La formule de Héron à l'aide des aires

Jean-Claude ANDRIEUX, Lycée Clos Maire à Beaune

La formule dite de Héron :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donnant l'aire d'un triangle S en fonction du demi-périmètre p du triangle et des côtés a , b et c peut être démontrée facilement en Seconde en utilisant des propriétés des aires et des triangles semblables.

Considérons un triangle quelconque ABC . On note $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$ les longueurs des côtés du triangle et r et r_A les rayons respectifs du cercle inscrit et du cercle exinscrit dans l'angle $\hat{A}$. $[ABC]$ désignera l'aire du triangle ABC .

On a :

$$[ABC] = [BIC] + [CIA] + [AIB] = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = pr$$

et

$$[ABC] = [ABJ] + [ACJ] - [BCJ] = \frac{cr_A}{2} + \frac{br_A}{2} + \frac{ar_A}{2} = (p-a)r_A$$

On en déduit que :

$$([ABC])^2 = p(p-a)rr_A$$

D'autre part, les triangles IEB et BFJ sont semblables car ce sont des triangles rectangles tels que

$$\widehat{IBE} = 90^\circ - \widehat{JBF} = \widehat{BJF}$$

Il est bien connu que $BE = p - b$ et que $BF = p - c$, on a alors

$$\frac{IE}{BF} = \frac{BF}{JF} \Leftrightarrow \frac{r}{p-b} = \frac{p-c}{r_A}$$

On en tire

$$r r_A = (p - b)(p - c)$$

Puis

$$([ABC])^2 = p(p - a)r r_A = p(p - a)(p - b)(p - c)$$

et donc

$$[ABC] = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$