Trisecteur : commentaires sur le déroulement de la séquence

Pour l'équipe de secondes du lycée Janot de Sens : Jean Terreran et Richard Dalin

Introduction

Cette activité a été réalisée par une équipe de professeurs de secondes travaillant au lycée Catherine et Raymond Janot de Sens.
L'idée de cette séquence est venue à la suite d'un devoir sur la trisection d'un angle rendu par un élève de 1S ; celui-ci a proposé, sans le valider, l'appareil dont nous parlons dans cet article : il l'avait trouvé sur INTERNET.
Nous nous sommes alors posé la question de savoir si cet appareil était fiable et l'un d'entre nous a constaté que la démonstration était accessible aux élèves de seconde en utilisant les triangles isométriques.
Nous avons alors décidé de monter cette séquence.

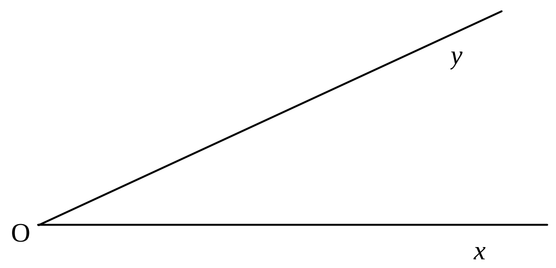
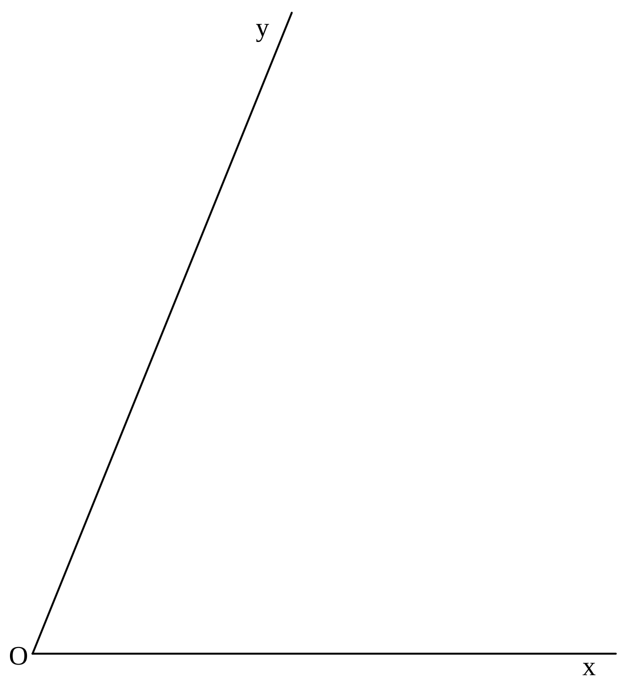
Mise en place pratique de cette séquence
Cette séquence est prévue pendant une séance de module de seconde de 55 minutes :
- les élèves sont en binôme.
- une introduction historique d'environ 5 minutes est prévue :
  - ❖ cette année, les élèves ont réalisé un dossier sur le nombre π après des recherches sur BCDI et Internet au CDI. Ils connaissaient donc l'impossibilité de la quadrature du cercle (construction à la règle et au compas d'un carré d'aire égale à celle d'un cercle donné) ainsi que le principe général d'une construction à la règle et au compas.
  - ❖ Nous avons signalé l'impossibilité de la duplication du cube (la légende qui y est attachée : le doublement du volume d'un autel cubique pour s'attirer les faveurs des dieux) qui revient à construire un nombre dont le cube vaut 2.
  - ❖ Et nous avons présenté le troisième problème impossible pour les géomètres grecs : la trisection de l'angle. Nous avons insisté sur le fait que ces impossibilités pour les mathématiciens ne les ont pas découragés, mais au contraire, qu'elles les ont incités à chercher d'autres solutions, donnant naissance à de nouveaux développements des mathématiques : ces solutions utilisent le "mouvement", l'appareil que nous utilisons dans ce module en est un exemple.
- Chaque élève a un appareil qui a été photocopié sur transparent.

Document papier distribué aux élèves

2$^{\text{nde}}$ $\boxed{\textbf{Module}}$ $\boxed{\textbf{Trisecteur}}$

Objectif *:* Justifier le mode d'emploi d'un appareil.
Travail : en binôme.

ACTIVITÉ

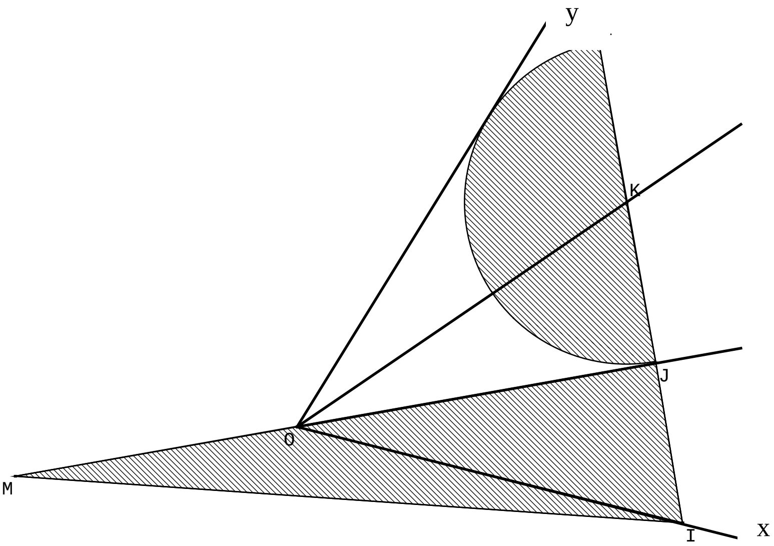
Ex 1 : Construire à l'aide de la règle et du compas la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$ ci-contre.	
Ex 2 : A l'aide uniquement du compas et de la règle, couper l'angle droit ci-contre en trois angles égaux.	
Ex 3 : Pour un angle quelconque la construction à la règle et au compas est impossible. Heureusement un élève de 1$^{\text{ère}}$ a trouvé sur Internet un appareil de construction, appelé trisecteur à demander à votre professeur. En voici la notice : On doit poser l'appareil sur l'angle de façon à ce que : • la droite (MJ) passe par O. • le point I est sur Ox. Faire glisser l'appareil, O restant sur (MJ) et I sur Ox jusqu'à ce que le demi-cercle soit tangent à Oy. Marquer alors à l'aide de la pointe du compas les points J et K. Enlever l'appareil et tracer les droites (OJ) et (OK). Vérifier alors à l'aide du compas que l'on a coupé l'angle $\widehat{xOy}$ en trois angles égaux.	

Démonstration : (validation de l'outil)

Impressionnés par la précision de cet appareil, on se demande si cette manipulation permet de partager **exactement** un angle quelconque en 3 angles égaux.
On utilise pour cela les caractéristiques de l'appareil décrites dans la notice suivante :

- I, J, K, L sont alignés de telle sorte que IJ = JK = KL.
- IJM est un triangle rectangle en J.
- K est le centre du demi-cercle passant par L et J. Il est tangent à Oy.

Voici comment l'on doit placer le trisecteur pour couper l'angle $\widehat{xOy}$ en trois secteurs égaux :

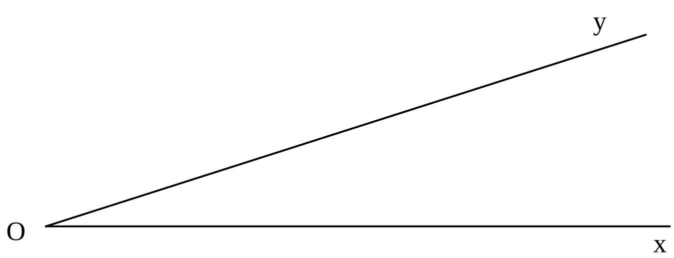


On appelle H le point de tangence du demi-cercle et de la demi-droite Oy : le marquer sur la figure.

1. Montrer que les triangles IOJ et JOK sont isométriques.
2. Montrer que les triangles JOK et OKH sont isométriques.
3. En déduire que les trois angles $\widehat{IOJ}$, $\widehat{JOK}$ et$\widehat{KOH}$ sont égaux.

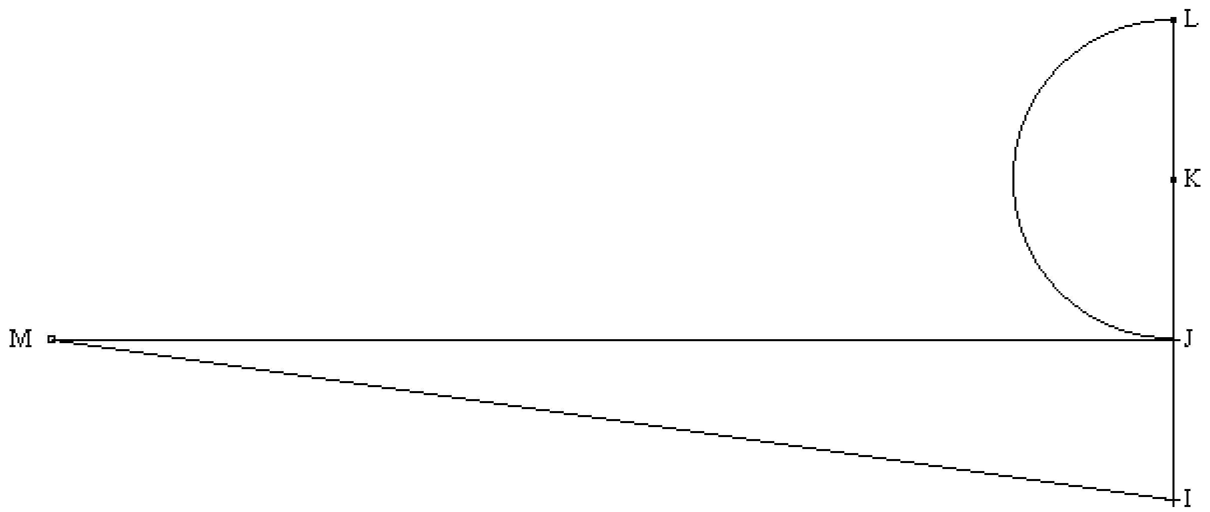
Pour ceux en avance

On donne l'angle $\widehat{xOy}$ ci-dessous.
On veut le partager à l'aide du trisecteur : quel problème rencontre-t-on ?
Dessiner Oz tel que $\widehat{yOz}$ soit le complémentaire de $\widehat{xOy}$.
Partager à l'aide du trisecteur cet angle $\widehat{yOz}$.
En utilisant l'exercice 2, en déduire la trisection de l'angle $\widehat{xOy}$.



Fin du module.

Figure photocopiée sur transparent et distribuée aux élèves



Réactions des élèves

Cette activité a été proposée à toute une classe d'un niveau correct en 2003-2004 (option ISI) et à deux classes en 2004-2005, l'une (option Arts Plastiques), l'autre option SES.
Les élèves ont été intéressés, se montrant très actifs, comprenant leurs erreurs et les corrigeant assez facilement.
Il a été proposé aux élèves de conserver l'appareil sur le transparent s'ils le désiraient : les réactions sont variables selon les classes, dans une ils sont presque tous repartis avec, dans une autre presque aucun.

Commentaires par exercice

ex 1 : Aucun problème particulier à signaler.

ex 2: Beaucoup de difficultés, certains flairent même un piège "vous venez de dire que la construction à la règle et au compas est impossible !".
Ceux qui réussissent construisent un triangle équilatéral de sommet O basé sur Ox.
D'autres coupent une première fois en 2, puis encore en 2, avant de s'apercevoir qu'ils obtiennent ainsi quatre angles égaux. Certains insistent dans cette voie en effaçant la première bissectrice tracée !
On avait choisi de les aider en leur rappelant le mode de construction d'un hexagone régulier dans un cercle, mais très peu la connaissaient.
En revanche dans une classe, on a parlé de la construction d'une rosace dans un cercle, ce qui les a beaucoup aidés.

ex 3 : La manipulation est en général, bien réussie. Quelques élèves cependant ne savent pas ce qu'est un cercle tangent à une droite et il faut les aider à positionner l'objet.
La vérification, en revanche, est très difficile :
- Il faut rappeler comment on compare deux angles, ou comment on construit un angle égal à un angle donné : constater que c'est en construisant des triangles isocèles isométriques ou des arcs de cercles isométriques est une révélation pour certains élèves pour qui compas était synonyme de cercle, et c'est tout.

- Quelques élèves ont tenté de copier la construction de l'ex 2 en traçant un arc de cercle $\widehat{AB}$, la corde correspondante étant alors partagée en trois après avoir été mesurée à la règle graduée. Il a fallu leur rappeler la définition d'une construction "à la règle et au compas" au sens antique.
- Un des binômes insiste car il se souvient du partage d'un segment grâce à Thalès ; ça y est, il a trouvé la construction si longtemps cherchée !
- Il faut alors leur montrer que les segments égaux obtenus ne donnent pas des angles égaux, contrairement à l'impression visuelle (on peut l'observer plus nettement sur un angle plus grand). Quelle déception !

ex 4 : 1° Pour montrer que IOJ et JOK sont isométriques, presque tous utilisent l'égalité des angles $\widehat{IOJ}$ et $\widehat{JOK}$: il faut insister sur le fait que c'est ce que l'on veut prouver !

2° La démonstration est plus difficile : chacun utilise bien les angles droits, mais rien à faire, les côtés égaux n'encadrent pas l'angle égal ! On peut alors leur suggérer d'utiliser une propriété bien connue du triangle rectangle pour montrer l'égalité du troisième côté.
Seul un binôme (deux bonnes élèves) a pensé à utiliser l'équidistance du point aux côtés de l'angle pour en déduire que (OK) est bissectrice de $\widehat{JOH}$. C'est d'autant plus méritoire que cette propriété avait été rencontrée "furtivement" en cours et que la formulation de la question ne les aiguillait guère dans cette voie : on peut alors se poser la question de la pertinence de la question 2.

3° La conclusion est vite faite.

Pour ceux en avance

Peu de binômes ont eu le temps d'aborder le problème. Des aides ont été nécessaires pour qu'ils réussissent. On aurait peut-être pu les laisser chercher plus longtemps.

Une autre activité est alors proposée : se servir du trisecteur comme bissecteur :

- la solution est trouvée rapidement : on fait glisser l'appareil comme précédemment jusqu'à ce que K vienne sur Oy.
- En revanche, faire glisser le cercle jusqu'à ce qu'il soit tangent aux deux côtés de l'angle est une méthode d'abord rejetée par les élèves, car ils y voient une infinité de solutions avant de se rendre compte (il faut les aider) que si le diamètre [LJ] "bouge", le centre du cercle reste fixe, et c'est ce qui compte.