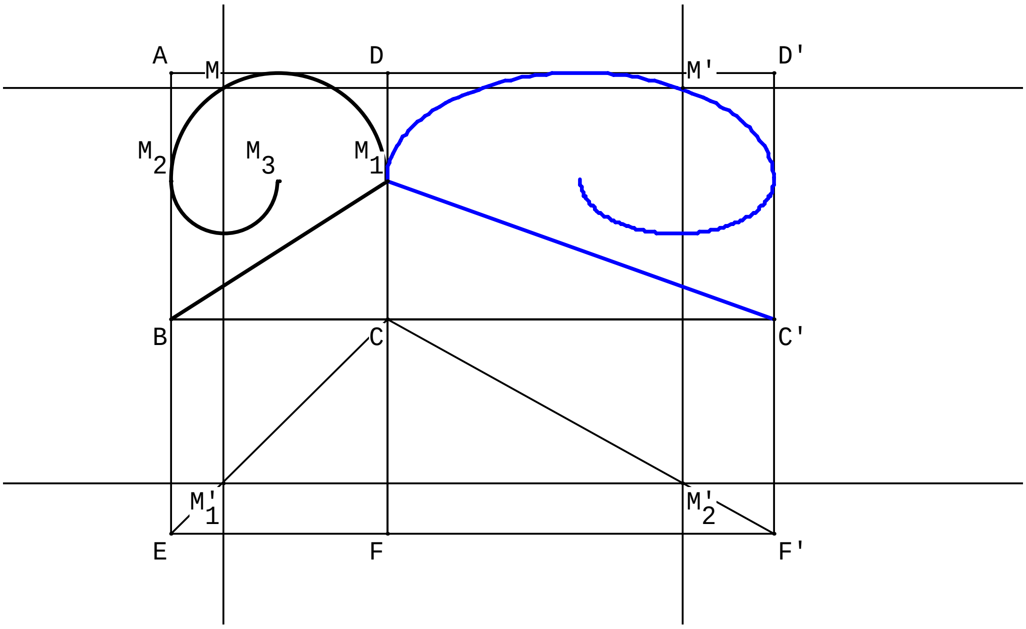



Le motif est dessiné à l'intérieur du rectangle ABCD. Il est constitué du segment $[BM_1]$, des demi-cercles de diamètres $[M_1M_2]$ et $[M_2M_3]$.
Le motif est à reproduire à l'intérieur du rectangle CC'D'D
(le coefficient d'allongement choisi ici est DD'/AD = 1,8 )

**Quelques précisions concernant la méthode de construction : (figure représentée ci-dessous)**

Soit un point M appartenant à ce motif (1). Il faut construire les éléments suivants :

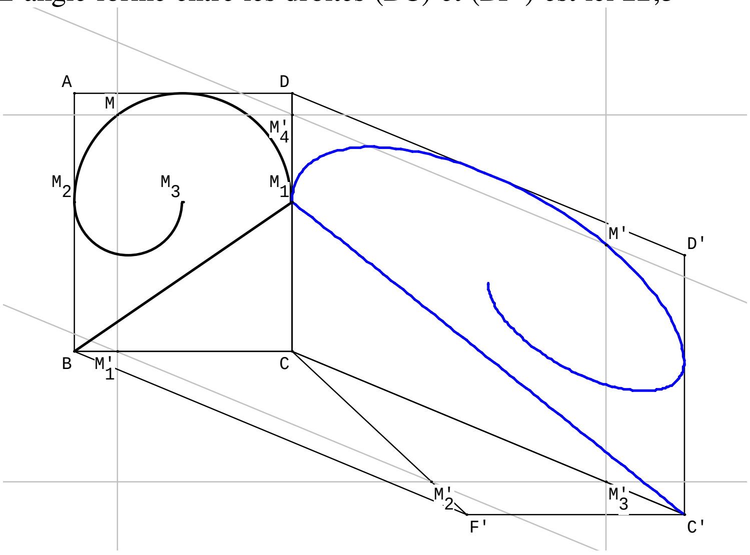
- le carré EFCB et le rectangle FF'C'C
- la parallèle en M à (AB) qui coupe la diagonale [EC] du carré EFCB en $M'_1$
- la parallèle en $M'_1$ à (BC) qui coupe la diagonale [CF'] du rectangle CFF'C' en $M'_2$
- la parallèle en $M'_2$ à (CD) et en M la parallèle à (AD). Ces deux droites se coupent au point M' (image du point M)
- le lieu de M' appartient au motif allongé (2) selon le dessin ci-joint.



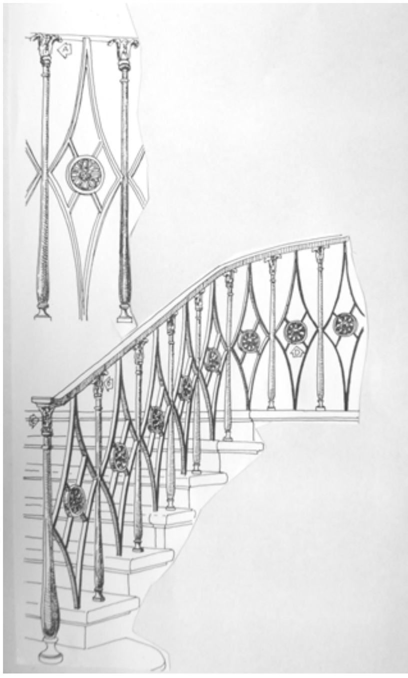

## ***Mise en place d'un motif donné pour une pente donnée* : *(rampe d'escalier)***

Des techniques similaires de tracés permettent de reproduire des motifs selon le schéma ci-dessous :

Le motif (3) obtenu est à l'intérieur du parallélogramme CC'D'D
Le coefficient d'allongement est maintenu à 1,8.
L'angle formé entre les droites (BC) et (BF') est ici 22,5°




Un exemple de rampe avec son motif de base



Au lecteur d'adapter ces techniques de construction et à chercher les propriétés de celles-ci.

Remerciements à Madame Christiane UNY, enseignante en arts appliqués, Lycée Clos Maire Beaune.

Bibliographie :

« La ferronnerie d'art dans l'architecture des origines à nos jours/Ph.Faure – Dijon CRDP 1983 », 4 tomes.

# Et pour finir en beauté... Mathématiciennes

*Gérard BONNEVAL, Lycée Fourier à Auxerre*

Résumé : *A partir de 13 portraits de femmes mathématicienne, trouver leur noms et les écrire dans un grille de manière à faire apparaître sur une verticale le mot mathématiques.*

Mots clés : *Femmes mathématiciennes.*

Dans le cadre de la Fête de la Science 2000 (année des Mathématiques) a été organisée au lycée Joseph Fourier à Auxerre, une exposition comprenant différents points :

- Des panneaux sur Joseph Fourier, mathématicien et physicien né à Auxerre
- Des jeux et des énigmes mathématiques
- Des panneaux sur les mathématiciennes, les uns provenaient d'une exposition européenne qui s'appelle «L'autre moitié de la science», les autres étaient dus à une exposition, «Femmes et Sciences», conçue par une documentaliste d'un lycée de Paris.

Dans ce cadre, des questionnaires ont été rédigés sur ces différents points afin d'inciter les visiteurs à une participation active. Nous vous proposons ci-dessous celui concernant l'exposition «Femmes et Mathématiques». Les élèves devaient remplir la grille (vierge) à partir des informations collectées sur les panneaux de l'exposition.

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | | | | | | | | **M** | | | | | | | | |
| **2** | | | | | | | | **A** | | | | | | | | |
| **3** | | | | | | | | **T** | | | | | | | | |
| **4** | | | | | | | | **H** | | | | | | | | |
| **5** | | | | | | | | **E** | | | | | | | | |
| **6** | | | | | | | | **M** | | | | | | | | |
| **7** | | | | | | | | **A** | | | | | | | | |
| **8** | | | | | | | | **T** | | | | | | | | |
| **9** | | | | | | | | **I** | | | | | | | | |
| **10** | | | | | | | | **Q** | | | | | | | | |
| **11** | | | | | | | | **U** | | | | | | | | |
| **12** | | | | | | | | **E** | | | | | | | | |
| **13** | | | | | | | | **S** | | | | | | | | |

(1) Née en Ecosse en 1780, elle étudia les mathématiques et l'astronomie. Elle eut deux garçons d'un premier mariage, puis, après la mort de son mari, elle épousa en seconde noce son cousin avec qui elle eut deux filles. Elle a poursuivi des études mathématiques, rencontré des savants illustres : Laplace, Poisson en France ; Babbage, Herschel en Angleterre. Elle traduisit "La Mécanique Céleste" de Laplace en anglais. Elle écrivit de nombreux livres sur des sujets scientifiques (géographie physique, physique moléculaire,…). En 1835, elle et Caroline Herschel furent élues les premières femmes membres de la Société Royale d'Astronomie. Elle mourut en 1872 à 92 ans.

(2) Née en 1918 à Ales (Gard), elle remporta le premier prix au Concours Général de Mathématiques en 1934 et fut 1ère ex-æquo à l'Agrégation de Mathématiques en 1939. Mère de quatre enfants, elle a pris sa retraite en 1984. Elle est l'auteur de nombreux livres de Mathématiques pour les étudiants des Universités et des Classes Préparatoires.

(3) A vécu en Grèce au $6^{ème}$ siècle avant Jésus Christ. Epouse de Pythagore, elle lui a succédé à la tête de l'Ecole Pythagoricienne.

(4) Née en 1882 à Erlangen en Bavière (Allemagne), elle est considérée comme une des fondatrices de l'Algèbre Moderne. Ses œuvres sont restreintes mais d'une importance capitale : deux mémoires sur la théorie des idéaux (1921 et 1923) et un livre sur l'algèbre non commutative (1933). En 1933, après l'entrée en vigueur des lois raciales et antisémites en Allemagne, elle est contrainte à l'exil vers les Etats-Unis où elle décède en 1935.

(5) Américaine, elle a inventé le langage COBOL, le premier langage qui permette la programmation des ordinateurs en langage courant et non plus avec des symboles mathématiques.

(6) Yougoslave, épouse d'Albert Einstein, elle lui a apporté une aide considérable en donnant une formulation mathématique à la relativité. Lorsque Albert Einstein reçut le prix Nobel en 1921, il vint à Zurich lui en remettre le montant en reconnaissance de leur œuvre commune.

(7) Née en 1815, elle est la fille d'un illustre poète anglais, mais elle ne connaîtra guère son père, ses parents s'étant séparés très tôt. Sa mère, érudite, lui fait donner une éducation poussée, et en mathématiques, elle est l'élève de Mary Sommerville et d'Augustin de Morgan. Les amateurs d'informatique dans les années 1980 ont beaucoup entendu parler du langage ADA, appelé ainsi car elle était considérée comme une pionnière dans ce domaine. Elle a beaucoup échangé avec Charles Babbage, le créateur des ancêtres des ordinateurs actuels : la machine différentielle et la machine analytique.

(8) Née en 370 à Alexandrie (Egypte), elle fut assassinée en 415. Ses écrits mathématiques ont été presque tous perdus. Ils comportaient notamment un commentaire du traité des Coniques d'Appollonius et un commentaire de l'Arithmétique de Diophante.

(9) Née en 1776 à Paris, elle se passionne très tôt pour les mathématiques et comme ses parents réprouvent ces goûts hors norme et veulent la priver de ces études singulières pour une fille, elle se relève la nuit pour apprendre en cachette, à la lueur d'une bougie, enveloppée de couvertures, tandis que l'encre gèle dans l'encrier. Ses parents finirent par se rendre à tant d'obstination et elle put étudier librement, avec le soutien secret de sa mère. Elle eut une correspondance importante notamment avec Lagrange et Gauss, d'abord sous le pseudonyme de Monsieur Le Blanc. Elle fut également très liée avec le mathématicien et physicien auxerrois Joseph Fourier. Ses travaux en Théorie des Nombres et sur la Vibration des Plaques Elastiques furent très importants. Elle reçut le prix de l'Académie des Sciences. Elle mourut en 1831 à 55 ans. Aujourd'hui, un lycée et une rue de Paris portent son nom.

(10) Française, elle fut reçue première à l'Agrégation de Mathématiques en 1989.

(11) Née à Paris en 1706, elle a notamment fait équipe avec Voltaire. Elle traduisit "Principia" de Newton, avec un "Commentaire Algébrique". Elle est morte en 1749.

(12) Née en 1718 à Milan (Italie), elle est l'aînée de 21 enfants. Sa contribution essentielle est d'avoir réalisé une compilation systématique, dans un ouvrage paru en 1748, des connaissances contemporaines en deux tomes ($1^{er}$ tome : Algèbre et Géométrie Analytique ; $2^{nd}$ tome : Calcul Différentiel et Intégral). Elle fut élue membre de l'Académie des Sciences de Bologne (Italie). Elle meurt en 1799.
Son nom reste attaché à une courbe, une cubique, dont une équation cartésienne est : $yx^2 = a^2 (a - y)$

(13) Née à Moscou en 1850, elle fut en 1874 la première femme à soutenir une thèse de Doctorat en Mathématiques à l'université de Göttingen (Allemagne). A partir de 1884, elle fut professeur à l'université de Stockholm (Suède) et en 1889, elle fut élue Membre correspondant de l'Académie des Sciences de Russie. Elle est décédée en 1891.

*Mathématiciennes*
*(Réponses)*

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | S | O | M | M | E | R | V | I | L | L | E |
| 2 | | | | | F | E | R | R | A | N | D | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | T | H | E | A | N | O | | |
| 4 | | | | | N | O | E | T | H | E | R | | | | | |
| 5 | | | | | H | O | P | P | E | R | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | M | A | R | I | C | | | |
| 7 | | | | L | O | V | E | L | A | C | E | | | | | |
| 8 | | | | | H | Y | P | A | T | I | E | | | | | |
| 9 | | | | G | E | R | M | A | I | N | | | | | | |
| 10 | | | | | B | O | U | S | Q | U | E | T | | | | |
| 11 | | | | B | R | E | T | E | U | I | L | | | | | |
| 12 | | | | | | A | G | N | E | S | I | | | | | |
| 13 | | K | O | V | A | L | E | V | S | K | A | J | A | | | |