Les fractions de Monsieur Farey

Robert FERACHOGLOU, Lycée Le Castel à Dijon

I – Des fractions vérifiant « l'addition des cancres »

Le géologue anglais John Farey suggéra en 1816 de ranger dans l'ordre croissant les fractions irréductibles, comprises entre 0 et 1, et dont le dénominateur ne dépasse pas une valeur donnée. Par exemple, celles dont le dénominateur est inférieur ou égal à 5 se rangent ainsi :

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}.$$

Farey remarqua que dans une telle suite, si $\frac{a}{b}, \frac{e}{f}$ et $\frac{c}{d}$ sont trois termes consécutifs, alors le terme médian s'obtient à partir de ses deux voisins par « l'addition des cancres » : $\frac{e}{f} = \frac{a+c}{b+d}$.

D'autres propriétés simples sont également visibles lorsqu'on observe attentivement cette suite. Cependant Farey, qui n'était qu'un mathématicien moyen (et même un géologue quelconque, puisqu'il est aujourd'hui presque entièrement oublié en tant que tel), ne donna aucune preuve des résultats publiés. C'est Louis Augustin Cauchy qui démontra les propriétés en question ; ce dernier, bon prince, a conservé le nom de Farey attaché à ces suites de fractions.

Cet article propose de mettre en évidence quelques propriétés des suites de Farey, et d'établir les résultats mis en avant. Il peut constituer un matériau d'activités pour les professeurs de Collège qui souhaiteraient sortir des sentiers battus (apprentissage du calcul des fractions, géométrie, cercle) ; les professeurs de Lycée pourront y trouver les idées d'un devoir à la maison (de la Seconde à la Terminale S, en Arithmétique comme en Géométrie).

II – Propriétés des suites de Farey

1. <u>Introduction</u>

<u>Définition et notation</u>

> Pour $n \geq 1$, la n-ième suite de Farey est la suite, rangée dans l'ordre croissant, des fractions irréductibles comprises entre 0 et 1, dont le dénominateur ne dépasse pas n. On note F_n cette suite.
>
> (On convient que $0 = \frac{0}{1}$ et que $1 = \frac{1}{1}$.)

Voici les sept premières suites de Farey :

$$F_1 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right),$$

$$F_2 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right),$$

$$F_3 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right),$$

$$F_4 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right),$$

$$F_5 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right),$$

$$F_6 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}\right),$$

$$F_7 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}\right).$$

Remarques et conjectures

En observant attentivement chacune de ces suites, un esprit curieux à peine aiguisé formulera sans peine les conjectures suivantes :

a) la fraction $\frac{1}{2}$ occupe la position médiane dans F_n ;

b) si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux termes consécutifs, alors $bc - ad = 1$;

c) si $\frac{a}{b}$, $\frac{e}{f}$ et $\frac{c}{d}$ sont trois termes consécutifs, alors $\frac{e}{f} = \frac{a+c}{b+d}$. (C'est l'addition des cancres.)

d) si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux termes consécutifs d'une suite de Farey, alors la première fraction qui apparaîtra entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ dans une suite de Farey ultérieure est la fraction $\frac{a+c}{b+d}$.

Nous allons dans la suite formuler et démontrer ces propriétés, ainsi que quelques autres.

2. De bien curieuses propriétés arithmétiques

Propriété 1

Pour tout $n \geq 1$, la fraction $\frac{1}{2}$ occupe la position médiane dans F_n .

Preuve

Si la fraction irréductible $\frac{a}{b}$ appartient à F_n, alors il est clair que la fraction « symétrique »

$1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$ est comprise entre 0 et 1.

D'autre part, puisque $\frac{a}{b}$ est irréductible, a et b sont premiers entre eux. Alors, b et $b-a$ sont aussi premiers entre eux (car si d divise b et $b-a$, alors d divise leur différence : a). Ainsi la fraction $\frac{b-a}{b}$ est irréductible elle aussi, donc elle appartient à F_n.

Propriété 2

Pour tout $n \geq 1$, on a $F_n \subset F_{n+1}$ et, si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux fractions consécutives dans F_{n+1}, alors l'une au moins de ces deux fractions appartient aussi à F_n.

Preuve

Il est clair que $F_n \subset F_{n+1}$ d'après la définition de ces suites.

Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont consécutives dans F_{n+1} il est impossible qu'elles soient toutes les deux absentes dans F_n car, si c'était le cas, on aurait forcément : $b = d = n+1$ et, comme les deux fractions sont consécutives, on aurait aussi : $c = a+1$.

Mais, comme à l'évidence : $\frac{a}{b} = \frac{a}{n+1} < \frac{a}{n} < \frac{a+1}{n+1} = \frac{c}{d}$, la fraction $\frac{a}{n}$, qui par définition appartient à F_n (donc à F_{n+1}), serait une fraction de F_{n+1} strictement comprise entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, qui sont pourtant consécutives dans F_{n+1}. C'est absurde.

Conclusion : l'une au moins des deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ appartient à F_n.

Propriété 3

Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux fractions consécutives de la suite F_n, alors :

3.1. $bc - ad = 1$;

3.2. la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ est irréductible et elle est comprise entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$;

3.3. la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ est la première fraction qui va apparaître entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, dans une suite de Farey d'ordre supérieur.

Preuve par récurrence

- Si $n = 1$, la vérification est immédiate avec les deux seules fractions de F_1, qui sont : $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$.
- Supposons que les trois affirmations soient vraies pour la suite F_n.
- Soit alors $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, deux fractions consécutives de la suite F_{n+1}. Distinguons deux cas.

1er cas : si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ appartiennent toutes les deux à F_n, on a $bc - ad = 1$ d'après l'hypothèse de récurrence.

2ème cas : si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ n'appartiennent pas toutes les deux à F_n, d'après la propriété 2, une des deux appartient à F_n et pas l'autre ; on peut supposer, par exemple, que $\frac{a}{b} \in F_n$ et $\frac{c}{d} \in F_{n+1} \setminus F_n$.

Soit alors $\frac{r}{s}$ la fraction irréductible suivant $\frac{a}{b}$ dans F_n ; on a, d'après l'hypothèse de récurrence :

$br - as = 1$ et $\frac{c}{d} = \frac{a+r}{b+s}$.

Or, $a+r$ et $b+s$ sont premiers entre eux d'après Bézout, car $b \times (a+r) + (-a) \times (b+s) = br - as = 1$.

Cela impose que la fraction $\frac{a+r}{b+s}$ est irréductible, et donc : $c = a+r$ et $d = b+s$.

Ainsi $bc - ad = b(a+r) - a(b+s) = br - as = 1$.

Nous avons ainsi établi dans tous les cas que $bc - ad = 1$. Cela prouve la propriété 3.1. au rang $n+1$.

D'autre part, $b \times (a+c) + (-a) \times (b+d) = bc - ad = 1$, ce qui montre d'après Bézout que la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ est irréductible.

De plus, $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} = \frac{1}{b(b+d)} > 0$ et $\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc-ad}{d(b+d)} = \frac{1}{d(b+d)} > 0$.

Cela montre que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. La propriété 3.2. est donc vraie au rang $n+1$.

Enfin, soit $\frac{r}{s}$ la première fraction irréductible qui va apparaître entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, dans une certaine suite (F_m), avec $m \geq n+2$.

Le système à l'inconnue (u,v) : $\begin{cases} au + cv = r \\ bu + dv = s \end{cases}$ a une solution unique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u = \dfrac{sc - rd}{bc - ad} = sc - rd \\ v = \dfrac{br - as}{bc - ad} = br - as \end{cases}.$$

Cela montre que *u* et *v* sont des entiers relatifs mais, comme $\frac{a}{b} < \frac{r}{s} < \frac{c}{d}$, on a $sc - rd > 0$ et $br - as > 0$. Donc *u* et *v* sont des entiers naturels non nuls.

Il en résulte en particulier que $bu + dv \geq b + d$, avec l'égalité seulement si $u = v = 1$.

Ainsi la première fraction à apparaître entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ est $\frac{r}{s} = \frac{au+cv}{bu+dv}$, mais la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ est elle aussi comprise entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ et, son dénominateur étant inférieur ou égal à $bu+dv$, elle devrait apparaître dans une suite de Farey d'ordre inférieur ou égal.

$\frac{r}{s}$ étant la première, il en résulte que $bu + dv = b + d$, d'où $u = v = 1$, et donc $\frac{r}{s} = \frac{a+c}{b+d}$.

Conclusion : $\frac{a+c}{b+d}$ est bien la première fraction qui va apparaître entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, dans une suite de Farey d'ordre supérieur. Cela prouve que 3.3. est vraie au rang $n+1$.
Voilà qui achève la démonstration.

Propriété 4

Si $\frac{a}{b}$, $\frac{r}{s}$ et $\frac{c}{d}$ sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une même suite de Farey, alors $\frac{r}{s} = \frac{a+c}{b+d}$, même si cette dernière fraction n'est pas irréductible.

Preuve

Comme $\begin{cases} br - as = 1 \\ -dr + cs = 1 \end{cases}$, il vient : $\begin{cases} r = \dfrac{a+c}{bc-ad} \\ s = \dfrac{b+d}{bc-ad} \end{cases}$.

Cela montre sans ambiguïté que $\frac{r}{s} = \frac{a+c}{b+d}$, même si $bc - ad \neq 1$.

Ce dernier cas est possible. Par exemple, dans F_3 avec les trois termes consécutifs $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$, on a bien $\frac{1}{2} = \frac{1+2}{3+3}$, mais la fraction $\frac{1+2}{3+3}$ n'est pas irréductible.

III – Les cercles de Ford

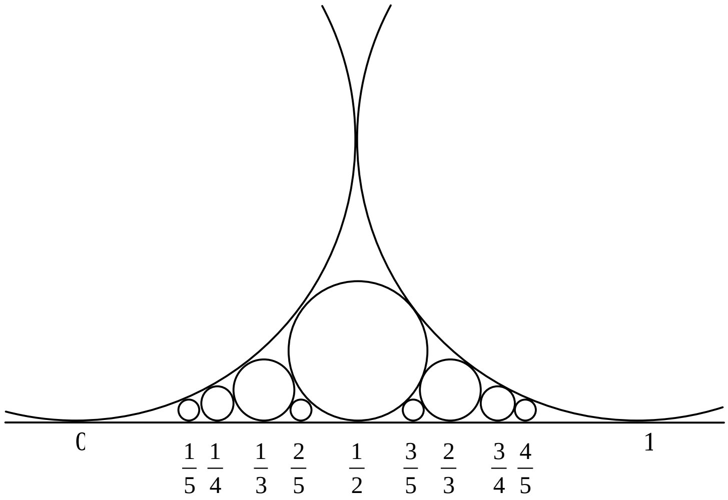
1. De quoi s'agit-il ?

Le mathématicien américain Lester Randolph Ford (1886-1975), spécialiste en théorie des nombres, se pencha à titre ludique sur les fractions de Farey. Il en donna en 1917 une propriété géométrique étonnante, que nous allons développer ci-après.

Définition

A chaque fraction dont la forme irréductible est $\frac{p}{q}$, on associe le cercle de centre le point de coordonnées $\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2q^2}$. C'est le cercle de Ford associé.

La figure suivante représente les cercles de Ford associés aux fractions de la suite de Farey F_5.



Cela suscite un certain étonnement, et quelques conjectures, que nous allons démontrer.

2. Propriétés des cercles de Ford

Propriété 5

Tous les cercles de Ford sont tangents à l'axe (Ox).

Preuve

La distance à (Ox) du cercle associé à $\dfrac{p}{q}$ est égale à $\dfrac{1}{2q^2}$, qui est le rayon.
Cela montre que ce cercle est tangent à (Ox).

Propriété 6

Les cercles de Ford associés à deux termes consécutifs d'une même suite de Farey sont tangents entre eux.

Preuve

Considérons les deux cercles de Ford associés aux fractions $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$, consécutives dans une suite de Farey. Soit $A\left(\dfrac{a}{b},\dfrac{1}{2b^2}\right)$ et $B\left(\dfrac{c}{d},\dfrac{1}{2d^2}\right)$ leurs centres.

On a : $AB^2=\left(\dfrac{c}{d}-\dfrac{a}{b}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2d^2}-\dfrac{1}{2b^2}\right)^2=\dfrac{(bc-ad)^2}{b^2d^2}+\dfrac{(b^2-d^2)^2}{4b^4d^4}$, donc, compte tenu de l'égalité $bc-ad=1$: $AB^2=\dfrac{4b^2d^2+(b^2-d^2)^2}{4b^4d^4}=\dfrac{(b^2+d^2)^2}{4b^4d^4}$.

On en déduit : $AB=\dfrac{b^2+d^2}{2b^4d^4}=\dfrac{1}{2b^2}+\dfrac{1}{2d^2}$.

Cela montre que la distance des centres est égale à la somme des rayons, donc que les deux cercles sont tangents.

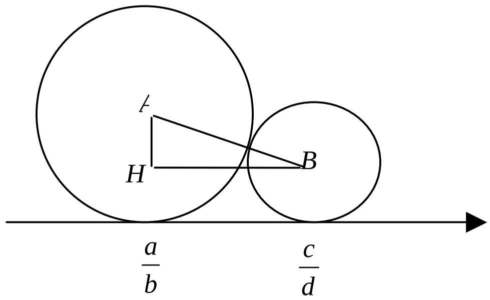
Propriété 7

Réciproquement, soit deux cercles de Ford tangents entre eux, associés aux fractions irréductibles $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ (avec $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$).

Alors $bc - ad = 1$. De plus, $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux termes consécutifs d'une même suite de Farey.

Preuve

Supposons que les deux cercles de Ford associés aux fractions irréductibles $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont tangents. Si A et B sont les centres de ces cercles, on a, dans le triangle rectangle AHB (voir figure ci-dessous) : $AH^2 + HB^2 = AB^2$.



Comme $AB^2 = \left(\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2d^2}\right)^2$, $BH^2 = \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right)^2 = \frac{(bc-ad)^2}{b^2d^2}$ et $AH^2 = \left(\frac{1}{2b^2} - \frac{1}{2d^2}\right)^2$, on en tire :
$\frac{(bc-ad)^2}{b^2d^2} + \frac{(b^2-d^2)^2}{4b^4d^4} = \frac{(b^2+d^2)^2}{4b^4d^4}$.

Cela montre que $\frac{(bc-ad)^2}{b^2d^2} = \frac{(b^2+d^2)^2}{4b^4d^4} - \frac{(b^2-d^2)^2}{4b^4d^4} = \frac{4b^2d^2}{4b^4d^4} = \frac{1}{b^2d^2}$. Donc $(bc-ad)^2 = 1$, mais, comme l'inégalité $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ implique $bc - ad > 0$, on a en fait : $bc - ad = 1$.

Supposons par exemple que $b \le d$; alors $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ appartiennent toutes deux à la suite de Farey F_d.

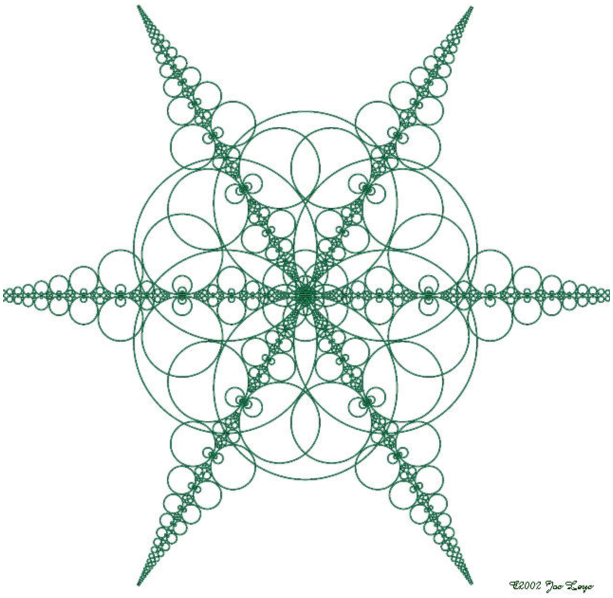
Si elles n'étaient pas consécutives, il existerait $\frac{r}{s} \in F_d$, avec $\frac{a}{b} < \frac{r}{s} < \frac{c}{d}$. On aurait $s \le d$ et il existerait deux entiers naturels non nuls *u* et *v* tels que $s = bu + dv$ (voir la démonstration du point 3.3. de la propriété 3).

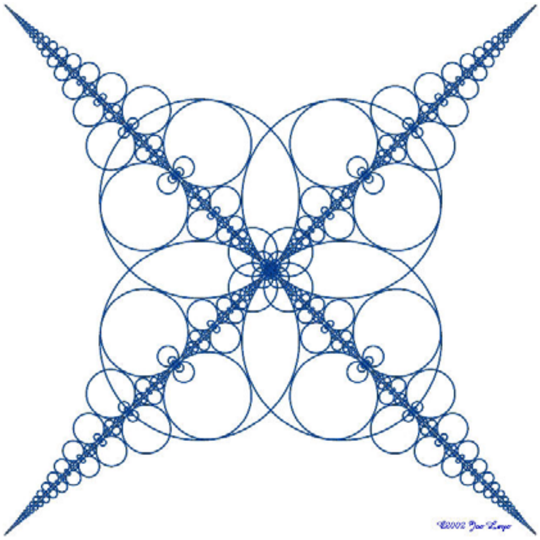
Alors $d < b + d \le ub + vd = s \le d$, ce qui est absurde.

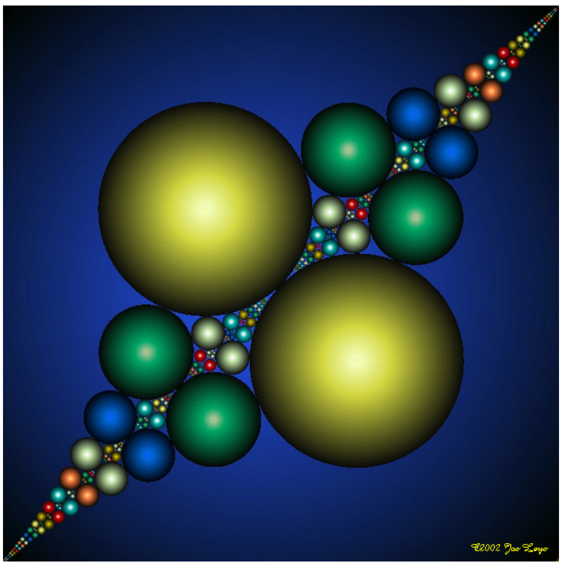
Conclusion : les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont bien consécutives dans F_d. On procède de même si $b \ge d$.

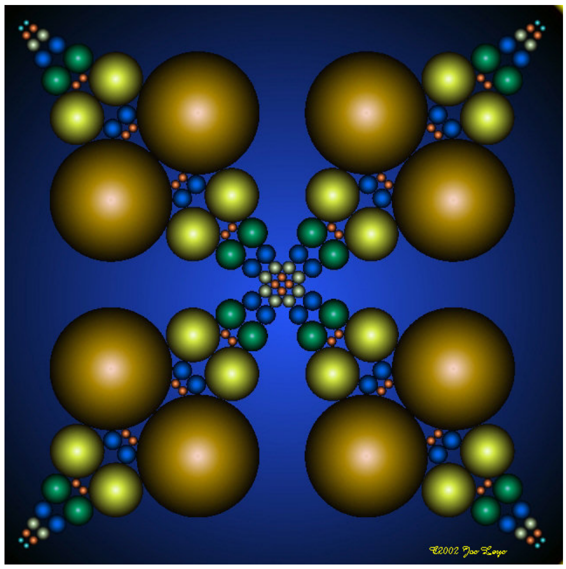
3. Avec les cercles de Ford : fractales et images

Les propriétés précédentes des cercles de Ford, et leur aspect fractal dès qu'on augmente la taille de l'entier n, ont inspiré certains artistes. Nous reproduisons ci-dessous quelques images de Jos Leys tirées de son site internet www.josleys.com.









IV – Les suites de Farey pour l'approximation

1. Position du problème

Les fractions de Farey, comme d'autres fractions particulières telles que les fractions continues, sont utilisées pour approcher ou encadrer certains nombres.
Elles ont l'avantage de comporter un dénominateur ne dépassant pas une valeur donnée, fixée par avance.
Elles se prêtent bien au calcul mental, puisque si un réel x est encadré par deux fractions de Farey consécutives $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, l'addition des cancres permet de déterminer une fraction intermédiaire : $\frac{a+c}{b+d}$, et donc de raffiner l'encadrement.
De plus, si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont consécutives et $\frac{a}{b} < x < \frac{c}{d}$, l'égalité $bc - ad = 1$ donne l'amplitude de l'encadrement : $\frac{1}{bd}$. L'erreur est donc connue et maîtrisée.

2. Mise en ouvre

Supposons que l'on veuille encadrer le nombre $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ par des fractions dont le dénominateur ne dépasse pas 20, on commence par encadrer x par deux termes consécutifs de F_2 : $\frac{1}{2} < x < \frac{1}{1}$. Puis à chaque étape, on calcule la fraction suivante par l'addition des cancres et on la positionne par rapport à x.

<u>*Etape 2*</u> : $\frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3} < x < \frac{1}{1}$.

<u>*Etape 3*</u> : $\frac{2+1}{3+1} = \frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3} < x < \frac{3}{4}$.

<u>*Etapes 4, 5, 6*</u> : on obtient successivement et mentalement les nouvelles fractions $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{10}$ et $\frac{12}{17}$.

Finalement, l'encadrement voulu est : $\frac{12}{17} < x < \frac{5}{7}$. C'est le meilleur encadrement possible avec des fractions de dénominateur inférieur ou égal à 20. L'amplitude est de l'ordre de 0,0084, nettement inférieure à $\frac{1}{20}$.
Si l'on veut des fractions de dénominateur ne dépassant pas 100, on obtient les fractions suivantes.

Par défaut	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{12}{17}$	$\frac{41}{58}$	$\frac{70}{99}$
Par excès	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{29}{41}$	

On a donc établi très rapidement – et mentalement – l'encadrement : $\frac{70}{99} < x < \frac{29}{41}$ (le meilleur avec des dénominateurs de cette taille), d'amplitude $\frac{1}{41\times 99} \approx 2,5\times 10^{-4}$.

Remarque : on sait que les fractions continues ont aussi la propriété de réaliser des approximations fractionnaires d'un nombre, optimales en terme de taille de dénominateur. En fait les « réduites » successives obtenues par le développement en fractions continues sont certains des termes obtenus par la méthode des suites de Farey.

Sur l'exemple précédent, les réduites successives sont : $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{12}{17}, \frac{29}{41}, \frac{70}{99}$.

3. Application à l'approximation de certaines constantes astronomiques

Les problèmes de calendrier font intervenir des constantes dont l'approximation fractionnaire conditionne le rythme de certaines modifications périodiques (années bissextiles, jours ou mois « rajoutés », ...). Les suites de Farey permettent de comprendre ces modifications ou d'en décider de nouvelles...

Exemple 1

Dans les calendriers solaires (comme le calendrier grégorien), la référence est le nombre de jours dans une année tropique. Ce nombre vaut $a = 365,242199...$.

Voici les premières fractions de Farey approchant le nombre $a' = a - 365 = 0,242199...$:

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{3}{13}, \frac{4}{17}, \frac{5}{21}, \frac{6}{25}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{15}{62}, \frac{23}{95}, \frac{31}{128}, \ldots$$

On pourra justifier le rajout d'un jour tous les 4 ans, ou mieux : de 6 jours tous les 25 ans (ce qui correspond à 24 jours tous les 100 ans, et justifie la correction d'un jour par siècle...).

Une autre façon de voir les choses est de remarquer que : $\frac{6}{25} = \frac{24}{100} = \frac{25}{100} - \frac{1}{100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{100}$. Cela justifie le rajout au calendrier d'un jour tous les 4 ans et le retrait d'un jour tous les 100 ans (1700, 1800, 1900 n'étaient pas des années bissextiles).

Exemple 2

Dans les calendriers lunaires (comme le calendrier musulman), la base de calcul est le nombre de jours l dans une lunaison. On a : $12l = 354,367056...$.

Voici les premières fractions de Farey approchant le nombre $l' = 12l - 354 = 0,367056...$:

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{7}{19}, \frac{11}{30}, \frac{18}{49}, \frac{29}{79}, \ldots$$

Le lecteur pourra retrouver et justifier le fait que le calendrier musulman comporte, sur 30 ans, 19 années « communes » de 354 jours et 11 années « abondantes » de 355 jours.

Exemple 3

Dans les calendriers luni-solaires (comme le calendrier chinois et le calendrier juif), le nombre référence est le nombre de lunaisons dans une année tropique : $m = 12,368267$.

Voici les premières fractions de Farey approchant le nombre $m' = m - 12 = 0,368267...$:

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{8},\ \frac{4}{11},\ \frac{7}{19},\ \frac{11}{30},\ \frac{18}{49},\ \frac{25}{68},\ \frac{32}{87},\ \frac{39}{106},\ \frac{46}{125},\ \frac{53}{144},\ \frac{60}{163},\ \frac{67}{182},\ \ldots$$

Même si ces calendriers sont beaucoup plus complexes, les lecteurs intéressés pourront se reporter à [3] et expliquer certaines particularités de ces calendriers à l'aide des précédentes fractions de Farey ; par exemple, dans le calendrier juif, la fraction $\frac{7}{19}$ permet de justifier le cycle de Méton de sept années embolismiques de 13 lunaisons sur 19 ans. (Voir [3].)

V – Autres approches, autres pistes de recherche

1. <u>Représentation géométrique des suites de Farey</u>

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, convenons de représenter la fraction irréductible $\frac{a}{b}$ par le point de coordonnées (b,a) ou, ce qui revient au même, par le vecteur de composantes (b,a).
Les fractions de Farey de la suite F_n correspondent à certains points à coordonnées entières de la région définie par les contraintes : $0 \le y \le x \le n$ (triangle de Farey). Si l'on note A_1, A_2, …les points correspondant aux fractions ordonnées de la suite F_n, alors les droites (OA_1), (OA_2), … sont rangées dans l'ordre croissant de leurs coefficients directeurs, qui sont justement ces fractions.

Avec ces conventions, les propriétés 3 et 4 des suites de Farey se traduisent ainsi :

<u>*Propriété 8*</u>

a) Si (OA_1) et (OA_2) sont deux droites consécutives d'un même triangle de Farey, alors l'aire du triangle OA_1A_2 est égale à $\frac{1}{2}$.
b) Si (OA_1) et (OA_3) sont deux droites consécutives d'un même triangle de Farey, alors la première droite qui va apparaître dans un triangle de Farey d'ordre supérieur est la droite (OA_2), où A_2 est défini par la règle du parallélogramme : $\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3}$.
c) Si (OA_1), (OA_2) et (OA_3) sont trois droites consécutives d'un même triangle de Farey, alors le point A_2' défini par la règle du parallélogramme $\overrightarrow{OA_2'} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3}$ appartient à la droite (OA_2).
De plus, lorsque $A_2 = A_2'$, le parallélogramme $OA_1A_2A_3$ a une aire égale à 1.

<u>*Preuve*</u>

Tout découle de la remarque suivante : si A_1 et A_2 sont associés aux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ consécutives dans une suite de Farey, alors :

$$\text{aire } (OA_1A_2) = \frac{1}{2}\det(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2}) = \frac{1}{2}(bc-ad) = \frac{1}{2}.$$

Les vérifications suivantes sont laissées au lecteur.

On peut en fait associer à tout nombre réel positif t la droite d'équation $y = tx$, qui passe par l'origine, et cette correspondance est bijective. Les rationnels sont alors associés aux droites passant par au moins un point à coordonnées entières. Ainsi, la droite associée au rationnel $\frac{a}{b}$ (a et b entiers positifs) passe par le point (b, a) et, si le point à coordonnées entières de cette droite le plus proche de l'origine est (d, c), alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et la fraction $\frac{c}{d}$ est irréductible.

L'approximation d'un réel t compris entre 0 et 1 par des fractions de Farey peut être abordé géométriquement par le biais de cette représentation.
Nous ne creuserons pas ici davantage ce sujet. Le lecteur intéressé pourra se reporter à tout ouvrage présentant le « *codage sturmien des nombres* ». (Voir par exemple [4].)

2. Longueur d'une suite de Farey

Une fraction irréductible de dénominateur n, comprise entre 0 et 1, s'écrit $\frac{a}{n}$, avec $1 \leq a \leq n$ et a premier avec n. Le nombre d'entiers a vérifiant cette propriété est traditionnellement désigné par $\phi(n)$, où ϕ est l'indicatrice d'Euler. On obtient donc le résultat suivant :

Propriété 9

La n-ième suite de Farey comporte un nombre S_n de termes égal à : $S_n = 1 + \phi(1) + \phi(2) + ... + \phi(n)$.
(Le 1 initial est dû au fait que l'on dénombre les fractions 0/1 et 1/1.)

On peut vérifier ce résultat et visualiser les fractions correspondantes pour les premières valeurs de n, dans le tableau suivant.

Dénominateur n	Nouvelles fractions	Nombre $\phi(n)$	S_n = Nombre d'éléments de F_n
1	$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$	$1+\phi(1) = 2$	2
2	$\frac{1}{2}$	$\phi(2) = 1$	3
3	$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$	$\phi(3) = 2$	5
4	$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$	$\phi(4) = 2$	7
5	$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$	$\phi(5) = 4$	11
6	$\frac{1}{6}, \frac{5}{6}$	$\phi(6) = 2$	13
7	$\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$	$\phi(7) = 6$	19
8	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$	$\phi(8) = 4$	23
9	$\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$	$\phi(9) = 6$	29

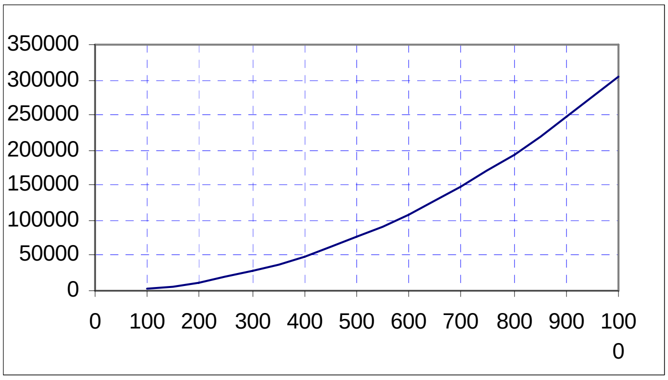
La dernière colonne laisse penser que le nombre d'éléments de F_n est premier, mais il n'en est rien, puisque, par exemple, F_{10} contient 33 fractions et F_{14} contient 65 fractions.

On sait calculer $\phi(n)$ pour tout entier n : $\phi(1)=1$ et, si un entier $n \geq 2$ admet pour diviseurs premiers distincts les nombres $p_1,..., p_r$, alors $\phi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)...\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$.

(Par exemple, $\phi(240) = 240 \times \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 240 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 64$.)

En revanche, il n'existe pas de formule simple donnant la somme $1+\phi(1)+\phi(2)+...+\phi(n)$.
Cherchons-en empiriquement un équivalent asymptotique ; à l'aide du logiciel de calcul formel Maple, nous avons obtenu les résultats suivants.

n	$S_n = 1+\phi(1)+\phi(2)+...+\phi(n)$
100	3045
200	12233
300	27399
400	48679
500	76117
600	109501
700	149019
800	194751
900	246327
1000	304193
10000	30397487



Les valeurs de S_n et la représentation graphique de S_n en fonction de n laissent présager une dépendance quadratique : $S_n \sim kn^2$. En effet, les valeurs des différents quotients $\frac{S_n}{n^2}$ sont voisines, et toutes proches de 0,304. Or $\frac{3}{\pi^2} \approx 0,30396$.

Tout cela permet de conjecturer que, pour les grandes valeurs de n, $S_n \sim \frac{3}{\pi^2}n^2$.

Quel lecteur saurait démontrer ce résultat ?

Bibliographie

- [1] John Conway, Richard Guy, Le livre des nombres, Eyrolles.
- [2] Bulletin vert de l'APMEP, L'arithmétique, numéros spéciaux 432-433-434.
- [3] Jean Lefort, La saga des calendriers, Pour la Science, Belin.
- [4] Jean-Pierre Reveillès, Les nombres, Problèmes anciens et actuels, Le codage strurmien des nombres, Ellipses.

Remerciements

Je remercie tout particulièrement Marie-Noëlle Racine et Michel Lafond pour leur relecture sourcilleuse de cet article, ce qui a permis d'en gommer quelques erreurs et défauts.

Concernant la dernière phrase, en forme de question, Michel Lafond, qui ne résiste jamais à un défi, me fait part d'une remarque *à chaud* que je restitue sans commentaire :

« On démontre assez facilement (en prenant les parties entières des indices) que :
$S_n + S_{n/3} + S_{n/5} + S_{n/7} + S_{n/9} + S_{n/11} + \ldots = \dfrac{3n^2+6n}{8}$ *si n est pair et* $\dfrac{3n^2+8n+5}{8}$ *si n est impair,*
ce qui permet assez facilement d'aboutir à $S_n \approx \dfrac{3}{\pi^2}n^2$. *»*

Cela déplace le défi : qui vérifiera cette affirmation ?