Un carré dans un triangle[1]

De l'utilisation de textes anciens pour résoudre un problème

Patrick GUYOT, L.P. Dumaine à MACON

Résumé : *Il s'agit ici de conter une expérience réalisée en cours de mathématiques avec une classe de seconde professionnelle.*
Inscrire un carré dans un triangle, tel est le prétexte à cette activité, mais, après une phase d'appropriation de l'énoncé du problème, on propose aux élèves deux modes de résolution à partir de textes anciens, l'un, géométrique, de Marolois, l'autre, algébrique, d'Al Khwarizmi, et on recherche la justification de ces méthodes.
A partir de cette description, on essaiera de montrer les enjeux et les avantages de ce type de démarche.

Première étape : sensibilisation au problème.

La classe concernée par l'expérience décrite ici est une seconde professionnelle, première année de BEP MMIC (Métiers de la Mode et des Industries Connexes), constituée de vingt filles ayant pour la plupart quelques difficultés en français écrit et oral, mais montrant toujours de la bonne volonté.

Le point de départ était de tester la compréhension d'un énoncé simple sous forme d'une question, afin de préparer le travail qui devait suivre. Je souhaitais en effet éviter que les élèves ne puissent résoudre le problème à cause d'une incompréhension du sens de l'énoncé.

La question a été posée oralement à dix minutes de la fin d'un cours, et répétée trois fois : "**Inscrire un carré dans un triangle**.". La seule consigne qui ait été donnée est : "Vous choisissez le triangle que vous voulez, vous avez jusqu'à la sonnerie pour répondre à la question."

A l'heure dite, j'ai ramassé les feuilles, les ai photocopiées avant de les redonner la séance suivante pour poursuivre le travail. Le dépouillement des résultats a permis d'affiner ce que nous évoquions plus haut, et de mettre en évidence une difficulté fréquemment rencontrée : l'(in)exécution des consignes, ou plutôt l'(in)adéquation entre les objectifs du professeur et la réalisation des élèves.

Le problème le plus important est venu du mot "inscrire". La simple lecture du Petit Larousse Illustré nous permet de ne pas en être étonnés :

Inscrire*…. Math. Tracer une figure à l'intérieur d'une autre, inscrire un triangle dans un cercle.*

Pour le professeur, la phrase de l'énoncé du problème est précise, pour l'élève elle prête à réflexion, à hésitation, voire à confusion : une figure tracée "*à l'intérieur d'une autre*", ainsi que l'écrit le Petit Larousse, doit-elle être en contact avec cette autre ? La définition du mot inscrit dans le même dictionnaire est beaucoup moins ambiguë sur ce sujet :

Inscrit*. Se dit d'un polygone dont tous les sommets sont sur une courbe donnée, ou d'une courbe tangente à tous les côtés d'un polygone donné.*

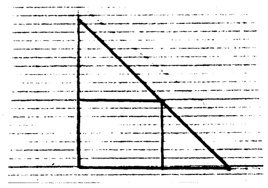
La vue des résultats des élèves nous permettra de mettre en évidence les obstacles rencontrés, et de revenir sur l'interprétation du mot inscrire.

---

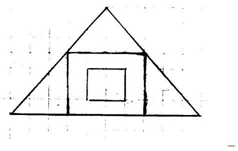
[1] Reproduction avec l'autorisation de l'éditeur de l'article : "Un carré dans un triangle". Cet article a été publié dans le Repère n° 51, d'avril 2003, pages 41 à 58 ; Editeur : Topiques éditions à Metz ; ISSN 1157-285X.

Les productions ont été classées en trois "familles" présentées ci-dessous :

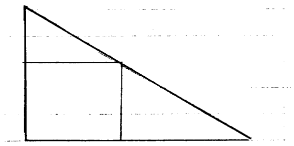
Première "famille" : constructions exactes, ou tout au moins acceptables (figures 1 à 11).



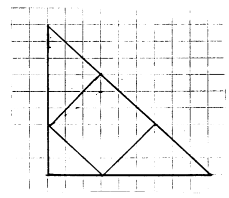
1



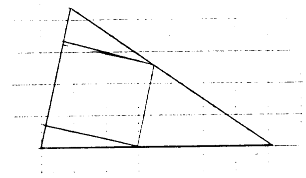
2



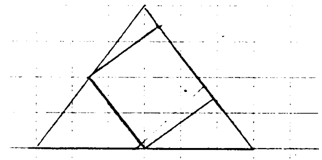
3



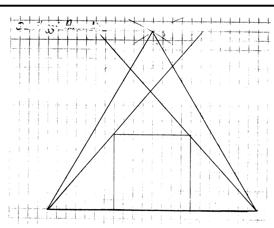
4



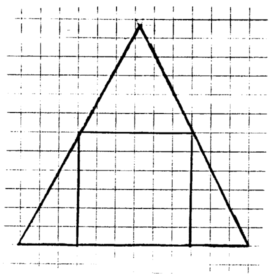
5



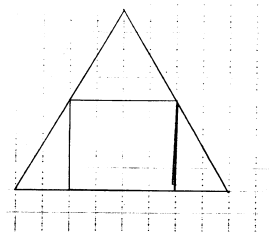
6



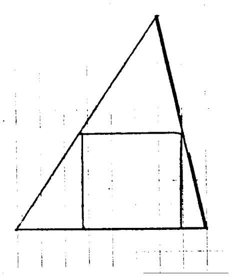
7



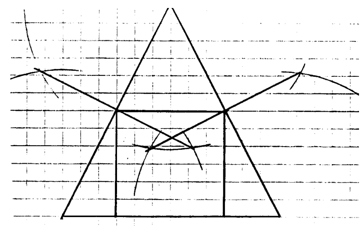
8



9



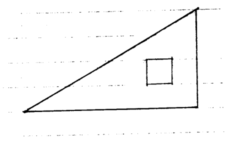
10



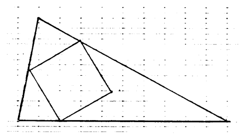
11

Les onze élèves concernées ont présenté un travail qui répondait à la question posée, même si quelques traits de construction subsistants laissent planer un doute quant à la justesse de la méthode utilisée pour les figures 7 et 11. La figure 2 comporte deux carrés, l'élève a expliqué par la suite avoir tracé le petit carré en premier, puis le second après quelques temps de réflexion.

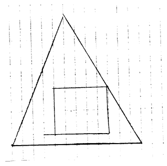
<u>*Deuxième "famille"*</u> : Inscriptions du carré inexactes (figures 12 à 17).



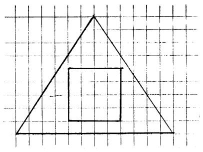
12



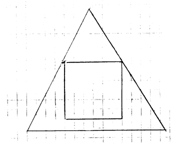
13



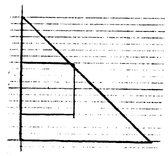
14



15



16

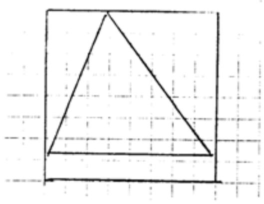


17

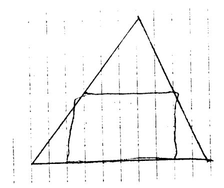
Les carrés 14, 16, 13 et 17 ont respectivement un, deux, trois et trois sommets en contact avec le triangle. Les carrés 12 et 15, intérieurs au triangle, ne "touchent" pas celui-ci.

Chaque carré tracé est bien à l'intérieur du triangle. La définition du mot *inscrire* donnée par le Petit Larousse englobe-t-elle ces cas ? Il faudrait plutôt penser à la définition par le même dictionnaire du mot *inscrit*, plus précise, et qui impose aux sommets de la figure inscrite d'être en contact avec le triangle. La discussion qui suivra conduira la classe à rejeter ces figures comme ne répondant pas à la question posée.

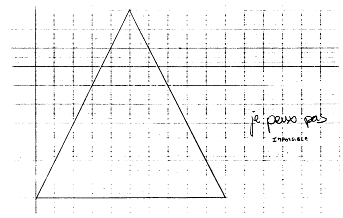
<u>*Troisième "famille"*</u> : Réponses incorrectes ou absence de réponse (figures 18 à 20).



18



19



20

La figure 18 montre une inscription de triangle dans un carré. Dans la phrase de l'énoncé oral, le mot *carré* était prononcé en effet avant le mot *triangle*, il a peut-être été logique pour cette élève de commencer par tracer le carré puis d'y inscrire un triangle. Elle n'aurait retenu que les mots qui lui semblaient importants: *inscrire*, *carré* et *triangle*, et elle aurait donc construit une figure utilisant les trois mots. La figure 19 présente un quadrilatère qui n'est manifestement pas un carré, et qui a été dessiné à main levée, comme pour se débarrasser. Enfin la dernière image montre le cas d'une élève qui a écrit qu'elle ne peut pas réaliser ce qu'on lui demande ("*je peux pas*" ; "*impossible*"), pressentant une construction irréalisable : en mathématiques, il arrive qu'on ait à faire des travaux qui s'avèrent infaisables après réflexion, et cela ne perturbe pas les élèves de proposer ce type de réponse.

Lors de la séance suivante, après avoir rendu leur production aux élèves, j'ai engagé un débat sur la construction, sa faisabilité, et les valeurs respectives des dessins qu'elles avaient proposés, qui a bien mis en évidence les difficultés constatées lors de l'observation des tracés.

Une élève l'exprime en disant: "On ne peut pas mettre les quatre sommets du carré car le triangle n'a que trois côtés." et une autre enchaîne en ajoutant fort justement : "Donc il faut deux sommets sur un même côté du triangle parce que pour inscrire comme il faut, les coins du carré doivent toucher les bords du triangle." Cette dernière affirmation a dû être assez longuement discutée car elle ne faisait pas a priori l'unanimité, les élèves ayant à cœur de soutenir leur propre construction. Ce n'est qu'à l'issue de ces échanges qu'elles n'ont pas validé les constructions 12 à 17.

Construire un carré dans un triangle **préalablement** tracé : là semble être la plus grande difficulté. Deux élèves ont alors avoué avoir construit d'abord le carré, puis le triangle "autour", la première ayant agi en toute bonne foi, alors que la deuxième a déclaré l'avoir fait avec la sensation d'avoir triché, car elle avait perçu qu'elle ne respectait pas l'ordre préconisé par l'énoncé.

Deux autres élèves, en fin de discussion, et qui n'avaient pas pris part au débat qui s'était engagé, se sont déclarées étonnées que leurs camarades aient ressenti des difficultés devant la réalisation de cet exercice, mais la suite a montré que toutes deux, sans se concerter (elles n'étaient pas voisines), avaient tracé un triangle rectangle (figures 1 et 3), ce qui rend effectivement la construction plus évidente. Nous pouvons d'ailleurs remarquer la forme particulière (isocèles, rectangles ou équilatéraux) de la plupart des triangles, le triangle scalène n'étant manifestement pas la norme chez nos élèves. Plusieurs idées peuvent expliquer ces faits : lors d'une construction, n'a-t-on pas généralement tendance à tracer un triangle presque isocèle, ou presque équilatéral, sans même y prendre garde ? ou bien, les élèves veulent-elles simplifier le problème, comme on vient de l'évoquer ? On peut aussi rappeler à leur décharge que la consigne de départ était de tracer le triangle de leur choix.

Afin de clore ce débat de vingt minutes environ, j'ai demandé aux élèves de proposer une technique, une recette de construction pour ce problème ; il est apparu comme une évidence pour elles que seule une succession d'essais peut permettre d'arriver à une solution "satisfaisante". Entendons par satisfaisante celle qui donne de bons résultats, vérifiables par des mesures (une élève a ainsi pu dire : "j'ai un vrai carré avec 4 côtés égaux"). Mais toutes furent d'accord pour reconnaître qu'une méthode par approximations successives n'était pas acceptable pour l'esprit, habituées qu'elles sont depuis le collège à devoir justifier leur travail en mathématiques. Résultat mitigé donc : bonne figure si on s'applique, mais pas de preuve de l'exactitude du tracé.

J'ai alors suggéré que j'avais en ma possession deux méthodes, connues depuis très longtemps, pour arriver "du premier coup" à tracer la "bonne" figure, celle qui satisferait aux conditions de l'énoncé ; la première est une méthode purement géométrique, la seconde s'appuie sur l'algèbre.

Cette première partie a été riche en informations sur le mode de fonctionnement des élèves, mais a également "mis le moteur en marche" : en effet, après la discussion sur la difficulté de la construction, les élèves étaient concernées par ce problème et le simple fait de leur proposer une solution (et même deux) a entraîné chez elles une volonté de poursuivre.

Premier intermède : retour vers … l'énoncé.

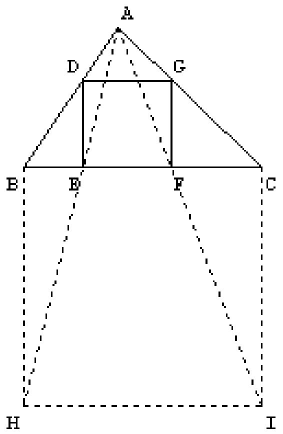
Avant de continuer la description du travail réalisé, tournons-nous vers le sujet lui-même, et vers son traitement mathématique.

L'inscription de figures est un sujet régulièrement rencontré par celui qui parcourt les ouvrages de mathématiques à travers les siècles. Pour l'inscription particulière d'un carré dans un triangle qui concerne notre propos, nous pouvons citer Chuquet, Piero della Francesca, Fibonacci ou Luca Pacioli, pour ne pas aller au-delà du XVIème siècle. La plupart ont étudié un triangle particulier, isocèle ou équilatéral.

Si nous observons par exemple *La Géométrie* du premier cité, Nicolas Chuquet, écrite en 1484 ([Chu1484]), nous avons deux traitements différents du problème, mais dans les deux cas avec un triangle équilatéral. La première méthode qu'il présente consiste à calculer le côté du triangle équilatéral connaissant le côté du carré 4 (ce qui lui donne le résultat suivant, en modernisant la transcription, $\sqrt{37\frac{1}{3}+\sqrt{1365\frac{1}{3}}}$) ; la deuxième méthode permet de calculer le côté du carré inscrit dans un triangle équilatéral de côté 8 (on obtient pour le côté du carré $\sqrt{768}-24$).

Pour mieux mettre en perspective ce qui a été réalisé avec mes élèves, et pour ne pas multiplier les exemples rencontrés dans l'histoire, on peut extraire deux traitements particuliers du problème.

Le premier est issu d'un ouvrage de 1901 de Monsieur Dauzat, inspecteur d'Académie ([Dau1901]), qui a été écrit à destination des professeurs de mathématiques. Voici ce qu'il en dit :



Inscrire un carré dans un triangle donné.

Fig. 44

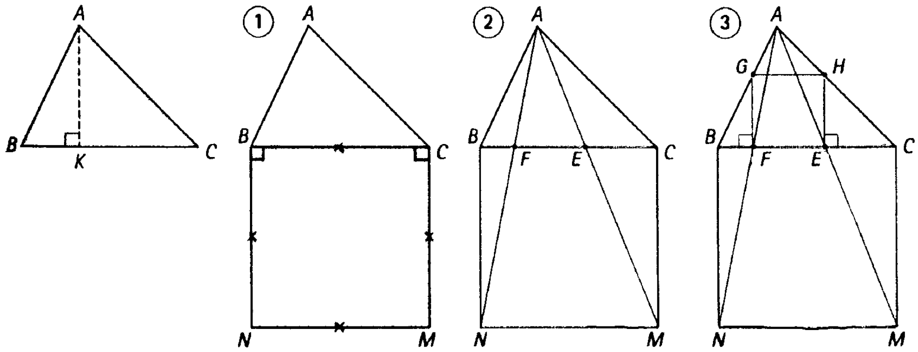
Soit ABC (fig.44) le triangle donné et DEFG le carré à inscrire. Considérons que les deux droites AB et AC issues du point A passent par les sommets D et G du carré à inscrire, et menons par le même point A les droites AE et AF qui passent par les deux autres sommets E et F du carré. En prenant alors le point A comme centre de similitude directe et la droite BC comme homologue de DG, si l'on mène par les points B et C des parallèles aux droites DE et GH jusqu'à leurs rencontres en H et I avec les droites AE et AF, en joignant H et I par une droite, on forme une figure BHIC semblable au carré inscrit, car cette figure est homothétique du carré DEFG.

On peut d'ailleurs, sans faire appel à la théorie des figures homothétiques, démontrer très facilement que le quadrilatère BHIC est un carré. Le problème se résout donc ainsi : construire, sur BC pris pour côté, un carré BHIC ; joindre par des droites les sommets H et I de ce carré au sommet A du triangle ; mener par les points de rencontre E et F de ces droites avec BC, des parallèles ED et FG à la direction HB ; joindre enfin les deux points D et G.

M. Dauzat suppose le problème résolu et l'analyse ; le petit carré inscrit DEFG étant tracé, on va démontrer que le grand quadrilatère BHIC est lui aussi un carré. Le dernier paragraphe donne pour terminer la méthode générale de construction.

Un manuel récent de seconde générale de lycée propose un traitement différent lors d'un exercice. Le chapitre contenant cet exercice est consacré à l'homothétie, et l'énoncé privilégie bien entendu son utilisation. L'homothétie utilisée pour la démonstration n'est actuellement (en 2002) plus au programme de cette classe, mais le mode de raisonnement en jeu est significatif d'une évolution par rapport à ce qu'on pouvait proposer en 1901 ; il ne s'agit plus ici de démarrer du problème résolu, mais de suivre pas à pas la construction en justifiant chaque étape nécessaire pour atteindre l'objectif final :

Comprendre une construction.



Soit un triangle ABC. On désire construire un carré EFGH dont le côté [EF] est inclus dans le segment [BC], et les sommets G et H sont respectivement des points de [AB) et de [AC].

1° Reproduire la construction ci-dessous en trois étapes, avec un triangle ABC tel que BC = 6cm et de hauteur AK = 4 cm.

a) Justifier que h(M) = E et h(N) = F.

b) Quelle est l'image de la droite (MC) par h ? de la droite (AC) ? En déduire l'image du point C par l'homothétie h.

c) Déterminer l'image de B par h.

d) Démontrer que le quadrilatère EFGH est un carré.

2° Rédiger chaque étape de cette construction (sans justifier).

Quel semble être le rapport de l'homothétie qui transforme le carré BCMN en GHEF ?

3° Le point A se projette orthogonalement en K sur [BC] et en K' sur [NM].

Soit h l'homothétie de centre A qui transforme K' en K.

([Déc1998])

(Chapitre 16 : Homothéties, (page 349 : travaux pratiques, 3, module)

Il apparaîtra dans la suite de cet exposé que les pratiques utilisées avec mes élèves de BEP se distinguent nettement à la fois des propositions méthodologiques du livre à destination des professeurs de Monsieur Dauzat, et des questions du manuel de seconde générale. Les élèves de BEP se voient en effet le plus souvent proposer une méthode expérimentale, qui privilégie le visuel et les constructions à tous les niveaux, et même lors de la réflexion et de la justification, comme nous allons le voir en poursuivant notre description.

Deuxième étape : la résolution "géométrique".

Il s'agissait ici de faire connaître aux élèves un mode de construction simple à mettre en œuvre, mais aussi de les aider à valider leur travail à l'aide de leurs connaissances mathématiques.

Le texte qui leur a été présenté est issu de la Géométrie de Samuel Marolois ([Mar1616]). Né vers 1572 et mort avant 1627, celui-ci vécut dans les Pays-Bas, a enseigné les mathématiques et a exercé plusieurs fonctions techniques. Il a écrit en particulier une Géométrie, que nous avons évoquée, et un ouvrage sur les fortifications[2].

[2] Le groupe "Mathématiques en Bourgogne" issu de l'IREM de Dijon étudie les œuvres de Marolois depuis quelques années, et a déjà publié deux brochures consacrées à sa Géométrie.

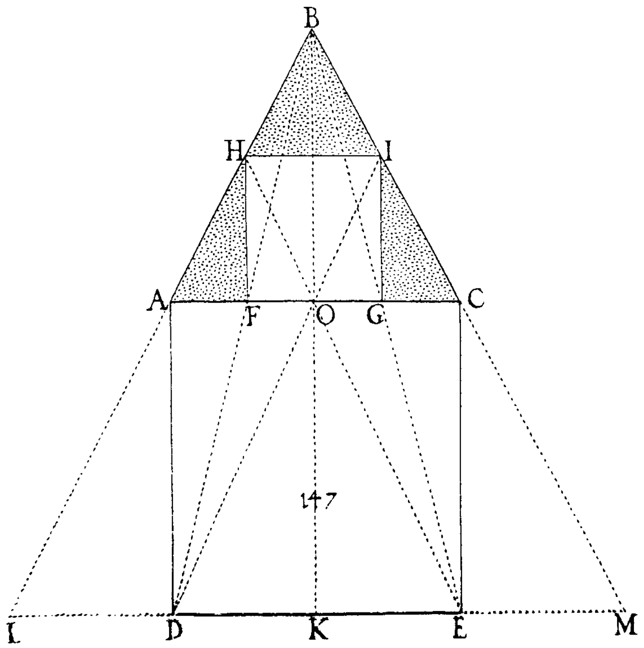
Nous donnerons tout d'abord l'intégralité du texte concernant notre sujet, puis nous verrons que les élèves ne l'ont pas étudié en totalité.

Prop. 48.

Dans un triangle inscrire un quaré.

Construction.

147.



Soit le triangle ABC. auquel on veult inscrire un quaré, soit de la base AC. faict le quare ACDE. puis soyent menees le lignes BE. & BD. qui couperont le triangle en la base AC. aux points FG. je di que FG. est le coste du quaré pour inscrire au triangle susdit, qu'il soit ainsi il aparoistra ayant prolongé les costez AB. BC. jusqu'à ce qu'ils rencontrent la base du quaré DL. aux points L, & M, car il est evident que EK. a proportion contre KB. cõme G, O. a OB. par la 4. du 6. d'Eucl. Mais EK. est la moitie du coste du quare inscript au triangle BLM. le coste GO. sera donc aussi le coste de la moitie du quare inscript au triangle A, B, C. car les dicts triangles sont proportionaux, ce qui estoit requis de faire.

La propriété évoquée, *la 4. du 6. d'Eucl.*, est la quatrième proposition du sixième livre des Éléments d'Euclide. Elle dit que dans les triangles équiangles, les côtés autour des angles égaux sont proportionnels. C'est un théorème plus général que notre actuel théorème de Thalès qui ne concerne que des triangles à côtés parallèles, et pas la totalité des triangles semblables.

Les élèves de BEP n'ont pas étudié cette proposition 4 du sixième livre d'Euclide mais elles connaissent le théorème de Thalès et il s'agissait donc de faire fonctionner une justification utilisant ce théorème.

Mon choix a donc été de leur fournir la figure accompagnée du texte, mais uniquement jusqu'à "*au triangle susdit*", et de leur demander dans un premier temps de réaliser elles-mêmes la figure comme Marolois l'indique. Les élèves ont travaillé consciencieusement, mais deux critiques de leur part doivent être relevées : le fait que Marolois nomme le quadrilatère ACDE au lieu de ACED, ce qui constitue pour elles une erreur manifeste, et, faute aussi importante à leurs yeux, que des points non utilisés (O, I, M) apparaissent, ce que j'ai pu faire accepter en disant que je n'avais pas fourni le texte complet et qu'elles constateront, lors de la justification qu'elles auront à faire, que ces points pourront intervenir.

Il est nécessaire également de signaler au lecteur que si les élèves n'ont pas eu de réaction notable devant la formulation et l'orthographe du texte c'est parce qu'elles avaient déjà eu l'occasion de travailler sur un énoncé de Marolois. Mais il est évident que l'attitude lors de la première rencontre est un mélange d'amusement et d'étonnement : des mathématiciens qui ne savaient pas s'exprimer et écrire correctement ! Le fait qu'une langue évolue, même sur une courte période (moins de quatre siècles entre Marolois et nous) est loin d'aller de soi, et il est nécessaire lors de ce premier contact avec un texte ancien, de prendre un moment pour montrer des exemples d'évolution de mots usuels.

Nous sommes ensuite passés à la validation de la méthode utilisée, en procédant par paliers successifs. Nous devons prouver que FGIH est un carré. Or que savons-nous de ce quadrilatère ? Une discussion collective a permis de mettre en évidence le fait que FGIH possède deux angles consécutifs droits. Que manque-t-il donc pour que FGIH soit un carré ? Plusieurs opinions s'affrontent, et nous nous sommes mis d'accord sur le procédé à utiliser pour accepter ou rejeter une affirmation : c'est de construire ce qui a été proposé en essayant de le mettre en défaut. Les solutions avancées ont été successivement : rajouter un angle droit (rejeté car on peut obtenir un rectangle), rajouter deux angles droits (rejeté car on peut encore obtenir un rectangle), avoir quatre côtés égaux (accepté car on aura toujours un carré, c'est d'ailleurs sa définition).

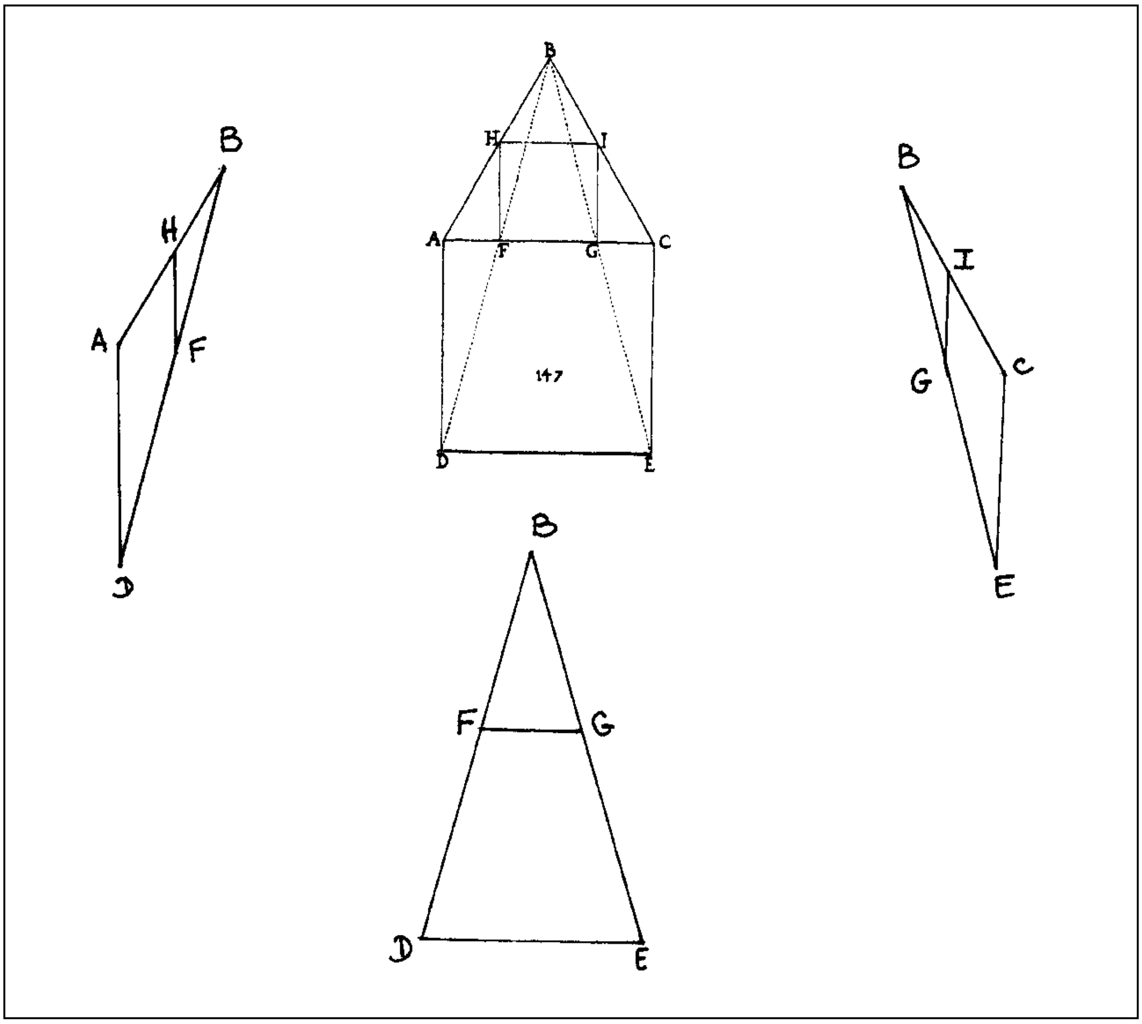
Mon intervention a alors été nécessaire pour suggérer que les quatre côtés égaux n'étaient peut-être pas indispensables. Avec deux côtés seulement on a vu que l'on pouvait obtenir un rectangle, donc ce n'était pas suffisant, mais avec trois côtés égaux, les conditions semblent toujours réunies pour le carré. Il a suffi de montrer que si HF = FG = GI alors (HI) sera parallèle à (FG), et les angles seront tous droits, la figure sera bien le carré souhaité.

Les angles droits sont donnés par l'énoncé, notre travail va donc consister à rechercher l'égalité de trois des côtés de FGIH. Si Marolois nous demande de tracer d'abord le carré ACED, nous devons l'utiliser. C'est à ce moment qu'une élève a vu une situation de Thalès dans la partie centrale de la figure (triangle BDE).

Je me suis appuyé sur cette découverte pour leur demander de trouver deux autres triangles avec des situations analogues et de donner les égalités de rapports obtenus.

La figure ci-dessous, "éclatée" en sous-figures, a permis aux élèves éprouvant le plus de difficultés d'arriver au résultat qui a été formulé de différentes façons mais que nous avons fini par écrire :

$$\frac{AD}{HF}=\frac{BA}{BH}=\frac{BD}{BF}=\frac{CF}{IG}=\frac{BC}{BI}=\frac{BE}{BG}=\frac{DE}{FG}$$



Les premier, quatrième et septième rapports sont égaux et possèdent des dénominateurs égaux (AD = CE = DE comme côtés du carré ACED), leurs numérateurs HF, IG et FG sont donc égaux et on obtient bien le carré FGIH.

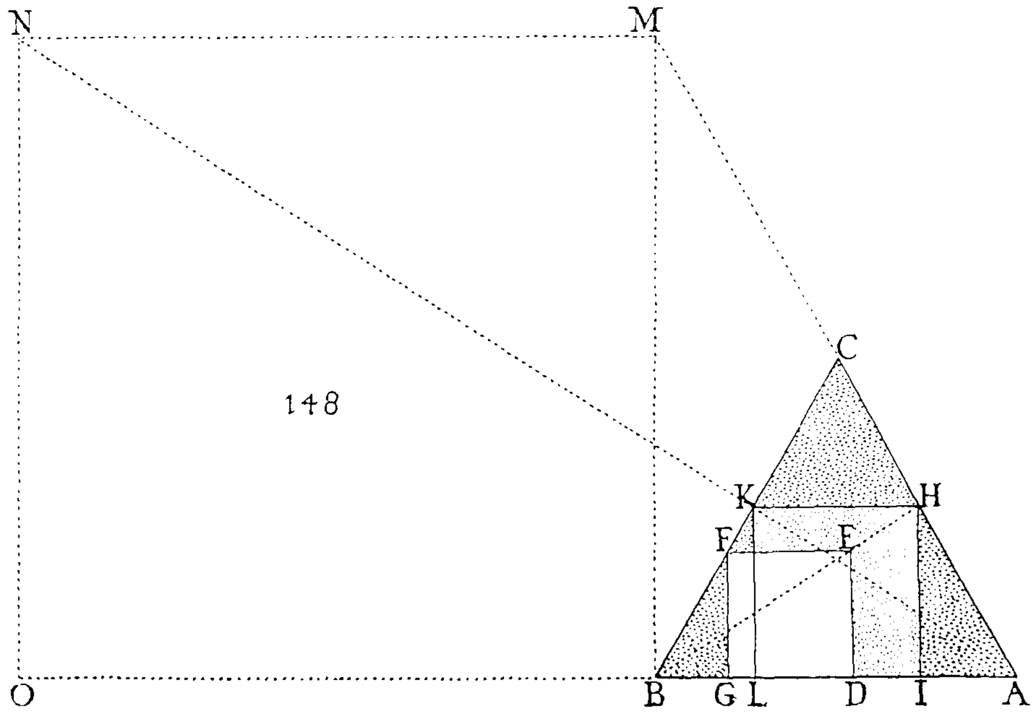
Pour terminer cette partie qui aura duré environ une heure et pour revenir sur une idée évoquée plus haut, j'ai signalé aux élèves que le triangle dessiné dans l'ouvrage de Marolois est équilatéral et leur ai demandé si la méthode reste valable pour tout triangle. Des constructions ont alors été réalisées, qui ont bien mis en évidence la généralité de cette proposition.

Deuxième intermède : Marolois propose d'inscrire …autrement.

La méthode précédente, si elle est simple et rigoureuse, n'est pas la seule présentée par Marolois. Comme à de nombreuses reprises dans son ouvrage pour d'autres propriétés, elle est suivie d'une seconde solution, pour laquelle l'auteur ne récrit pas la proposition, qui est donc toujours la proposition 48, mais il note simplement en début de cette nouvelle méthode, "*Autrement*", comme nous pouvons le lire ci-dessous :

Autrement
148.

Soit eslevé la perpendiculaire G, F. a vostre discretiõ & en soit formé le quaré G, F. E, D. puis soit tiree E. H passante par E. lors du point H. soit menee la perpendiculaire H, I. qui est le costé du quaré, ou ayant prolongé le coste AC. & du point B eslevée la perpendiculaire B, M. jusqu'a ce qu'elle rencontre ladite ligne prolongee A, C. en M. & sur icelle perpendiculaire soit faict le quare B, M. N, O. puis du point N. soit faicte la ligne N, A. & ou qu'icelle coupe le coste C, B. soit faicte la perpendiculaire KL. sur la base A, B. qui sera le coste du quare requis.



Cette démarche est intéressante et mériterait également d'être étudiée en classe, même si cela n'a pas été le cas ici. Elle propose en réalité en un seul paragraphe deux techniques indépendantes. La première, très brève, permet d'obtenir le côté HI du carré ; la deuxième (à partir de : "*ou ayant prolongé...*"), plus longue, demande de tracer un carré extérieur n'ayant avec le triangle que le point B en commun. La proposition de Marolois d'élever la perpendiculaire GF " *a vostre discretiõ*", c'est-à-dire à l'endroit de votre choix, ne peut qu'être un motif d'intérêt supplémentaire pour les élèves, qui souhaiteront vérifier le bon fonctionnement de la méthode dans plusieurs cas sur la même figure. Certaines se contenteront de faire une ou deux constructions, mais la plupart montrent une réelle curiosité et désirent comprendre pourquoi "ça marche".

Troisième étape : la résolution "algébrique".

Ayant épuisé les ressources du procédé géométrique, j'ai présenté aux élèves un texte contenant une approche réellement différente. Écrit par Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi (780-850), astronome et mathématicien ayant vécu à Bagdad, il est extrait d'un ouvrage resté célèbre (*al-Kitab al-Mukhtasar fi hisab al jabr wal l-muqabala*, ou abrégé du calcul par les procédés de la restauration et de la comparaison) car un mot du titre, al jabr, a donné le substantif "algèbre". Dans le même ordre d'idée, on peut évoquer "algorithme", qui dérive directement du nom de notre auteur.

Le problème présenté par al-Khwarizmi apparaît comme un problème géométrique, mais les élèves s'aperçoivent vite que son mode de résolution ne l'est pas. Les termes imagés ont été discutés avec les élèves avant de chercher à comprendre la technique mise en œuvre : on parle du "ventre" de la terre, et de ses "flancs". Mais deux mots ont nécessité une explication, "*chose*" et "*māl*" : la *chose* dont il est question est ce qu'on appelle aujourd'hui l'inconnue et qu'on représente souvent dans un calcul par la lettre x. Le *māl* (signifiant le bien, la fortune, d'où la source d'amusement pour la classe, *le māl c'est le bien*) correspond au carré de l'inconnue x, autrement dit x^2. Le texte original est présenté ci-contre (des élèves d'origine maghrébine se sont amusées à retrouver des mots qu'elles savaient lire), et nous le faisons suivre par la traduction[3] :

11.4. <Problème d'arpentage>

Si on dit : une terre triangulaire, ses deux côtés <ont> dix coudées, dix coudées, et la base douze coudées, et dans son ventre une terre carrée. Quel est le côté du carré ?

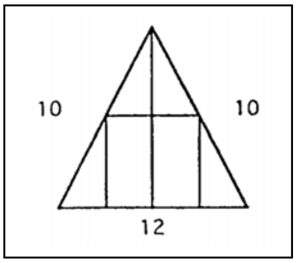
La méthode pour cela consiste à connaître la hauteur de la <terre> triangulaire et c'est en multipliant la moitié de la base - et c'est six -, par lui-même ; il vient trente-six. Retranche-les de l'un des deux côtés courts multiplié par lui-même - et c'est cent -. Il reste soixante-quatre. Prends sa racine, huit, et c'est la hauteur. Son aire est quarante-huit coudées et c'est ta multiplication de la hauteur par la moitié de la base, qui est six.

Nous considérons un des côtés de la <terre> carrée <égal à> une chose et nous la multiplions par elle-même ; il vient un māl. Nous le conservons. Puis, nous constatons qu'il nous reste deux triangles sur les deux flancs de la <terre> carrée et un triangle au-dessus d'elle.

Quant aux deux triangles qui sont sur les deux flancs, ils sont égaux et leurs hauteurs sont les mêmes et elles sont sur un angle droit. Leur aire est que tu multiplies une chose par six moins un demi d'une chose, il vient six choses moins la

[3] Cette traduction nous a été fournie par Ahmed Djebbar, professeur à l'Université de Lille, que nous remercions, et qui est par ailleurs auteur de "Une histoire de la science arabe" paru en 2001 aux Éditions du Seuil (collection Points-Sciences).

moitié d'un māl. Et c'est l'aire des deux triangles ensemble qui sont sur les deux flancs du carré.
Quant à l'aire du triangle supérieur, c'est en multipliant huit moins une chose, et c'est la hauteur, par la moitié d'une chose ; il vient quatre choses moins la moitié d'un māl.
<Tout> ceci est l'aire du carré et l'aire des trois triangles, et c'est dix choses, <qui> égalent quarante-huit, et c'est l'aire du grand triangle.
De cela, la chose est quatre coudées et quatre cinquièmes de coudée, et c'est chacun des côtés de la <terre> carrée.
Et voici sa figure :



La lecture de ce document a été à la fois source d'intérêt et de difficultés pour les élèves. L'origine de l'auteur et le vocabulaire exotique ont provoqué de la curiosité, mais en même temps cette description inhabituelle a vite entraîné une demande d'aide. Je leur ai proposé de détailler ce qui est effectué dans chaque phrase prise séparément. Le travail commun a permis d'obtenir le découpage suivant :
Première phrase : c'est l'énoncé du problème contenant la description de la figure. L'élément recherché est le côté du carré.
Deuxième phrase : elle contient deux parties, la première permet de calculer la hauteur du triangle à l'aide de la propriété de Pythagore, la deuxième de calculer son aire en appliquant la formule connue par les élèves.
Troisième phrase : la plus délicate car les deux termes "*chose*" et " *māl*" y apparaissent, et l'auteur demande de découper le triangle en quatre polygones, le carré, un triangle au-dessus, et un triangle de chaque côté du carré. J'ai alors suggéré de choisir l'écriture algébrique que nous connaissons, en prenant x pour la *chose* ; l'aire du carré est le *māl*, x^2, et de l'utiliser pour retranscrire la suite des calculs.

Quatrième phrase : les aires des deux triangles latéraux sont égales chacune à $\frac{x(6-\frac{x}{2})}{2}$, ce qui donne $x(6-\frac{x}{2})=6x-\frac{x^2}{2}$ pour l'ensemble des deux triangles.

Cinquième phrase : l'aire du triangle supérieur est égale à $(8-x)\frac{x}{2}=4x-\frac{x^2}{2}$.

Sixième phrase : on obtient : $x^2 + 6x-\frac{x^2}{2} + 4x-\frac{x^2}{2} = 10x = 48 =$ aire du grand triangle.

Septième et dernière phrase : le côté cherché mesure 4 coudées et $\frac{4}{5}$ de coudée, ce qu'on écrit aujourd'hui 4,8 coudées.

Il ne s'agissait plus alors que de vérifier les résultats donnés par al-Khwarizmi, ce qui n'a pas posé de problème particulier, si ce n'est l'écriture finale du résultat sous une forme fractionnaire. Le fait qu'au X^ème^ siècle, l'écriture décimale 4,8 n'existait pas fut une vraie surprise pour la classe, mais leur fit bien entrevoir l'existence d'une réelle modification des connaissances mathématiques au cours du temps. L'écriture des nombres a beaucoup évolué à travers les siècles avant de se stabiliser au cours du XVII$^{\text{ème}}$ siècle dans la forme décimale qu'on connaît aujourd'hui, mais leur raconter l'histoire de ces écritures n'aurait certainement pas eu la même efficacité sur ces élèves : en effet la lecture de ce nombre 4 et $\frac{4}{5}$ les a installées dans une situation de demandeuses d'information, et non de simples réceptionnaires de connaissances transmises.

Deux interventions ont également eu lieu pendant cette phase de travail. Lors de la lecture de l'énoncé, une élève attentive et "bien dressée" a formulé la remarque que l'auteur avait donné une aire de 48 coudées au lieu d'écrire 48 coudées carrées. La deuxième intervention a concerné la forme isocèle du triangle utilisé. Pourrait-on utiliser la technique proposée avec n'importe quel triangle comme on l'a montré avec la technique géométrique ? La classe a alors rapidement constaté que la méthode présentée fonctionnait bien pour des raisons de symétrie, mais qu'elle ne s'appliquait plus dans le cas général d'un triangle quelconque.

Je suis ensuite revenu sur la question initiale de l'inscription d'un carré dans un triangle. Comment faut-il utiliser la méthode d'al-Khwarizmi qui nous donne seulement la mesure du côté du carré, mais ne nous fournit pas la méthode de construction comme Marolois ? Trois solutions ont été proposées :
Une élève propose des "essais successifs", en déplaçant la règle parallèlement à la hauteur, jusqu'à ce qu'on obtienne "juste" 4,8 cm (plutôt que continuer à parler des coudées, les élèves ont spontanément utilisé les centimètres).
Une deuxième améliore la première en disant qu'il suffisait de mesurer 4,8 cm sur la hauteur, puis 2,4 cm de chaque côté du pied de la hauteur sur la base, et on complète facilement le carré.
La troisième solution a été de découper un carré de papier de 4,8 cm de côté et de le placer dans le triangle jusqu'à ce qu'il soit bien inscrit.

Bien que la dernière méthode ait été reconnue plus longue à mettre en œuvre, elle a eu la préférence de la majorité, peut-être parce qu'elles se reconnaissent dans un exercice comportant un tracé avec découpage comme lors de leur travail en atelier (fabrication de gabarits).

Bilan et conclusion.

Environ trois heures ont été consacrées à ces travaux qui ont permis aux élèves de rencontrer des contenus mathématiques variés inclus dans le programme de mathématiques des classes de BEP. Nous pouvons citer les propriétés des figures géométriques simples, le théorème de Thalès (reconnaître une "situation de Thalès", utiliser le théorème lui-même), l'égalité des rapports, les équations (mise en équation et résolution), le calcul littéral, l'utilisation des formules des aires de figures simples, l'inscription de figures. Mais nous devons insister également sur les échanges fréquents pour valider, accepter, démontrer ou rejeter une proposition.

Une discussion collective a été nécessaire plusieurs fois, entre des élèves désireuses de défendre leur conception, mais ne refusant pas d'écouter les arguments de leurs camarades, et de les accepter si leur méthode leur semblait meilleure. C'est d'ailleurs à cette occasion qu'on peut relever l'importance qu'il y a de traiter un problème qui a pris du sens par des tracés préliminaires et une mise en commun, et qui a vu sa solution apparaître sous deux formes très différentes, relevant toutes deux d'une période passée, mais pas dépassée. En effet, les contenus et méthodes abordés restent bien d'actualité.

Une phrase extraite d'un article d'Evelyne Barbin, présidente de la commission inter-IREM "Épistémologie et Histoire des Mathématiques", et datant de 1995, me semble bien correspondre à l'intérêt de la mise en place d'une telle situation :

"Le professeur de mathématiques doit enseigner les mathématiques comme un processus historique et un objet culturel. Mais il ne s'agit pas ici de calquer l'enseignement sur l'histoire, mais de saisir dans l'histoire les problèmes qui donnent signification aux savoirs."

([Bar1995])

En effet, la syntaxe et l'écriture, originales, n'ajoutent pas une difficulté supplémentaire dans les cas évoqués, mais provoquent bien chez les élèves une volonté de compréhension des exercices décrits intégrés dans un "processus historique" ; le dépaysement, les interrogations suscitées par les textes permettent une réflexion sur un plan culturel.

Du point de vue des connaissances mathématiques, la présentation de deux méthodes très éloignées pour résoudre un même problème agit sur les représentations des élèves, et leur permet de donner du sens aux méthodes et aux savoirs qu'elles ont pu étudier par ailleurs, comme le préconisait la phrase ci-dessus.

Nous ne voudrions pas terminer cet article sans évoquer deux faits qui nous semblent importants. Lors de ce travail aucune élève n'a posé la fameuse question du "à quoi ça sert ?", mais chacun des lecteurs comprend bien que l'inscription d'un carré dans un triangle n'a pas une grande utilité pour une couturière, et l'intérêt rencontré lors de la résolution du problème aura été le moteur de la classe.

Enfin j'ai souhaité rechercher chez les élèves si elles avaient le sentiment qu'une méthode était "meilleure" que l'autre. Et au lieu d'obtenir un pourcentage comparatif, j'ai constaté que derrière ce mot de "meilleure" se cachait des significations très diverses (on retrouve les ambiguïtés de vocabulaire évoquées au début de l'article pour le mot *inscrire*). Pour l'une c'était la méthode la plus exacte, pour l'autre la plus rapide, ou encore la plus pratique, ou enfin celle qui plaît le plus.

Mais plutôt qu'une dissonance, n'est-il pas juste de voir dans ces avis très divers, une implication des élèves, source de satisfaction chez le professeur, qui perçoit tout ce qu'une telle attitude peut avoir de positif en terme de formation, sans oublier l'aspect plaisir.

Bibliographie

[Chu1979] : **Nicolas Chuquet**, *La Géométrie, première géométrie algébrique en langue française*, 1484, introduction, texte et notes par Hervé l'Huillier, Vrin, Paris, 1979.

[Dau1901] : **M. Dauzat**, *Éléments de méthodologie mathématique*, Librairie Nony & Cie, Paris, 1901.

[Déc1998] : *Maths seconde*, collection Déclic, Hachette éducation, Paris, 1998.

[Mar1616] : **Samuel Marolois**, *Geometrie contenant la theorie et practicque d'icelle nécessaire à la fortification*, Hagae-Comitis, ex Officina Henrici Hondii, Arnhemi, 1616.

[Bar1995] : **Evelyne Barbin**, *Bulletin de l'APMEP* n° 397, février 1995.