Etude de la convergence de la suite $\left((\cos n)^n\right)$

et fractions continues

Emmanuel MOREAU, Lycée Davier à Joigny

I. Présentation[1]

La définition de la limite d'une suite ou d'une fonction est l'un des ajouts récents aux programmes des classes de Première S et Terminale S. Le programme de Première S nous invite, pour aborder ce thème, à développer la "notion intuitive de limite perçue à partir d'exemples" avant de présenter la "définition de la convergence d'une suite". On peut raisonnablement penser que les "exemples" doivent inclure des observations numériques. Le programme de Terminale S rappelle : "on montrera sur des exemples que l'étude sur calculatrice ou sur tableur d'une suite ou d'une fonction permet de conjecturer des limites qui devront ensuite être justifiées". L'exploration numérique est donc réellement encouragée. Vient ensuite, dans le programme de Première S : "Définition de la convergence d'une suite, utilisation de cette définition", ceci accompagné d'un commentaire quelque peu vague : "le travail demandé ici à propos de la définition de la convergence est de nature épistémologique". Pourquoi pas, mais il est à craindre que l'utilisation de cette définition n'apparaisse trop formelle à des élèves qui n'en saisissent pas la nécessité. On peut peut-être aider les élèves pour qui l'épistémologie est chose absconse en leur proposant une suite pour laquelle l'étude de la convergence suscite des interrogations. La suite $\left((\cos n)^n\right)$ est un tel exemple où la convergence est problématique.

Abordant ce chapitre, je propose à mes 35 élèves d'observer numériquement, à la maison, le comportement de quelques suites, dont la suite de terme général $u_n = (\cos n)^n$. Pour les élèves qui ont fait ce travail relativement sérieusement −ça coûte peu d'efforts−il ne fait aucun doute que cette suite tend vers 0. Voici une belle occasion de nous offrir le beau rôle en demandant aux élèves de recalculer quelques termes, comme $u_{289} \approx 0.903$ ou $u_{666} \approx 0.902$.
Que penser de ces artefacts ? Suffit-il d'aller plus loin pour qu'ils disparaissent ? On peut alors demander aux élèves de reprendre l'exploration des valeurs prises par cette suite pour qu'ils se rendent compte par eux-mêmes de la rareté, mais de la présence, de ces sauts.

On obtient par exemple :

$u_{1043} \approx 0.961$	$u_{2130} \approx 0.99997$	$u_{10295} \approx -0.996$
$u_{100\,088} \approx 0.994$	$u_{513\,575} \approx 0.901$	$u_{1\,037\,090} \approx 0.908$

[1] Deux activités, directement inspirées de cet article, sont disponibles "clé en main" sur le serveur de l'académie : http://webpublic.ac-dijon.fr/pedago/maths/index.html, rubrique "Thème".

Quelle conclusion tirer de ces observations, concernant la convergence de la suite ?
Les quelques sauts observés[2], très rares, empêchent-ils de dire que la suite tend vers 0 ? Non, pour quelques élèves qui auraient tendance à assimiler les notions de limite et de valeur d'adhérence. Le besoin d'une définition précise se fait alors ressentir, c'est ce que nous voulions[3]. Quant à l'étude mathématique de la convergence de cette suite, elle se trouve dans ce qui suit. Nous aurons besoin pour celle-ci d'un résultat faisant appel à un chapitre des mathématiques peut-être inattendu ici : les fractions continues.

II. Les fractions continues : des approximations rationnelles de bonne qualité

2.1. Définition

2.1.1. Généralités et notations

De manière générale, on appelle fraction continue une expression de la forme :

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \dots\dots\dots\dots}}}$$

Une fraction continue peut être finie ou infinie.
Nous utiliserons dans ce qui suit des fractions continues où les b_i sont tous égaux à 1 et où les a_i sont des réels strictement positifs.
Pour des raisons de commodités, on note traditionnellement

$$c_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_n}}}}}} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n].$$

c_n est appelé réduite d'ordre n, ou convergent d'ordre n, les réels a_i sont appelés quotients partiels.

2.1.2 Développement d'un réel en fraction continue.

A un réel x on peut associer de manière unique une suite de fractions emboîtées par le procédé suivant :

On pose $a_0 = [x]$ où $[x]$ désigne la partie entière de x.

Si $a_0 \neq x$, on pose ensuite $r_1 = \dfrac{1}{x - a_0}$. On a alors $x = a_0 + \dfrac{1}{r_1}$.

---

[2] Il est surprenant de constater qu'une calculatrice standard fournit des résultats relativement fiables pour ces calculs (les résultats ont été vérifiés sur ordinateur).
[3] On peut également profiter de ce travail pour inviter les élèves à méditer sur la question suivante : on sait que $|\cos n| \leq 1$ et π étant irrationnel l'égalité est exclue, on a donc $|\cos n| < 1$. Or on sait que si $|q| < 1$ alors $\lim q^n = 0$. Ne peut-on pas conclure ?
L'égalité $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$ est une autre occasion de méditer ce genre de situation.

On poursuit :

On pose $a_1 = [r_1]$ puis, si $a_1 \neq r_1$, $r_2 = \dfrac{1}{r_1 - a_1}$ de telle sorte que $x = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{r_2}}$.

On peut itérer (sauf division par 0, on en parle dans quelques lignes) :
En posant $r_0 = x$, l'algorithme général s'écrit :

Algorithme pour le développement d'un réel en fraction continue :

$$\text{Pour tout } n \geq 0 \ : \begin{cases} a_n = [r_n] \\ r_{n+1} = \dfrac{1}{r_n - a_n} \end{cases}$$

Les a_i, qui sont des parties entières, sont des entiers. Seul a_0 peut être négatif.
Répétant l'algorithme, on obtient la suite d'égalités :

$$x = r_0 = [a_0, r_1] = [a_0, a_1, r_2] = [a_0, a_1, a_2, r_3] = ...$$

et la suite des convergents est définie par :

$$c_0 = [a_0] \qquad c_1 = [a_0, a_1] \qquad c_2 = [a_o, a_1, a_2] \qquad \ldots$$

Les r_i s'appellent les restes et les c_i sont les convergents d'ordre i.
Les a_i étant des entiers, les c_i sont des nombres rationnels.

Si l'algorithme s'interrompt, c'est que x est rationnel[4].
En effet si, répétant l'algorithme, on obtient à la $n^{ème}$ étape l'égalité $a_n = r_n$ on a alors

$$c_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n] = [a_0, a_1, \ldots, r_n] = x$$

On ne peut alors poursuivre l'algorithme (r_{n+1} n'est pas défini) et on remarque que $x = c_n$ est rationnel.
Si x est irrationnel, on ne peut avoir d'égalité de forme $a_n = r_n$, sinon on aurait $x = c_n$ qui est rationnel. L'algorithme se poursuit donc indéfiniment.

Remarquons pour finir, avant de voir un exemple, que si x est irrationnel alors pour tout $n \geq 0$ on a $0 < r_n - a_n < 1$ puisque $a_n = [r_n]$ et que $a_n \neq r_n$, d'où $r_{n+1} = \dfrac{1}{r_n - a_n} > 1$ et donc $a_{n+1} \geq 1$. On en déduit que :
Si x est irrationnel, les a_i sont des entiers strictement positifs pour $i \geq 1$.

2.1.3. Un exemple : le cas du nombre π.

A l'aide d'une calculatrice, on obtient successivement :

$$a_0 = [\pi] = 3$$

$$\text{puis } r_1 = \frac{1}{r_0 - a_0} = \frac{1}{x - a_0} = \frac{1}{\pi - 3} \text{ et } a_1 = \left[\frac{1}{\pi - 3}\right] = 7$$

$$r_2 = \frac{1}{r_1 - a_1} \approx 15.9 \text{ d'où } a_2 = 15$$

[4] La réciproque est vraie : si x est rationnel, alors l'algorithme s'interrompt après un nombre fini d'étapes.

$$r_3 = \frac{1}{r_2 - a_2} \approx 1.03 \text{ donc } a_3 = 1$$

$$r_4 = \frac{1}{r_3 - a_3} \approx 292.6 \text{ donc } a_4 = 292$$

……….

En poursuivant ainsi on obtient $\pi = [3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,....]$[5]

La suite des convergents est :

$c_0 = 3$	$c_1 = \frac{22}{7}$	$c_2 = \frac{333}{106}$
$c_3 = \frac{355}{113}$	$c_4 = \frac{103\,993}{33\,102}$	$c_5 = \frac{104\,348}{33\,215}$

Le fait que $a_4 = 292$ est "grand" montre que c_3 est une bonne approximation : on reconnaît la célèbre approximation $\pi \approx \frac{355}{113}$ connue en Chine depuis le $V^{ème}$ siècle et dont la précision est inférieure à un millionième.

c_4 fournit une approximation dont la précision est inférieure à un milliardième.

2.2. Résultats fondamentaux

Théorème :

Considérons la suite de fractions emboîtées de terme général $c_n = [a_0, a_1, ..., a_n]$ où les a_i sont des réels strictement positifs.

Si on pose $p_{-1} = 1; q_{-1} = 0$ et $p_{-2} = 0; q_{-2} = 1$, on a alors pour tout $n \geq 0$ $c_n = \frac{p_n}{q_n}$,

les réels p_n et q_n étant définis par les relations de récurrence :

(1) $\quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$

(2) $\quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$

Remarque : Ce théorème, qui n'a rien d'évident, permet de calculer aisément (sans que l'on soit obligé de procéder à des mises au même dénominateur successives) la suite des convergents sous forme de fraction simple lorsqu'on connaît les a_i. Il permet surtout d'établir les résultats qui vont suivre.

Preuve du théorème :

Etablissons par récurrence, pour tout $n \geq 0$, la propriété **P(n)** :

[5] Si l'on dispose d'une machine plus performante, on obtient pour π le développement
[3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 99, 1, 2, 2, 6, 3, 5, 1, 1, 6, 8, 1, 7, 1, 2, 3, 7, 1, 2, 1, 1, 12, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 6, 1, 1, 5, 2, 2, 3, 1, 2, 4, 4, 16, 1, 161, 45, 1, 22, 1, 2, 2, 1, 4, 1, 2, 24, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 10, 2, ...]

$$P(n)\begin{cases} \text{Pour toute fraction emboîtée } c_n \text{ de la forme } [a_0, a_1, ..., a_n] \\ \text{(comportant donc } (n+1) \text{ termes), on a } c_n = \dfrac{p_n}{q_n} \text{ où :} \\ \begin{cases} p_{-1} = 1 \\ q_{-1} = 0 \end{cases} ; \begin{cases} p_{-2} = 0 \\ q_{-2} = 1 \end{cases} \text{, et où pour tout } 0 \le k \le n \text{ on a } \begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{cases} \end{cases}$$

P(0) est vraie car $c_0 = a_0 = \dfrac{a_0 \times 1 + 0}{a_0 \times 0 + 1} = \dfrac{a_0 p_{-1} + p_{-2}}{a_0 q_{-1} + q_{-2}}$.

On remarque de plus que $p_0 = a_0$ et $q_0 = 1$.

P(1) est vraie car $c_1 = [a_0, a_1] = a_0 + \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \dfrac{a_1 p_0 + p_{-1}}{a_1 q_0 + q_{-1}}$.

Supposons **P(n)** vraie à un rang $n \ge 0$ et montrons que **P(n+1)** est vraie.
Considérons donc une fraction emboîtée comportant $(n+2)$ termes :

$$c_{n+1} = [a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1}]$$

Cette égalité peut également s'écrire $c_{n+1} = \left[a_0, a_1, ..., a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}} \right]$ (d'où la nécessité de supposer les a_i réels et non entiers).

Or ce crochet ne contient plus $(n+2)$ mais $(n+1)$ termes, on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$c_{n+1} = \frac{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}}$$

où les nombres p_k et q_k, $0 \le k \le n-1$, sont associé à la fraction emboîtée $c_n = [a_0, a_1, ..., a_n]$.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{a_n a_{n+1} p_{n-1} + p_{n-1} + a_{n+1} p_{n-2}}{a_n a_{n+1} q_{n-1} + q_{n-1} + a_{n+1} q_{n-2}} \\ &= \frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} \\ &= \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}} \text{ car la relation de récurrence est supposée vraie jusqu'à } k = n \end{aligned}$$

Si on pose $\begin{cases} p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1} \\ q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} \end{cases}$ on a donc bien $c_{n+1} = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, qui est ce que nous voulions prouver.

Corollaire :

(3)	pour tout $n \geq 1$:	$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$
(4)	pour tout $n \geq 2$:	$q_n p_{n-2} - p_n q_{n-2} = (-1)^{n-1} a_n$
(3')	pour tout $n \geq 1$:	$c_n - c_{n-1} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$
(4')	pour tout $n \geq 2$	$c_n - c_{n-2} = \dfrac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n-2}}$

Preuve :
Pour établir **(3)** on soustrait **(2)** multipliée par p_{n-1} de **(1)** multipliée par q_{n-1}.
Pour établir **(4)** on soustrait **(2)** multipliée par p_{n-2} de **(1)** multipliée par q_{n-2}.
Pour établir **(3')** on divise **(3)** par $q_n q_{n-1}$.
Pour établir **(4')** on divise **(4)** par $q_n q_{n-2}$.

Conséquences . Si les a_i sont les termes obtenus par l'algorithme de décomposition en fraction continue (DFC) d'un irrationnel x, alors :

- La relation **(2)** montre, puisque les a_i sont supérieurs ou égaux à 1 pour $i \geq 1$ et les q_i strictement positifs pour $i \geq 0$, que la suite (q_n) est strictement croissante à partir du rang 1. Puisque c'est une suite d'entiers naturels, on en déduit que $\lim q_n = +\infty$. De même la suite (p_n) est strictement croissante et tend vers l'infini.

- La relation **(3)** montre, en application du théorème de Bézout, que les fractions $c_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ sont irréductibles pour tout $n \geq 0$.
- La relation **(4')** montre que (c_{2n}) est strictement croissante et que (c_{2n+1}) est strictement décroissante. La relation **(3')** montre que $c_{2n+1} - c_{2n}$ tend vers 0. Ces deux suites sont donc adjacentes, elles ont donc une limite commune. On en déduit que la suite (c_n) converge.

Il nous reste à montrer que (c_n) converge vers x lorsque les c_n sont les convergents successifs obtenus lors du DFC d'un irrationnel x. Perspective peu excitante dans la mesure où le résultat ne laisse guère de doute, mais nous établirons simultanément un résultat fort, relatif à la qualité de l'approximation de x par c_n.

2.3. Inégalité de Legendre

Théorème : Si $\dfrac{p_n}{q_n}$ est le $n^{ème}$ convergent obtenu par l'algorithme de DFC d'un irrationnel x, alors pour tout $n \geq 0$ $\left| x - \dfrac{p_n}{q_n} \right| < \dfrac{1}{{q_n}^2}$.

Dans la littérature, on trouve rarement cette inégalité mentionnée sous cette appellation, mais il semble bien que ce soit Legendre qui le premier ait établit ce résultat.

Preuve :
On a, par définition du DFC d'un irrationnel (voir 2.1.2), pour tout $n \geq 0$:

$$x = [a_0, a_1, ..., a_n, r_{n+1}]$$

En application du théorème de la partie 2.2 on a donc, pour tout $n \geq 0$:

$$x = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}}$$

où les entiers p_k et q_k , $0 \leq k \leq n-1$, sont toujours définis par l'égalité $[a_0, a_1, ..., a_k] = \frac{p_k}{q_k}$, la fraction étant irréductible. On en déduit :

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}}{q_n (q_n r_{n+1} + q_{n-1})} = \frac{\pm 1}{q_n (q_n r_{n+1} + q_{n-1})}$$

car $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = \pm 1$ d'après **(3)**, or $q_{n-1} > 0$ et $r_{n+1} > a_{n+1}$, donc :

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1} q_n^{\ 2}} \leq \frac{1}{q_n^{\ 2}}.$$

III. Etude de la convergence de la suite $\left((\cos n)^n\right)$

Théorème : La suite $\left((\cos n)^n\right)$ n'a pas de limite.

Preuve :
Pour démontrer ce théorème, comme chacun est persuadé que 0 est une valeur d'adhérence, il nous suffira d'en exhiber une deuxième.

Considérons la suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ des convergents de π.

L'inégalité de Legendre permet d'écrire $\left| \pi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^{\ 2}}$, d'où en multipliant par $2q_n$:

$$\left| 2q_n \pi - 2p_n \right| < \frac{2}{q_n}$$

Or pour tout entier n on a $0 \leq \frac{2}{q_n} \leq 2 < \pi$, on en déduit que $\cos \frac{2}{q_n} < \cos(2q_n \pi - 2p_n) \leq 1$.

Or pour tout réel u on a $\cos u \geq 1 - \frac{u^2}{2}$, on a donc $1 - \frac{2}{q_n^{\ 2}} \leq \cos(2p_n) \leq 1$.

Mais pour tout n on a $\frac{p_n}{q_n} < 4$ donc $\frac{1}{q_n} < \frac{4}{p_n}$ puis $\frac{2}{q_n^{\ 2}} < \frac{32}{p_n^{\ 2}}$, on en déduit que :

$$1 - \frac{32}{p_n^{\ 2}} \leq \cos(2p_n) \leq 1$$

Donc, dès que $p_n \geq 6$ (pour que $1 - \frac{32}{p_n^{\ 2}}$ soit positif), c'est-à-dire dès que $n \geq 1$, on a :

$$\left(1 - \frac{32}{p_n^{\ 2}}\right)^{2p_n} \leq \left(\cos(2p_n)\right)^{2p_n}$$

Or $\left(1-\dfrac{32}{{p_n}^2}\right)^{2p_n} = e^{2p_n \ln\left(1-\frac{32}{{p_n}^2}\right)} \geq e^{2p_n \times \frac{-64}{{p_n}^2}}$ car $\ln(1-u) \geq -2u$ si $u > 0$ est suffisamment petit,

donc $$e^{-\frac{128}{p_n}} \leq \left(\cos(2p_n)\right)^{2p_n} \leq 1$$

Mais $\lim p_n = +\infty$ donc par comparaison $\lim\left(\cos(2p_n)\right)^{2p_n} = 1$, ce qui prouve que 1 est une valeur d'adhérence[6].

IV. Des entiers dont le cosinus est presque 1

L'encadrement $1-\dfrac{32}{{p_n}^2} \leq \cos(2p_n) \leq 1$ apparu dans la démonstration ci-dessus montre que le développement en fraction continue de π fournit un procédé pour trouver de tels entiers.
On a $\pi = [3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,\ldots.]$.
La relation de récurrence $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ nous permet de calculer très aisément les p_i :

$$p_0 = a_0 = 3$$
$$p_1 = a_1 p_0 + p_{-1} = 7 \times 3 + 1 = 22$$
$$p_2 = 15 \times 22 + 3 = 333$$
$$p_3 = 1 \times 333 + 22 = 355$$
$$p_4 = 292 \times 355 + 333 = 103\,993$$

etc.

On donne ci-dessous les premiers termes des suites (p_n) et $(\cos(2p_n))$ calculés par ordinateur :

3	0.960170286650366020545	833719	0.9999999999989300807545
22	0.999843308647691220069	1146408	0.999999999999309029406
333	0.999844374056782463069	4272943	0.999999999999395924751
355	0.999999998182635921076	5419351	0.999999999999997081447
103993	0.999999999268137025352	80143857	0.999999999999999563525
104348	0.999999999757338775237	165707065	0.999999999999999850189
208341	0.999999999868315680459	245850922	0.999999999999999925138
312689	0.999999999983171886105	411557987	0.999999999999999987130

Puis :

1068966896	0.99999999999999999978174826245031935605331
2549491779	0.99999999999999999995995779009673428103095
6167950454	0.99999999999999999999551592839330454571602
14885392687	0.99999999999999999999562032999987477774740
21053343141	0.9999999999999999999999938513135866325485
1783366216531	0.9999999999999999999999990285262990803724
3587785776203	0.9999999999999999999999997415424693960703
5371151992734	0.9999999999999999999999997722358080189483
8958937768937	0.999999999999999999999999990302557496648
139755218526789	0.9999999999999999999999999998972672816733
428224593349304	0.999999999999999999999999999994618721862
5706674932067741	0.999999999999999999999999999996408639992
6134899525417045	0.999999999999999999999999999999819655547
30246273033735921	0.9999999999999999999999999999999961423455
66627445592888887	0.9999999999999999999999999999999998985478

[6] On peut démontrer que u_n est dense dans [-1 ; 1]. Pour tout contact : zim.moreau.mann@wanadoo.fr.

Remarque :
Si $\cos(2p_n) \approx 1$ alors $2p_n \approx 2k\pi$ donc $p_n \approx k\pi$ donc $\cos p_n$ est proche de 1 ou de -1. En fait $\cos p_n$ est plus proche, mais en valeur absolue, de 1 que $\cos(2p_n)$. Voir l'inégalité obtenue en 5.3, qui de plus peut être améliorée aisément.

V. Pour aller plus loin

5.1. Mesure d'irrationalité

Peut-on améliorer l'inégalité de Legendre : $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$? Ou, autre façon de poser la question, un irrationnel x étant donné, existe-t-il des rationnels $\frac{p}{q}$ tel que $\left|x - \frac{p}{q}\right|$ soit petit devant $\frac{1}{q^2}$?

Lagrange a montré que pour tout irrationnel x, l'inégalité $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ est vérifiée pour une infinité de rationnels $\frac{p}{q}$.

Le théorème d'Hurwitz fournit des inégalités plus précises, mais toujours en $\frac{1}{q^2}$.Peut-on obtenir des inégalités en $\frac{1}{q^3}$? La réponse est oui, mais pas pour tous les irrationnels. Ceci nous conduit à définir la mesure d'irrationalité.

Mesure d'irrationalité : Pour un irrationnel x on appelle mesure d'irrationalité de x le réel $\mu(x)$ défini par $\mu(x) = \sup\{r > 0$ tel que l'inéquation $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^r}$ a une infinité de solutions $\}$

D'après l'inégalité de Legendre, pour tout irrationnel x on a $\mu(x) \geq 2$ puisque alors le DFC de x fournit une infinité de solution à l'inéquation $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$, précisément : les convergents $\frac{p_n}{q_n}$.

Un théorème fondamental concernant les valeurs de $\mu(x)$ est le théorème de K.F.Roth (GB), qui a valu à son auteur la Médaille Fields en 1958.

Théorème de Roth :
- Si x est algébrique de degré>1 alors $\mu(x) = 2$.
- Si x est transcendant, alors $\mu(x) \geq 2$.

Preuve : Non, je plaisante.
Pour les nombres transcendants, peu de valeurs exactes sont connues pour $\mu(x)$. Mais il a été démontré que :
- $\mu(e) = 2$
- $\mu(L) = +\infty$ où L est la constante de Liouville[7].

[7] La constante de Liouville est défini par $L = \sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-n!} = 0.110\,001\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,000\,...$

Historiquement, c'est le premier nombre dont on a démontré la transcendance (Liouville, 1850).

Bien entendu, la valeur exacte de $\mu(\pi)$ n'est pas connue, et la recherche d'une valeur approchée de ce nombre est l'objet de travaux actuels :

- en 1953, K.Mahler montre que $\mu(\pi) < 42$.
- en 1974, M.Mignotte montre que $\mu(\pi) < 21$.
- en 1992, M.Hata montre que $\mu(\pi) < 8.0161$.

Certains spécialistes de la question (dont les frères Borwein, à qui l'on doit aujourd'hui les algorithmes les plus rapides pour le calcul de valeurs approchées de π) pensent qu'il est assez probable que, comme pour e, on ait $\mu(\pi) = 2$, mais la démonstration semble encore lointaine. Pour démontrer le théorème qui suit, nous nous contenterons de la majoration $\mu(\pi) < 8.1$.

5.2. *Augmentons la puissance*

Théorème : Pour tout entier $m \geq 15$ la suite $\left((\cos n)^{n^m}\right)$ tend vers 0.

Preuve : Si $m \geq 15$ on a pour tout entier n : $|\cos n|^{n^{15}} \geq |\cos n|^{n^m}$, il nous suffira donc de montrer que la suite $\left((\cos n)^{n^{15}}\right)$ tend vers 0.

Par définition de la mesure d'irrationalité, et puisque $\mu(\pi) < 8.1$, l'ensemble des rationnels $\frac{p}{q}$ qui sont solution de l'inéquation $\left|\pi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{8.1}}$ est fini.

Soit p_0 la plus grande des valeurs de p de cet ensemble fini. Pour $n > p_0$, tout nombre rationnel de la forme $\frac{n}{d}$ vérifie $\left|\pi - \frac{n}{d}\right| \geq \frac{1}{d^{8.1}}$ donc $|d\pi - n| \geq \frac{1}{d^{7.1}}$.

Posons $d_n =$ l'arrondi de $\frac{n}{\pi}$ à l'entier le plus proche.

Il n'y a pas d'ambiguïté (comme pour 13.5) car $\frac{n}{\pi}$ est irrationnel.

On a ainsi $\left|d_n - \frac{n}{\pi}\right| < \frac{1}{2}$ d'où $|d_n\pi - n| < \frac{\pi}{2}$.

On obtient ainsi la double inégalité : $\frac{1}{d_n^{7.1}} \leq |d_n\pi - n| < \frac{\pi}{2}$.

Or pour n assez grand on a $\frac{n}{d_n} > 3$ puisque $\left(\frac{n}{d_n}\right)$ est une suite qui tend vers π donc $\frac{1}{d_n} > \frac{3}{n}$ et

donc $\left(\frac{3}{n}\right)^{7.1} \leq |d_n\pi - n| < \frac{\pi}{2}$

D'où, pour n assez grand : $\cos n \leq \cos\left(\frac{3}{n}\right)^{7.1} \leq 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{n}\right)^{14.2} \leq 1 - \frac{1}{n^{14.2}}$

car $\cos u \leq 1 - \frac{u^2}{3}$ pour u suffisamment petit. On en déduit que

$$|\cos n|^{n^{15}} \leq \left(1 - \frac{1}{n^{14.2}}\right)^{n^{15}} = \exp\left(n^{15}\ln\left(1 - \frac{1}{n^{14.2}}\right)\right) \approx e^{-n^{0.8}} \to 0$$

Ce qui démontre notre théorème. Ajoutons :

Résultat douteux : S'il s'avérait que $\mu(\pi)=2$, on montrerait de la même manière que $\lim \left|\cos n\right|^{n^{2+\varepsilon}}=0$ pour tout $\varepsilon>0$.

Remarque : Des valeurs absolues sont nécessaires pour définir la suite lorsque ε n'est pas entier.

5.3. Et la suite $\left((\cos n)^{n^2}\right)$ *?*

Théorème : La suite $\left((\cos n)^{n^2}\right)$ n'a pas de limite.

La démonstration qui suit est presque identique à la démonstration de la non convergence de la suite $(\cos n)^n$, mais – outre le fait qu'à cet endroit de l'article la question de la convergence de cette suite se pose naturellement – les observations numériques associées à cette suite sont particulièrement étonnantes (voir plus loin). Ces observations peuvent être faites en salle informatique avec les élèves (voir par exemple ce qui est proposé sur le site de l'académie de Dijon : http://webpublic.ac-dijon.fr/pedago/maths/index.html).

Preuve du théorème :

Reprenons les notations de la partie 3 : $\left|\pi-\dfrac{p_n}{q_n}\right|<\dfrac{1}{q_n^{\,2}}$ et posons $e_n=\left|q_n\pi-p_n\right|$.

q_n étant entier on a : $\left|\cos p_n\right|=\left|\cos e_n\right|=\cos e_n$ pour n assez grand car $\lim e_n=0$

D'où, puisque $\cos x\geq 1-\dfrac{x^2}{2}$ pour tout réel x : $\left|\cos p_n\right|\geq 1-\dfrac{e_n^{\,2}}{2}$

Puis : $$\left|\cos p_n\right|^{p_n^{\,2}}\geq \exp\left[p_n^{\,2}\ln\left(1-\frac{e_n^{\,2}}{2}\right)\right]$$

Utilisant l'inégalité $\ln(1-u)\geq -2u$ valable pour $u>0$ suffisamment petit, on obtient :

$$\left|\cos p_n\right|^{p_n^{\,2}}\geq \exp\left(-p_n^{\,2}e_n^{\,2}\right) \text{ pour } n \text{ assez grand}$$

Or $e_n<\dfrac{1}{q_n}\Rightarrow -p_n^{\,2}e_n^{\,2}>-\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)^2>-10$ pour n assez grand car $\lim -\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)^2=-\pi^2=-9.8...$

Donc pour n assez grand : $\left|\cos p_n\right|^{p_n^{\,2}}\geq e^{-10}$.

Ceci prouve qu'il existe une suite extraite qui ne tend pas vers 0.

Pour qui est convaincu que 0 est une valeur d'adhérence (on peut le montrer sans problème), ceci suffit à prouver le théorème.

Observations numériques

- pour $10\ 000\leq n\leq 100\ 000$, on observe qu'aucun terme n'excède 10^{-17} en valeur absolue.

pour $10\ 000\leq n\leq 1\ 000\ 000$, dix termes seulement excèdent 10^{-6} en valeur absolue, qui correspondent aux valeurs suivantes de n : 103 638 ; 103 993 ; 104 348 ; 104 703 ; 208 341 ; 208 696 ; 312 689 ; 521 030 ; 625 378 et 833 719.

On rencontre dans ces dernières listes des termes de la suite (p_n) : 103 993 ; 104 348 ; 208 341 ; 312 689 et 833 719. Ceci est en accord avec la dernière partie, mais il est surprenant de constater que l'on rencontre aussi des combinaisons de ces p_n :

$$103\,638 = 103\,993\text{-}355 \text{ ; } 104\,703 = 104\,348 + 355 \text{ ; } 208\,695 = 208\,341 + 355 \text{ ;}$$
$$521\,030 = 208\,341 + 312\,689 \text{ et } 625\,378 = 2 \times 312\,689.$$

Ceci se justifie à l'aide de la formule d'addition des cosinus :
Considérons deux numérateurs de réduites : p_n et p_m. On sait que $|\cos p_n| \approx 1$, et donc $\sin p_n \approx 0$. De même pour p_m. On a alors $|\cos(p_n + p_m)| = |\cos p_n \cos p_m - \sin p_n \sin p_m| \approx 1$.

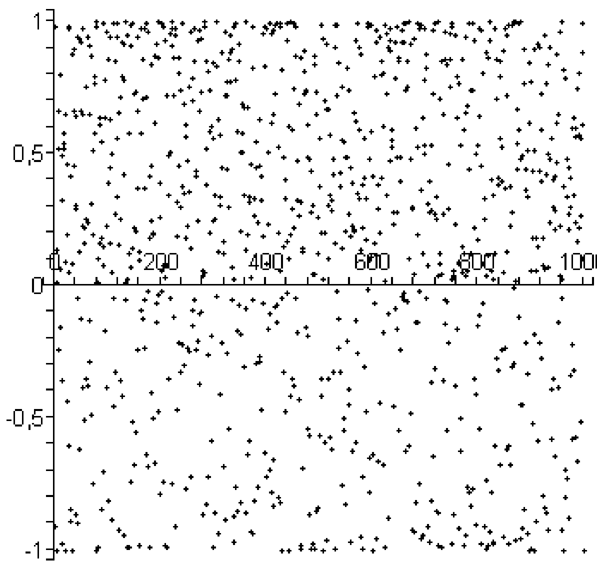
Selon la qualité de cette dernière approximation, il se peut alors que $(\cos(p_n + p_m))^{(p_n+p_m)^2}$ ne soit pas trop proche de 0.

Pour terminer, intéressons nous aux valeurs de la suite $\left((\cos p_n)^{p_n^2}\right)$. Voici les douze premiers termes de cette suite, et les valeurs de p_n correspondantes :

3	0.9134549359	208341	0.2395551826
22	0.9812182213	312689	0.6627617336
333	0.0133736467	833719	0.1557943538
355	0.9999427433	1146408	0.7968990643
103993	0.1382500752	4272943	0.0634623947
104348	0.5165648219	5419351	0.9787989074

Sur le graphique ci-contre sont représentés les points de coordonnées $\left(n \,;\, (\cos p_n)^{p_n^2}\right)$ pour n compris[8] entre 0 et 1000.

On constate que les nombres $(\cos p_n)^{p_n^2}$ semblent se répartir sur une grande partie[9] de l'intervalle [-1 ; 1].



Remarque : Mieux vaut ne pas dire à des élèves de lycée que la suite $\left((\cos n)^{n^2}\right)$ ne tend pas vers 0. Armés de leurs calculatrices (voir les observations numériques), pour qui nous prendraient-ils ?

[8] p_{1000} est un entier de 513 chiffres.

[9] Attention tout de même aux conclusions hâtives : cette suite n'est pas dense dans [-1 ; 1] puisque, par exemple, aucun terme n'appartient à l'intervalle $\left[-e^{-10}; e^{-10}\right]$