Somme de diviseurs

Tristan DERAY, Lycée Hilaire de Chardonnet à Chalon s/Saône

C'est vers 1760 qu'Euler présenta en arithmétique la fonction qui porte son nom et qui indique le nombre d'entiers premiers avec un entier n et qui lui sont strictement inférieurs. Dans ce même domaine, il avait auparavant déjà introduit une autre fonction moins connue, mais aussi digne d'intérêt à savoir celle qui à un entier associe la somme de ses diviseurs (généralement notée $\sigma(n)$).

Descartes avant lui avait remarqué que si p était un entier premier, alors $\sigma(p^r) = \dfrac{p^{r+1}-1}{p-1}$

En effet, les diviseurs de p^r sont $1,\ p,\ p^2 \ldots\ldots p^r$

et donc $\sigma(p^r) = 1 + p + \ldots + p^r$

c'est-à-dire $\sigma(p^r) = \dfrac{p^{r+1}-1}{p-1}$

Euler établit vers 1750 le théorème suivant :

$$\text{Si } n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i} \quad \text{alors } \sigma(n^r) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{r_i+1}-1}{p_i-1}$$

En effet si $n = p_1^{r_1} \ldots\ldots p_k^{r_k}$, alors la somme des diviseurs est donnée par le produit

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \ldots\ldots + p_1^{r_1})\ (1 + p_2 + p_2^2 + \ldots\ldots + p_2^{r_2}) \ldots\ldots (1 + p_k + p_k^2 + \ldots\ldots + p_k^{r_k})$$

ou encore $\sigma(n) = \left(\dfrac{p^{r_1+1}-1}{p-1}\right) \ldots \left(\dfrac{p^{r_k+1}-1}{p-1}\right) \qquad \sigma(n) = \prod_{i=1}^{i=k} \left(\dfrac{p^{r_i+1}-1}{p-1}\right)$

il s'ensuit immédiatement le corollaire

Si a et b sont deux entiers premiers entre eux alors $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$

Autrement dit la fonction σ est une fonction arithmétique multiplicative.

Les nombres parfaits entretiennent un rapport privilégié avec la fonction σ de part leur définition même :

L'entier p est premier si et seulement si $\sigma(p) = 2p$.

On doit à Euclide d'avoir établi à la dernière proposition du livre 9 de ses Eléments le théorème suivant :

Un nombre de la forme $p = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait si $q = (2^p - 1)$ est un nombre de Mersenne.

En effet les diviseurs de 2^{p-1} sont $1,\ 2,\ 2^2 \ldots\ 2^{p-1}$.

Si $2^p - 1$ est premier, ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même.

Comme 2^{p-1} et $2^p - 1$ sont premiers entre eux, la somme des diviseurs de $2^{p-1}(2^p - 1)$ peut-être représentée comme le produit des sommes des diviseurs de 2^{p-1} et $2^p - 1$

c'est-à-dire

$$\sigma\left[2^{p-1}(2^p-1)\right] = \sigma\left[2^{p-1}\right]\ \sigma\left[2^p - 1\right] = \left(\frac{2^p-1}{2-1}\right) \times 2^n = 2 \times (2^{p-1})(2^p - 1)$$

En posant $P = 2^{p-1}(2^p - 1)$, on a donc bien $\sigma(P) = 2P$

Un nombre de la forme $P = 2^{p-1}(2^p - 1)$ avec $(2^p - 1)$ nombre de Mersenne est appelé nombre euclidien.

Ainsi les nombres euclidiens sont parfaits. A plus de 15 siècles de distance, Euler répondit à Euclide :

Les nombres pairs parfaits sont euclidiens.

Soit p un entier parfait, posons $p = 2^{n-1}s$ avec $n \geq 2$ et s impair.

Comme p est parfait, $\sigma(p) = 2p$.

Par ailleurs $\sigma(2^{n-1}s) = \sigma(2^{n-1})\sigma(s) = 2(2^{n-1}s) = 2^n s$

Comme 2^{n-1} et s n'ont pa s de diviseurs communs, on a : $\sigma(2^{n-1}s) = \dfrac{2^n - 1}{2 - 1} \times \sigma(s)$

et donc $\sigma(p) = (2^n - 1)\sigma(s)$

Par conséquent $2^n s = (2^n - 1)\sigma(s)$

posons $\sigma(s) = s + k$ (k représente la somme des diviseurs de s qui lui sont strictement inférieurs), on a alors : $2^n s = (2^n - 1)(s + k)$

et donc $s = (2^n - 1)t$

donc t doit diviser s et doit donc être un diviseur de s, ce qui n'est possible que si $t = 1$.

Par conséquent $s = (2^n - 1)$

Euler se contenta de la remarque suivante pour « compléter » son résultat :

« Quant à savoir s'il existe des nombres parfaits impairs, la question est autrement plus compliquée ! «

A ce jour, personne n'a su véritablement formuler de meilleure réponse.

Le talent d'Euler ne s'arrête pas là, mais poursuit ses découvertes bien au-delà, étudiant les partitions des entiers, c'est-à-dire les décompositions d'un entier comme somme d'entiers inférieurs, il vit curieusement réapparaître la fonction σ de façon aussi étrange qu'admirable, en découvrant une expression permettant de calculer $\sigma(n)$ à l'aide des valeurs $\sigma(n-k)$ où k prend ses valeurs dans l'ensemble des nombres pentagonaux ! Cette intuition et ce génie sont le sceau qu'il apposa sur les mathématiques du 18ème.

OBSERVATION SUR LES SOMMES DE DIVISEURS

Leonhard Euler

§ 1 . Soit un nombre quelconque n, et soit $\int n$ la somme de tous les diviseurs de n. Comme l'unité est son propre et seul diviseur, $\int 1 = 1$; comme un nombre premier n'admet que deux diviseurs, lui-même et l'unité, si n est un nombre premier, alors $\int n = n + 1$. Un nombre parfait étant égal à la somme de ses parties aliquotes, il est évident que la somme des diviseurs d'un nombre parfait est égal au double de ce nombre ; ainsi lorsque n est un nombre parfait $\int n = 2n$. Un nombre est dit redondant si la somme de ses diviseurs est supérieure à ce nombre, c'est-à-dire si $\int n > 2n$, inversement un nombre est dit déficient s'il est inférieur à la somme de ses diviseurs, donc $\int n < 2n$.

§ 2. Ainsi, le caractère des nombres, du moins ceux qui peuvent être exprimés à l'aide de la somme de leurs parties aliquotes, ou diviseurs, s'exprime facilement à l'aide de ce signe.

En effet, si $\int n = 1 + n$, alors n est un nombre premier, si $\int n = 2n$, alors n est un nombre parfait, et si $\int n > 2n$ ou $\int n < 2n$, alors n est respectivement un nombre redondant ou déficient.

Ce symbole est aussi utilisable pour évoquer les nombres que l'on appelle amiables, ceux pour lesquels la somme de diviseurs est égale à un autre et inversement. Si m et n sont des nombres amiables, comme m est la somme partielle de ses parties aliquotes $m = \int m - m$ et $n = \int n - n$, on a alors $n = \int m - m$ et $m = \int n - n$, donc $\int m = \int n = m + n$

§ 3. La somme des diviseurs de n'importe quel nombre proposé peut-être trouvé facilement, et d'autant plus facilement que le nombre sera produit de deux facteurs premiers entre eux, c'est-à-dire n »ont pas d'autres diviseurs communs que l'unité : la somme des diviseurs du produit pq est égal au produit des sommes des diviseurs de chacun, c'est-à-dire : $\int pq = \int p \times \int q$

Cette méthode qui est utilisée pour trouver les sommes de petits nombres de diviseurs peut être étendue sans peine pour trouver les sommes de grands nombres de diviseurs.

§ 4. Si a,b,c,d,… désignent des nombres premiers, tout nombre peut s'écrire sous la forme $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$, donc la somme des diviseurs est donnée par : $\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta = \int a^\alpha \int b^\beta \int c^\gamma \int d^\delta$

Si a,b,c,d,… sont des nombres premiers, alors : $\int a^\alpha = 1 + a + a^2 + \ldots + a\alpha = \dfrac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1}$

et nous voyons que $\int a^\alpha \int b^\beta \int c^\gamma \int d^\delta == \dfrac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \times \dfrac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \times \dfrac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} \times \dfrac{d^{\delta+1}-1}{d-1}$.

Il suffit ainsi de trouver la multiplicité des facteurs premiers d'un nombre pour trouver la somme de ses diviseurs.

§ 5. Donnons ici la valeur de la somme des diviseurs des entiers inférieur à 100, ce qui nous aidera par la suite.

$\int 1=1$	$\int 26=42$	$\int 51=72$	$\int 76=140$
$\int 2=3$	$\int 27=40$	$\int 52=98$	$\int 77=96$
$\int 3=4$	$\int 28=56$	$\int 53=54$	$\int 78=168$
$\int 4=7$	$\int 29=30$	$\int 54=120$	$\int 79=80$
$\int 5=6$	$\int 30=726$	$\int 55=72$	$\int 80=186$
$\int 6=12$	$\int 31=32$	$\int 56=120$	$\int 81=121$
$\int 7=8$	$\int 32=63$	$\int 57=80$	$\int 82=126$
$\int 8=15$	$\int 33=48$	$\int 58=90$	$\int 83=84$
$\int 9=13$	$\int 34=54$	$\int 59=60$	$\int 84=224$
$\int 10=18$	$\int 35=48$	$\int 60=168$	$\int 85=108$
$\int 11=12$	$\int 36=91$	$\int 61=62$	$\int 86=132$
$\int 12=28$	$\int 37=38$	$\int 62=96$	$\int 87=120$
$\int 13=14$	$\int 38=60$	$\int 63=104$	$\int 88=180$
$\int 14=24$	$\int 39=40$	$\int 64=127$	$\int 89=90$
$\int 15=24$	$\int 40=41$	$\int 65=84$	$\int 90=234$
$\int 16=31$	$\int 41=42$	$\int 66=144$	$\int 91=112$
$\int 17=18$	$\int 42=96$	$\int 67=68$	$\int 92=168$
$\int 18=39$	$\int 43=44$	$\int 68=69$	$\int 93=128$
$\int 19=20$	$\int 44=84$	$\int 69=96$	$\int 94=144$
$\int 20=42$	$\int 45=78$	$\int 70=144$	$\int 95=120$
$\int 21=32$	$\int 46=72$	$\int 71=72$	$\int 96=252$
$\int 22=36$	$\int 47=48$	$\int 72=195$	$\int 97=98$
$\int 23=24$	$\int 48=124$	$\int 73=74$	$\int 98=171$
$\int 24=60$	$\int 49=57$	$\int 74=114$	$\int 99=156$
$\int 25=31$	$\int 50=93$	$\int 75=124$	$\int 100=217$

§ 6. Si l'on considère la suite de nombres 1,3,4,7,6,12,8,15,13,18,12,28,... constituée de la somme des diviseurs des nombres entiers, non seulement aucune règle ne donne la loi de progression, mais encore, l'ordre en semble absent.

Cette série est liée à celle des nombres premiers, puisque si n est premier, alors $\int n = n+1$, dont on ignore la loi de progression. Comme notre suite contient non seulement des nombres premiers, mais aussi tous les autres nombres, la règle de formation semble encore plus compliquée que la suite des nombres premiers elle-même.

§ 7. Je vois ainsi qu'il ne m'appartient pas de faire progresser la science des nombres. Cependant j'ai découvert une certaine règle constante, par laquelle chaque terme de la suite $1, 3, 4, 7, 6,$ etc... est engendré et par laquelle encore chaque terme de la suite est défini par les termes précédents. Ce que j'ai trouvé de plus merveilleux concernant cette suite, c'est une sorte de progression que l'on appelle par récurrence et qui permet de trouver n'importe quel terme à partir des précédents à l'aide d'une certaine relation déterminée.

Cependant, cette suite est vraiment désordonnée, et il semble qu'il n'existe aucune relation de récurrence. Toutefois, est-il possible de donner une méthode permettant d'engendrer de telles suites ?

§ 8. Si n est un entier, $\int n$ désigner la somme de ses diviseurs et les termes qui précèdent celui-ci dans la suite des sommes des diviseurs sont $\int(n-1), \int(n-2), \int(n-3), ...$ Il est possible d'exprimer le terme $\int$n de cette suite en fonction des termes précédents de la manière suivante :

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) - \int(n-22) - \int(n-26) + \int(n-35) +$$

$$\int(n-40) - \int(n-51) - \int(n-57) + \int(n-70) + \int(n-77) - \int(n-92) - \int(n-100) + \int(n-117) + \int(n-126)...$$

où les signes + et – alternent en se répétant deux fois. Il est commode de présenter la série de la manière suivante :

$\int n =$

$\int(n-1) - \int(n-5) + \int(n-12) - \int(n-22) + \int(n-35) - \int(n-51) + etc.....$

$\int(n-2) - \int(n-7) + \int(n-15) - \int(n-26) + \int(n-40) - \int(n-57) + etc...$

§ 9. Il est possible de déterminer un ordre dans cette suite de nombres que l'on soustrait successivement à n. Il suffit pour cela de former les différences secondes pour s'apercevoir que celles-ci sont constantes. On a ainsi pour la première suite de nombres:

	1		5		12		22		35		70		92		117		etc		
Différence 1ère		4		7		10		13		16		19		22		25		etc	
Différence 2nde			3		3		3		3		3		3		3		3		

Et le terme général de la suite est $\frac{3x^2 - x}{2}$ qui est la suite des nombres pentagonaux.

L'autre suite est

	2		7		15		26		40		57		77		100		126		etc
Différence 1ère		5		8		11		14		17		20		23		26		etc	
Différence 2nde			3		3		3		3		3		3		3		3		etc

Son terme général est $\frac{3x^2 + x}{2}$, cette suite est celle des pentagonaux auxquels est ajoutée celle des entiers consécutifs. ($1+1$; $5+2$; $12+3$; $22+4$ ..)

§ 10. Il est digne d'intérêt de remarquer que la suite des nombres pentagonaux et celle qui lui a été associée puissent s'appliquer à l'étude de celle de la somme des diviseurs des entiers.

Alors que rien ne laisse supposer de lien entre des entiers pentagonaux et la somme des diviseurs. Si l'on ordonne la suite de nos nombres de la manière suivante :

$$...,77,57,40,26,15,7,2,0,1,5,12,22,35,51,70,92,...$$

on peut ordonner la somme des diviseurs de la manière qui suit :

$$etc, -\int(n-15)+\int(n-7)-\int(n-2)+\int(n-0)-\int(n-1)+\int(n-5)-\int(n-12)...etc$$

en prenant soin de ne prendre que des entiers positifs.

§ 11. A partir de cette formule, nous pouvons retrouver la première établie.

$$\int n = \int(n-1)+\int(n-2)-\int(n-5)-\int(n-7)+\int(n-12)+\int(n-15)\ldots \text{etc}$$

Nous voulons déterminer la somme du nombre n à partir des sommes de diviseurs de nombres inférieurs, et appliquer cette formule pour les valeurs positives $(n-1),(n-2),(n-5),\ldots$ Il n'est pas possible de dire combien de termes de cette suite doivent être pris, c'est-à-dire avant d'atteindre les sommes des diviseurs de nombres négatifs.

Tous les termes qui suivent le symbole $\int$ et qui contiennent des nombres négatifs doivent être omis. Si n est un petit nombre, un petit nombre de termes suffit, tandis que s'il est grand, en général de nombreux termes devront être pris e compte dans notre formule.

§ 12. Par conséquent, la somme des diviseurs d'un nombre n est donnée par les sommes des parties aliquotes de nombres plus petits que je suppose connues. Il y a cependant une exception : ceci ne pouvant s'appliquer à la somme de diviseurs de nombres négatifs. Parmi ceux autorisés, il faut signaler le cas où notre formule donne le terme $\int(n-n)$, c'est-à-dire $\int 0$. Comme 0 est divisible par tout nombre, il faut donner une valeur infinie ou indéterminée à ce terme. Quand le cas se produit, c'est-à-dire quand n est un terme de la suite des nombres pentagonaux ou de la suite associée, on conviendra toujours de donner à $\int(n-n)$, c'est-à-dire $\int 0$ la valeur n ; avec cette règle, les termes $(n-n)$ seront donc remplacés.

§ 13. Les principes étant posés, il est facile de vérifier à partir d'exemples numériques que notre expression semble juste.

$$\int 1 = \int 0 = 1$$
$$\int 1 = 1 = 1$$
$$\int 2 = \int 1 + \int 0$$
$$\int 2 = 1 + 2 = 3$$
$$\int 3 = \int 2 + \int 1 = 3 + 1 = 4$$
$$\int 4 = \int 3 + \int 2 = 4 + 3 = 7$$
$$\int 5 = \int 4 + \int 3 - \int 0$$
$$\int 5 = 7 + 4 - 5 = 6$$
$$\int 6 = \int 5 + \int 3 - \int 1$$
$$\int 6 = 6 + 7 - 1 = 12$$
$$\int 7 = \int 6 + \int 5 - \int 2 - \int 0$$
$$\int 7 = 12 + 6 - 3 - 7 = 8$$
$$\int 8 = \int 7 + \int 6 - \int 3 - \int 1$$

$$\int 8 = 8+12-4-1=15$$

$$\int 9=\int 8+\int 7-\int 4-\int 2$$

$$\int 9=15+8-7-3=13$$

$$\int 10=\int 9+\int 8-\int 5-\int 3$$

$$\int 10=13+15-6-4=18$$

$$\int 11=\int 10+\int 9-\int 6-\int 4$$

$$\int 11=18+13-12-7=12$$

$$\int 12=\int 11+\int 10-\int 7-\int 5+\int 0$$

$$\int 12=12+18-8-6+12=28$$

§ 14. Même des nombres plus grands peuvent être pris comme le montre l'exemple qui suit, et il est véritablement merveilleux de constater que notre attente est toujours satisfaite et que nous obtenons de la sorte la somme des diviseurs de n'importe quel nombre donné.

On vérifiera que pour aucun des nombres donnés précédemment, la somme des diviseurs ne dépasse 100. Intéressons nous donc à la justesse de celle-ci pour de grands nombres. Si un nombre premier est donné, nous nous réjouissons de voir notre formule nous donner une somme des diviseurs du nombre est égale au nombre lui-même augmenté de 1.

Considérons comme exemple le nombre $n=101$, dont on ne sait sans recherche spécifique s'il est ou non premier. Nous avons :

$$\int 101=\int 100+\int 99-\int 96-\int 94+\int 89+\int 86-\int 79-\int 75+\int 66+\int 61-\int 50-\int 44+\int 31+\int 24-\int 9-\int 1$$

$$\int 101=217+156-252-144+90+132-80-124+144+62-93-84+32+60-13-1$$

En regroupant les termes :

$$\int 101=373-396+222-204+206-177+92-14$$

$$\int 101=893-791=102$$

Nous remarquons que la somme des diviseurs du nombre 101 est égale à 102, par conséquent, le nombre 101 est premier. Comme nous le constatons avec admiration, sans qu'aucune opération ne soit posée, qui fournisse les diviseurs, il est possible sans connaître ces derniers d'en déterminer la somme.

§ 15. Les propriétés dont sont dotées les sommes de diviseurs ne sont rien moins que remarquables, même si elles demeurent loin de l'évidence et difficiles à établir clairement. Cependant même si une preuve relative à ces propriétés cachées des nombres n'est pas trouvée, cette règle découverte semble toutefois valable et la recherche de la vérité est digne d'éloge, mais cette vérité demeure bien cachée. Pour être certain, je me suis efforcé jusqu'à l'épuisement, sans pouvoir établir la vérité. Ainsi je ne sais pas même ce qu'il faut penser de ce qui est vérifié, mais dont la démonstration ne peut-être trouvée. Bien que de nombreux exemples semblent attester la véracité de la propriété, il ne nous est pas donné de pouvoir la démontrer.