Quelques activités autour de Racine de deux.

Philippe REGNARD,
Lycée Jules Renard, Nevers.

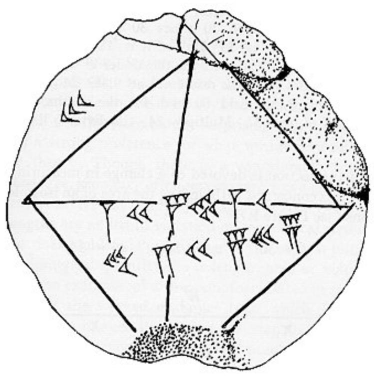
Les divers travaux présentés dans cet article ont été réalisés avec des élèves de première littéraire suivant l'option mathématique au cours de l'année scolaire 1999-2000.

Des premiers résultats babyloniens, aux différents algorithmes grecs en passant par l'émergence de la notion d'irrationnel, le prétexte était bon pour faire découvrir aux élèves la richesse de ces civilisations anciennes, leurs situations géographiques et historiques. De plus, l'étude des documents mathématiques a fourni l'occasion d'utiliser, certains pour la première fois, l'outil informatique (logiciel de géométrie et tableur).

La plus grande partie de ce qui est écrit ci-après a été évoquée en cours soit directement soit sous forme de questions du professeur ou des élèves.

Découverte d'une tablette babylonienne

Copyright: Yale Babylonian Collection



Copyright: A. Aaboe

La tablette YBC 7289 (elle porte le numéro 7289 de la *Yale Babylonian Collection*) date sans doute de la première dynastie babylonienne, c'est à dire entre 1900 et 1600 ans avant notre ère. Comme la plupart des autres, sa taille est petite, à peu près 7 cm de diamètre. Elle représente manifestement un carré et ses deux diagonales. On peut imaginer le scribe, une tablette dans le creux de sa main, dessinant sur l'argile tendre à l'aide d'un stylet taillé appelé *calame*, des symboles en forme de coins qui donnèrent le nom de *cunéiforme* à cette écriture.

Ces premières tablettes, découvertes au cours du 19ème siècle, mais déchiffrées surtout dans la première moitié du 20ème siècle, attestent de l'étonnant développement des mathématiques en Mésopotamie avant l'éclosion de la civilisation grecque.

Bien que de tailles différentes, seuls deux symboles apparaissent sur la tablette : un *chevron* et une *pointe* qui représentent respectivement le nombre dix et l'unité. Ils sont agencés afin de bien distinguer les groupements de l'écriture sexagésimale de position.

Ainsi, sur un côté, on reconnaît aisément le nombre 30 qui pourrait représenter sa mesure. Sur une diagonale deux suites de nombres sont inscrites : 1-20-4-50-1-10 et juste au-dessous 40-2-20-5-30-5.

Si l'on groupe les dizaines et les unités, on obtient deux nombres en base sexagésimale : 1-24-51-10 et 42-25-35. Ce sont les groupements les plus plausibles, mais leur interprétation n'est pas unique ; le second nombre peut également représenter 40-02-25-35 ; De plus, dans cette numération de position, on ne peut distinguer, comme le permet notre virgule, quel groupement correspond aux unités. Est-ce 30 ou $\frac{1}{2}$? Le deuxième nombre correspond-il à 42 unités ou 42 soixantièmes d'unité ?

Si le premier groupement est le nombre d'unités, les deux nombres de la diagonale s'écrivent en base dix 1,41421296297 et 42,4263888889. La première valeur ne nous est pas inconnue : c'est le coefficient multiplicatif qui permet de trouver la diagonale du carré connaissant son côté c'est à dire ce que nous nommons aujourd'hui $\sqrt{2}$. Si l'on admet que la longueur du côté est 30, l'interprétation de la tablette est alors évidente :

Si tu veux trouver la longueur de la diagonale

d'un carré de côté 30,

multiplie ce nombre par 1,41421296297 ;

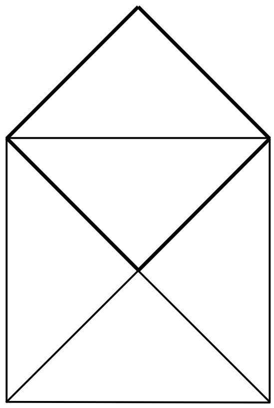
tu trouveras alors 42,4263888889.

Le choix de 30 unités comme côté du carré peut paraître alors surprenant. Mais, si l'on admet que le côté mesure 30 soixantièmes d'unité, soit $\frac{1}{2}$, en multipliant cette valeur par le coefficient 1,41421296297, on obtient en sexagésimale 0-42-25-35 qui s'écrit en système décimal 0,7085648148, soit environ $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Les deux nombres écrits de la diagonale sont alors inverses l'un de l'autre. On retrouve dans ce cas les deux coefficients multiplicatifs permettant de passer du côté à la diagonale et inversement.

L'écriture positionnelle des nombres chez les Babyloniens est donc, à la base près, assez proche de notre écriture moderne. Elle est beaucoup mieux adaptée aux grands nombres et aux calculs que celles des Grecs et des Romains. Mais on a vu que certaines confusions étaient possibles surtout dans les groupements. Y avait-il un zéro pour indiquer l'absence de certains groupements ?

Jamais au début et à la fin d'un nombre, ce qui aurait pu permis de préciser le groupement des unités, tardivement en position médiale, mais les Babyloniens préféraient utiliser un vide : ainsi, un *chevron,* un *vide* et un *chevron* représentaient dix unités et la 360^{e} partie de l'unité.

Pour en revenir au fameux coefficient multiplicatif 1-24-51-10 soit environ 1,414, était-il nécessaire de connaître le théorème de Pythagore pour affirmer que ce nombre est le côté d'un carré égal à 2 ? Sans doute pas si l'on examine la figure ci-contre : la diagonale du petit carré unité en gras est le côté de l'autre carré dont l'aire est manifestement le double du premier cité. Le coefficient multiplicatif est bien le côté d'un carré égal à 2.



Premier algorithme

Héron d'Alexandrie, mathématicien du 1er ou 2e siècle de notre ère a laissé une œuvre scientifique importante dans de nombreux domaines comme la mécanique, l'optique et les mathématiques appliquées. Voici un extrait d'une de ses œuvres dans lequel il explique comment trouver le côté d'un *carré de 720*.[1]

> Puisque 720 n'a pas de côté rationnel, nous extrairons le côté avec une très petite différence de la façon suivante. Comme le premier nombre carré plus grand que 720 est 729 qui a pour côté 27, divise 720 par 27, cela fait 26 et $\frac{2}{3}$, ajoute 27 cela fait $53\frac{2}{3}$; prends-en la moitié, cela fait $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. En fait, $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ multiplié par lui-même donne $720\frac{1}{36}$; de sorte que la différence (sur les carrés) est $\frac{1}{36}$. Si nous voulons rendre cette différence inférieure encore à $\frac{1}{36}$, nous mettrons $720\frac{1}{36}$ trouvé tout à l'heure à la place de 729 et, en procédant de la même façon, nous trouverons que la différence (sur les carrés) est beaucoup plus petite que $\frac{1}{36}$.

La démarche n'est pas difficile à suivre si l'on sait que les nombres fractionnaires sont notés *à l'anglo-saxonne :* $53\frac{2}{3}$ représente $53+\frac{2}{3}$ et $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ représente $26+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, mais des explications sont nécessaires pour bien la comprendre.

L'auteur cherche un nombre A tel que 720 = A × A. Ce nombre n'est pas une fraction donc il l'approche par un autre, A' (27 dans l'exemple).

Par conséquent A' × A' est différent de 720 ; en fait, il est un peu trop grand. Pour obtenir 720, il calcule un nombre B tel que B × A' = 720 qui lui, par compensation, sera plus petit que A, donc B = $\frac{720}{A'}$.

Héron obtient ainsi deux valeurs approchées de $\sqrt{720}$: l'une trop grande A' = 27, l'autre trop petite B = $\frac{720}{A'}$. Pour obtenir une valeur encore plus précise, il calcule leur moyenne arithmétique A'' = $\frac{1}{2}\left(A'+\frac{720}{A'}\right)$. Il est alors possible de réitérer le procédé avec cette nouvelle approximation.

Le logiciel *GeoplanW* nous a permis d'imager l'algorithme en cherchant des approximations successives de $\sqrt{2}$:

- A' est le point d'abscisse $\sqrt{2}$ à atteindre.
- M est un point dont l'abscisse a est la première approximation de $\sqrt{2}$: a = 1 sur la figure.
- M' est le point d'abscisse $\frac{2}{a}$ et I est le milieu de [MM'].

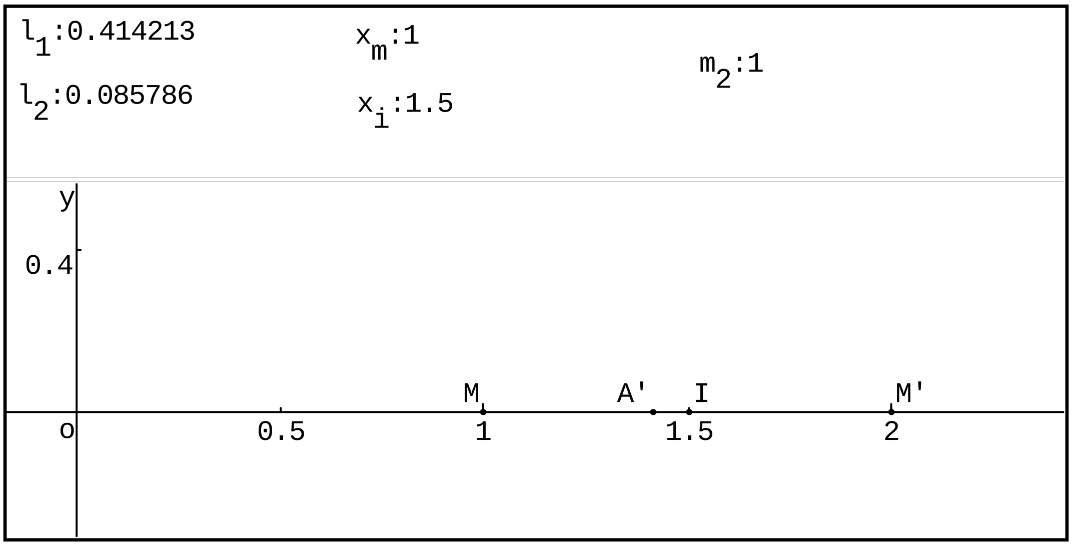
On a noté également les abscisses x_m et x_i des deux approximations consécutives ainsi que leur écart à la valeur cherchée.

En pilotant le point M (première approximation de $\sqrt{2}$) à la main ou au clavier (des changements de paramètres sont rapidement nécessaires), le travail consiste à le déplacer jusqu'au

[1] Extrait des *Métriques*, de *Heronis Alexandrini, Opera quae supersunt omnia…*, III : *Rationes dimetiendi et commentatio dioptrica*, éd. Hermann Schöne, Leipzig, 1903, Livre I, paragraphe 8, pp. 18-20. Traduction J.-P. Levet.

point I (approximation suivante de $\sqrt{2}$), et ainsi de suite, en relevant à chaque étape, les résultats obtenus.

On constate très vite que le procédé est très performant : en se limitant à une précision de 10^{-6}, on obtient en quatre itérations : 1,5 - 1,416667 - 1,414216 - 1,414214 . Des zooms successifs sont nécessaires pour celui qui veut distinguer les différents points !



Bien sûr, l'utilisation d'un tableur se prête particulièrement bien à ce type de travail. Les techniques de calcul sur Excel ainsi que les manipulations les plus courantes s'apprennent assez facilement. En voici les résultats donnant les six premières approximations de $\sqrt{2}$:

APPROXIMATION DE RACINE DE 2 PAR LA METHODE DE HERON						
			en nombres décimaux			
a_n	**1**	**1,5000**	**1,416666666667**	**1,414215686275**	**1,414213562375**	**1,414213562373**
$2/a_n$	2	1,3333	1,411764705882	1,414211438475	1,414213562372	1,414213562373
			en fractions			
a_n	**1**	**1 1/2**	**1 5/12**	**1 169/408**	**1 408/985**	**1 408/985**
$2/a_n$	2	1 1/3	1 7/17	1 239/577	1 408/985	1 408/985

La première valeur a_1 est l'approximation choisie au départ. Ensuite la valeur a_2 est la moyenne entre a_1 et $\frac{2}{a_1}$ et ainsi de suite. On peut donc faire le calcul suivant pour la valeur a_2 : dans la cellule C5, on calcule =MOYENNE(B5;B6) etc.

Une nouvelle approche.

$\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. Ce résultat bien connu depuis les pythagoriciens peut être démontrer de plusieurs façons et reste un exemple classique de preuve par l'absurde dans nos classes de troisième ou de seconde. Nous l'admettrons.

a et *b* étant deux entiers, les écritures suivantes sont donc impossibles :

impossible ! impossible ! impossible! impossible ! impossible ! **impossible**

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ $\qquad 2 = \frac{a^2}{b^2}$ $\qquad a^2 = 2b^2$ $\qquad a^2 - 2b^2 = 0$

impossible ! impossible ! impossible! impossible ! impossible ! **impossible**

Un carré n'est jamais égal au double d'un carré.

Mais si la nullité de $a^2 - 2b^2$ n'est jamais vérifiée, il est peut-être possible de s'en approcher. Et s'en approcher le plus possible, c'est bien sûr résoudre en nombres entiers les équations $a^2 - 2b^2 = 1$ et $a^2 - 2b^2 = -1$.

La première équation est un cas particulier des équations de Fermat du type $a^2 - Ab^2 = 1$.

"La question que j'avais proposée à M. Frenicle et autres est de grande difficulté : *tout nombre non carré est de telle nature qu'il y a infinis carrés qui, multipliant ledit nombre, font un carré moins 1*." (Fermat.)

Bien que des élèves littéraires soient intéressés par Fermat, son travail, ses relations avec les autres savants du 17e siècle, il n'était pas question, pour eux, d'aborder une démonstration d'époque permettant de trouver les valeurs possibles de *a* et *b*. Le tableur *Excel* nous a encore été d'un grand secours.

Le procédé utilisé a été le suivant (mais ce n'est pas le seul !).

- Colonne A : les entiers naturels.
- Colonne B : les carrés de la colonne A (a^2)
- Colonne C : le doubles des carrés de la colonne A ($2b^2$)

Dans une seconde étape, on copie les valeurs des colonnes A et B pour les placer en D et E puis les colonnes A et C pour les placer en D et E sous le collage précédent. Il est pratique à ce niveau d'utiliser des couleurs différentes (gras-italique dans notre tableau) pour différentier les a^2 et les $2b^2$. Ensuite il suffit de trier en ordre croissant les colonnes D et E suivant la colonne E pour obtenir ce début, limité aux valeurs inférieures à 100 :

A	B	C	D	E
	a_n^2	$2b_n^2$		
1	1	***2***	1	1
2	4	***8***	1	***2***
3	9	***18***	2	4
4	16	***32***	2	***8***

(la suite ci-derrière)

5	25	***50***	3	9
6	36	***72***	4	16
7	49	***98***	3	***18***
8	64		5	25
9	81		4	***32***
			6	36
			7	49
			5	***50***
			8	64
			6	***72***
			9	81
			7	***98***
			10	100

On obtient donc dans la dernière colonne un mélange ordonné de a^2 et de $2b^2$. Aucun des nombres n'est cité deux fois d'après la règle énoncée plus haut mais certains entiers sont consécutifs : 1-2 ; 8-9 ; 49-50 dans notre extrait.

Les trois premières colonnes sont maintenant inutiles. On ne conserve que la colonne des a ou b et la colonne des a^2 ou des $2b^2$. Il ne faut pas, bien sûr, se contenter des valeurs inférieures à 100. Les élèves ont testé jusqu'à 72000000 qui correspond à 2×6000^2, soit plus de 14000 lignes !

Pour trouver les solutions, un test logique est nécessaire. Sur la colonne suivante, les élèves ont calculé la différence de deux valeurs consécutives. Il suffit alors de tester si la valeur obtenue est un ; dans ce cas le mot EUREKA s'inscrit. Le rapport $\frac{a}{b}$ ou $\frac{b}{a}$ dans le cas où $\frac{a}{b}$ est inférieur à 1 (il suffit de calculer l'inverse) fournit alors une approximation de $\sqrt{2}$. Voilà les différentes valeurs obtenues dans le tableau ainsi que des extraits des 14000 lignes *d'Excel*.

a ou *b*	a^2 ou $2\,b^2$	différence	rapport	approximation de $\sqrt{2}$	et en fraction
1	1				
1	2	1	1	**1,000000000000**	**1**
2	8				
3	9	1	1,5	**1,500000000000**	**1 1/2**
7	49				
5	50	1	0,71428571	**1,400000000000**	**1 2/5**
12	288				
17	289	1	1,41666667	**1,416666666667**	**1 5/12**
41	1681				
29	1682	1	0,70731707	**1,413793103448**	**1 12/29**
70	9800				
99	9801	1	1,41428571	**1,414285714286**	**1 29/70**
239	57121				
169	57122	1	0,70711297	**1,414201183432**	**1 70/169**

408	332928				
577	332929	1	1,41421569	**1,414215686275**	**1 169/408**
1393	1940449				
985	1940450	1	0,70710696	**1,414213197970**	**1 408/985**
2378	11309768				
3363	11309769	1	1,41421362	**1,414213624895**	**1 408/985**
8119	65918161				
5741	65918162	1	0,70710679	**1,414213551646**	**1 408/985**

Quelques extraits de la feuille Excel :

1	1					
1	2	1	**EUREKA**	1	**1,000000000000**	**1**
2	4	2				
2	8	4				
3	9	1	**EUREKA**	1,5	**1,500000000000**	**1 1/2**
4	16	7				
3	18	2				
5	25	7				
4	32	7				
6	36	4				
7	49	13				
5	50	1	**EUREKA**	0,71428571	**1,400000000000**	**1 2/5**
8	64	14				
6	72	8				

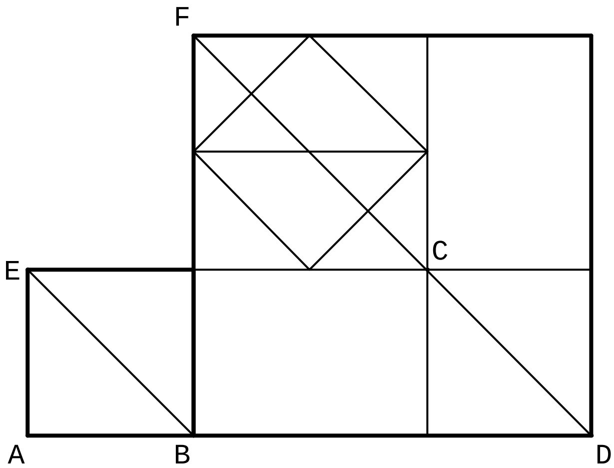
98	9604	82				
70	9800	196				
99	9801	1	**EUREKA**	1,41428571	**1,414285714286**	**1 29/70**
100	10000	199				
71	10082	82				

576	331776	478				
408	332928	1152				
577	332929	1	**EUREKA**	1,41421569	**1,414215686275**	**1 169/408**
578	334084	1155				
409	334562	478				

1393	1940449	2785				
985	1940450	1	**EUREKA**	0,70710696	**1,414213197970**	**1 408/985**
1394	1943236	2786				
986	1944392	1156				

8118	65901924	6724				
8119	65918161	16237				
5741	65918162	1	**EUREKA**	0,70710679	**1,414213551646**	**1 408/985**
8120	65934400	16238				
5742	65941128	6728				
8121	65950641	9513				
5743	65964098	13457				

Dernière approche : nombres latéraux et diagonaux



Examinons la figure ci-dessus. Au petit carré de côté AB = a_1 et de diagonale BE = d_1, on adjoint le carré de côté BD = $a_2 = a_1 + d_1$. Que vaut alors la diagonale DF = d_2 ? Les constructions supplémentaires montre que FC = 2 a_1, donc que DF = $d_2 = d_1 + 2\,a_1$.

La double récurrence $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + d_{n-1} \\ d_n = 2a_{n-1} + d_{n-1} \end{cases}$ permet donc de passer d'un carré de côté a_n et de diagonale d_n à un autre carré plus grand. Encore faut-il générer cette double suite par des valeurs initiales. On démontre que si l'on donne à a_1 et d_1 des valeurs entières arbitraires, le rapport $\frac{d_n}{a_n}$ tend vers $\sqrt{2}$. Théon de Smyrne, mathématicien grec du 2$^{\text{ème}}$ siècle, parle dans son *Exposition des connaissances utiles à la lecture de Platon* des nombres *latéraux* et *diagonaux* pour désigner les termes de ces deux suites. Voici, pour information, quelques explications.

Nombres latéraux et diagonaux

Dans le paragraphe précédent, on a pu constater que des approximations successives de $\sqrt{2}$ pouvaient se déduire des solutions entières des équations

$$d^2 - 2a^2 = \pm 1.$$

Les solutions sont des couples successifs constitués respectivement de ce qu'on appelle un *nombre latéral* et un *nombre diagonal*.

La loi de formation de ces nombres est expliquée par Théon de Smyrne de la façon suivante. L'unité, étant le commencement de toute chose, doit être potentiellement à la fois un nombre latéral et diagonal. Par conséquent nous commençons avec deux unités, la première étant le premier *latéral* que nous appelons a_1, l'autre étant le premier diagonal que nous appelons d_1.

Les couples de latéraux et de diagonaux suivants sont formés par la récurrence rencontrée plus haut :

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + d_1, \quad d_2 = 2a_1 + d_1. \\ a_3 = a_2 + d_2, \quad d_3 = 2a_2 + d_2.. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n+1} = a_n + d_n, \quad d_{n+1} = 2a_n + d_n. \end{cases}$$

Puisque $a_1 = d_1 = 1$, on obtient les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{ll} a_2 = 1+1 = 2, & d_2 = 2.1+1 = 3, \\ a_3 = 2+3 = 5, & d_3 = 2.2+3 = 7, \\ a_4 = 5+7 = 12, & d_4 = 2.5+7 = 17 \text{ etc.} \end{array}$$

Théon établit, la formules générale : $d_n^2 = 2a_n^2 \pm 1$, et il observe que la valeur de $d_n - 2a_n$ est alternativement +1 et -1 suivant que n est pair ou impair et que la somme paire des carrés de tous les diagonaux est le double de la somme paire des carrés de tous les latéraux. La propriété énoncée se déduit de l'identité suivante :

$$(2x + y)^2 - 2(x + y)^2 = 2x^2 - y^2,$$

car si x et y satisfont à l'une des deux équations $2x^2 - y^2 = \pm 1$, la formule nous donne, si elle est vraie, deux nombres plus grands, $x + y$ et $2x + y$ qui satisfont à l'autre des deux équations.

Nous pouvons, bien sûr, prouver algébriquement la propriété des nombres latéraux et diagonaux comme suit :

$$\begin{aligned} d_n^2 - 2a_n^2 &= (2a_{n-1} + d_{n-1})^2 - 2(a_{n-1} + d_{n-1})^2 \\ &= 2a_{n-1}^2 - d_{n-1}^2 \\ &= -(d_{n-1}^2 - 2a_{n-1}^2) \\ &= +(d_{n-2}^2 - 2a_{n-2}^2), \text{ de la même façon ; et ainsi de suite.} \end{aligned}$$

Proclus, dans son *Commentaire sur la République de Platon*, nous montre comment ces propriétés furent démontrées avec les moyens des mathématiciens grecs. Il suffit de lire la proposition 10 du deuxième livre des *Eléments* d'Euclide. La proposition prouve que si [AB] a pour milieu C et est prolongé en D, alors

$$AD^2 + DB^2 = 2AC^2 + 2CD^2 \text{ ;}$$

et, si AC = CB =x et BD = y ceci donne :

$$(2x + y)^2 + y^2 = 2x^2 + 2(x + y)^2,$$

$$\text{ou } (2x + y)^2 - 2(x + y)^2 = 2x^2 - y^2; \text{qui est la formule voulue.}$$

Dans le fameux passage de la *République* (546 c) traitant du nombre géométrique, Platon fait une distinction entre la *diagonale irrationnelle de 5*, c'est à dire la diagonale d'un carré de côté 5, et ce qu'il appelle *la diagonale rationnelle* de *5*. Le carré de la *diagonale rationnelle* est moindre d'une unité que le carré de la *diagonale irrationnelle,* et vaut donc 49, ainsi la *diagonale rationnelle* est *7* ; Platon se réfère au fait que $2.5^2 – 7^2 = 1$, et a en tête le couple de nombres latéraux et diagonaux 5 et 7, qui devaient donc être connus avant cette époque. Comme la preuve générale de la propriété de ces nombres utilise, comme Proclus le dit, la proposition 10 du livre II d'Euclide, il est plausible que ce théorème soit pythagoricien, et qu'il fut peut-être inventé pour ce cas particulier.

Pour terminer, revenons à nos activités avec les premières littéraires. Ces récurrences ont encore été exploitées avec le tableur Excel. En voici les résultats.

rang	1	2	3	4
a_n	1	2	5	12
b_n	1	3	7	17
b_n/a_n	1,00000000000000	1,50000000000000	1,40000000000000	1,41666666666667
écarts	-0,41421356237310	0,08578643762690	-0,01421356237310	0,00245310429357

rang	5	6	7	8
a_n	29	70	169	408
b_n	41	99	239	577
b_n/a_n	1,41379310344828	1,41428571428571	1,41420118343195	1,41421568627451
écarts	-0,00042045892482	0,00007215191262	-0,00001237894114	0,00000212390141

rang	9	10	11	12
a_n	985	2378	5741	13860
b_n	1393	3363	8119	19601
b_n/a_n	1,41421319796954	1,41421362489487	1,41421355164605	1,41421356421356
écarts	-0,00000036440355	0,00000006252177	-0,00000001072704	0,00000000184047

rang	13	14	15	16
a_n	33461	80782	195025	470832
b_n	47321	114243	275807	665857
b_n/a_n	1,41421356205732	1,41421356242727	1,41421356236380	1,41421356237469
écarts	-0,00000000031577	0,00000000005418	-0,00000000000930	0,00000000000159

rang	17	18	19	20
a_n	1136689	2744210	6625109	15994428
b_n	1607521	3880899	9369319	22619537
b_n/a_n	1,41421356237282	1,41421356237314	1,41421356237309	1,41421356237310
écarts	-0,00000000000027	0,00000000000005	-0,00000000000001	0,00000000000000

Documents annexes.

1) Théon de Smyrne, *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*. Traduction J. Dupuis. Hachette 1892. pages 71 à 75.

Des nombres latéraux et des nombres diagonaux.

De même que les nombres ont en puissance les rapports des triangulaires, des tétragones, des pentagones et des autres figures, de même, nous trouverons que les rapports des nombres latéraux et des nombres diagonaux se manifestent dans les nombres selon des raisons génératrices, car ce sont les nombres qui harmonisent les figures. Donc comme l'unité est le principe de toutes les figures, selon la raison suprême et génératrice, de même aussi le rapport de la diagonale et du côté se trouve dans l'unité.

Supposons par exemple deux unités dont 1'une soit la diagonale et l'autre le côté, car il faut que l'unité qui est le principe de tout soit en puissance le côté et la diagonale ; Ajoutons au côté la diagonale et à la diagonale ajoutons deux côtés, car ce que le côté peut deux fois, la diagonale le peut une fois. Dès lors la diagonale est devenue plus grande et le côté plus petit. Or, pour le premier côté et la première diagonale, le carré de la diagonale unité sera moindre d'une unité que le double carré du côté unité, car les unités sont en égalité, mais un est moindre d'une unité que le double de l'unité. Ajoutons maintenant la diagonale au côté, c'est à dire une unité à l'unité, le côté vaudra alors 2 unités; mais, si nous ajoutons deux côtés à la diagonale, c'est à dire 2 unités à 1'unité, la diagonale vaudra 3 unités : le carré construit sur le côté 2 est 4. et le carré de la diagonale est 9 qui est plus grand d'une unité que le double carré de 2.

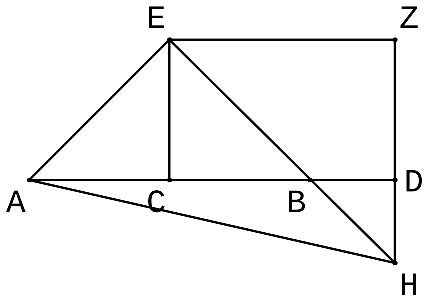
De même ajoutons au côté 2 la diagonale 3, le côté deviendra 5. Si à la diagonale 3 nous ajoutons deux côtés, c'est à dire 2 fois 2, nom aurons 7 unités. Le carré construit sur le côté 5 est 25, et celui qui est construit sur la diagonale 7 est 49, qui est moindre d'une unité que le double (50) du carré 25. De nouveau, si au côté 5 on ajoute la diagonale 7, on obtient 12 unités ; et si à la diagonale 7 on ajoute 2 fois le côté 5, on aura 17 dont le carré (289) est plus grand d'une unité que le double (288) du carré de 12. Et ainsi de suite en continuant l'addition. La proportion alterne : le carré construit sur la diagonale sera tantôt plus petit, tantôt plus grand, d'une unité, que le double carré construit sur le côté, en sorte que ces diagonales et ces côtés seront toujours exprimables.

Inversement les diagonales comparées aux côtés, en puissance, sont tantôt plus grandes d'une unité que les doubles, tantôt plus petites d'une unité. Toutes les diagonales sont donc, par rapport aux carrés des côtés, doubles alternativement par excès et par défaut, la même unité combinée également avec tous, rétablissant l'égalité, en sorte que le double ne pèche ni par excès ni par défaut ; en effet, ce qui manque dans la diagonale précédente se trouve en excès, en puissance dans la diagonale qui suit.

2) Euclide, *Les Eléments*, traduction F. Peyrard. Réédition Blanchard. Livre II. Prop. 10.

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le quarré de la droite entière avec la droite ajoutée, et le quarré de la droite ajoutée, étant pris ensemble, sont doubles du quarré de la moitié de la droite entière, et du quarré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite.

Qu'une droite AB soit coupée en deux parties égales en C, et qu'on lui ajoute directement une droite BD ; je dis que les quarrés des droites AD, DB sont doubles des quarrés des droites AC, CD.



Du point C conduisons CE perpendiculaire à AB ; faisons cette droite égale à l'une ou à l'autre des droites AC, CB; joignons EA, EB ; par le point E conduisons EZ parallèle à AD; et par le point D conduisons ZD parallèle à CE. Puisque la droite EZ tombe sur les parallèles EC, ZD, les angles CEZ, EZD sont égaux à deux droits ; donc les angles ZEB, EZD sont plus petits que deux droits. Mais deux droites prolongées se rencontrent du côté où les angles sont plus petits, que deux droits ; donc les droites EB, ZD, prolongées se rencontreront du côté BOUL. Prolongeons ces droites; quelles se rencontrent au point H ; et joignons AH.

Puisque AC est égal à CE, l'angle AEC est égal à l'angle EAC ; mais l'angle en C est droit; donc chacun des angles EAC, AEC est la moitié d'un droit. Par la même raison, chacun des angles CEB, EBC est la moitié d'un droit ; donc l'angle AEB est droit. Et puisque l'angle EBC est la moitié d'un angle droit, l'angle DBH est la moitié d'un droit. Mais l'angle BDH est droit, car il est égal à l'angle alterne DCE; donc l'angle restant DHB est égal à l'angle DBH, donc le côté BD est égal au CÖT2 BH. De plus, puisque l'angle EHZ est la moitié d'un droit, et que l'angle en Z est droit, car il est égal à l'angle opposé en C, l'angle restant ZEH est la moitié d'un droit; donc l'angle EHZ est égal à l'angle ZEH; donc le côté HZ est égal au côté ZE. Et puisque EC est égal à CA, le quarré de EC est égal au quarré de CA ; donc les quarrés des droites EC, CA sont doubles du quarré de CA. Mais le quarré de AE est égal aux quarrés des droites EC, CA ; donc le quarré de EA est double du quarré de AC. De plus, puisque ZH est égal à ZE, le quarré de HZ est égal au quarré de ZE ; donc les quarrés des droites HZ, ZE sont doubles du quarré de EZ. Mais le quarré de EH est égal aux quarrés des droites HZ, ZE ; donc le quarré de EH est double du quarré de EZ. Mais EZ est égal à CD ; donc le quarré de EH est double du quarré de CD. Mais on a démontré que le quarré de EA est double du quarré de AC; donc les quarrés des droites AE, EH sont doubles des quarrés des droites AC, CD. Mais le quarré de AH est égal aux quarrés des droites AE, EH ; donc le quarré AH est double des quarrés des droites AC, CD. Mais les quarrés des droites AD, DH sont égaux au quarré de AH ; donc les quarrés des droites AD, DH Sont doubles dès quarréS, des droites AC, CD ; mais la droite DH est égale à la droite DB ; donc les quarrés des droites AD, DB sont doubles des quarrés des droites AC, CD, Donc, etc.