Somme de diviseurs

(suite de l'article paru dans le n° 95)

Tristan DERAY, Lycée Hilaire de Chardonnet à Chalon s/Saône

§ 16

Nous avons donc d'excellents exemples de la proposition, dont il nous est impossible de douter, mais nous ne pouvons proposer de preuve. Bien des propositions mathématiques demeurent sans preuve, et ce bien que leur vérité soit exempte de doute. Dans cette recherche de vérité, ce n'est pas de manière fortuite que viendra à l'esprit, au sujet des sommes des diviseurs, la question de savoir s'il existe une suite récurrente en rapport avec les nombres pentagonaux. Je ne considère pas cette question difficile pour elle-même mais plutôt comme une conséquence, que j'expliquerai brièvement…

§ 17

J'ai été conduit à cette observation en considérant l'expression infinie :

$$s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\,\&\,c.$$

Expression qui développée, puis ordonnée suivant les puissances de x, peut s'écrire sous la forme : $s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + x^{57} - \&c.$

où les nombres qui apparaissent dans les exposants sont ceux décrits précédemment, c'est-à-dire les nombres pentagonaux et la suite associée à ceux-ci antérieurement. De cette expression, il est facile d'extraire la suivante :

$$s = \&\,c. + x^{26} - x^{15} + x^7 - x^2 + x^0 - x^1 + x^5 - x^{12} + x^{22} - x^{35} + x^{51} - \&c.$$

§ 18

Je ne peux pas donner une démonstration rigoureuse de ces deux formules exprimant s, mais cependant, il n'est pas difficile de voir que si l'expression

$$s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\,\&\,c.$$

est développée, tous ses facteurs étant multipliés entre eux, les premiers termes de la suite qui en résultera sera : $s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \&c.$

Les deux signes + et − apparaissent successivement par paires, et les exposants de x suivant les mêmes règles que celles déjà données. De plus en acceptant l'égalité de ces deux formules, les propriétés des sommes des diviseurs, que j'avais auparavant indiquées, peuvent être établies fermement.

§ 19

Si nous admettons comme établies les égalités

$$s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\,\&\,c.$$

et $\qquad s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + x^{57} - \&c.$

nous avons les logarithmes

$$ls = l(1-x) + l(1-x^2) + l(1-x^3) + l(1-x^4) + l(1-x^5) + \&c.$$

$$ls = l(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \&c.)$$

En dérivant chaque membre des égalités, il viendra :

$$\frac{ds}{s} = -\frac{dx}{1-x} - \frac{2xdx}{1-x^2} - \frac{3x^2dx}{1-x^3} - \frac{4x^3dx}{1-x^4} - \&c.$$

et $$\frac{ds}{s} = -\frac{dx - 2xdx + 5x^4dx + 7x^6dx - 12x^{11}dx - 15x^{14}dx + \&c}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \&c}$$

En multipliant les deux expressions par $-\frac{x}{dx}$, il vient :

$$-\frac{xds}{sdx} = \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \&c.$$

et $$-\frac{xds}{sdx} = \frac{x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^5 - 22x^{22} - 26x^{26} + \&c.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \&c.}$$

§ 20

Pour montrer que ces expressions sont égales entre elles, transformons tout d'abord chaque terme de la première en une progression géométrique, et disposons ensuite cette infinité de progressions géométriques suivant les puissances de x de la manière qui suit :

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
-\frac{xds}{sdx} = & x^1 & +x^2 & +x^3 & +x^4 & +x^5 & +x^6 & +x^7 & +x^8 & +x^9 & +x^{10} & +x^{11} & +x^{12} \\
 & & +2 & & +2 & & +2 & & +2 & & +2 & & +2 \\
 & & & +3 & & & +3 & & & +3 & & & +3 \\
 & & & & +4 & & & & +4 & & & & +4 \\
 & & & & & +5 & & & & & +5 & & \\
 & & & & & & +6 & & & & & & +6 \\
 & & & & & & & +7 & & & & & \\
 & & & & & & & & +8 & & & & \\
 & & & & & & & & & +9 & & & \\
 & & & & & & & & & & +10 & & \\
 & & & & & & & & & & & +11 & \\
 & & & & & & & & & & & & +12
\end{array}$$

§ 21

Si l'on regroupe ensemble pour chaque puissance de x les coefficients, nous obtiendrons :

$$-\frac{xds}{sdx} = x^1 + x^2(1+2) + x^3(1+3) + x^4(1+2+4) + x^5(1+5) + x^6(1+2+3+6) + \&c.$$

où il est manifeste que pour chaque puissance de x, les nombres qui apparaissent dans la somme formant le coefficient d'un x^n, sont les diviseurs de l'exposant du terme x^n.

Ainsi, le coefficient x^n sera la somme de tous les diviseurs de n, qui a été notée précédemment $\int n$. Par conséquent, la suite trouvée égale à $-\frac{xds}{sdx}$ sera :

$$-\frac{xds}{sdx} = x\int 1 + x^2\int 2 + x^3\int 3 + x^4\int 4 + x^5\int 5 + x^6\int 6 + \&c.$$

En posant $x=1$, nous obtiendrons la suite des sommes des diviseurs de tous les entiers suivant leur progression naturelle.

§ 22

Désignons par t cette série, de sorte que $t = x^1\int 1 + x^2\int 2 + x^3\int 3 + x^4\int 4 + x^5\int 5 + x^6\int 6 + \&c.$

Comme $t = -\frac{xds}{sdx}$, nous aurons :

$$t = \frac{x^1 + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^5 - 22x^{22} - 26x^{26} + \&c.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \&c.}$$

Ainsi, nécessairement le développement de ce quotient qui représente t, sera égal à la première.
Il est clair que la série obtenue pour t est récurrente, chaque terme de celle-ci est déterminé par les précédents

§ 23

Il est facile de trouver la suite récurrente, si nous identifions ces deux expressions de t et multiplions chaque membre par le dénominateur $1 - x - x^2 + x^5 + x^7 + \&c$ du quotient. Cela étant fait, on dispose les termes suivant les puissances de x comme indiqué ci-dessous :

$$\begin{array}{cccccccccc}
x^1\int 1 & +x^2\int 2 & +x^3\int 3 & +x^4\int 4 & +x^5\int 5 & +x^6\int 6 & +x^7\int 7 & +x^8\int 8 & +x^9\int 9 & +x^{10}\int 10 \\
 & -\int 1 & -\int 2 & -\int 3 & -\int 4 & -\int 5 & -\int 6 & -\int 7 & -\int 8 & -\int 9 \\
 & & -\int 1 & -\int 2 & -\int 3 & -\int 4 & -\int 5 & -\int 6 & -\int 7 & -\int 8 \\
 & & & & & +\int 1 & +\int 2 & +\int 3 & +\int 4 & +\int 5 \\
= x^1 & = 2x^2 & = 0 & = 0 & = -5x^5 & = 0 & = -7x^7 & = 0 & = 0 & = 0
\end{array}$$

§ 24

Comme les coefficients des puissances de x doivent se correspondre dans chaque membre, il s'ensuit les égalités :

$$\begin{aligned}
&\int 1 = 1\\
&\int 2 = \int 1 + 2\\
&\int 3 = \int 2 + \int 1\\
&\int 4 = \int 3 + \int 2\\
&\int 5 = \int 4 + \int 3 - 5\\
&\int 6 = \int 5 + \int 4 - \int 1\\
&\int 7 = \int 6 + \int 5 - \int 2 - 7\\
&\int 8 = \int 7 + \int 6 - \int 3 - \int 1\\
&\int 9 = \int 8 + \int 7 - \int 4 - \int 2\\
&\int 10 = \int 9 + \int 8 - \int 5 - \int 3\\
&\int 11 = \int 10 + \int 9 - \int 6 - \int 4\\
&\int 12 = \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + 12
\end{aligned}$$

qui se ramène à

$$\begin{aligned}
&\int 1 = 1\\
&\int 2 = \int(2-1) + \int 2\\
&\int 3 = \int(3-1) + \int(3-2)\\
&\int 4 = \int(4-1) + \int(4-2)\\
&\int 5 = \int(5-1) + \int(5-2) - 5\\
&\int 6 = \int(6-1) + \int(6-2) - \int(6-5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int 7 = \int(7-1) + \int(7-2) - \int(7-5) - 7\\
&\int 8 = \int(8-1) + \int(8-2) - \int(8-5) - \int(8-7)\\
&\int 9 = \int(9-1) + \int(9-2) - \int(9-5) - \int(9-7)\\
&\int 10 = \int(10-1) + \int(10-2) - \int(10-5) - \int(10-7)\\
&\int 11 = \int(11-1) + \int(11-2) - \int(11-5) - \int(11-7)\\
&\int 12 = \int(12-1) + \int(12-2) - \int(12-5) - \int(12-7) + 12
\end{aligned}$$

§ 25

Il est clair que les nombres qui apparaissent, soustraits du nombre donné, afin de trouver la somme des diviseurs sont les nombres 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, etc. pour autant qu'ils n'excèdent pas le nombre donné, de telle sorte qu'une preuve de la règle décrite précédemment est donnée ici.
Il est ainsi manifeste que pour tout entier n :

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) - \&c$$

Les termes se poursuivent aussi longtemps que les nombres précédés du symbole $\int$ ne soient pas négatifs.
De manière analogue, la suite récurrente originale donnée par cette règle ne devant pas non plus aller au delà.

§ 26

Si dans la formule trouvée, le nombre 0 apparaît, c'est-à-dire si n est un terme de la suite 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26 etc., alors la règle concernant les signes n'est pas modifiée. Dans ce cas le terme dans lequel figure le terme nul ($\int 0$) est égal au nombre n lui-même, que l'on devra écrire sous la forme $\int(n-n)$ dans la somme

$$\int n = \int(n-1)+\int(n-2)-\int(n-5)-\int(n-7)+\int(n-12)+\int(n-15)-etc$$

La règle proposée gardera dans ce cas toute sa validité.

Leonhard Euler
1754

Dans *L'Introduction à l'Analyse des Infiniment Petits (1748)*, Euler aborde l'études des partitions des nombres entiers (décomposition d'un entier en somme d'entiers positifs) : il remarque que le coefficient du facteur $x^n z^m$ dans le développement de $(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)....$ représente exactement le nombre de façons dont n peut être écrit comme une somme d'entiers positifs.

«§ **277**. Mais pour rendre toutes ces choses plus claires, prenons le produit suivant composé d'un nombre infini de facteurs.

$$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)\ \&\,c.$$

lequel étant développé se change en cette fonction

$$\begin{aligned}
&1+z(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+\&c.)\\
&+z^2(x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+3x^8+4x^9+4x^{10}+5x^{11}+\&c.)\\
&+z^3(x^6+x^7+2x^8+3x^9+4x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+8x^{13}+10x^{14}+\&c.)\\
&+z^4(x^{10}+x^{11}+2x^{12}+3x^{13}+5x^{14}+6x^{15}+9x^{16}+11x^{17}+15x^{18}+\&c.)\\
&+z^5(x^{15}+x^{16}+2x^{17}+3x^{18}+5x^{19}+7x^{20}+10x^{21}+13x^{22}+18x^{23}+\&c.)\\
&+z^6(x^{21}+x^{22}+2x^{23}+3x^{24}+5x^{25}+7x^{26}+11x^{27}+14x^{28}+20x^{29}+\&c.)\\
&+z^7(x^{28}+x^{29}+2x^{30}+3x^{31}+5x^{32}+7x^{33}+11x^{34}+15x^{35}+21x^{36}+\&c.)\\
&+z^8(x^{36}+x^{37}+2x^{38}+3x^{39}+5x^{40}+7x^{41}+11x^{42}+15x^{43}+22x^{44}+\&c.)
\end{aligned}$$

On peut donc s'assurer sur le champ par le moyen de ces séries de combien de différentes manières, un nombre proposé peut résulter d'un nombre donné de différents termes de la série 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c ainsi si l'on cherche, par exemple, de combien de différentes manières le nombre 35 peut être la somme de 7 termes différents de la série 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c., on cherchera dans la série qui multiplie la puissance z^7 la puissance x^{35}, & son coefficient fera voir que le nombre proposé 35, peut être de 15 manières différentes la somme de termes de la série 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c.

§.278

Si l'on fait $z=1$, & que l'on réduise en une somme toutes les puissances semblables de x, ou, ce qui revient au même, si on développe cette suite infinie

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)\ \&\,c.$$

il viendra $1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+\&c.$ série dans laquelle chaque coefficient exprime le nombre des différentes manières dont 1'exposant de la puissance de x peut résulter par voie d'addition, des différents termes de la suite 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. L'on peut voir par là que le nombre 8 peut résulter de 6 manières par l'addition de différents nombres qui sont

$$8=8 \qquad 8=5+3$$
$$8=7+1 \qquad 8=5+2+1$$
$$8=6+2 \qquad 8=4+3+1$$

Mais l'on doit remarquer qu'il faut aussi tenir compte du même nombre proposé ; puisque le nombre des termes n'est point prescrit, et qu'ainsi l'on n'en exclut point l'unité.»

Dans cette étude, Euler introduit la notion de fonction génératrice associée à une suite (a_n) d'entiers positifs, comme étant la fonction $G(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et montre tout l'intérêt que peuvent représenter de telles fonctions dans l'étude des partitions :

« **§ 281**. Appliquons cette doctrine à un cas digne de notre attention, soit proposée l'expression $\dfrac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)\,\&c.}$ laquelle étant développée, donnera

$$\begin{aligned}
&1+z(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+\&c.)\\
&+z^2(x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+3x^8+4x^9+4x^{10}+5x^{11}+\&c.)\\
&+z^3(x^6+x^7+2x^8+3x^9+4x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+8x^{13}+10x^{14}+\&c.)\\
&+z^4(x^4+x^5+2x^6+3x^7+5x^8+6x^9+9x^{10}+11x^{11}+15x^{12}+\&c.)\\
&+z^5(x^5+x^6+2x^7+3x^8+5x^9+7x^{10}+10x^{11}+13x^{12}+18x^{13}+\&c.)\\
&+z^6(x^6+x^7+2x^8+3x^9+5x^{10}+7x^{11}+11x^{12}+14x^{13}+20x^{14}+\&c.)\\
&+z^7(x^7+x^8+2x^9+3x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+11x^{13}+15x^{14}+21x^{15}+\&c.)\\
&+z^8(x^8+x^9+2x^{10}+3x^{11}+5x^{12}+7x^{13}+11x^{14}+15x^{15}+22x^{16}+\&c.)\ \ldots
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc nous assurer par le moyen de ces séries de combien de différentes manières un nombre proposé peut résulter par l'addition d'un nombre donné des termes de la série 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 &c. Si l'on demandait par exemple de combien de différentes manières le nombre 13 peut être formé par l'addition des nombres entiers; il faudra chercher le terme $x^{13}z^5$, dont le coefficient 18 fera voir que le nombre proposé 13 peut résulter par l'addition de cinq nombres entiers combinés entre eux de 18 manières.

§ 282. Si l'on fait $z=1$, & qu'on réunisse en une seule expression les puissances semblables de x, la fonction $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\,\&c.}$ se transformera en cette série

$$1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+\&c.$$

dans laquelle chaque coefficient fait connaître le nombre de manières différentes dont l'exposant de la puissance contiguë peut résulter de l'addition de nombres entiers égaux ou inégaux entre eux, c'est-à-dire par exemple qu'on connaîtra par le terme $11x^6$ que l'exposant 6 peut être formé par l'addition de nombres entiers des onze manières suivantes

$6=6$	$6=3+1+1+1$
$6=5+1$	$6=2+2+2$
$6=4+2$	$6=2+2+1+1$
$6=4+1+1$	$6=2+1+1+1+1$
$6=3+3$	$6=1+1+1+1+1+1$
$6=3+2+1$	

On doit aussi remarquer que le même nombre proposé y entre une fois, puisqu'il se trouve contenu dan la série 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c.
Ces recherches le menèrent au théorème d'Euler relatif aux nombres pentagonaux.

<u>Théorème :</u> $$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{n(3n+1)}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{n(3n-1)}{2}}$$ qui est précisément l'expression introduite dans le § 17.

Euler avait par ailleurs établi que la fonction génératrice associée à la suite des sommes des diviseurs des entiers, $\sigma(n)$ était donnée par

$$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{1-x^n}$$

C'est encore précisément ce qu'il fait au § 19 en écrivant :

$$\left(G(x)=\right)\quad -\frac{xds}{sdx}=\frac{x}{1-x}+\frac{2x^2}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^3}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^x}{1-x^n}$$

et en montrant au § 20 et § 21 que par ailleurs $-\dfrac{xds}{sdx}=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)x^n$ de sorte que

finalement : $G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^n}{1-x^n}$

On pourra alors retrouver sans grande difficulté le résultat dont l'origine semblait particulièrement mystérieuse :

En divisant par x chaque membre, il vient : $\dfrac{G(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{1-x^n}$ et alors pour $|x|<1$,

$$\int\frac{G(x)}{x}dx=-\int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-nx^{n-1}}{1-x^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\int\frac{-nx^{n-1}}{1-x^n}dx\quad(\,!\,)$$

et donc $$\int\frac{G(x)}{x}dx=-\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1-x^n)$$

et $$\int\frac{G(x)}{x}dx=-\ln\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)\right)$$

d'où l'apparition « naturelle » des nombres pentagonaux (! !).

Ainsi $\int \frac{G(x)}{x}dx = -\ln(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12}....)$

En dérivant membre à membre il viendra

$$\frac{G(x)}{x} = \frac{-1 - 2x + 5x^4 + 7x^6 - 12x^{11} - \&c.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - \&c.}$$

et $$G(x) = \frac{-x - 2x^2 + 5x^5 + 7x^7 - 12x^{12} - \&c.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - \&c.}$$

et comme $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)x^n$ en effectuant le produit en croix et en identifiant les coefficients de x^n, nous obtiendrons le théorème d'Euler :

Théorème : Soit n un entier naturel, alors

$$\sigma(n) = \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) + ... + (-1)^{k+1}\left[\sigma(n - \frac{3k^2 - k}{2}) + \sigma(n - \frac{3k^2 + k}{2})\right]$$

avec $\sigma(k) = 0$ si $k < 0$ et $\sigma(0) = k$

A ceux qui auront trouvé quelque délectation à la lecture de ces résultats, indiquons ici encore qu'Euler obtint un résultat assez semblable dans l'étude des partitions des entiers.

Utilisant la fonction génératrice des partitions donnée au § 282 de *l'Analyse* :

$$G(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^n} = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)}$$

et le théorème des nombres pentagonaux, il parviendra à établir le théorème d'Euler des partitions d'entiers :

Théorème : Soit n un entier naturel, et $p(n)$, le nombre de partitions de n, alors

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + ... + (-1)^{k+1}\left[p(n - \frac{3k^2 - k}{2}) + p(n - \frac{3k^2 + k}{2})\right]$$