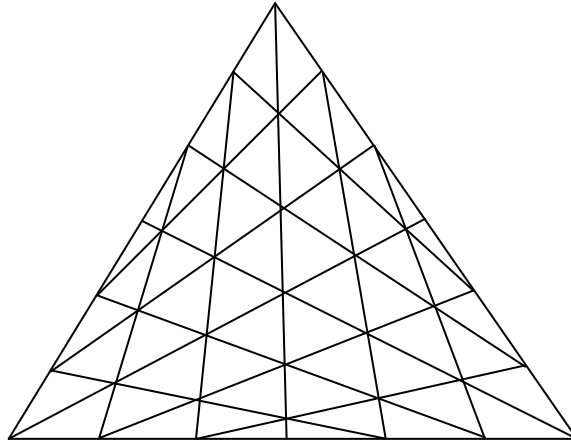


Jeux et Problèmes

Michel LAFOND, Lycée Le Castel à Dijon

JEU - 47

Combien comptez vous de triangles dans la figure agaçante ci-dessous ?



PROBLÈME - 47

Démontrer que si pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$ on a $|a x^2 + b x + c| \leq 1$ alors $|a| + |b| + |c| \leq 17$.

Solutions de la rubrique précédente

JEU - 46.

Trouver un rectangle de 4×6 cases, chacune colorée en blanc ou noir, de telle sorte qu'il ne contienne aucun rectangle ayant ses 4 sommets unicolores.

			×		×
			×		×

Le schéma proposé ne marche pas car il y a un rectangle "blanc".

Solution :

La seule solution aux permutations près de lignes ou de colonnes est :

PROBLÈME - 46.

Démontrer dans l'ensemble des nombres réels l'implication :

$$\begin{cases} a + 2b \leq 3 \\ b + 3c \leq 4 \\ c + 4a \leq 5 \end{cases} \Rightarrow a + b + c \leq 3$$

Solution :

Cherchons par identification à obtenir :

$$x(a + 2b) + y(b + 3c) + z(c + 4a) = a + b + c. \quad (1)$$

c'est-à-dire résolvons le système :

$$\begin{cases} x + 4z = 1 \\ 2x + y = 1 \\ 3y + z = 1 \end{cases}$$

on obtient : $x = 9/25$ $y = 7/25$ $z = 4/25$

En remplaçant dans (1) x , y , z par leurs valeurs, on obtient :

$$a + b + c = \frac{9}{25}(a + 2b) + \frac{7}{25}(b + 3c) + \frac{4}{25}(c + 4a) \leq \frac{9}{25}3 + \frac{7}{25}4 + \frac{4}{25}5 = \frac{75}{25} = 3$$

C Q F D.

Le problème 46 a aussi été résolu par R. Ferachoglou.

Une solution de Richard BECZKOWSKI, au problème 46.

En remplaçant a , b , c par $A = a - 1$, $B = b - 1$ et $C = c - 1$ le système proposé devient :

$$\begin{cases} A + 2B \leq 0 \\ B + 3C \leq 0 \\ C + 4A \leq 0 \end{cases} \quad \text{et on doit prouver que } S = A + B + C \leq 0$$

Par addition licite des trois inégalités on obtient : $3S + 2A + C \leq 0$ soit $4S + A - B \leq 0$.

Si on a $A - B \geq 0$ le résultat est évident, la somme S ne peut être que négative ou nulle.

Considérons le cas $A - B < 0$.

La première inégalité du système proposé exige que le plus petit de A et de B , donc A , soit strictement négatif.

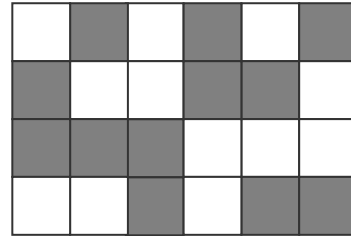
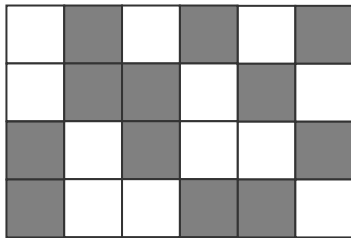
Par addition licite des première et deuxième inégalités on obtient :

$$A + 3B + 3C \leq 0 \quad \text{et donc } 3S - 2A \leq 0 \quad \text{qui n'est possible qu'avec } S \leq 0.$$

Une solution de Richard BECZKOWSKI, au jeu 46.

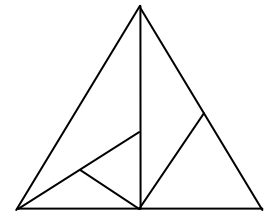
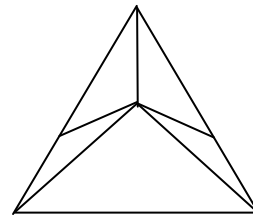
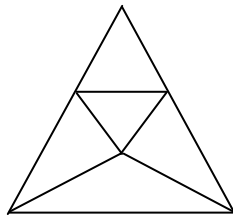
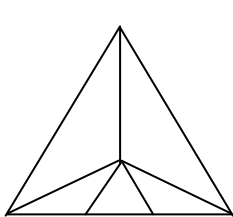
Considérons un rectangle à trois lignes et six colonnes dont une a ses trois carrés de même couleur. Pour qu'il ne contienne aucun rectangle à sommets unicolores il est nécessaire que les cinq autres colonnes contiennent au moins deux carrés de l'autre couleur et qu'elles soient différentes les unes des autres. C'est impossible car il n'y a que quatre façons d'obtenir trois carrés dont au moins deux ont la même couleur donnée.

La seule chance d'obtenir le rectangle demandé est de choisir les six colonnes différentes, contenant chacune deux carrés blancs et donc deux carrés noirs. Ce choix est unique car $C_4^2 = 6$. La variété ne peut venir que des 720 permutations de ces six colonnes.



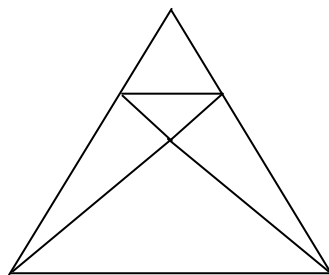
Solutions tardives

M. **Lucien Sautereau** a envoyé une solution au problème numéro 45, et, à propos du jeu numéro 45, où il fallait partager un triangle équilatéral en 5 triangles isocèles, il remarque que le "corrigé" ne propose que 4 solutions :

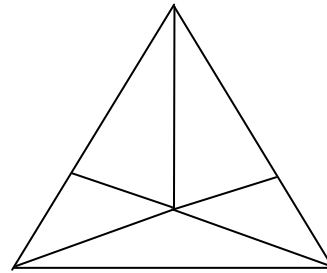
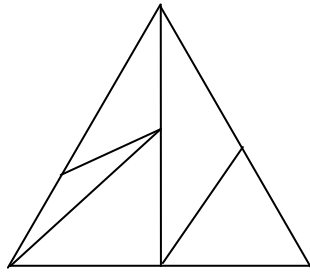


alors que :

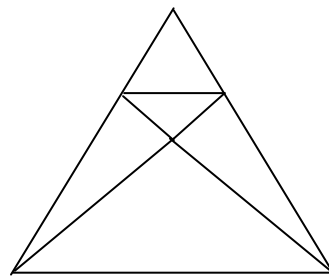
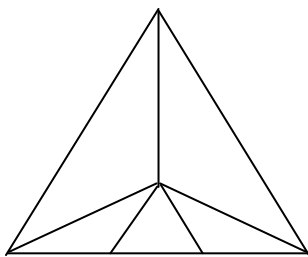
a) La solution 2 peut se décliner d'une infinité de manières non isométriques, en choisissant le point intérieur n'importe où sur l'axe vertical de symétrie :



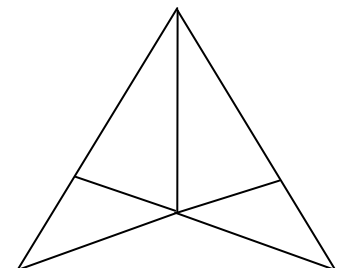
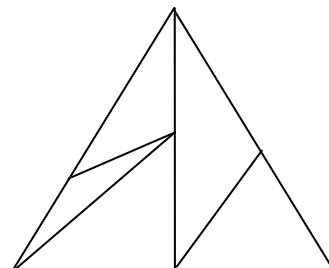
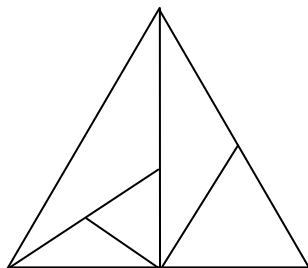
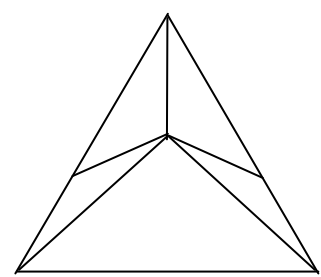
b) Deux solution doivent être ajoutées : (la première est un panaché des figures 3 et 4)



Finalement il y a (au moins !) 6 solutions, si on compte pour une solution la famille infinie :



(infinité)



Le ver du doute a donc complètement rongé ce problème, et il n'est pas sûr que d'autres solutions n'existent pas !