Introduction historique des nombres complexes

Pierre Collaudin,
Lycée Jeanne d'Arc Paray le Monial

Si le programme de terminale S demande d'introduire dans le chapitre des nombres complexes quelques éléments lui donnant une dimension historique, les raccourcis proposés m'ont toujours laissé penser que la résolution des équations du troisième degré dépassait les capacités de l'élève de Terminale. Ma seule approche étant liée aux groupes de permutations des racines d'un polynôme, je me suis toujours contenté de poser artificiellement les changements de variables classiques permettant d'obtenir la formule dite de Cardan.

Le travail qui suit a donc pour objet de présenter l'apparition des nombres imaginaires en évitant les raccourcis. Il s'appuie principalement sur l'ouvrage de Jérôme Cardan : l'*Ars Magna* de 1545et sur un extrait de l'*Algebra* de Bombelli de 1572.

Description du travail

Celui-ci s'est fait en trois temps :

- Tout d'abord un devoir de semaine sur un texte arabe présentait les résolutions d'équations du second degré à l'aide de figure géométriques planes. Cette activité cherchait à introduire la tradition grecque des grandeurs géométriques et donc de la résolution des équations du type $x^2 + 5x = 20$ comme combinaison d'aires de carré : x^2 , de rectangle : $5x$ qui ajoutées donnent une aire de rectangle : 20 avec une homogénéité des grandeurs manipulées dans l'équation, ici toutes sont des aires.

- Dans un deuxième temps nous avons travaillé ensemble en classe la résolution de l'équation $x^3 + 6x = 20$. Cherchant à obtenir la solution $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$ et ainsi de généraliser aux formules de Cardan.

- Dans un troisième temps nous sommes passés au cas $x^3 - 15x = 4$ conduisant par analogie à la solution $\sqrt[3]{\sqrt{-121}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{-121}-2}$, et à l'aide de la recherche faites par Bombelli sur le calcul des trois racines cubiques, nous sommes alors retombés sur la solution évidente 4 de l'équation initiale. Ainsi nous avons, à la suite de Bombelli, introduit une quantité imaginaire ou impossible comme auxiliaire de calcul afin d'obtenir un résultat final tout à fait réel.

Les lignes qui suivent ont pour but de vous présenter les éléments ayant remplis les deux derniers temps de travail. Pour le travail sur les textes arabes j'ai utilisé des documents des IREM[1]

[1] M.A.T.H. tome 2 de l'IREM de Paris VII résolution d'une équation du second degré par Al-Khwarizmi

Repères historiques

Jérôme Cardan né en 1501 est le fils d'un juriste de Pavie, médecin, astrologue et mathématicien il est l'auteur entre autre de deux livres de mathématique : la *Practica Arithmeticae* (1539) et l'*Ars Magna* (1545).

Dans ce dernier ouvrage, Cardan aborde la résolution de l'équation cubique cas après cas. On attribue généralement la découverte de ce type de résolution à Scipion del Ferro (1465-1526) mais un autre mathématicien : Tartaglia (1500-1557) aurait repris ou redécouvert cette méthode et aurait cédé à la curiosité insistante de Cardan en lui révélant sa méthode à travers un poème. Cardan s'approprié alors cette découverte en la publiant donc dans l'*Ars Magna*.

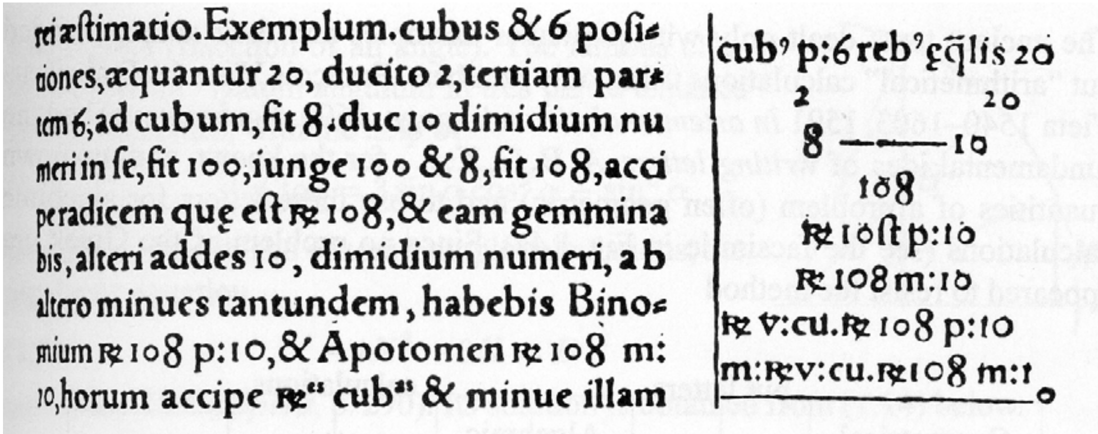
Il reprend la tradition arabe de l'interprétation géométrique des différents membres de l'équation.

Le texte de Cardan

Ainsi en traitant l'exemple $x^3 + 6x = 20$, Cardan recherche dans $x^3 + 6x$ une expression du type $(a+b)^3 - b^3$ ou encore un cube incomplet. Il propose la règle suivante pour résoudre l'équation :

> *Cube le tiers du coefficient de x ; ajoute lui le quarré de la moitié de la constante de l'équation; et prend la racine quarré du tout. Tu dupliques ceci, et à l'une tu ajouteras la moitié du nombre que tu as déjà quarré et de l'autre tu retrancheras la même moitié. Tu auras alors le " binomium[2]" et son " apotomen". Puis retranche la racine cubique de "l'apotomen " de la racine cubique du " binomium", ce qui restera sera la valeur de x.*
>
> *Par exemple :* $x^3 + 6x = 20$.
>
> *Cube* 2*, le tiers de* 6*, cela fait* 8*; quarre* 10*, la moitié de la constante; cela donne* 100*. Ajoute* 100 *et* 8*, cela fait* 108*, dont la racine quarré est* $\sqrt{108}$ *. Alors tu là dupliques : à l'une ajoutez* 10*, la moitié de la constante, et à l'autre retranche la même quantité.*
>
> *Alors tu obtiens le " binomium"* $\sqrt{108} + 10$ *et son " apotomen"* $\sqrt{108} - 10$ *. Prend leurs racines cubiques. Retranche la racine cubique de "l'apotomen" de celle du " binomium" et tu auras la valeur de x :* $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$.

[2] les termes binomium et apotomen font référence à l'œuvre d4euclide : livre X . proposition 74 "si une droite rationnelle est retranchée d'une droite rationnelle, cette droite n'étant commensurable qu'en puissance avec la droite entière; la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée apotome." Le binôme représente la racine de la somme et l'apotome la racine de la différence.



rei æstimatio. Exemplum. cubus & 6 positiones, æquantur 20, ducito 2, tertiam partem 6, ad cubum, fit 8, duc 10 dimidium numeri in se, fit 100, iunge 100 & 8, fit 108, accipe radicem quæ est R 108, & eam gemminabis, alteri addes 10, dimidium numeri, a b altero minues tantundem, habebis Binomium R 108 p:10, & Apotomen R 108 m: 10, horum accipe R cub & minue illam

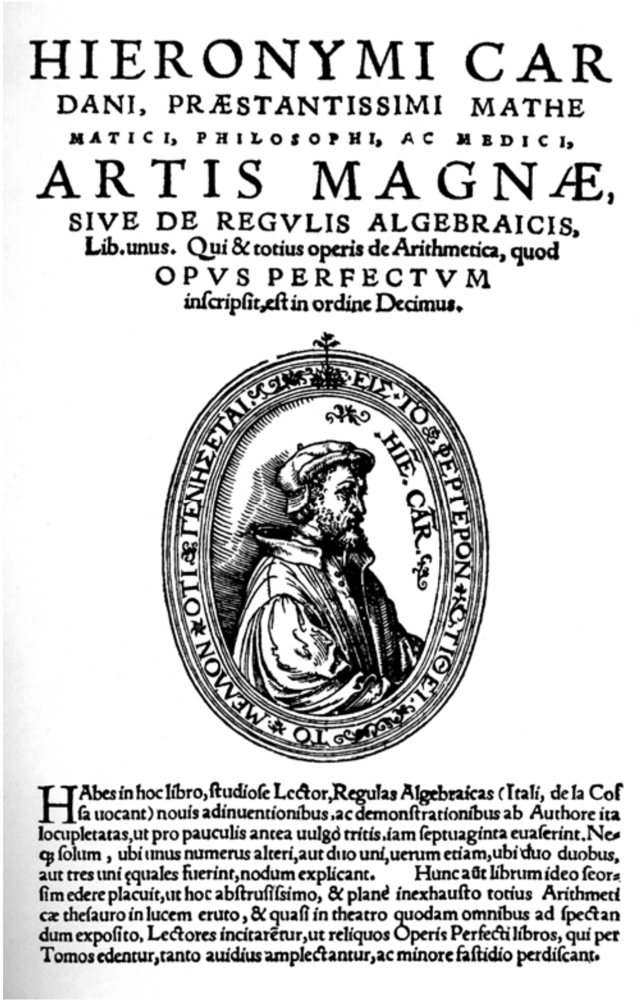
cub p:6 reb æqlis 20
2 20
8 —— 10
108
R 108 p:10
R 108 m:10
R v:cu. R 108 p:10
m:R v:cu. R 108 m:10

L'original latin du texte de Cardan

Pour justifier cette méthode, Cardan donne une explication correcte, mais difficile à comprendre :

Scipio Ferro de Bologne, il y a bien 30 ans découvrit cette règle et la confia à Antonio Maria Fior de Venise, qui à travers ses chicanes avec Niccolo Tartaglia de Brescia donna à Niccolo l'occasion de découvrir cette règle. Tartaglia me la confia en m'en cachant la démonstration. Aidé par cette solution, je mis la démonstration en forme. Ce fut très difficile. Ma version est la suivante : "

Suivent alors un texte et une figure plane d'un problème à trois dimensions, pour le rendre accessible j'ai retraduit le texte en langage plus algébrique et utilisé des figures plus compréhensibles.



HIERONYMI CARDANI, PRÆSTANTISSIMI MATHEMATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

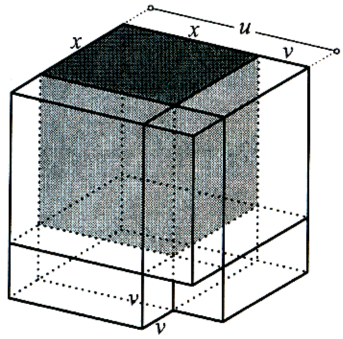
HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aūt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

*Page de garde de l'*Ars Magna

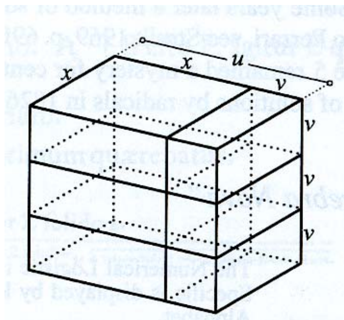
Adaptation du texte.

Découpons un cube d'arête $u = x + v$ en 8 parties parallélépipédiques :

$$\begin{cases} \text{une partie cubique d'arête } x. \\ \text{trois parties de côtés } x \text{ par } x \text{ par } v. \\ \text{trois parties de côtés } x \text{ par } v \text{ par } v. \\ \text{une partie cubique d'arête } v. \end{cases}$$



Retranchons cette dernière partie. Nous obtenons alors le volume V ci-dessus.



Regroupons les six parties autres que le cube en un parallélépipède de côté x par u par $3v$:

Considérons alors que ces six parties correspondent au terme $6x$ de l'équation donc le volume V correspond à la constante 20 de l'équation.

D'où $V = u^3 - v^3 = 20$ et $3uvx = 6x$ soit $uv = 2$.

Il nous faut donc trouver u et v tels que $\begin{cases} u^3 - v^3 = 20 \\ uv = 2 \end{cases}$

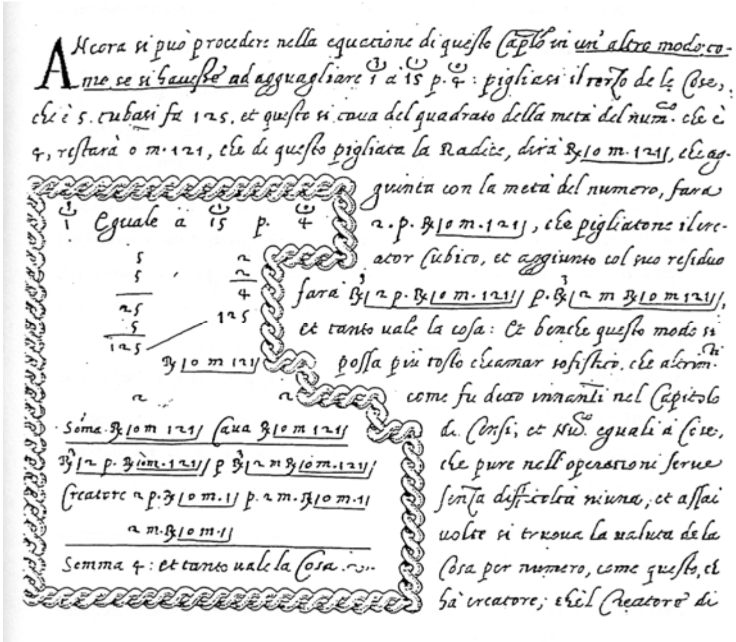
Soit $v = \dfrac{2}{u}$ donc $u^3 - \dfrac{8}{u^3} = 20$, soit encore $u^6 - 20\,u^3 - 8 = 0$ .En posant $U = u^3$ on se ramène donc à une équation du second degré $U^2 - 20\,U - 8 = 0$ dont les deux solutions sont $10 - \sqrt{108}$ et $10 + \sqrt{108}$ l'une étant u^3 et l'autre étant $-v^3$ car u et $-v$ ont un rôle symétrique dans le système. Or $x = u - v$, donc $x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$.

C'est sur cette formule que prend fin le deuxième temps de travail avec les élèves. Nous avons obtenu la formule de Cardan.

Or si l'on applique cette méthode à l'équation $x^3 - 15x = 4$, dont 4 est une solution simple, on obtient l'équation du second degré de variable U : $U^2 - 4\,U + 125 = 0$ de discriminant $\Delta = -484$, et donc de solutions $2 + \sqrt{-121}$ et $2 - \sqrt{-121}$ d'où la solution finale :

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-121} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{-121} - 2}$$ soit des racines de nombres réels négatifs.

Bombelli décrit la recherche du nombre dont le cube est $2 + \sqrt{-121}$:
" *on ajoute le carré de la constante (2) au carré de la racine et de cette somme on prend le côté cubique, puis on cherche à tâtons à trouver un nombre et une racine carrée tels que leurs carrés ajoutés ensemble fassent autant que le côté cubique donné précédemment. Ensuite du cube du nombre étant retranché le triple du produit du nombre par le carré de la racine, ce qui restera sera le nombre de la racine que l'on cherche. Ce serait ainsi si l'on voulait avoir le côté de* $2 + \sqrt{-121}$ *…*"


Ancora si può procedere nella equatione di questo Capitolo in un'altro modo come se si hauesse ad agguagliare 1 a 15 p. 4: pigliasi il terzo de le Cose, che è 5. cubati fa 125, et questo si caua del quadrato della metà del numero che è 4, restarà 0 m. 121, che di questo pigliata la Radice, dirà R[0 m. 121], che aggiunta con la metà del numero, farà 2. p. R[0 m. 121], che pigliatone il lato Cubico, et aggiunto col suo residuo farà R c[2 p. R[0 m. 121]] p. R c[2 m. R[0 m. 121]], et tanto uale la cosa: Et benche questo modo si possa più tosto chiamar sofistico, che altrimenti come fu detto innanzi nel Capitolo di Cosi, et N° eguali a Cose, che pure nell'operationi serue senza difficultà niuna, et assai uolte si troua la ualuta de la Cosa per numero, come questo, et sa creatore; e il Creatore di

1 Eguale a 15 p. 4

Somma R[0 m 121] Caua R[0 m 121]

R c[2 p. R[0 m. 121]] p R c[2 m R[0 m. 121]]

Creatore 2 p. R[0 m. 1] p. 2 m. R[0 m. 1]

Somma 4: et tanto uale la Cosa.

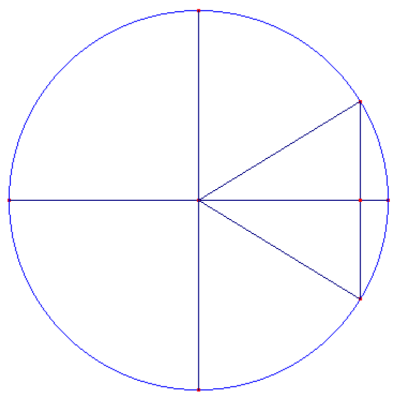
En fait il faut comprendre que Bombelli recherche une racine cubique du type $a + ib$, donc il faut que $(a + ib)^3 = 2 + i\sqrt{121}$. Donc $a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i = 2 + i\sqrt{121}$.

En recherchant une interprétation de cet algorithme on tombe algébriquement sur des notions semblant bien complexe pour l'époque de Bombelli car plus liée à l'interprétation géométrique du début du XIX^e siècle.

Suivons les instructions de Bombelli, prenons le carré de la constante 2 soit 4, ajoutons le carré de la racine de 121 pour obtenir 125, cube dont le côté est 5, or $5 = 1 + 2^2$ (un nombre et une racine carrée tels que leurs carrés ajoutés ensemble fassent autant que le côté cubique donné précédemment), le nombre est donc 2 et la racine carrée est $\sqrt{1}$. Ensuite du cube du nombre 2 soit 8 étant retranché le triple du produit du nombre par le carré de la racine soit $3 \times 2 \times 1 = 6$, il reste alors 2 qui est la constante initiale. Donc $2 + \sqrt{-1}$ est égal à $\sqrt[3]{\sqrt{-121} + 2}$ de même $\sqrt{-1} - 2$ est égal à $\sqrt[3]{\sqrt{-121} - 2}$, donc la solution de l'équation $x^3 - 15x = 4$ est $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1}$ soit 4.

Si nous voulons interpréter maintenant ce calcul, la première étape qui conduit à 125 n'est autre que le calcul de $|2 + i\sqrt{121}|^2 = 125 = |a + ib|^6 = (a^2 + b^2)^3$ où a est appelé le nombre et b la racine. D'où $a^2 + b^2 = 5$, il s'ensuit une recherche à tâtons des valeurs possibles de a et de b. Puis l'algorithme propose une vérification, on calcule $a^3 - 3ab^2$ c'est-à-dire : du cube du nombre a étant retranché le triple du produit du nombre a par le carré de la racine b, le résultat obtenu n'est autre que la partie réelle de $a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i$ et elle doit être égale au nombre de la racine que l'on recherche c'est-à-dire à la partie réelle de $2 + i\sqrt{121}$.

Bombelli remplace donc, en notation moderne, l'égalité de deux complexes $z = z'$ par $\begin{cases} |z|^2 = |z'|^2 \\ \mathcal{R}e(z) = \mathcal{R}e(z') \end{cases}$ ce qui n'est pas tout à fait équivalent la première équation donnant des points images situés sur un même cercle de centre O, l'origine du repère et la deuxième donnant l'égalité des abscisses des deux points images. On voit donc que l'on obtient $z' = z$ ou $z' = \overline{z'}$



Il est plus que probable que la traduction qui précède n'a pas été la justification conduisant Bombelli à proposer son algorithme. On remarque que la méthode est analogue à celle utilisée dans la résolution des équations du second degré à coefficients complexes : on transforme le discriminant $\Delta = a + ib$ sous la forme $\delta^2 = (\alpha + i\beta)^2$ où α et β sont solutions de $\alpha^2 + \beta^2 = |\Delta|$ et $\mathscr{R}e(\delta^2) = \mathscr{R}e(\Delta)$ soit $\alpha^2 - \beta^2 = a$. D'autre part la recherche à tâtons semble bien hasardeuse et elle est du même type que la recherche des racines évidentes d'un polynôme, on se limite en fait aux valeurs entières. Bombelli d'ailleurs, dans l'exemple étudié, propose une autre solution $5 = 1^2 + 4$ mais la vérification qui suit mène à 1 auquel on doit retrancher 3.4 soit 12 ce que refuse de faire Bombelli puisqu'il devrait arriver à 2. D'autre part Bombelli signale que le choix de a se limite aux entiers dont le carré ne dépasse pas 5 puisque $a^2 + b^2 = 5$ donc il se limite aux deux seules possibilités pour a : 1 ou 2 ayant éliminé 1 il ne lui reste que 2 qui convient parfaitement.

Mon travail s'achève donc sur ce dernier paragraphe imparfaitement traité car la méthode de Bombelli m'est restée mystérieuse, mon interprétation anachronique ne pouvant pas être suivie par les élèves dans une introduction aux complexes. Par contre ils peuvent vérifier $2 + \sqrt{-1}$ est égal à $\sqrt[3]{\sqrt{-121} + 2}$ en comparant les deux cubes de ces quantités. C'est ce que j'ai dû me résoudre à faire.

Bibliographie :

- Ars magna or the rules of algebra : girolamo cardano translated by T.R Witmer, Dover
- Analysis by its history : E.Hairer , G.Wanner Springer
- Bombelli l'algebra fragments présentés et traduits par G.Hammon , IREM de Rennes
- Mathématiques au fil des âges : groupe Epistémologie et Histoire des IREM , Gauthier-Villars
- Images, imaginaires, imaginations, une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes : IREM , ellipses