La découverte des fonctions elliptiques

Emmanuel MOREAU, Lycée Louis Davier à JOIGNY

1995, Andrew Wiles

Les retentissants résultats d'Andrew Wiles ont cette année là porté les courbes elliptiques sur le devant de la scène scientifique, ces curieux objets étant jusque là considérés uniquement par quelques spécialistes. Mais si ces courbes aux propriétés étonnantes n'ont plus grand-chose de commun avec les ellipses d'Apollonius, le chemin qui mène aux intégrales puis aux fonctions et aux courbes elliptiques nous fait parcourir un chapitre passionnant de l'histoire des mathématiques, où l'on aura l'occasion de suivre l'évolution d'un problème et les démarches, les réussites et les surprises rencontrées par les plus grands esprits.

Je laisse à de plus savants que moi les considérations actuelles sur le sujet, qui me dépassent. Je ne souhaite dans ce qui suit qu'évoquer les premières rencontres, les premières difficultés des mathématiciens se heurtant à des calculs impossibles d'intégrales, et les premières solutions…
Un article consacré à ce sujet ne peut qu'immanquablement conduire à dépasser parfois le niveau de l'enseignement secondaire, mais je crois qu'il est intéressant pour nous, professeurs, même si nous enseignons les intégrales à un niveau élémentaire, de connaître les problèmes auxquels ces notions ont parfois conduit et de pouvoir distinguer les intégrales que l'on peut calculer de celles que l'on ne peut pas.
Et puis les ellipses sont des objets qui nous sont trop familiers pour qu'on puisse ignorer la formidable aventure qu'elles ont suscitée.

J'ai adopté dans ce qui suit une démarche sensiblement chronologique, mais j'ai pris la liberté de moderniser les raisonnements et les notations des savants.

1655, Wallis, puis Newton

Au $XVII^{ème}$ siècle, les mathématiques sont encore largement inspirées des Anciens, et c'est dans ce contexte que Wallis, qui a 26 ans de plus que Newton, consacre un traité aux coniques. Depuis quelque temps pourtant, un souffle nouveau anime la science occidentale : les progrès effectués par Cavalieri, Roberval et Fermat en analyse vont permettre le développement du calcul utilisant les séries. C'est en contribuant à faire naître ces nouvelles théories que Wallis puis Newton parviendront à exprimer la longueur d'une ellipse.
Wallis commence à s'intéresser à ce problème en 1655.
En utilisant l'équation paramétrique usuelle de l'ellipse, la longueur est exprimée par :

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}\, dt \qquad \text{où} \qquad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

Ni Wallis ni Newton ne parviendront à exprimer cette intégrale à l'aide des fonctions usuelles. Newton parviendra par contre, poursuivant le travail de Wallis, à exprimer cette longueur à l'aide d'une série entière, contribuant ainsi d'une manière fondamentale au développement de ces nouveaux objets mathématiques. Ecrit en 1669, son travail sur les séries ne sera réellement édité qu'à partir de 1711.
Wallis avait introduit la notion d'exposants fractionnaires, qui était manipulée à l'époque avec quelques difficultés. Newton généralisera la notion de binôme aux exposants fractionnaires.

Si l'on écrit $\sqrt{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-u)^n$, pour $0 \le u < 1$, on obtient :

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^n e^{2n} \cos^{2n} t \, dt = 4a \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^n e^{2n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \, dt .$$

On rencontre ici les intégrales de… Wallis (définies par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$) qui se calculent aisément (aujourd'hui) par récurrence : à l'aide d'une intégration par partie on obtient

$$I_n = \frac{n}{n-1} I_{n-2} \text{ d'où : } \qquad I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)...1}{2n(2n-2)...2} \frac{\pi}{2} .$$

Si l'on remarque que pour $n > 1$ on a :

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)...((3-2n)/2)}{n(n-1)............2.1} = (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)(2n-5)...1}{2n(2n-2)...2} .$$

Ainsi, en remarquant que $(-1)^{n-1}(-1)^n = -1$, on obtient la superbe formule :

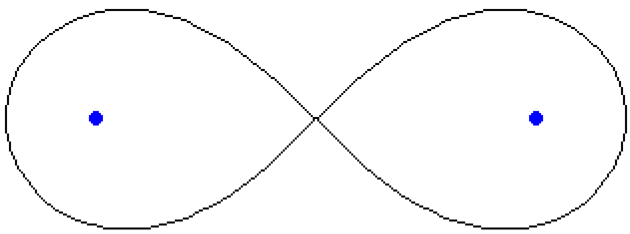
$$\boxed{L = 2\pi a \left(1 - \frac{1}{2.2} e^2 - \frac{3}{4.4.2.2} e^4 - \frac{5.3.3}{6.6.4.4.2.2} e^6 - \frac{7.5.5.3.3}{8.8.6.6.4.4.2.2} e^8 - .... \right)}$$

La permutation des symboles $\int$ et $\sum$ est ici garantie par le théorème de convergence dominée, mais ni Wallis ni Newton ne prenaient de grandes précautions.
On peut remarquer que si $e = 0$ on retrouve, comme il se doit, le périmètre d'un cercle.

L'expression est surprenante mais les calculs auxquels elle conduit sont peu pratiques. Le problème est posé d'obtenir une expression plus simple.

Cette même année 1655, dans son traité sur les coniques, Wallis introduit le symbole ∞ qui n'est pas sans évoquer la lemniscate de Bernoulli.

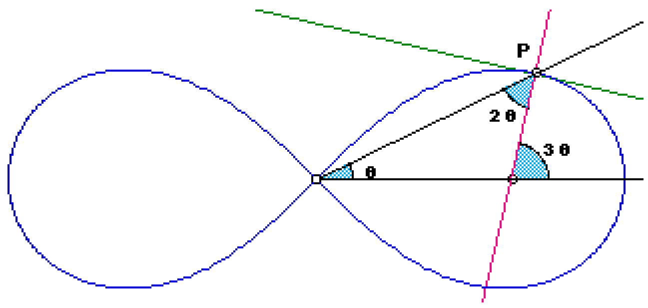
1694, Bernoulli



Jacob Bernoulli, qui fut l'un des premiers à comprendre l'extraordinaire efficacité du calcul infinitésimal, s'intéresse cette année là à la courbe définie de la manière suivante :

On considère deux points A et B que l'on nomme foyers, avec AB=2d
La lemniscate de Bernoulli est l'ensemble des points P vérifiant PA.PB=d²

L'équation cartésienne de cet ensemble est donc $((x-d)^2 + y^2)((x+d)^2 + y^2) = d^4$, mais il est plus commode d'utiliser l'équation polaire. Bernoulli fut en cela encore un précurseur, indépendamment de Newton.



Si l'on nomme A et B les foyers (B d'abscisse positive), O le milieu de [AB] et θ l'angle BÔP, la relation d'Al Kashi permet d'écrire

$$\mathrm{PB}^2 = d^2 + r^2 - 2dr\cos\theta \qquad \text{et} \qquad \mathrm{PA}^2 = d^2 + r^2 + 2dr\cos\theta$$

d'où : $$\mathrm{PA}^2.\mathrm{PB}^2 = d^4 \Leftrightarrow r^2 = 2d^2(2\cos^2\theta - 1) = 2d^2\cos(2\theta)$$

Une équation polaire de la lemniscate de Bernoulli est donc $r(\theta) = d\sqrt{2}\sqrt{\cos(2\theta)}$ pour $-\pi/4 \le \theta \le \pi/4$, l'autre arc de la lemniscate s'obtenant par symétrie.

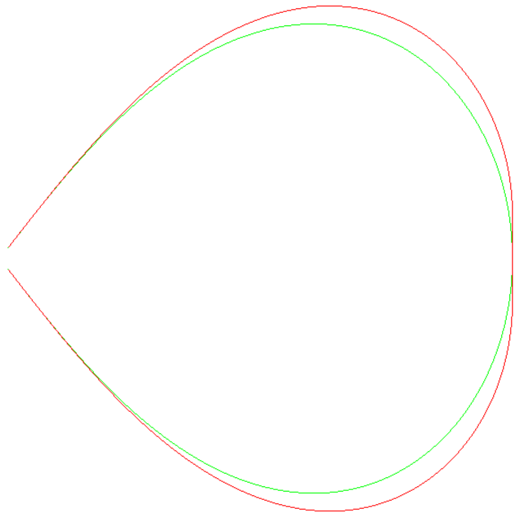
On simplifie cette équation en prenant $d = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient alors :

$$\boxed{r(\theta) = \sqrt{\cos(2\theta)}}$$

Le schéma ci-dessus indique des propriétés supplémentaires, relativement à l'angle polaire, dont nous ne parlerons pas.
Les ovales de Cassini, étudiés en 1680, sont une famille de courbes comprenant la lemniscate puisque ce sont les courbes définies par une relation du type : $PA.PB$ = constante. Il semble que Bernoulli n'en ait pas eu conscience.

Lemniscates et languettes élastiques

Il m'est arrivé de lire dans un ouvrage d'histoire des sciences que « Bernoulli découvrit cette courbe en cherchant la forme prise par un fin ruban élastique dont on joint les extrémités » et qu'il pensait avoir montré que la lemniscate est une solution.



Mais si l'on se penche sur un ouvrage moderne de physique théorique digne de foi comme le fameux Landau et Lifchitz, on constate que la solution proposée diffère légèrement de celle de Bernoulli, comme l'indique le graphique ci-contre, où la lemniscate est à l'extérieur.

Il semble plutôt que Bernoulli, évoquant son travail dans *Acta Eruditorum*, ait mentionné une courbe « en forme de 8, ou de nœud, ou d'arc de ruban ». Le mot « lemniscate » qu'il choisit pour nommer cette courbe, issu d'un terme grec signifiant « ruban », semble donc avoir été choisi simplement parce qu'il évoquait une forme commune[1].

[1] Je ne suis pas parvenu à obtenir des informations précises à ce sujet. Bernoulli s'est-il réellement intéressé à la forme prise par un ruban élastique ? Je serais très reconnaissant à la personne pouvant m'en dire plus à ce sujet.

La lemniscate de Bernoulli va être l'un des outils principaux dans la découverte des fonctions elliptiques.

1750, Fagnano[2]

Issu d'une famille aristocratique italienne, Fagnano pratique les mathématiques en amateur éclairé. Très éclairé si l'on en juge par ses résultats.
Considérant la lemniscate de Bernoulli, il parvient à partager un arc de cette courbe en n arcs à l'aide de la règle et du compas pour $n = 2\times 2^m, 3\times 2^m$ et 5×2^m.
Il parvient également à calculer l'aire définie par cette courbe.
Mais le calcul de la longueur pose problème :

En coordonnées polaires la longueur de la lemniscate se calcule par

$$L = 4\int_0^{\pi/4} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta = 4\int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos(2\theta) + \frac{\sin^2(2\theta)}{\cos(2\theta)}}\,d\theta = 4\int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}}.$$

En posant $t = \tan\theta$ cette intégrale s'écrit $L = 4\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

On peut également exprimer cette intégrale de la manière suivante :

$$L = 4\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1+t^2}} = 4\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta}} = 4\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}} = 4\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}.$$

On a utilisé successivement les changements de variables $t = \sin\theta$ puis $v = \pi/2 - \theta$.

Finalement : $L = \frac{4}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-(1/2)\sin^2\theta}}$.

Malgré plusieurs résultats remarquables, Fagnano butte sur le calcul de ces intégrales.

1751, Euler

Quelques mathématiciens attirent l'attention d'Euler sur l'ouvrage de Fagnano. Le maître reconnaît la qualité de l'ouvrage et parvient même à aller plus loin que son prédécesseur, mais n'obtient toujours pas de formule explicite pour l'intégrale.
Néanmoins, le problème est désormais clairement posé à la communauté des mathématiciens.

1784, Lagrange

Nous avons déjà rencontré deux problèmes conduisant à des intégrales qu'on ne parvient pas à exprimer à l'aide des fonctions élémentaires :

1. Le calcul de la longueur d'une ellipse

$$\mathrm{L} = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt = 4a\int_0^1 \sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}\,dx \qquad (x = \cos t)\ ;$$

2. La rectification de la lemniscate de Bernoulli $L = 4\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

[2] Fagnano a également laissé son nom au problème suivant : inscrire dans un triangle acutangle un triangle de périmètre minimal. Il prouvera que la solution est donnée par le triangle orthique.

3. On pourrait ajouter un problème fameux <u>: le calcul de la période des oscillations d'un pendule simple théorique.</u>

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_{\max}}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \text{où} \quad k = \sin\frac{\theta_{\max}}{2}$$

Pour établir cette dernière égalité on utilise d'abord $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$, puis on pose $\sin\varphi = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_{\max}/2)}$. En posant $x = \sin\varphi$ on peut obtenir cette autre expression :

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

En 1784 Lagrange, qui à l'époque est le plus grand mathématicien d'Europe (Euler et Gauss laissant un peu de place pour des raisons chronologiques), définit les intégrales elliptiques :

On appelle intégrale elliptique une intégrale de la forme $\int R(x,y)dx$ *où R est une fraction rationnelle en x et y et où* $y = \sqrt{P(x)}$ *où P est un polynôme de degré 3 ou 4 sans racine multiple.*

pour le premier exemple on peut écrire $$\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}} = \frac{\sqrt{(1-e^2x^2)(1-x^2)}}{1-x^2}$$

on a donc $R = \frac{y}{1-x^2}$ et $P(x) = (1-e^2x^2)(1-x^2)$.

<u>1793, Legendre</u> parvient à montrer que les intégrales elliptiques peuvent se ramener à l'une des 3 formes canoniques suivantes :

- <u>intégrale elliptique de première espèce</u>
$$F(u) = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \;;$$
- <u>intégrale elliptique de seconde espèce</u>
$$E(u) = \int_0^u \sqrt{1-k^2\sin^2 u}\, du = \int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\, dx.$$
- <u>intégrale elliptique de troisième espèce</u>
$$\Pi(u) = \int_0^u \frac{du}{(1+n\sin^2 u)\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = \int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

<u>1791, Gauss</u>

Deux ans avant ce résultat de Legendre, un adolescent de 14 ans réfléchit au calcul de la longueur de la lemniscate de Bernoulli.

En parallèle, il s'intéresse au problème suivant : on sait que si l'on prend 2 nombres positifs a et b et que l'on calcule les moyennes arithmétique et harmonique de ces 2 nombres, puis que l'on itère le procédé, on forme deux suites adjacentes qui convergent très rapidement vers $\sqrt{ab}$.
Gauss choisit 2 nombres positifs a et b et calcule les moyennes arithmétiques et géométriques successives. Il note une convergence extrêmement rapide vers un nombre $M(a,b)$ que l'on appellera moyenne arithmético-géométrique de a et b.
Détaillons les calculs qui peuvent donner lieu à un problème en classe de terminale :

On pose $\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases}$ et $\begin{cases} a_{n+1} = (a_n + b_n)/2 \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$

Il est facile de prouver que $a_n \geq b_n$ pour $n \geq 1$, que (a_n) est décroissante et que (b_n) est croissante, toutes deux à partir du rang 1.

On a d'autre part $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{a_n - b_n - 2\sqrt{a_n b_n}}{2} = \dfrac{\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2}{2}$.

Or le théorème des accroissements finis[3] permet d'établir l'inégalité suivante :

$$\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n} \leq \frac{1}{2\sqrt{b_n}}(a_n - b_n) \leq \frac{1}{2\sqrt{b_0}}(a_n - b_n)$$

D'où par transitivité :

$a_{n+1} - b_{n+1} \leq \dfrac{(a_n - b_n)^2}{8b_0}$, et on peut alors prouver par récurrence que : $a_n - b_n \leq 8b_0\left(\dfrac{a_0 - b_0}{8b_0}\right)^{2^n}$.

Prenons $a_0 = 1$ et $b_0 = \sqrt{2}$.

Si l'on veut connaître la limite, c'est-à-dire $M(1, \sqrt{2})$ avec une précision inférieure à 10^{-10}, on doit avoir : $8\left(\dfrac{\sqrt{2} - 1}{8}\right)^{2^n} \leq 10^{-10}$ d'où $2^n \geq \dfrac{\ln(10^{-10}/8)}{\ln((\sqrt{2}-1)/8)}$ d'où n = 4 seulement !

Avec n = 5 on obtient 40 décimales exactes[4], la convergence est foudroyante !

a_1 b_1	1.2071067811865475244008443621048490392850 1.189207115002721066717499970560475915293
a_2 b_2	1.198156948094634295559172166332662477289 1.198123521493120122606585571820152450692
a_3 b_3	1.198140234793877209082878869076407463990 1.198140234677307205798383788189800708732
a_4 b_4	1.198140234735592207440631328633104086361 1.198140234735592207439213655927543670093
a_5 b_5	1.198140234735592207439922492280323878227 1.198140234735592207439922492280323878227

[3] Pour éviter le recours à ce théorème qui n'est plus au programme, on peut poser $f_b(x) = \sqrt{x} - \sqrt{b}$ pour $x \geq b > 0$ puis faire démontrer aux élèves en question préliminaire que $f_b(x) \leq \dfrac{x - b}{2\sqrt{b}}$

[4] Si bien sûr on peut faire les calculs intermédiaires, qui comportent des racines, avec une précision suffisante. Ce problème disparaît dans le cas des itérés des moyennes arithmétiques et harmoniques où l'on ne manipule que des rationnels (si les termes initiaux sont rationnels) et où la convergence est de même type.

Une remarque encore concernant ce problème, intéressant à mener avec une classe de terminale : la majoration de l'amplitude que nous avons obtenue n'est utile que si $\dfrac{a_0 - b_0}{8b_0} < 1$

Néanmoins un autre calcul prouve que $a_{n+1} - b_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(a_n - b_n)$. La condition $\dfrac{a_p - b_p}{8b_p} < 1$ est donc toujours réalisée pour un p assez grand (pas très grand dans la pratique).

A 19 ans, alors que Gauss prouve à dix jours d'intervalle la constructibilité du polygone régulier à 17 côtés et la loi de réciprocité quadratique, il se décide à tenir un journal. Avant cette date nous sommes beaucoup moins bien renseignés sur son travail. Aussi nous ne savons pas comment il a deviné cette égalité exprimant la longueur de la lemniscate : $L \dfrac{2\pi}{M(1,\sqrt{2})}$.

Surprenante égalité[5] ! Mais qui n'exprime toujours pas le résultat à l'aide des fonctions usuelles. Nous en savons tout de même assez sur la suite des travaux de Gauss pour faire de lui le précurseur des fonctions elliptiques.

Concernant les équations polynomiales, Gauss note au paragraphe 359 de ses *Recherches arithmétiques :*

> *On sait que tous les travaux des grands géomètres ont échoué contre la résolution générale des équations qui passent le premier degré [...] et il est à peine douteux si ce problème ne renferme pas quelque chose d'impossible, plutôt qu'il ne surpasse les forces actuelles de l'analyse.*

Il me semble assez probable que Gauss devait porter un jugement semblable sur les intégrales elliptiques. Il écrit au paragraphe 335 :

> *Au reste, les principes de la théorie que nous entreprenons d'exposer s'étendent bien plus loin que nous ne le faisons voir ici; ils peuvent en effet s'appliquer non seulement aux fonctions circulaires, mais aussi avec autant de succès à beaucoup d'autres fonctions transcendantes, par exemple, à celles qui dépendent de l'intégrale* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ […] *mais comme nous préparons un ouvrage assez étendu sur les fonctions transcendantes…*

Cet ouvrage ne verra jamais le jour. Il écrit à ce propos en 1828 (Gauss n'était jamais pressé de publier ses résultats) :

> *Les démonstrations d'Abel sont si brillantes et limpides que je crois qu'il est inutile que je publie mes propres résultats.*

Examinons néanmoins le travail de Gauss. On sait que Jacobi et Abel ont été très influencés par les *Recherches* et la remarque citée plus haut n'est certainement pas passée inaperçue de leur part. Les grands géomètres que sont Euler, Lagrange et Legendre ayant buté sur le calcul des intégrales elliptiques, Gauss va choisir d'aborder le problème différemment.
Nous avons vu que le calcul de la longueur de la lemniscate de Bernoulli conduit à l'expression :

[5] Pour une démonstration de cette égalité :www.mathworld.wolfram/EllipticIntegral.html (relations (45) à (74))

$$L = 4\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} .$$

On est donc assez naturellement amené à considérer la fonction G définie par : $G(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

Si, par une analogie formelle, on remplace l'exposant 4 par un exposant 2 on obtient $\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Gauss va donc définir un sinus lemniscatique *sl(x)* par :

$$sl(x) = G^{-1}(x) \qquad \text{où} \qquad G(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} .$$

Comme de la même manière on a $\arccos x = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, il pose donc :

$$cl(x) = \tilde{G}^{-1}(x) \qquad \text{où} \qquad \tilde{G}(x) = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} .$$

Il est le premier à définir une fonction en utilisant la réciproque d'une fonction définie par une intégrale. Les fonctions elliptiques auront une définition semblable.

On observe que $\tilde{G}(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} - G(x)$.

Si l'on pose $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{\varpi}{2}$ on obtient $\tilde{G}(x) = \frac{\varpi}{2} - G(x)$.

D'où : $cl(\frac{\varpi}{2} - G(x)) = cl(\tilde{G}(x)) = \tilde{G}^{-1}(G(x)) = x$.

Si l'on pose *u=G(x),* on a : $x = G^{-1}(u) = sl(u)$. On obtient donc : $cl(\frac{\varpi}{2} - u) = sl(u)$.

Cette formule est analogue à celle de la trigonométrie classique : $\cos(\frac{\pi}{2} - u) = \sin u$.

Outre cette analogie, Gauss parviendra à établir pour l'addition et la multiplication des formules analogues à celle que l'on connaît pour les fonctions trigonométriques usuelles.
Il s'intéressera ensuite aux fonctions elliptiques mais, comme nous l'avons dit, son travail ne sera jamais publié.

La nouveauté dans la démarche de Gauss est qu'elle interrompt la recherche désespérée d'une formule explicite qui définirait les intégrales elliptiques, pour introduire une nouvelle classe de fonctions. La prescience des théorèmes d'impossibilité, ici pour le calcul des intégrales elliptiques, ailleurs pour la résolution des équations polynomiales ou pour la démonstration du 5ème postulat d'Euclide, est certainement un trait caractéristique du génie de Gauss.

1827, Abel et Jacobi

Abel et Jacobi sont parvenus en même temps et indépendamment à des résultats semblables.

A la manière de Gauss, Jacobi pose : $F(x) = \int_0^x \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$.

Puis il définit ensuite : $am(x) = F^{-1}(x)$ (*am* pour amplitude),
puis : $sn(x) = \sin(am(x))$ et $cn(x) = \cos(am(x))$.
Avec cette définition il est clair que $sn^2(x) + cn^2(x) = 1$.
Lorsqu'une ambiguïté est possible pour la valeur de *k* on note $F(x,k); sn(x,k)$...

On peut constater certaines analogies entre les définitions de Gauss et celles de Jacobi.
Nous avons vu dans la partie consacrée à Fagnano que :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-(1/\sqrt{2})^2 \sin^2\theta}} .$$

On montre de la même manière que :

$$\tilde{G}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\arccos x} \frac{d\theta}{\sqrt{1-(1/\sqrt{2})^2 \sin^2\theta}} .$$

On a ainsi : $\sqrt{2}\tilde{G}(\cos x) = F(x)$, où $F(x) = F(x, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

On en déduit que : $F^{-1}(x) = \arccos(\tilde{G}^{-1}(\frac{x}{\sqrt{2}}))$,

donc $cn(x, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \cos(F^{-1}(x)) = \cos(\arccos(\tilde{G}^{-1}(\frac{x}{\sqrt{2}}))) = \tilde{G}^{-1}(\frac{x}{\sqrt{2}}) = cl(\frac{x}{\sqrt{2}})$.

Par contre $sn(x, \frac{1}{\sqrt{2}}) \neq sl(\frac{x}{\sqrt{2}})$ en général. L'analogie s'arrête donc ici, on observe des différences telles que :

- $sn^2(x) + cn^2(x) = 1$ mais en général $sl^2(x) + cl^2(x) \neq 1$;
- $cl(\frac{\varpi}{2} - x) = sl(x)$ mais en général $cn(\frac{\varpi}{2} - x) \neq sn(x)$.

Les fonctions définies par Jacobi feront désormais partie du corpus mathématique universel. Il réalisera un travail semblable avec les intégrales elliptiques de première et de troisième espèce, ce qui le conduira à définir les fonctions thêta…de Jacobi.

1833, Liouville parvient à montrer que les intégrales elliptiques ne peuvent pas s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

1858, Hermite prouve que les solutions d'une équation polynomiale de degré 5 peuvent toujours s'exprimer à l'aide des foncions thêta de Jacobi.

Références :

[1] Simon Gindikin : Histoire de physiciens et de mathématiciens.
Formidable livre qui m'a inspiré cet article. Ed. Cassini.
[2] Abrégé d'histoire des mathématiques, Jean Dieudonné et al.
Chapitre 7 : Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes par Ch.Houzel, Ed. Hermann, Paris-1992.

Des sites Internet :
www.mathworld.wolfram.com formidable site où je puise abondamment.
www.chronomath.com très bon site francophone consacré aux mathématiques et à leur histoire.
www-history.mcs.st-and.ac.uk/history Mac Tutor history of mathematics: une référence en histoire des sciences.
xahlee.org Visual Dictionary of Famous Plane Curves.

Me contacter: www.zim.moreau.mann@wanadoo.fr