Le positionnement par satellites (gps)

A quoi ça sert les maths ?

Michel LAFOND – Lycée Le Castel à Dijon

Comment le réseau américain GPS (Système de positionnement par satellites), ou le futur réseau européen Galiléo procèdent t-ils pour garantir à 10 mètres près les 3 coordonnées (altitude, longitude, latitude) d'un sujet terrestre M muni d'un récepteur adéquat ?

Il y a 3 inconnues. Ca paraît simple : si on connaît les distances de M à 3 satellites S1, S2, S3 du réseau, le système des 3 équations associées devrait suffire.

Comme le réseau GPS comprend 24 satellites, s'ils sont bien répartis, de tout point de la surface de la terre on en voit facilement 5 voire 6. De ce côté, pas de souci.

Mais pour calculer les distances $d_i = MS_i$ il faut bien passer par le temps t_i que met un signal (électromagnétique) envoyé de S_i vers M et utiliser la vitesse de la lumière c avec la formule $d_i = c\ t_i$.

- *C'est ici que tout se complique :*

Prenons pour unités le mètre et la seconde. On a donc $c = 300\ 000\ 000$ m/s.

Les horloges des satellites sont des horloges atomiques dont la précision est presque parfaite. En admettant que la précision de 10 m exigée sur la position de M implique une précision de 10 m sur les d_i alors, comme $d_i = c\ t_i$ il faut une précision de $\frac{10}{c} = 3.10^{-8}$ secondes (30 nanosecondes) sur t_i.

t_i sera calculé comme différence entre la date de réception du signal par M soit r_i et la date d'émission du signal par le satellite soit e_i. Hélas la banale formule $t_i = r_i - e_i$ pose un problème épineux, car si la précision sur e_i est largement inférieure à 10^{-8} secondes, ce n'est pas le cas de la précision de l'horloge de M dont l'avance ou le retard peut nettement dépasser les 30 nanosecondes. Avec un appareil qui coûte dans les 150 euros, il ne faut quand même pas rêver.

Or une simple petite microseconde (10^{-6} seconde) à la vitesse de la lumière, cela fait déjà 300 m !

Il va bien falloir prendre en compte la quatrième inconnue ε égale à l'avance (algébrique) du récepteur exprimée en seconde.

Mais alors, il nous faut un quatrième satellite S4 pour avoir la quatrième équation ! Nous verrons dans les calculs à la fin de l'article, que cette équation supplémentaire va permettre en fait de calculer ε, donc de mettre le récepteur à l'heure !

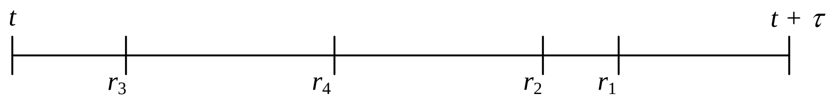
Dans la pratique il est possible de prendre plus de 4 satellites pour obtenir plus de précision, ou dans le cas des géologues ou des militaires qui ont parfois besoin d'une précision centimétrique, d'utiliser des balises terrestres fixes dont la position est évidemment parfaitement connue.

- *Voyons les détails :*

Les satellites émettent toutes les τ secondes (disons $\tau = 1$ pour fixer les idées) un signal dans toutes les directions. Ce signal n'est pas un simple bip-bip, mais contient la date d'émission : e et la position du satellite (3 coordonnées).

Tous les satellites sont synchronisés. On ne peut pas le faire au moment du lancement, car ils peuvent être lancés (ou renouvelés) à des dates parfois éloignées, mais la synchronisation est possible à distance ! Exactement de la même manière que l'horloge de M parviendra à se mettre à l'heure.

On peut donc considérer que les émissions des satellites se font simultanément toutes les τ secondes. A l'instant t où M demande sa position, le récepteur va donc rechercher dans la plage de temps $[\, t\, ;\ t + \tau\, [$ les 4 signaux correspondant à 4 satellites visibles de M à savoir : S1, S2, S3, S4.
Ces signaux sont uniques et on se retrouve avec un schéma tel que celui-ci :

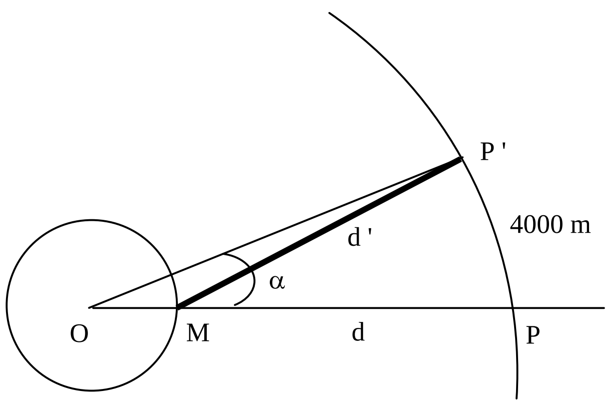


où $r_1\,;\, r_2\,;\, r_3\,;\, r_4$ sont les dates de réception des 4 signaux, dates mesurés par l'horloge du récepteur, en avance de ε rappelons-le.

On a donc le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} e_1 + t_1 + \varepsilon = r_1 \\ e_2 + t_2 + \varepsilon = r_2 \\ e_3 + t_3 + \varepsilon = r_3 \\ e_4 + t_4 + \varepsilon = r_4 \end{cases}$$

On peut sans problème poser $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = t$ (date où le récepteur demande sa position) car pendant la durée $\tau = 1$ les satellites parcourent environ 4 000 m à 20 000 km $= 2.\ 10^7$ m d'altitude sur une orbite à peu près circulaire. Le rayon de la terre étant d'environ $6.\ 10^6$ m, on a le schéma ci-dessous où, si P est la position d'un satellite, MP $= 2.\ 10^7$ donc OP $= 26.\ 10^6$.



Un satellite pendant la durée $\tau = 1$, va donc aller de P à P' . L'angle α mesure à peu près

$$\alpha = \frac{4000}{26.10^6} \approx 0{,}000154 \text{ radians, et un peu de calcul montre que :}$$

M (6. 10^6 ; 0) P ' (25 999 999,7 ; 4000) soit MP ' $\approx$ 20 000 000,1

L'écart entre d = MP et d' = MP ' est d'environ 1 décimètre. Poser $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = t$ revient donc à faire une erreur de $\tau = 1$ seconde sur les temps de parcours, soit une erreur négligeable sur les distances.

Puisque $t_i = \dfrac{d_i}{c}$ le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} e_1 + \dfrac{d_1}{c} + \varepsilon = t \\ e_2 + \dfrac{d_2}{c} + \varepsilon = t \\ e_3 + \dfrac{d_3}{c} + \varepsilon = t \\ e_4 + \dfrac{d_4}{c} + \varepsilon = t \end{cases}$$

Le calculateur du récepteur connaît seulement c ; t ; les e_i ; et les 12 coordonnées des 4 satellites que ceux-ci lui ont transmises. Il ne peut pas calculer les d_i autrement qu'en résolvant le système d'inconnues (x, y, z, ε) si on nomme (x, y, z) les coordonnées de M dans un repère.

Il en déduira bien sa position et en prime son avance ε !

On voit au passage comment effectuer une synchronisation à distance.

- Passons sous silence les innombrables petits détails qui compliquent le calcul, comme par exemple le retard de 7 microsecondes dû à la correction relativiste (plus on va vite, plus le temps est court, ce n'est pas une légende !) et l'avance de 46 microsecondes due à la gravité qui n'est pas la même à 20 000 km d'altitude qu'au sol (autre bizarrerie de la relativité). Il paraît d'ailleurs que les ingénieurs militaires américains qui ont conçu le GPS vers 1970 ont eu des humeurs devant la nécessité de faire ces corrections et on les comprend.

- *Voyons un exemple plus terre à terre*, et même tellement à terre qu'il va se passer entièrement au sol, ce qui va nous permettre de gagner une dimension donc une inconnue dans nos calculs. Cet exemple peut être traité en terminale.

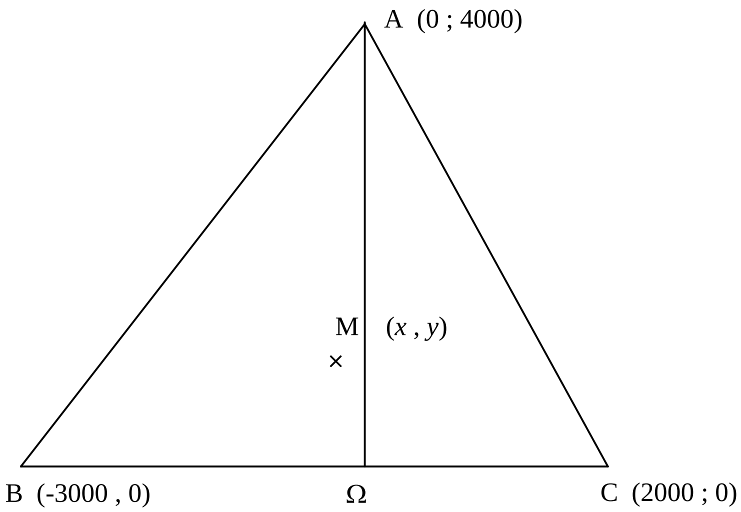
  On a l'énoncé suivant où <u>les unités sont le mètre et la seconde</u> :

> Un sujet M est dans le plan et veut déterminer sa position. Il est équipé d'un récepteur dont l'horloge peut avancer ou retarder de quelques secondes.
> Aux trois points du plan :
> A (0 ; 4000) B (-3000 ; 0) C (2000 ; 0)
> se trouvent des balises émettant en continu des signaux sonores se déplaçant à la vitesse de 330 m/s. Ces signaux contiennent la date d'émission (supposée exacte) et la position de la balise. Le récepteur du sujet M connaît donc à tout instant les dates d'émission des signaux en plus des coordonnée des balises.
> le signal que A émet à 0h 0' 30'' ;

le signal que B émet à 0h 0' 30'' et 42 dixièmes ;
le signal que C émet à 0h 0' 31'' et 54 dixièmes,
sont reçus simultanément par M alors que son horloge indique 0h 0' 40''.

1) Calculer la position exacte de M.
2) De combien l'horloge de M avance t-elle au moment de la réception ?

Voici la situation :



En appelant x , y les coordonnées de M, ε l'avance algébrique de son horloge, d_A, d_B, d_C, les distances respectives MA, MB, MC, on a les 3 équations suivantes :

$$30 + \frac{d_A}{330} + \varepsilon = 30{,}42 + \frac{d_B}{330} + \varepsilon = 31{,}54 + \frac{d_C}{330} + \varepsilon = 40.$$

Par des soustractions membre à membre on élimine provisoirement le problème de l'horloge.

On obtient :

$$\frac{d_A}{330} - \frac{d_B}{330} = 0{,}42 \qquad \frac{d_A}{330} - \frac{d_C}{330} = 1{,}54 \qquad \text{ou} \qquad d_A - d_B = 138{,}6 \qquad d_A - d_C = 508{,}2$$

On a donc le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} (1)\ (x)^2 + (y-4000)^2 = d_A^2 \\ (2)\ d_B^2 = (x+3000)^2 + y^2 = (d_A - 138{,}6)^2 \\ (3)\ d_C^2 = (x-2000)^2 + y^2 = (d_A - 508{,}2)^2 \end{cases}$$

Les calculs qui suivent sont faits avec une calculette ordinaire.

(2) – (3) donne $\quad 10\,000\,x + 5\,000\,000 = 739{,}2\ d_A - 239\,057{,}28 \qquad (4)$

soit $\quad d_A = 13{,}52813853\,x + 7087{,}469264 \qquad (5)$

(2) – (1) donne $\quad 6\,000\ x + 8\,000\ y = -277{,}2\ d_A + 7\,019\,209{,}96 \qquad (6)$

En éliminant d_A entre (4) et (6) on trouve :

$$7207200\ x + 5913600\ y = 3736333324$$

soit $\quad y = -1{,}21875\ x + 631{,}8204349 \qquad (7)$

On remplace y tiré de (7) et d_A tiré de (5) dans (1) : cela donne l'équation de degré 2 en x :

$$x^2 + (-1{,}21875\,x + 631{,}8204349 - 4000)^2 = (13{,}52813853\,x + 7087{,}469264)^2$$

qui sous forme standard est :

$$180{,}5251805\ x^2 + 183550{,}5944\ x + 38887586{,}99 = 0$$

Elle a 2 solutions dont l'une (-715,8 est à rejeter d'après (5) qui donnerait d_A négatif.)

Il reste : $x = -300{,}9281583$ d'où d'après (7) : $y = 998{,}5766278$.

De (5) on tire $d_A = 3016{,}471451$
Et pour l'avance, les équations de départ donnent toutes les trois $\varepsilon \approx 0{,}859$.

M se trouve donc à peu près à (-301 ; 999) et son horloge avance d'environ 0,86 secondes.

(La figure est à peu près exacte)

- *Il est indispensable* de faire un calcul d'erreur pour avoir une idée de la pertinence de tout cela.

Or ces mêmes calculs faits avec 20 chiffres significatifs (Maple) donnent la même chose à l'arrivée, les écarts ne se constatant qu'aux décimales lointaines :

$$x = -300.92815834346104024$$
$$y = 998.57662798109314279$$
$$\varepsilon = .8591774212687360716$$

- ***Bibliographie :*** le numéro 326 de "POUR LA SCIENCE", décembre 2004, pages 40 à 48.