Michel LAFOND, Lycée Le Castel à Dijon

JEU - 48

On part d'un cube :

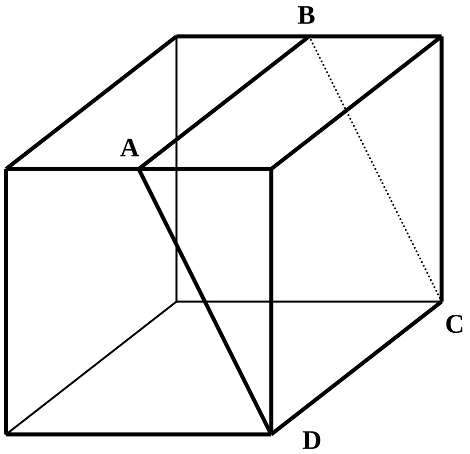


Figure 1

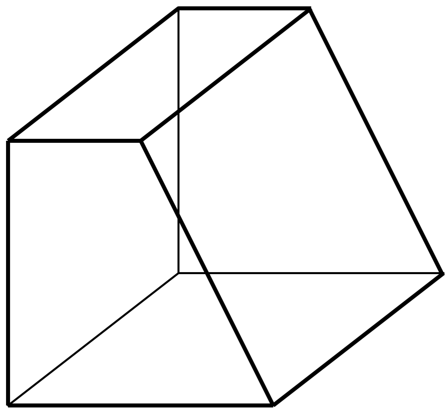


Figure 2

On tronque le cube (Figure 1) par un coup de scie le long du rectangle ABCD (où AB est une médiane). On obtient la figure 2 :

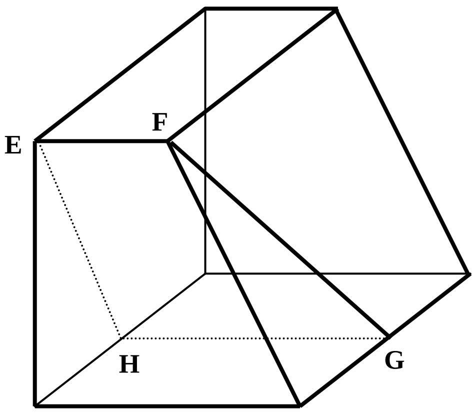


Figure 3

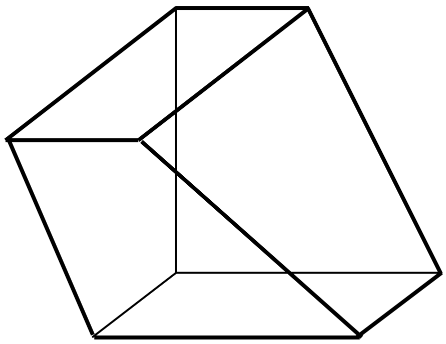


Figure 4

On tronque ce qui reste (Figure 3) par un coup de scie le long du trapèze EFGH (où GH est une autre médiane du cube).
On obtient l'horrible chose de la figure 4.
Cette chose a un **axe de symétrie** ! Trouvez-le.

D'après André DELEDICQ.

PROBLÈME - 48

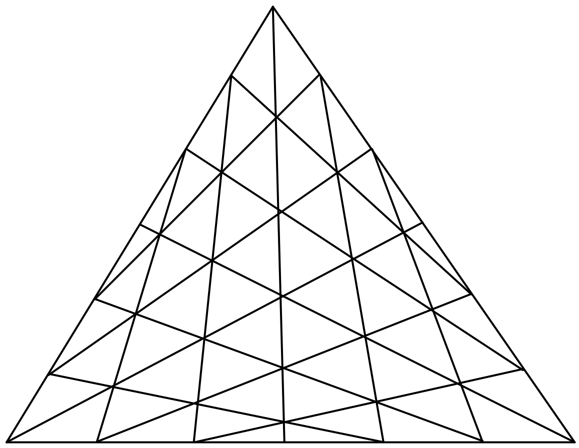
On pose $U_1 = 10$ $U_2 = 401$ et pour $n \geq 0$: $U_{n+2} = U_n - \dfrac{1}{U_{n+1}}$

Démontrer que $U_{2006} = 0$.

Solutions

JEU - 47

Combien comptez vous de triangles dans la figure agaçante ci-dessous ?



Il y a exactement **198** triangles.

PROBLÈME - 47

Démontrer que si pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] on a $|a\,x^2 + b\,x + c| \leq 1$
alors $|a| + |b| + |c| \leq 17$.

Si dans $|a\,x^2 + b\,x + c| \leq 1$ on fait successivement $x = 0$ $x = ½$ $x = 1$
On obtient le système :

$$(S) \quad \begin{cases} |c| \leq 1 \\ |a + 2b + 4c| \leq 4 \\ |a + b + c| \leq 1 \end{cases}$$

ce qui entraîne :
$|a| = |2a + 2b + 2c - (a + 2b + 4c) + 2c| \leq 2\,|a + b + c\,| + |a + 2b + 4c\,| + 2|c| \leq 2 + 4 + 2 = 8$
$|b| = |a + 2b + 4c - (a + b + c) - 3c| \leq |a + 2b + 4c\,| + |a + b + c\,| + 3|c| \leq 4 + 1 + 3 = 8$
$|c| \leq 1$

d'où par addition : $|a| + |b| + |c| \leq 17$.

Remarquons que l'optimum est atteint avec $P(x) = 8x^2 - 8x + 1$ de tableau de variation :

x	0		1/2		1
$P(x)$	1	$\searrow$	- 1	$\nearrow$	1

Ce qui montre bien que pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] on a $|P(x)| \leq 1$

Les majorations ne tombent pas du ciel, mais de la résolution de systèmes linéaires, qui permettent ensuite d'utiliser les majorations du système (S) :
Par exemple, la majoration de a vient de l'identification de

$$x(c) + y(a + 2b + 4c) + z(a + b + c) \text{ avec } a.$$

(On trouve $x = 2 \quad y = -1 \quad z = 2$).