Le triangle d'Ahmès revisité par Fourrey
ou
Fourrey déforma-t-il le triangle d'Ahmès ?

Patrick Guyot,
L.P. Alexandre Dumaine, Mâcon.

L'activité présentée ci-dessous concerne la mesure en géométrie, elle traite de l'aire du triangle dans le cadre d'un problème concret. L'histoire y a sa place, on parcourt plus de trente siècles depuis Ahmès, scribe égyptien vivant vers 1650 av. J.-C., jusqu'à nos jours, en passant par le début du XX^e siècle avec Fourrey en 1907.

Un des intérêts de ce travail est de présenter le problème, au-delà de la traduction, de l'interprétation des textes anciens, ce qui peut très bien se concevoir avec des élèves, comme on le verra plus loin. Signalons au sujet de l'Égypte qu'en 1998, nous avons fêté le bicentenaire de l'expédition d'Égypte organisée par Napoléon Bonaparte, et que plusieurs Bourguignons célèbres y ont participé : Vivant Denon, originaire de Chalon-sur-Saône, créateur du musée du Louvre, Gaspard Monge né à Beaune, et Joseph Fourier natif d'Auxerre furent membres de cette fameuse expédition.

Nous présentons des travaux effectués avec nos élèves, la classe concernée ici est une seconde BEP Métiers de la Mode, 24 filles, mais on peut les présenter à des élèves de seconde de lycée général, ou à des collégiens.

L'activité en classe

La durée a été d'une heure, les objectifs visés étaient :

-en contenu : calculs d'aires d'un triangle, utilisation du théorème de Pythagore, calcul littéral.
-utilisation d'un raisonnement pour valider une affirmation.
-permettre une discussion, les élèves devant émettre un avis.

Nous avons utilisé un texte extrait d'un livre d'Émile Fourrey, qui a écrit plusieurs ouvrages concernant les mathématiques : *Curiosités arithmétiques*, *Curiosités géométriques*, (tous deux réédités récemment chez Vuibert), *Procédés originaux de constructions* (Vuibert, 1923.)

Le texte de Fourrey, extrait des *Curiosités géométriques* (1907) et reproduit sur la page suivante, est d'abord donné à lire sans plus d'explication. Après cette lecture, un premier questionnaire est distribué et les élèves sont invitées à répondre individuellement aux 6 questions qui sont présentées sur la page suivant le texte de Fourrey.

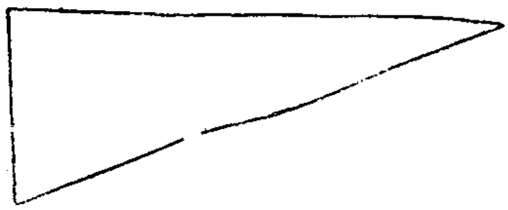
Extrait de ***Curiosités géométriques*** d'Émile Fourrey (1907) :

MESURE DES POLYGONES

§ 1. — Triangles.

Triangle isocèle. — Manuel égyptien d'Ahmès (2000 ans av. J.-C.). — « S'il t'est donné un triangle [isocèle] de 10 perches à son côté, 4 perches à sa base, quelle est sa superficie ? »

L'auteur *multiplie la demi-base par le côté,* ce qui donne 20 perches carrées. La superficie exacte serait 19,6 perches carrées, soit une différence de 2 °/₀ environ.



Fac-similé du Manuel égyptien d'Ahmès.

D'une manière générale, si b est la base et c le côté, ce procédé revient à remplacer la formule exacte

$$\frac{b}{2}\sqrt{c^2-\frac{b^2}{4}}=\frac{b}{2}c\sqrt{1-\left(\frac{b}{2c}\right)^2}$$

par la formule approximative

$$\frac{b}{2}\times c,$$

d'autant plus près de la vérité que b est plus petit par rapport à c.

Le triangle d'Ahmès vu par Émile Fourrey.
Questionnaire 1.

(1) Combien d'années séparent Émile Fourrey d'Ahmès ?

(2) Combien d'années séparent l'époque d'Ahmès de la nôtre ?

(3) Combien d'années nous séparent d'Émile Fourrey ?

(4) Quelle est l'unité de longueur utilisée par les Égyptiens ?

(5) Quelle est l'unité d'aire utilisée par les Égyptiens ?

(6) La figure du manuel égyptien correspond-elle exactement au texte ?

Une curiosité s'est immédiatement manifestée chez les élèves au sujet du "manuel d'Ahmès" : Y avait-il des livres 2000 ans avant Jésus-Christ ? Ahmès était-il un professeur ? Comment M. Fourrey a-t-il pu connaître ce qu'Ahmès avait écrit ? Une explication a donc été nécessaire et il est peut-être utile de résumer ici quelques informations.

Les documents d'époque susceptibles de nous éclairer sur les connaissances mathématiques en Égypte Ancienne sont peu nombreux et se résument à quelques papyrus. On nomme ainsi des feuilles obtenues par collage de tiges de papyrus découpées, sur lesquelles on écrivait. Le papyrus le plus important est le papyrus Rhind. Trouvé à Thèbes, il a tiré son nom de celui de l'écossais Alexandre Rhind qui l'acheta en 1858. Il fut revendu après sa mort au British Museum de Londres.

Il est constitué d'un rouleau d'environ cinq mètres sur trente centimètres, séparé en deux fragments, et écrit recto verso en hiératique, le hiératique étant une version simplifiée des hiéroglyphes. L'auteur se présente dans le texte, il s'agit du scribe *Ahmès* (signifie *né de la lune*). Il écrit ce papyrus en l'an 33 de Aouserré Apophis, pharaon de la XVI^{e} dynastie, ce qui le situe vers 1650 av. J.-C. Ahmès déclare qu'il effectue une copie d'un papyrus plus ancien (peut-être de 1850 av. J.-C.)

Ce papyrus est un ensemble d'un peu plus de 80 problèmes concrets résolus, mais non expliqués. On donne souvent simplement la solution, et on dit que les résultats répondent bien aux données de l'énoncé.

Le problème du "triangle" que nous étudions ici est le cinquante et unième problème du papyrus Rhind.

Après ces quelques explications, accompagnées d'un commentaire sur l'écriture égyptiennes et son décryptage par Champollion, nous avons repris le questionnaire, et les élèves ont comparé leurs réponses. Les trois premières questions ont apporté leur lot d'erreurs habituelles, puisque quelques unes ont oublié de compter négativement les années avant J.-C., mais nous sommes passés rapidement à la quatrième question, ou le mot *perche* a suscité quelques interrogations. Ayant consulté quelques ouvrages de spécialistes de cette époque, j'ai pu informer les élèves que le nom égyptien pour cette unité de longueur est *khet*, qu'on traduit plutôt par *verge* que par *perche*, et qu'une verge se divise en 100 *coudées*. La surface se mesure donc en verges carrées (plutôt que perches carrées), que les Égyptiens appellent *setat*. Nous avons néanmoins décidé que la classe garderait les mots *perche* pour les unités de longueur et *perche carrée* pour les unités d'aire dans nos réponses. Ajoutons pour compléter ces informations que le *khet* mesurait environ 52,5 mètres ce qui donne une coudée de 52,5 cm.

La dernière question a entraîné une réponse unanime. Le triangle fourni par Émile Fourrey ne correspond pas à un triangle isocèle, certaines penchent pour un triangle rectangle, une élève signale même que ce n'est pas un triangle parce que "les lignes ne sont pas droites".

J'ai alors demandé de répondre aux questions 7, 8 et 9 (présentées page suivante), en faisant remarquer que pour le tracé on utilisera des centimètres au lieu de perches. Il s'agit cette fois de se pencher sur le premier paragraphe du commentaire de M. Fourrey (depuis *L'auteur*… jusqu'à …*2% environ*).

Le triangle d'Ahmès vu par Émile Fourrey.
Questionnaire 2.

(7) Tracer un triangle isocèle ABC de base AC = 4 cm, de côtés AB = BC = 10 cm.

(8) Tracer la hauteur relative à la base du triangle ABC. Soit H le pied de cette hauteur. Calculer cette hauteur puis l'aire du triangle ABC.

(9) D'où viennent les 2 % de l'énoncé d'Émile Fourrey ?

Si le tracé de la question 7 n'a pas présenté de difficulté, le calcul de la hauteur a nécessité un rappel des propriétés des triangles isocèles. Le fait que H soit le milieu de la base n'a pas été perçu immédiatement, mais une fois cette propriété énoncée par une élève, ses camarades ont rapidement utilisé la relation de Pythagore pour déterminer la hauteur. Le calcul de $\sqrt{10^2 - 2^2} = \sqrt{96}$ fournit un résultat approché de 9,8 cm.

Pour calculer l'aire du triangle, la formule n'est pas toujours connue, mais après quelques échanges, on a écrit : Aire (ABC) = $\frac{AC \times AH}{2}$ = 19,6 cm^2.

Nos élèves n'ayant pas la connaissance de la détermination d'une incertitude relative, il a été nécessaire de leur expliquer le calcul de $\frac{20 - 19{,}6}{20}$ conduisant aux 2 %.

Le questionnaire 3 a ensuite été distribué pour que les élèves puissent travailler sur le dernier paragraphe de l'exercice de M. Fourrey.

Le triangle d'Ahmès vu par Émile Fourrey.
Questionnaire 3.

(10) Comment retrouver la première formule de l'aire indiquée par Émile Fourrey.
Comment peut-on obtenir la formule approximative $\frac{b}{2} \times c$?

(11) On peut penser aujourd'hui qu'Émile Fourrey a mal compris le manuel égyptien et que dans le triangle isocèle, c'est la hauteur qui mesure 10 perches et non le côté. Peut-on alors dire que la formule $\frac{b}{2} \times c$ est exacte ?

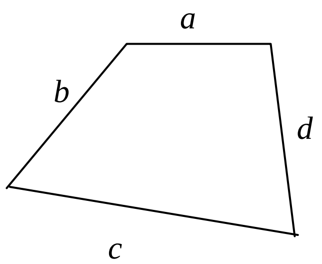
Il a été nécessaire d'aider plus de la moitié de la classe qui éprouve des difficultés avec le calcul littéral.

Notre propos s'est terminé par une discussion sur l'interprétation d'Émile Fourrey. Les élèves trouvent anormal qu'on fasse des suppositions sur ce que les Égyptiens pouvaient penser, et ont manifesté leur satisfaction en apprenant que l'on s'accorde aujourd'hui sur le fait que le calcul égyptien présenté ici est correct.

Cette réaction affective a certainement joué positivement sur l'implication des élèves, et a permis de conduire jusqu'au bout l'étude de ce problème, même si l'aide du professeur a été nécessaire à plusieurs reprises.

Après cette description d'une séquence en classe, nous pouvons revenir sur le problème de ce qu'on comprend des textes anciens qui nous sont parvenus. Un des risques concerne l'anachronisme, mais un autre, et c'est celui qui nous intéresse ici, provient de la traduction des mots de l'époque concernée. Émile Fourrey présente dans son ouvrage une grande quantité de problèmes variés, et ne se pose pas en égyptologue. Il ne s'agit donc pas ici d'intenter un procès à l'auteur des *Curiosités géométriques*, mais de voir ce qu'ont pu en dire après lui de réels spécialistes.

Nous pouvons néanmoins proposer une explication à l'interprétation de Fourrey. Pour le calcul de l'aire d'un quadrilatère quelconque, on faisait autrefois souvent appel à la formule approchée dite des "agrimenseurs" (ou arpenteurs) :



Aire $A = \dfrac{a+c}{2} \times \dfrac{b+d}{2}$

Le passage au triangle se fait en prenant par exemple $d = 0$; l'aire devient : $A = \dfrac{a+c}{2} \times \dfrac{b}{2}$

De plus si le triangle est isocèle ($a = c$), on arrive à la formule indiquée en dernier par Fourrey dans son texte. Il a donc pu être influencé par cette formule des agrimenseurs avant de proposer son interprétation du texte d'Ahmès.

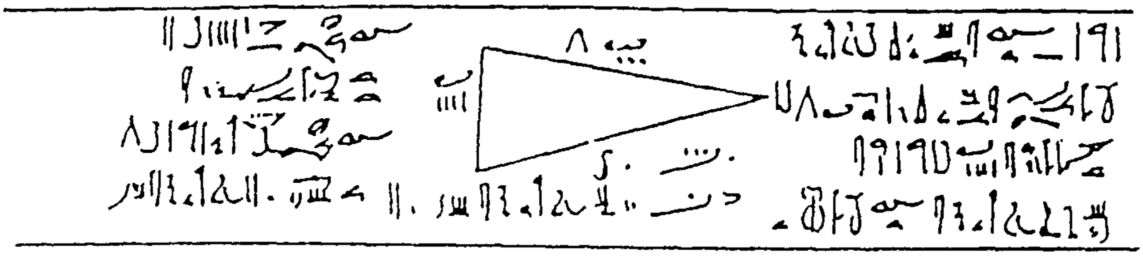
Pour confirmer ce que nous avançons, nous pouvons consulter successivement trois auteurs. Le premier d'entre eux est André Pichot qui commente ce problème dans son ouvrage *La naissance de la science* (tome premier).

Nous consulterons pour cela sa transcription personnelle du problème :

84. SURFACE DU TRIANGLE

(Réf. : Eisenlohr, Chace & coll.)

Transcription et traduction du problème n° 51 du papyrus de Rhind (1650 av. J.-C.)



Exemple de calcul d'un triangle de terre. Si on te dit un triangle de «meret» [*côté ou hauteur?*] 10 khet et de base 4 khet. Quelle est sa surface ?

Pose 1 400 [*expression en coudées de la base et de la*

1/2 200 [*demi-base. 1 khet (verge) = 100 coudées*]

1 1 000 [*côté en coudées*]

2 2 000

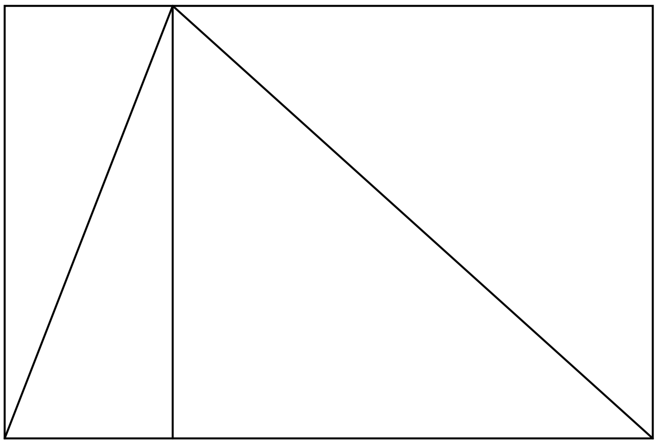
La surface est 20 setat. [*1 setat = 1 khet*^{2}]

Prends 1/2 de 4, soit 2 pour faire son rectangle [*C'est-à-dire : pour construire le rectangle de surface égale à celle du triangle, rectangle qui est de forme h.b/2, où h et b sont la hauteur et la base du triangle*]. Fais la multiplication 10 fois 2, c'est sa surface.

La première constatation est que nous sommes très éloignés de l'énoncé de Fourrey, la deuxième que le doute sur le *meret* apparaît ici clairement.

Dans son ouvrage *Mathematics in the time of the Pharaohs*, Richard Gillings a lui aussi émis l'opinion que la difficulté provient de la signification de *meret*. Il écrit : "Si le meret signifiait le côté plutôt que la hauteur, l'aire serait fausse à moins que le triangle fut rectangle." Mais cet auteur rejoint d'autres égyptologues modernes qui pensent que le meret correspond bien à la hauteur du triangle, et que la formule choisie par Ahmès est bien exacte.

C'est le cas de J. Vercoutter, qui, dans le célèbre ouvrage publié en 1966 sous la direction de René Taton, *Histoire générale des sciences* (tome premier, la science antique et médiévale), traduit meret (ou meryt) par hauteur : pour lui la méthode est donc exacte. Il le justifie en rappelant un extrait de l'énoncé qu'il traduit par la phrase suivante : "Tu prendras la moitié de 4, afin de faire son rectangle", qui laisse entendre qu'Ahmès emploie une méthode géométrique pour résoudre le problème. J. Vercoutter écrit : "étant donné un triangle quelconque, il semble avoir construit à partir de la base qui lui était donnée, un rectangle dont deux côtés sont égaux à la hauteur du triangle."



La demi-surface de ce rectangle lui donnait la solution cherchée."

Bibliographie

Fourrey, Émile, *Curiosités géométriques*, Vuibert, 1907.

Pichot, André, *La naissance de la science,* I Mésopotamie, Égypte, Folio Essais n° 154, 1991.

Taton, René (sous la direction de), *Histoire générale des sciences*, Tome I la science antique et médiévale, PUF, 1966.

Gillings, Richard J., *Mathematics in the Time of the Pharaohs*, Dover Publications, Inc. New York, 1971.