Un jeu curieux : le jeu du premier sorti

Michel LAFOND, Lycée Le Castel à Dijon

I. Description du jeu

Deux joueurs A et B jouent au jeu suivant ["Le premier sorti"] :

- Un entier positif n est fixé. C'est l'objectif à atteindre.
  Une pièce (équilibrée) est lancée, le résultat (Pile ou Face) étant ignoré des deux joueurs.
- Le premier joueur A essaie de deviner l'état de la pièce en formulant une hypothèse à haute voix pour que B l'entende.
- Le second joueur B essaie lui aussi de deviner l'état de la pièce en formulant une hypothèse.
  Il peut tenir compte du choix précédent de A.
- La pièce est retournée et chaque joueur qui a deviné juste gagne un point. [pas de pénalité pour les perdants].
- L'expérience est répétée jusqu'à ce qu'un joueur obtienne n points. A chaque fois, c'est A qui parle le premier.
- Dans le cas où les deux joueurs obtiennent n en même temps, un tirage au sort désigne le gagnant.

II. Exemple : le but est d'obtenir $n = 3$

lancer	Choix de A	Choix de B	Points obtenus A	B
P	P	F	1	0
P	F	F	1	0
F	F	P	2	0
P	F	P	2	1
F	P	F	2	2
F	F	P	3	2

A gagne.

III. Analyse du jeu

On pourrait penser que le jeu est équitable, en ce sens que la dissymétrie due à l'ordre des intervenants n'avantage pas B qui, comme A, a exactement une chance sur deux de deviner juste.
Et pourtant :
Notons P_n (A) et P_n (B) les chances de gain respectives de A et de B [pour une stratégie donnée].
Si chaque joueur répond au hasard [stratégie aléatoire], alors bien entendu $P_n(A) = P_n(B) = ½$.
Le joueur A, qui n'a aucune information, peut aussi bien jouer au hasard [ou jouer toujours Pile, ou jouer toujours Face] cela ne changera rien à ses chances de gain. Mais ce n'est pas vrai pour B. En effet, supposons qu'à un moment du jeu, B soit en avance d'un point sur A. Par exemple A a obtenu 1 point et B 2 points, bilan qu'on notera (1 ; 2). Dans ce cas, B est sûr de gagner !

Car, pour tous les lancers suivants, B n'a qu'à dire exactement comme A, et le bilan (1 ; 2) passera au lancer suivant :

ou bien à (1 ; 2) si A (donc B) se sont trompés car alors personne ne marque,
ou bien à (2 ; 3) si A (donc B) ont deviné juste et marquent chacun un point.

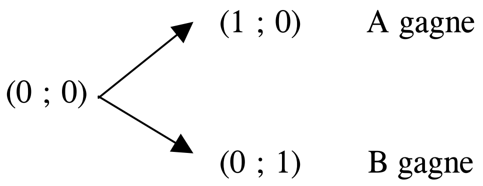
À plus ou moins long terme, le bilan passera ensuite à (3 ; 4) puis (4 ; 5) etc. B gagnera.

La meilleure stratégie de B devient évidente, car tant que B dit comme A, l'écart de points du bilan (a ; b) à savoir b - a, reste inchangé d'un lancer à l'autre.
Le seul espoir pour B d'obtenir une avance d'un point est donc de dire exactement le contraire de A.
Aussi B adoptera la stratégie optimale suivante S_0 :

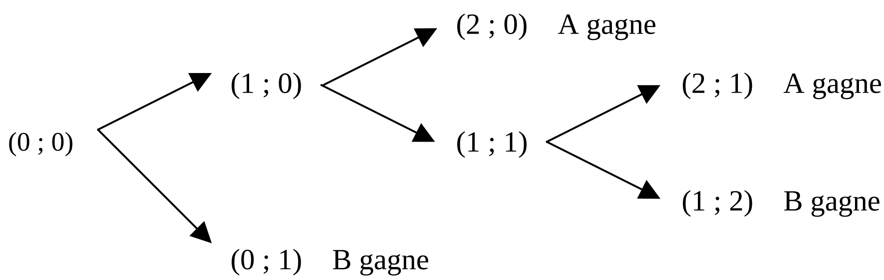
B dit <u>le contraire de A</u>, jusqu'à ce qu'il devance A d'un point.
(Si cela ne se produit jamais, B perdra ou il y aura tirage au sort)
Lorsque B a obtenu son avance d'un point, et si le jeu n'est pas encore terminé à ce moment là, B dira pour les lancers à venir, <u>la même chose que A</u> et il gagnera nécessairement.

IV. Exemples

Si $n = 1$ $\quad P_n(A) = P_n(B) = \frac{1}{2}$. L'arbre des possibilités est ci-dessous :



Si $n = 2$ $\quad P_2(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ $\quad P_2(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \approx 0{,}625$

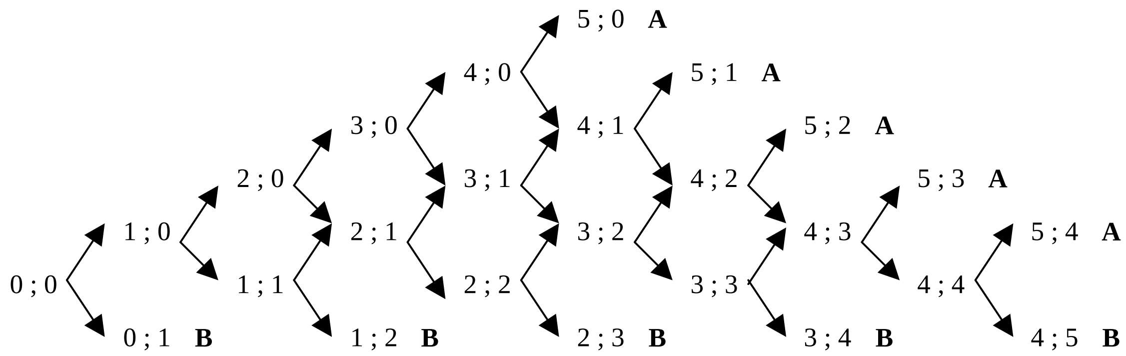


On vérifie que :

Si $n = 3$ $\quad P_3(A) = \frac{5}{16} \approx 0{,}312$ $\quad P_3(B) = \frac{11}{16} \approx 0{,}688$

Si $n = 4$ $\quad P_4(A) = \frac{35}{128} \approx 0{,}273$ $\quad P_4(B) = \frac{93}{128} \approx 0{,}727$

Si $n = 5$ voici le détail, avec en gras : le gagnant.



Le calcul des probabilités s'effectue de proche en proche avec les règles habituelles de la manipulation des arbres, sachant que la probabilité de chaque branche vaut ½ :
En identifiant les bilans et les évènements correspondants, le début du calcul est :
P(1 ; 0) = P(0 ; 1)) = ½. puis P(2 ; 0) = P(1 ; 1) = ¼.

Ensuite :
P(3 ; 0) = 1/8 P(2 ; 1) = ½ P(2 ; 0) +1/2 P(1 ; 1) = 1/8 + 1/8 = ¼ P(1 ; 2) = 1/8 etc.

On arrive à :

P_5 (A) = P(5 ; 0)+P(5 ; 1)+P(5 ; 2)+P(5 ; 3)+P(5 ; 4) = $\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{9}{128}+\frac{7}{128}+\frac{7}{256}=\frac{63}{256}\approx 0{,}256.$

P_5 (B) = $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{9}{16}+\frac{5}{128}+\frac{7}{256}=\frac{193}{256}\approx 0{,}754>\frac{3}{4}.$

Il y a un gros avantage pour B qui gagne plus de 3 fois sur 4.

V. Généralisations

a) Si l'objectif du jeu est d'obtenir n, alors, avec la stratégie ci-dessus, on montre que :

P_n (A) = $\prod_{k=1}^{k=n}\left(1-\frac{1}{2k}\right)$ [On retrouve bien P_5 (A) = $\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{7}{8}\frac{9}{10}=\frac{63}{256}$]

P_n (B) = $1-\prod_{k=1}^{k=n}\left(1-\frac{1}{2k}\right)$.

La démonstration est difficile et fait appel aux nombres de Catalan.

Comme ln P_n (A) = $\sum_{k=1}^{k=n}\ln\left(1-\frac{1}{2k}\right)$ équivaut à $-\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{2k}$ qui tend vers - ∞, on en déduit que

$\lim_{n\to+\infty} P_n(A)=0$ donc $\lim_{n\to+\infty} P_n(B)=1$.

Conclusion si n est grand, le second joueur est presque sûr de gagner. [déjà P_{32} (B) > 0,9]

b) Si 3 joueurs jouent avec les mêmes règles [A parle d'abord, B ensuite et enfin C] avec tirage au sort entre les gagnants ex æquo éventuels, le problème devient extrêmement compliqué, (même pour n = 2 !) et les meilleures stratégies de B et C ne sont pas connues. Cela dépend d'une éventuelle coopération entre B et C, si la coopération n'est pas interdite par la règle. La seule chose claire est que le jeu est défavorable au premier joueur.

Bibliographie : Mathématics magazine, Vol 78 n°1, Février 2005, pages 15 à 25.