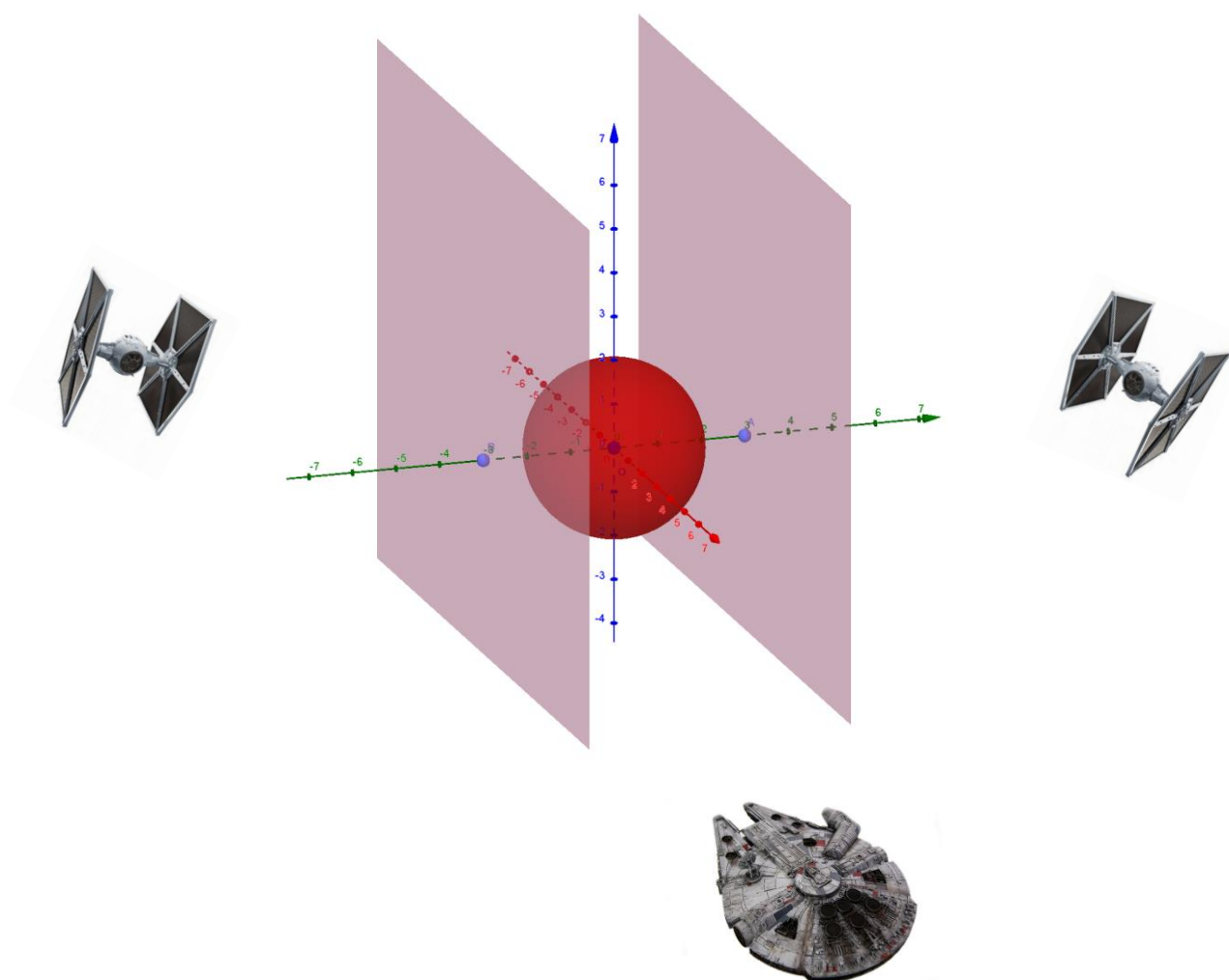


GeoGebra 3D au lycée



LES AUTEURS

- BOYER Emmanuelle
- DE GIOVANNI Patrick
- GASTAL Stéphanie
- GRENIER Bruno
- LALLEMAND Fabrice
- LASCOUMES Pierre
- MATHIEU Jérôme
- ROCQ Alexandre
- SOBELLA Nathalie
- SOBELLA Stéphane
- TRIGOSSE Corinne

Membres du groupe collaboratif « Aurillac-Lycée » de l'IREM de Clermont-Ferrand.

PRÉFACE

Depuis la première version de GeoGebra, publiée en 2001 par le professeur autrichien Markus HOHENWARTER, le logiciel a bien évolué et s'est imposé très rapidement comme le compagnon idéal du professeur de mathématiques, et de ses élèves, détrônant ses prédécesseurs et concurrents.

Depuis l'origine, GeoGebra se distingue par la possibilité de créer des objets géométriques directement à la souris ou en saisissant leur équation algébrique, d'où le nom du logiciel, mot valise formé à partie des mots Geometrie et Algebra.

Les versions successives ont apporté de nouvelles fonctionnalités : tableur depuis la version 3.2, calcul formel depuis la version 4.2, puis géométrie dans l'espace depuis la version 5.

Avec cette dernière version, GeoGebra vient combler un manque : qui voulait auparavant travailler la géométrie dans l'espace avec un logiciel de géométrie dynamique n'avait pas beaucoup d'autre choix que d'utiliser Geospace, logiciel qui n'est plus développé depuis 2009.

Les fonctionnalités de géométrie dans l'espace, cependant, peuvent être un peu déroutantes au premier abord et il nous a semblé utile de proposer un manuel de prise en main rapide de ces outils afin de permettre aux collègues désirant se lancer dans son utilisation de ne pas rester bloqués par ces « petites choses toutes bêtes » qui ont pu, nous aussi, nous arrêter au premier contact.

A cette présentation des fonctionnalités de GeoGebra 3D, nous avons ajouté de nombreux exemples d'exercices, problèmes et travaux pratiques que nous avons testés auprès de nos élèves de seconde et de terminale S.

Nous espérons que ce travail, qui nous aura occupé pendant deux années scolaires, sera utile à nos collègues.

Aujourd'hui développé par une équipe internationale, GeoGebra continue toujours à évoluer. La dernière version, GeoGebra 6, apporte des changements importants dans l'interface graphique du logiciel et est déclinée en différentes sous-versions pour les ordinateurs, les tablettes, les smartphones et le web. Depuis sa création, le logiciel est libre, gratuit et multiplateforme ; il peut être téléchargé par les élèves en toute simplicité.

Les auteurs

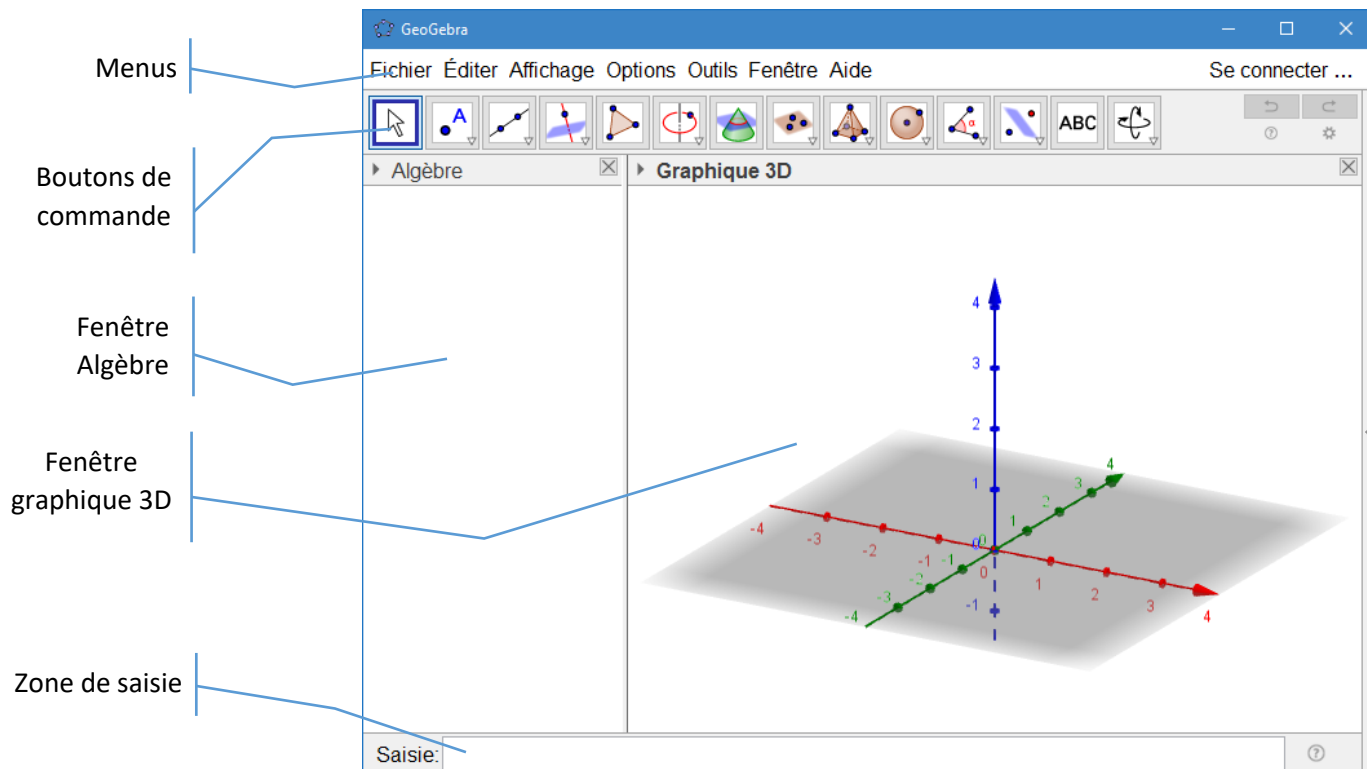
TABLE DES MATIÈRES

1. Prise en main du logiciel – Principales fonctionnalités	6
1.1. Interface	6
1.2. Zoom sur les boutons de commande	6
1.3. Réglages de la fenêtre graphique 3D	7
1.4. Les objets de base de l'espace	8
1.5. Manipulation de la figure	10
1.6. Construction de solides de base	11
2. Activités pour la classe de seconde	16
2.1. Conjecturer une propriété géométrique	16
2.2. Sections de solides	16
2.3. Schématiser des situations de l'espace	17
2.4. Réaliser une figure complexe	17
2.5. Incidence dans l'espace	17
2.6. Positions relatives dans l'espace	18
2.7. Intersections dans l'espace	19
2.8. Avec des volumes	20
2.9. Optimisation du volume d'une boîte de conserve	21
2.10. Repérage sur la sphère	22
2.11. Calcul de distances sur la sphère	24
3. Fonctionnalités supplémentaires pour la classe de terminale S	26
3.1. Orthogonalité dans l'espace	26
3.2. Vecteurs dans l'espace	26
3.3. Base de l'espace	26
3.4. Coordonnées dans l'espace	27
3.5. Représentation paramétrique d'une droite	27
3.6. Produit scalaire dans l'espace	27
3.7. Équation de plan	27
4. Activités pour la classe de terminale S	28
4.1. Intersection de deux droites	28
4.2. Intersection d'une droite et d'un plan	28
4.3. Intersection de deux plans	28
4.4. Intersection de plans	29
4.5. Tétraèdre équifacial	29
4.6. Volume d'un tétraèdre	29
4.7. Vrai / Faux	30
4.8. Plan tangent à une sphère	30
5. Activités transversales	32
Annexe : maquette d'une sphère en carton	33

1. Prise en main du logiciel – Principales fonctionnalités

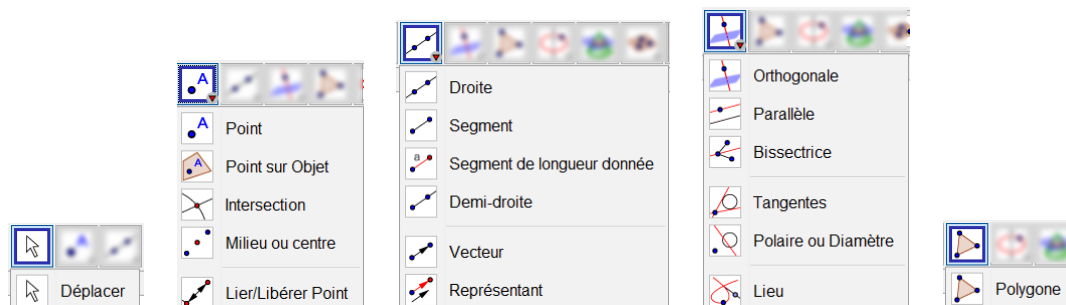
1.1. Interface

À l'ouverture du logiciel, on choisit le mode « Calculatrice 3D ». On retrouve les différents éléments de l'interface habituelle de GeoGebra :

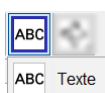


1.2. Zoom sur les boutons de commande

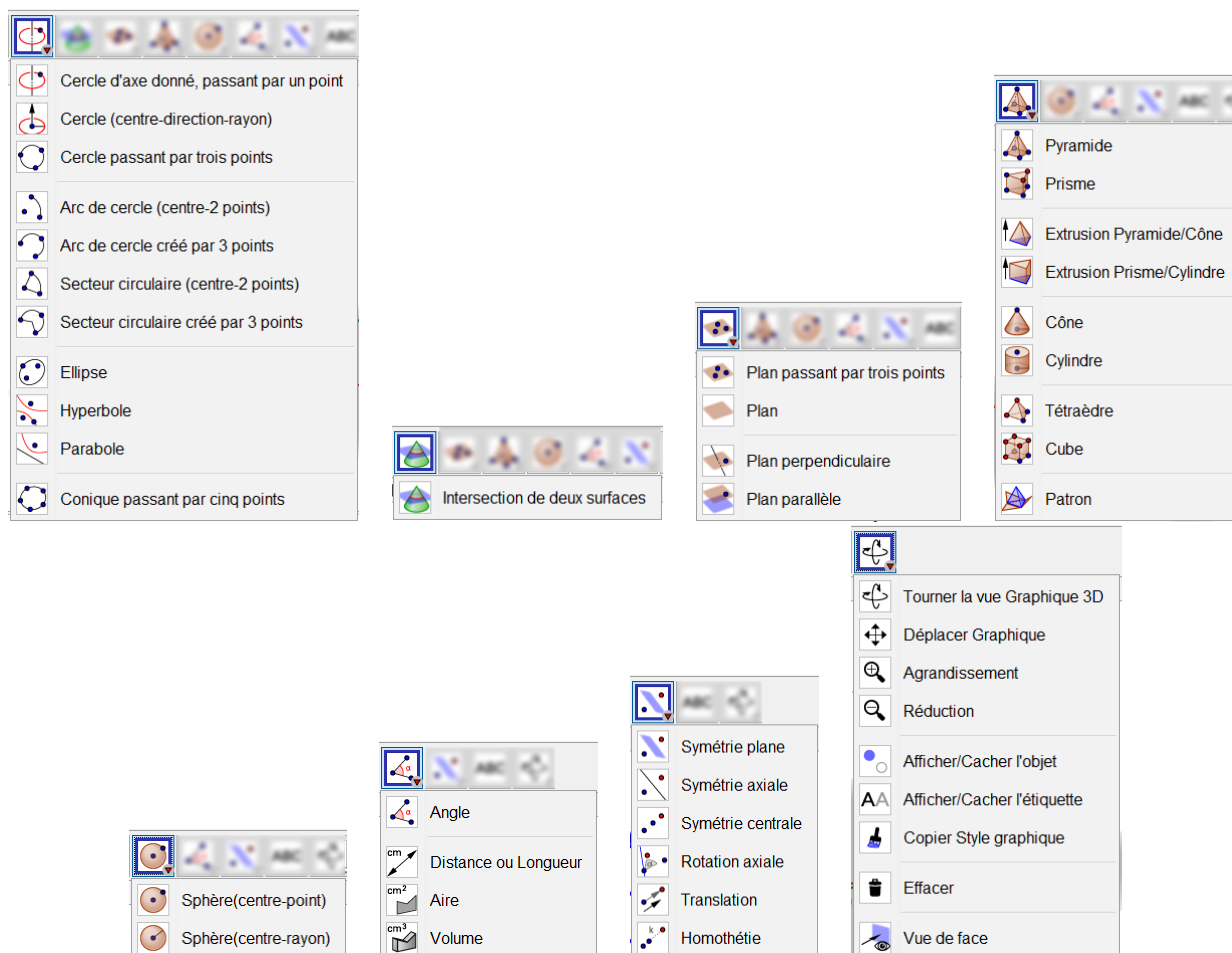
Les cinq premiers boutons de la barre sont les mêmes que dans la version 2D du logiciel :



Un peu plus loin, le bouton permettant d'insérer du texte dans la fenêtre graphique est également le même que dans la version 2D du logiciel.



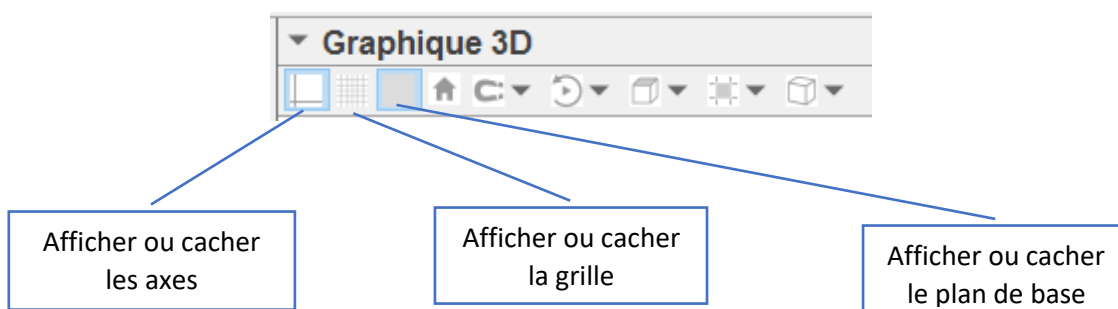
Les boutons propres à la géométrie dans l'espace :



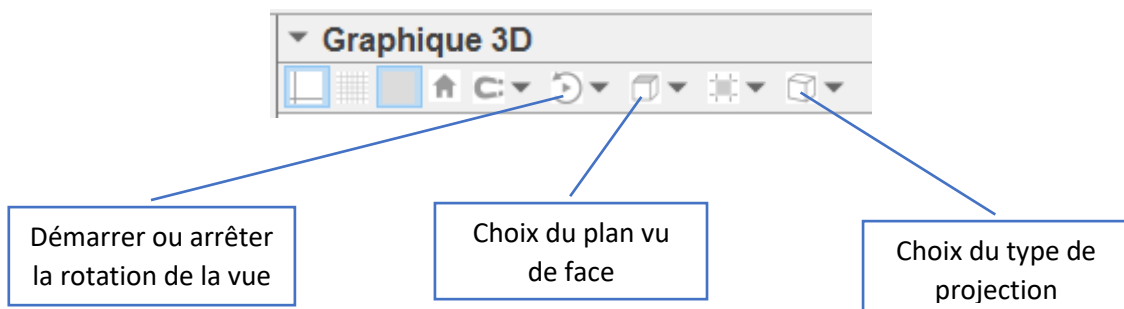
1.3. Réglages de la fenêtre graphique 3D

En cliquant sur le petit triangle noir à gauche du titre de la fenêtre graphique 3D, on fait apparaître une petite barre de boutons permettant de paramétrer l'affichage.

Choix des éléments affichés :

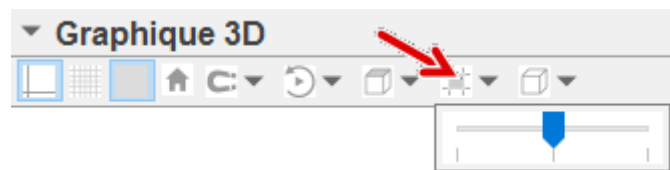


Choix du mode d'affichage :



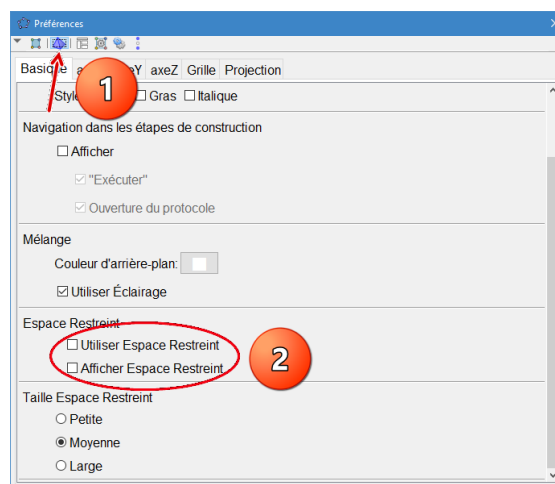
Dans le choix du type de projection, une option originale permet d'obtenir une figure à visualiser à l'aide de lunettes spéciales (un verre rouge et un verre bleu).

L'espace restreint :



Par défaut, la figure visible dans la fenêtre graphique 3D de GeoGebra est limitée à l'intérieur d'un cube invisible, appelé « espace restreint ». Ce bouton de la barre permet de régler la taille de cet espace.

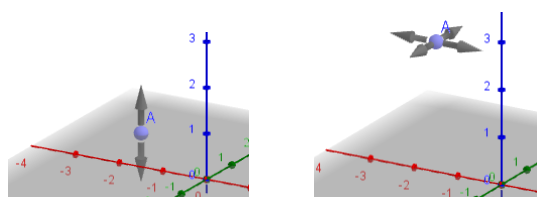
On peut aussi, dans la fenêtre de réglage des propriétés (menu « Éditer », « Propriétés »), décider de ne pas utiliser l'espace restreint.



1.4. Les objets de base de l'espace

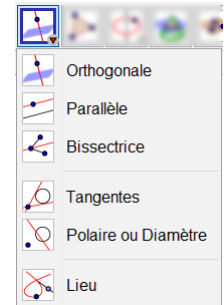
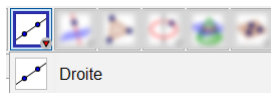
Le point

Avec la commande « Point », on crée un point dans le plan de base. En cliquant une première fois sur ce point, on peut modifier sa cote. Par un nouveau clic, on peut déplacer de nouveau le point parallèlement au plan de base.



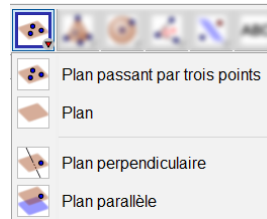
La droite

Une droite est définie par deux points non confondus. Elle peut être créée en choisissant une des commandes des boutons de création de droites.



Le plan

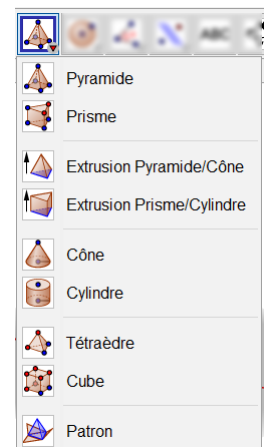
Un plan est défini par trois points non alignés. Il peut être créé en choisissant une des commandes du bouton de création de plans.



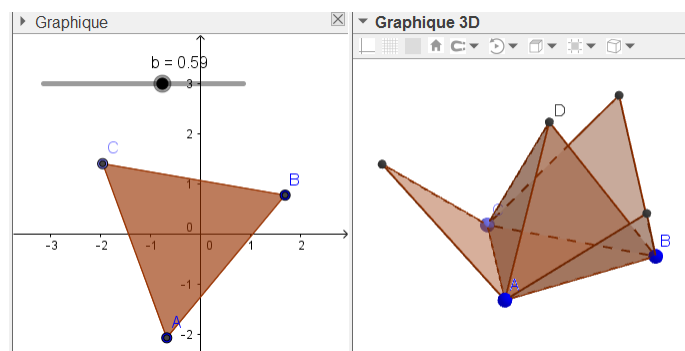
Solides

Pour construire un polyèdre, on peut :

- Utiliser les commandes « Pyramide », « Prisme », « Tétraèdre », « Cube » du bouton de création de solides. Les commandes « Tétraèdre » et « Cube » ne nécessitent la sélection que de deux points : le tétraèdre créé est toujours régulier.
- Procéder par extrusion : on crée un polygone dans un plan (base du polyèdre), puis on définit une hauteur.
- La commande « Patron » permet d'obtenir le patron d'un polyèdre. Ce patron apparaît dans le plan de base $(O; \vec{i}, \vec{j})$. En « tirant » avec la souris sur l'un des points du patron, on peut replier celui-ci.

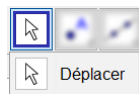


On peut aussi faire afficher la fenêtre graphique 2D (menu « Affichage », « Graphique ») dans laquelle un curseur permet de régler l'ouverture du patron.

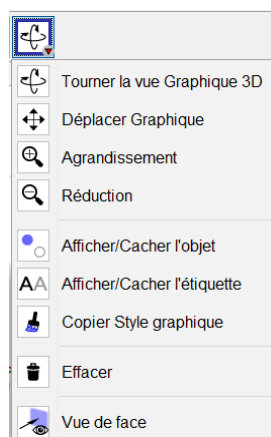


1.5. Manipulation de la figure

- Pour faire tourner la figure, choisir la commande « Déplacer », puis faire glisser la souris sur la figure en laissant le bouton droit enfoncé.



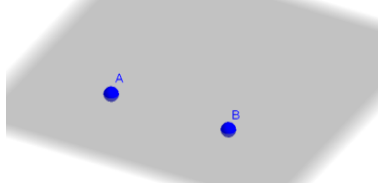
- La fonction « Vue de face » permet de choisir (en cliquant dessus) le plan vu de face.
- Les fonctions « Déplacer Graphique », « Agrandissement », « Réduction » peuvent être bien pratiques pour recentrer la figure à l'écran.
- La fonction « Recadrer » (accessible avec un clic droit) permet d'adapter automatiquement l'échelle de la figure afin de rendre visibles tous les objets créés.



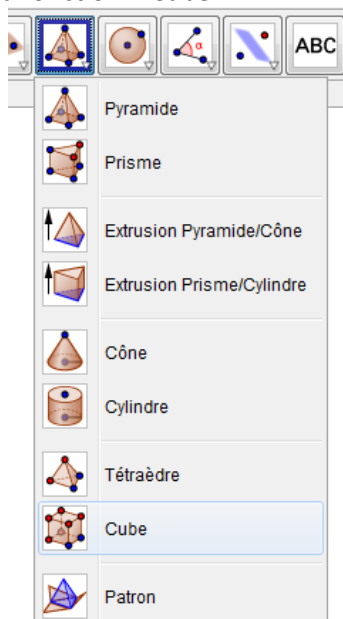
➤ LE CUBE

À partir de deux points libres A et B et de la fonction « cube »

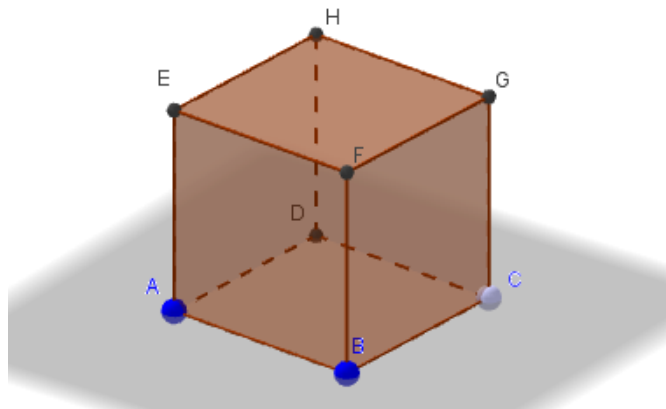
Enlever les axes et la grille (clic droit).
Créer deux points A et B sur le plan de base.



Cliquer sur la fonction « Cube » :



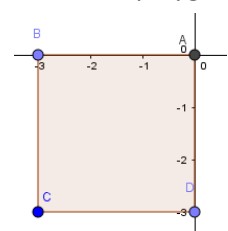
Cliquer sur A puis sur B :



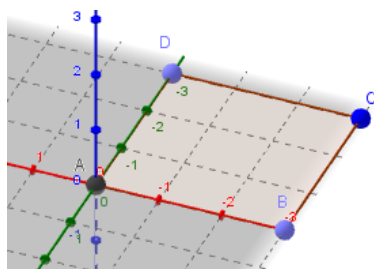
C est semi-libre (bleu clair).
D, E, F, G et H sont liés (en noir).

À partir d'un carré et de la fonction « Extrusion Prisme/Cylindre »

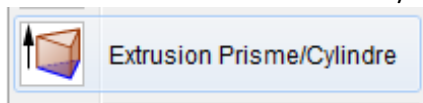
En s'aidant de la grille du plan de base, placer quatre points libres de façon à former un carré (avec la fonction « polygone » par exemple).



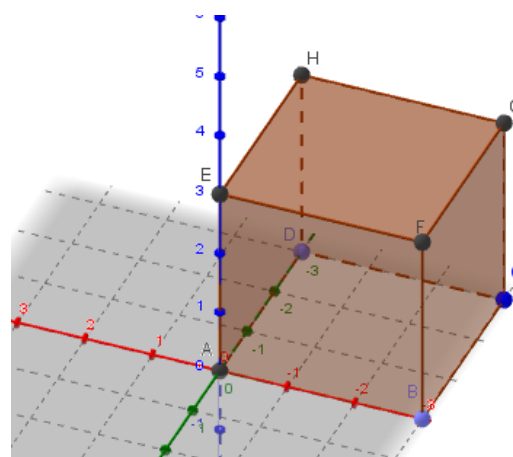
Recliquer sur A pour créer le carré ABCD.



Cliquer sur la fonction « Extrusion Prisme/Cylindre » :



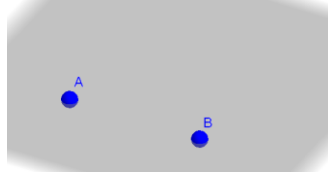
Cliquer sur la face ABCD puis donner la hauteur : 3 dans cet exemple (car on veut obtenir un cube).



➤ LE PAVÉ DROIT

À partir d'un segment [AB] et de la fonction « Prisme »

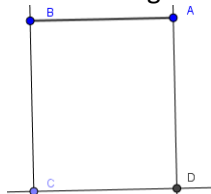
Enlever les axes et la grille (clic droit).
Créer deux points A et B sur le plan de base.



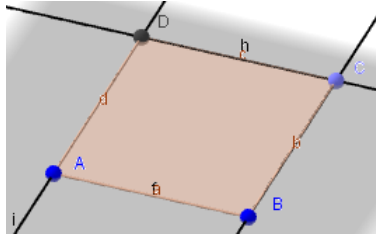
Créer le segment [AB].

Dans la fenêtre Graphique, créer la perpendiculaire à [AB] passant par A et la perpendiculaire à [AB] passant par B.

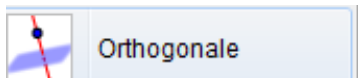
Placer un point C sur la deuxième droite.
Finir la construction du rectangle ABCD.



Créer le polygone ABCD.

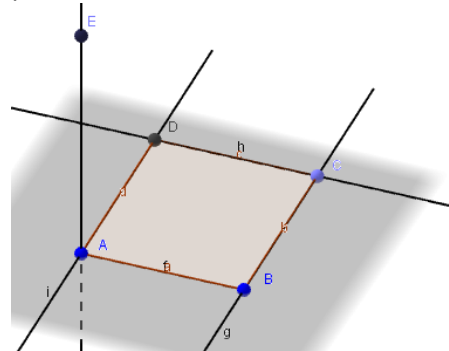


Dans la fenêtre **Graphique 3D**, Cliquer sur la fonction « Orthogonale » :

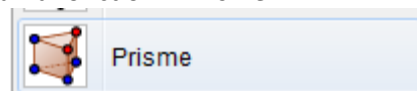


Cliquer sur le plan de base et sur le point A.

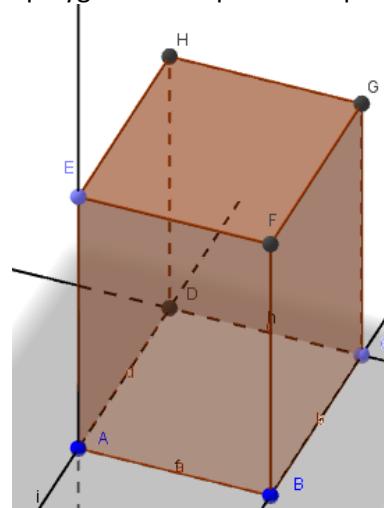
Placer un point E sur la droite créée.



Cliquer sur la fonction « Prisme » :

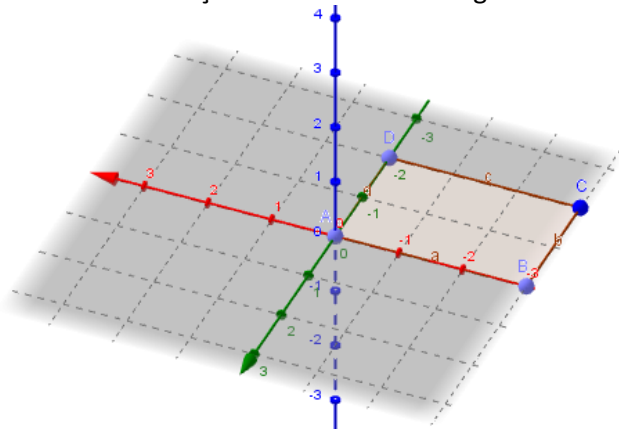


Cliquer sur le polygone ABCD puis sur le point E.

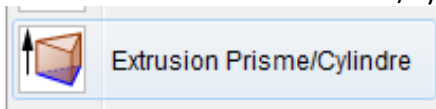


A partir d'un rectangle et de la fonction « Extrusion Prisme/Cylindre »

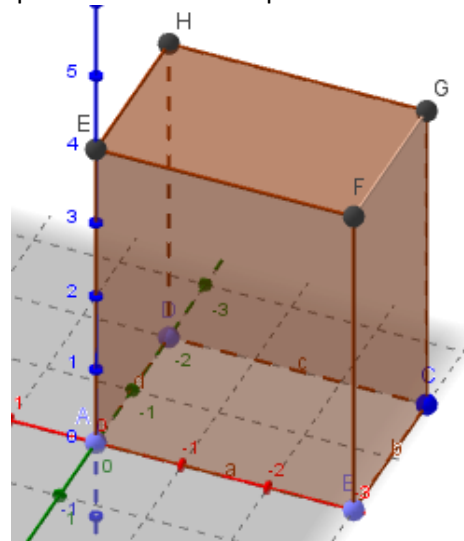
En s'aidant de la grille du plan de base, placer quatre points libres de façon à former un rectangle.



Cliquer sur la fonction « Extrusion Prisme/Cylindre » :



Cliquer sur la face ABCD puis donner la hauteur : 4 par exemple afin d'obtenir un pavé droit.

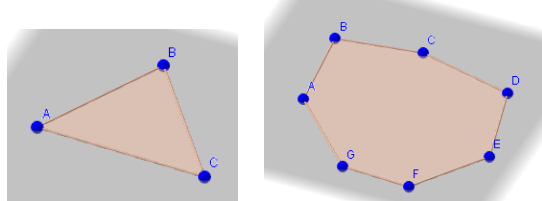


➤ LA PYRAMIDE

À partir d'un polygone et de la fonction « Pyramide »

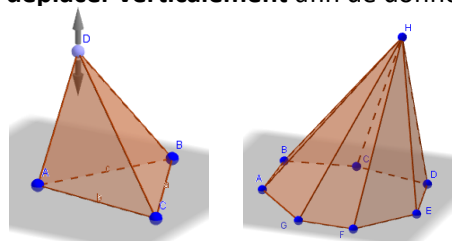
Enlever les axes et la grille (clic droit).

Créer un polygone quelconque sur le plan de base.



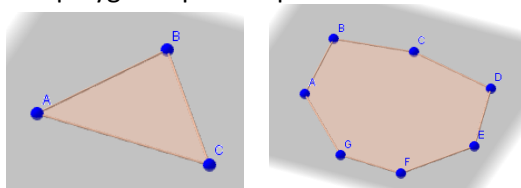
Cliquer sur la fonction « Pyramide » :

Cliquer sur le polygone puis sur un point quelconque, qu'il faudra **déplacer verticalement** afin de donner du volume.

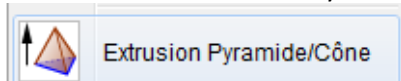


À partir d'un polygone et de la fonction « Extrusion Pyramide/Cône »

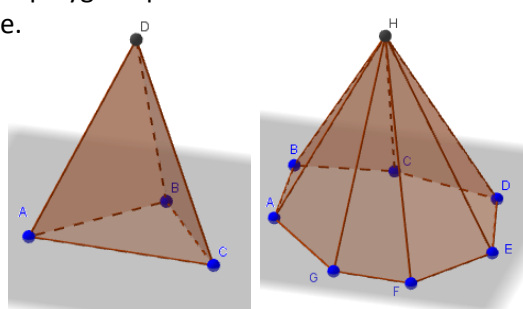
Créer un polygone quelconque.



Cliquer sur la fonction « Extrusion Pyramide/Cône » :



Cliquer sur le polygone puis donner la hauteur : 4 par exemple.



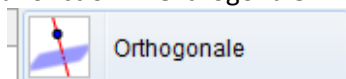
➤ LE CÔNE

À partir d'un point et de la fonction « Cône »

Enlever les axes et la grille (clic droit).

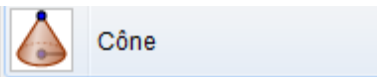
Dans la fenêtre **Graphique 3D**, créer un point A sur le plan de base.

Cliquer sur la fonction « Orthogonale » :

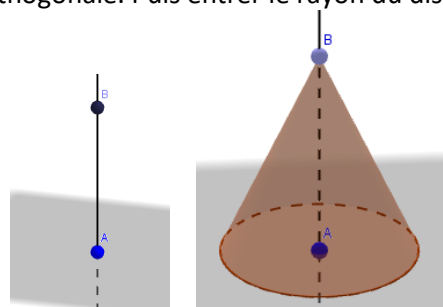


Cliquer sur le plan de base et sur le point A.

Cliquer sur la fonction « Cône » :



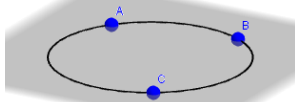
Cliquer sur le point A puis sur un point quelconque sur la droite orthogonale. Puis entrer le rayon du disque.



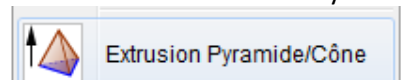
A partir d'un cercle et de la fonction « Extrusion Pyramide/Cône »

Enlever les axes et la grille (clic droit).

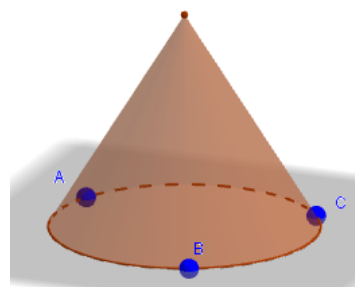
Dans la fenêtre **Graphique 3D**, créer un cercle (passant par trois points par exemple) sur le plan de base.



Cliquer sur la fonction « Extrusion Pyramide/Cône » :



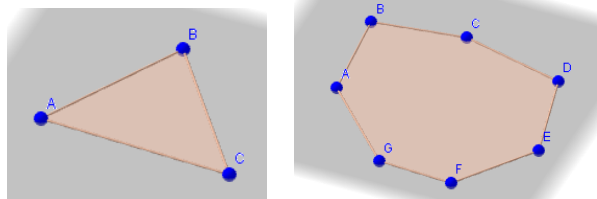
Cliquer sur le cercle puis donner la hauteur : 5 par exemple.



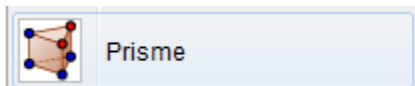
➤ LE PRISME

À partir d'un polygone et de la fonction « Prisme »

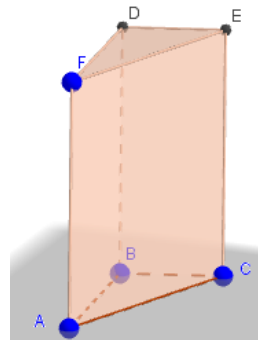
Enlever les axes et la grille (clic droit).
Créer un polygone quelconque sur le plan de base.



Cliquer sur la fonction « Prisme » :

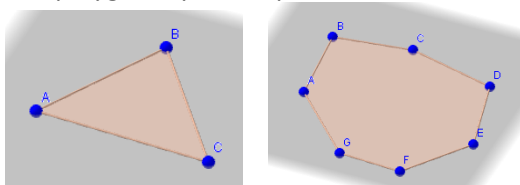


Cliquer sur le polygone puis sur un point quelconque, qu'il faudra **déplacer verticalement** afin de donner du volume.

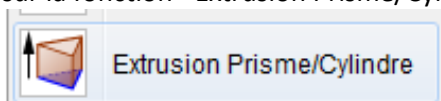


À partir d'un polygone et de la fonction « Extrusion Prisme/Cylindre »

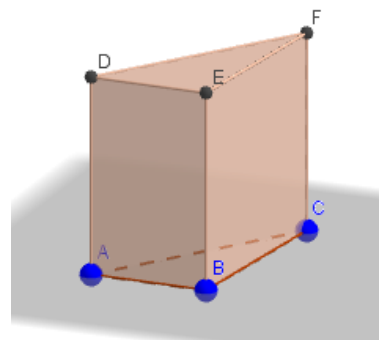
Enlever les axes et la grille (clic droit).
Créer un polygone quelconque.



Cliquer sur la fonction « Extrusion Prisme/Cylindre » :



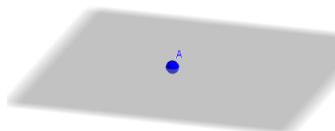
Cliquer sur le polygone puis donner la hauteur : 4 par exemple.



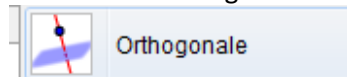
➤ LE CYLINDRE

À partir d'un point et de la fonction « Cylindre »

Enlever les axes et la grille (clic droit).
Dans la fenêtre **Graphique 3D**, créer un point A sur le plan de base.

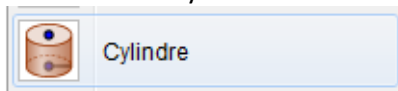


Cliquer sur la fonction « Orthogonale » :

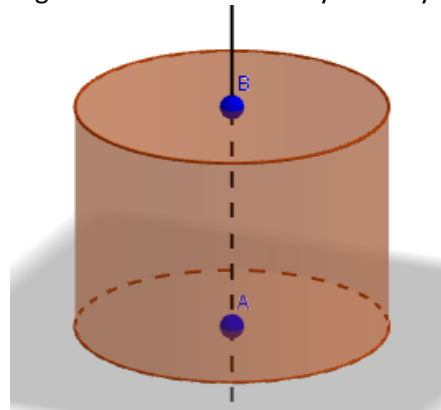


Cliquer sur le plan de base et sur le point A.

Cliquer sur la fonction « Cylindre » :



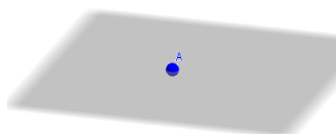
Cliquer sur le point A puis sur un point quelconque sur la droite orthogonale. Puis entrer le rayon du cylindre.



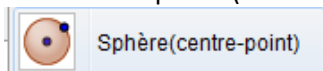
➤ LA SPHÈRE

À partir d'un point et de la fonction « Sphère (centre-point) »

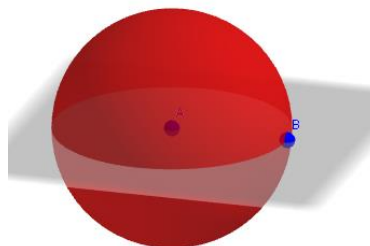
Enlever les axes et la grille (clic droit).
Dans la fenêtre Graphique **3D**, créer un point A sur le plan de base.



Cliquer sur la fonction « Sphère (centre-point) » :

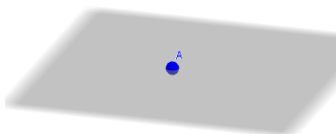


Cliquer sur le point A puis sur un point quelconque.

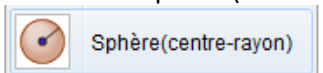


À partir d'un point et de la fonction « Sphère (centre-rayon) »

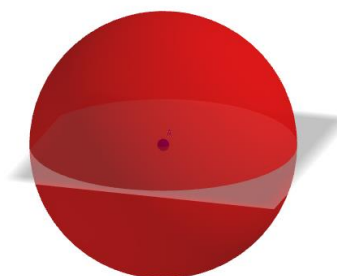
Enlever les axes et la grille (clic droit).
Dans la fenêtre **Graphique 3D**, créer un point A sur le plan de base.



Cliquer sur la fonction « Sphère (centre-rayon) » :



Cliquer sur A donner le rayon : 4 par exemple.



2. Activités pour la classe de seconde

2.1. Conjecturer une propriété géométrique

$ABCD$ est un tétraèdre. $\mathcal{D}$ est une droite du plan (BCD) parallèle à (BC) . E est un point de $[AD]$.

$\mathcal{D}$ coupe (BD) en I et (CD) en J .

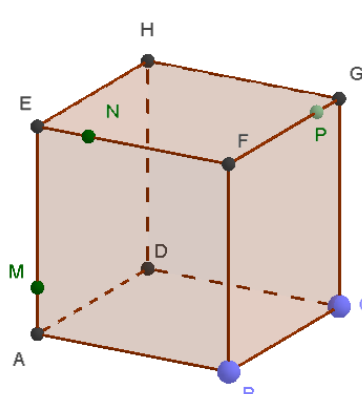
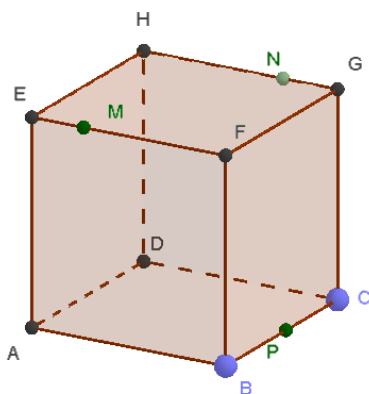
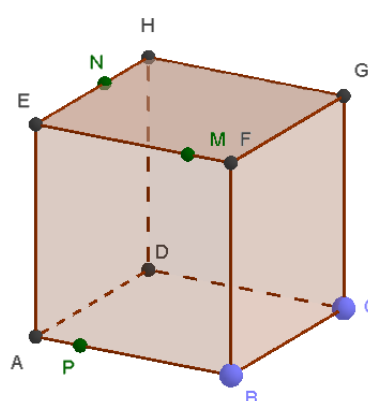
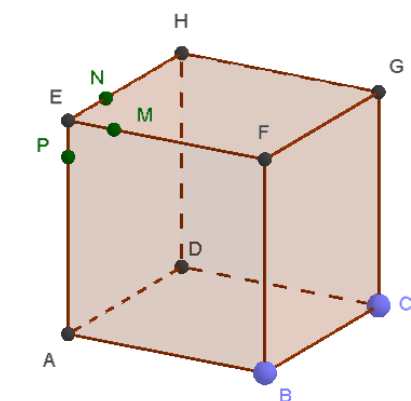
Le plan (ABC) coupe respectivement les droites (EI) et (EJ) en M et N .

1. Construire une figure correspondant à cette configuration.
2. Que peut-on dire des droites (MN) et (BC) ?

2.2. Sections de solides

Dans chaque cas, $ABCDEFGH$ est un cube, M , N et P sont placés sur trois arêtes de ce cube.

Construire le cube, placer M , N et P puis construire la section du cube par le plan (MNP) . Quelle est la nature de cette section ?



2.3. Schématiser des situations de l'espace

Illustrer à l'aide d'une construction chacune des propriétés suivantes. Vous pouvez vous appuyer sur un solide usuel (cube, parallélépipède rectangle, tétraèdre, ...), ou pas. Par contre, il est interdit de se placer dans un cas particulier.

P1. Deux droites de l'espace parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.

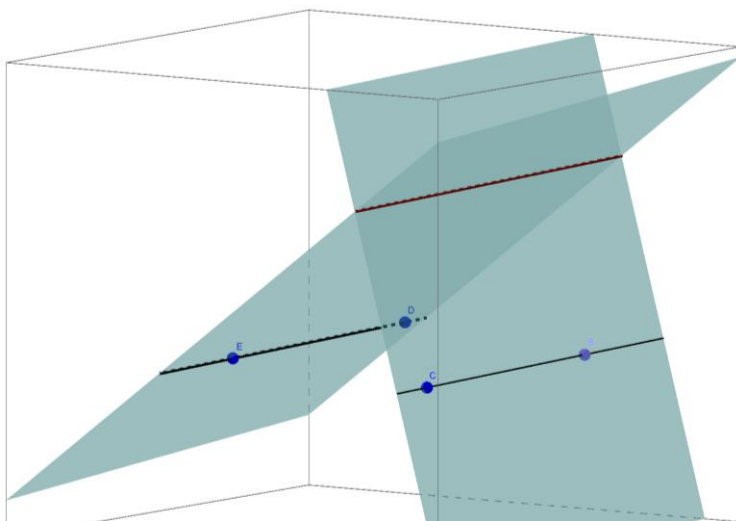
P2. Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

P3. Si une droite d est parallèle à une droite d' , alors d est parallèle à tout plan qui contient d'

P4. Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan P' , alors les plans P et P' sont parallèles

2.4. Réaliser une figure complexe

Réaliser la figure ci-contre (théorème du toit).



2.5. Incidence dans l'espace

Dans GeoGebra, créer un cube ABCDEFGH.

Pour plus de lisibilité, on masquera les axes, la grille, le plan ainsi que les différents objets utilisés pour les constructions au fur et à mesure de l'exercice.

Placer :

- Les points I, J et K milieux respectifs des côtés [AD], [BC] et [AB].
 - Les points L, M et N centres respectifs des carrés CDHG, EFGH et ADHE.
 - Le point O, centre du cube ABCDEFGH.
-
- | | |
|---|------------------|
| 1. Dans chacun des cas suivants, préciser si les droites données sont sécantes, parallèles, coplanaires ou non-coplanaires. | a. (HI) et (GJ) |
| | b. (CK) et (CF) |
| | c. (JK) et (AC) |
| | d. (HI) et (CK) |
| | e. (HI) et (JF) |
| | f. (JK) et (GE). |

2. Dire si chacune des affirmations suivantes est VRAIE ou FAUSSE :
 - a. Le point L appartient à la droite (GK).
 - b. Le point O appartient à la droite (EC).
 - c. Le point K appartient au plan (OLM).
 - d. La droite (HL) est parallèle au plan (OJK).

3. Quelle est la position relative :
 - a. De la droite (AB) et du plan (OLN) ?
 - b. Des plans (OML) et (ABE) ?
 - c. Des plans (IML) et (BCG) ?
 - d. Des plans (OLK) et (ADE) ?

2.6. Positions relatives dans l'espace

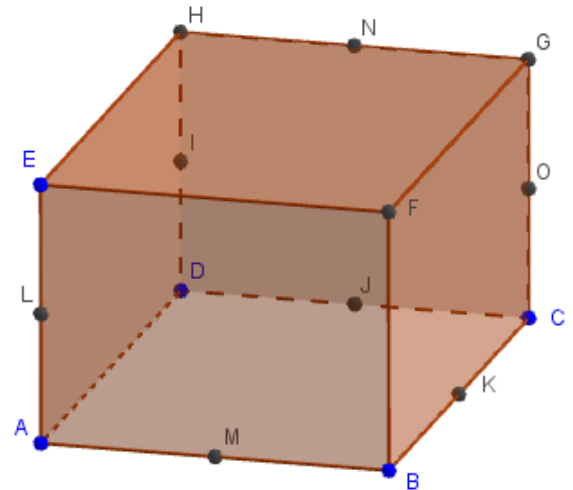
Avec le logiciel Geogebra3D, créer un pavé droit ABCDEFGH.

Placer ensuite les points I, J, K, L, M, N, O milieux des arêtes.

Cet exercice est un QCM. Il peut y avoir plusieurs réponses exactes.

On se servira des fonctions du logiciel Geogebra3D afin de répondre aux questions suivantes.

Penser à utiliser la fonction « tourner la vue » afin de bien voir le solide sous des angles différents.



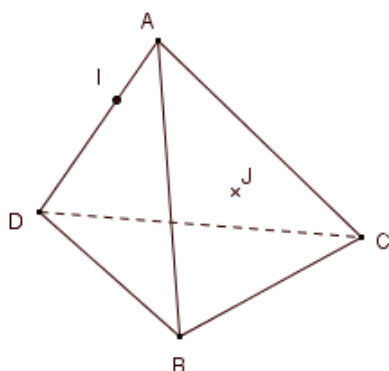
1. Les points I, J, K sont :	alignés	non coplanaires	coplanaires
2. Le point A appartient au plan :	(BFE)	(MJK)	(FGN)
3. (HG) et (EF) sont :	coplanaires	confondues	strictement parallèles
4. Les droites (IJ) et (LM) sont :	non coplanaires	parallèles	sécantes
5. Les droites (LM) et (IN) sont :	parallèles	sécantes	non coplanaires
6. La droite (DK) est incluse dans le plan :	(AJK)	(INF)	(DFK)
7. Les plans (LIH) et (KGF) sont :	parallèles	sécants	confondus
8. Les plans (NKO) et (MFC) se coupent suivant :	(MK)	(MO)	Une droite passant par M.
9. Les plans (DIJ) et (EHF) se coupent suivant la droite :	(HI)	(HG)	(HE)
10. Le plan (JKO) est parallèle au plan :	(BGD)	(BFD)	(DMJ)

2.7. Intersections dans l'espace

Pour chacun des exercices suivants :

- Construire sur la feuille l'intersection cherchée en faisant apparaître tous les traits de construction nécessaires. Faire en parallèle ce travail sur Geogebra3D.
- Validation : Construire directement l'intersection cherchée avec le logiciel (outils : *Intersection* et *Intersection de deux surfaces*) et comparer avec le résultat obtenu précédemment.

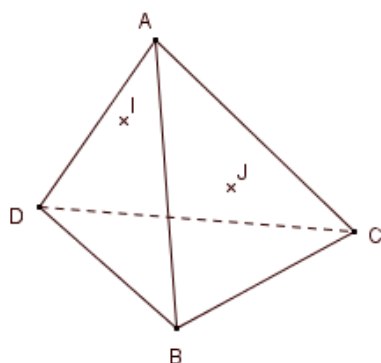
Exercice 1 : Soit ABCD un tétraèdre, I un point de l'arête [AD] et J un point de la face ABC.



Construire l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD).

Aide : Tracer la section du tétraèdre par le plan (AIJ).

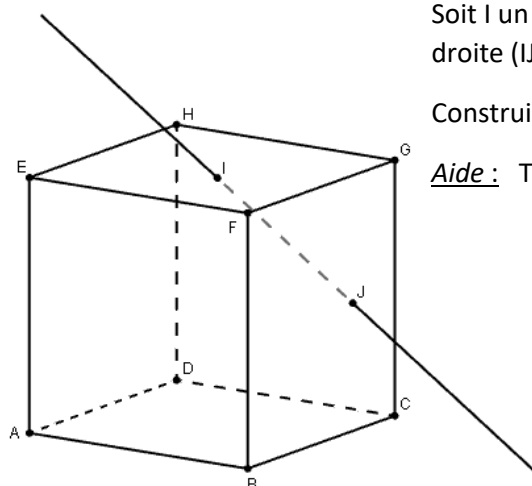
Exercice 2 : Soit ABCD un tétraèdre, I un point de la face ABD et J un point de la face ABC.



Construire l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD).

Aide : Tracer la section du tétraèdre par le plan (AIJ).

Exercice 3 : Soit ABCDEFGH un cube.

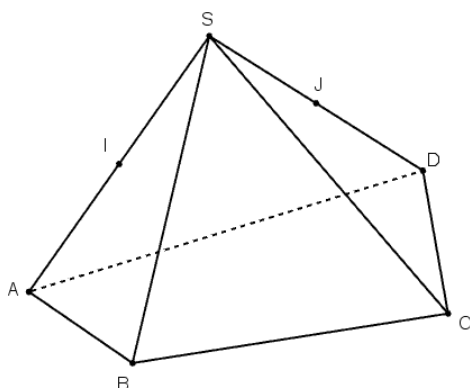


Soit I un point de la face EFGH et J un point de la face BCGF, tels que la droite (IJ) **n'est pas** parallèle au plan (ABC).

Construire l'intersection de la droite (IJ) et du plan (ABC).

Aide : Tracer la section du cube par le plan (GIJ).

Exercice 4 : Utiliser une démarche similaire pour résoudre cet exercice.



Soit SABCD une pyramide telle que [AD] et [BC] **ne sont pas** parallèles.

Soit I et J les milieux respectifs des arêtes [SA] et [SD].

Construire la section de la pyramide par le plan (CIJ).

Exercice 5 :

Soit ABCDEFGH, un cube et I, J, K et L les milieux respectifs des côtés [AE], [AB], [BC] et [CG].

Montrer que les droites (IJ), (FB) et (KL) sont concourantes.

2.8. Avec des volumes

Exercice 1

Soit ABCDEFGH, un cube de côté 3. On s'intéresse au tétraèdre ABCF.

La droite passant par B orthogonale au plan (CFA) coupe celui-ci en I.

Faire afficher la longueur BI, puis retrouver cette valeur par le calcul en exprimant le volume du tétraèdre ABCF de deux manières différentes.

Exercice 2

Placer les points A(3,3,3) et B(3,3,0). Construire la sphère Σ , de centre A passant par B.

Placer un point C sur (AB), à l'intérieur de la sphère.

Γ est l'intersection de Σ et du plan parallèle à (xOy) passant par C, et D un point de Γ .

Construire le cône de sommet B et de rayon CD.

Faire afficher le volume de ce cône et déterminer la position de C pour que ce volume soit maximal.

Retrouver ce résultat avec les fonctions :

Soit z, l'altitude du point C.

Montrer que si r est le rayon de Γ , alors on a : $r^2 = 9 - (z-3)^2$

Montrer alors le volume du cône en fonction de z est donné par $V(z) = \frac{\pi}{3} (-z^3 + 6z^2)$ et déterminer à l'aide de la calculatrice le maximum de cette fonction et la valeur en laquelle il est atteint.

2.9. Optimisation du volume d'une boîte de conserve

Les boîtes de conserve métalliques habituelles sont des cylindres qui ont une contenance de 850 mL, soit 850 cm³. Pour réduire leur coût de fabrication, une entreprise souhaite minimiser la quantité d'acier utilisée pour la fabrication de la boîte, tout en conservant le même volume.

Il s'agit donc de minimiser la surface totale du cylindre, à volume constant.

1. On note r le rayon de la boîte en cm et $A(r)$ l'aire totale de la surface d'acier nécessaire à sa fabrication.
 - a. Sachant que le volume de la boîte est égal à 850 cm³, montrer que la hauteur h de la boîte vérifie : $h = \frac{850}{\pi r^2}$.
 - b. Montrer que $A(r) = 2\pi r^2 + \frac{1700}{r}$.

Modélisation avec GeoGebra

2. Ouvrir GeoGebra.

Afficher la fenêtre Algèbre, la fenêtre 3D et la fenêtre Graphique.

Dans la fenêtre Graphique, créer un curseur « r » qui représentera le rayon de la boîte : nombre réel variant de 0 à 10 avec un pas de 0,01.

Dans la fenêtre Algèbre, créer le nombre « h » égal à la hauteur de la boîte en entrant : $h = \frac{850}{\pi r^2}$.

Dans la fenêtre 3D, créer le point A=(0,0,0) origine du repère et le point B=(0,0,h). Le point B est ainsi situé à une distance h du point A, sur l'axe vertical.

Créer le cylindre (la boîte) en choisissant la commande adéquate dans le menu Solides : cliquer sur A, puis sur B, puis saisir le rayon r .



À ce stade, en bougeant le curseur r , vous voyez la forme de la boîte changer.

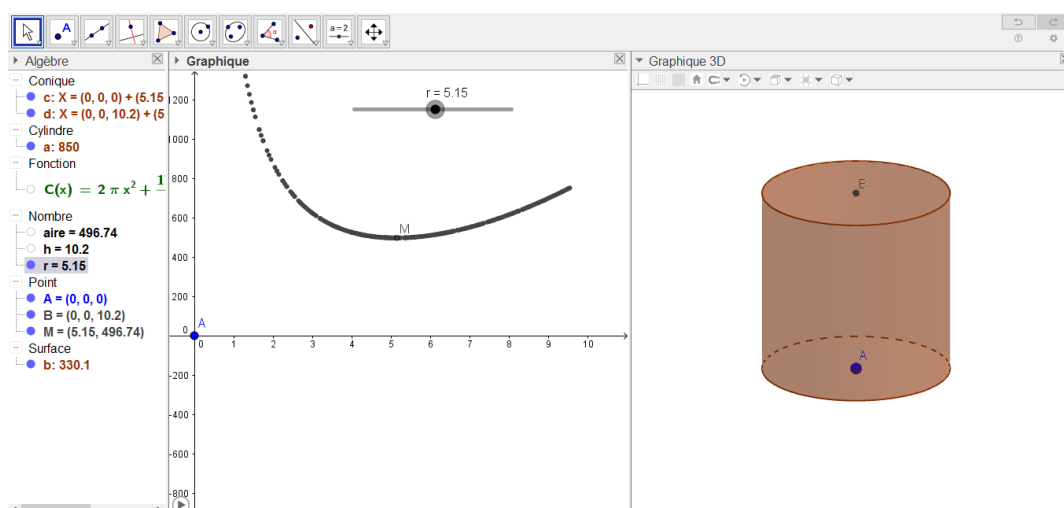
3. Dans la fenêtre Algèbre, créer le nombre « aire » égal à l'aire totale du cylindre en entrant la formule adéquate : aire = ...

Dans la fenêtre Graphique, créer le point M de coordonnées (r , aire) : ce point est un point de la courbe représentant l'aire en fonction du rayon. Pour voir le point M, il faut changer l'échelle sur l'axe des ordonnées : faire un clic droit dans la fenêtre graphique et régler « axeX : axeY » à 1/200.

axeX : axeY ▶

Afficher la trace du point M, puis déplacer le curseur. Déterminer ainsi la position du point M permettant d'obtenir une aire minimale et observer la boîte correspondante dans la fenêtre 3D.

4. Évaluer le rapport h/r lorsque l'aire est minimale. Comparer avec les boîtes de conserves usuelles.



2.10. Repérage sur la sphère

On assimilera le globe terrestre à une boule et on prendra pour rayon de la Terre : 6 370 km

Repérage : Sur la surface terrestre, un point est repéré par sa **longitude** et sa **latitude**.

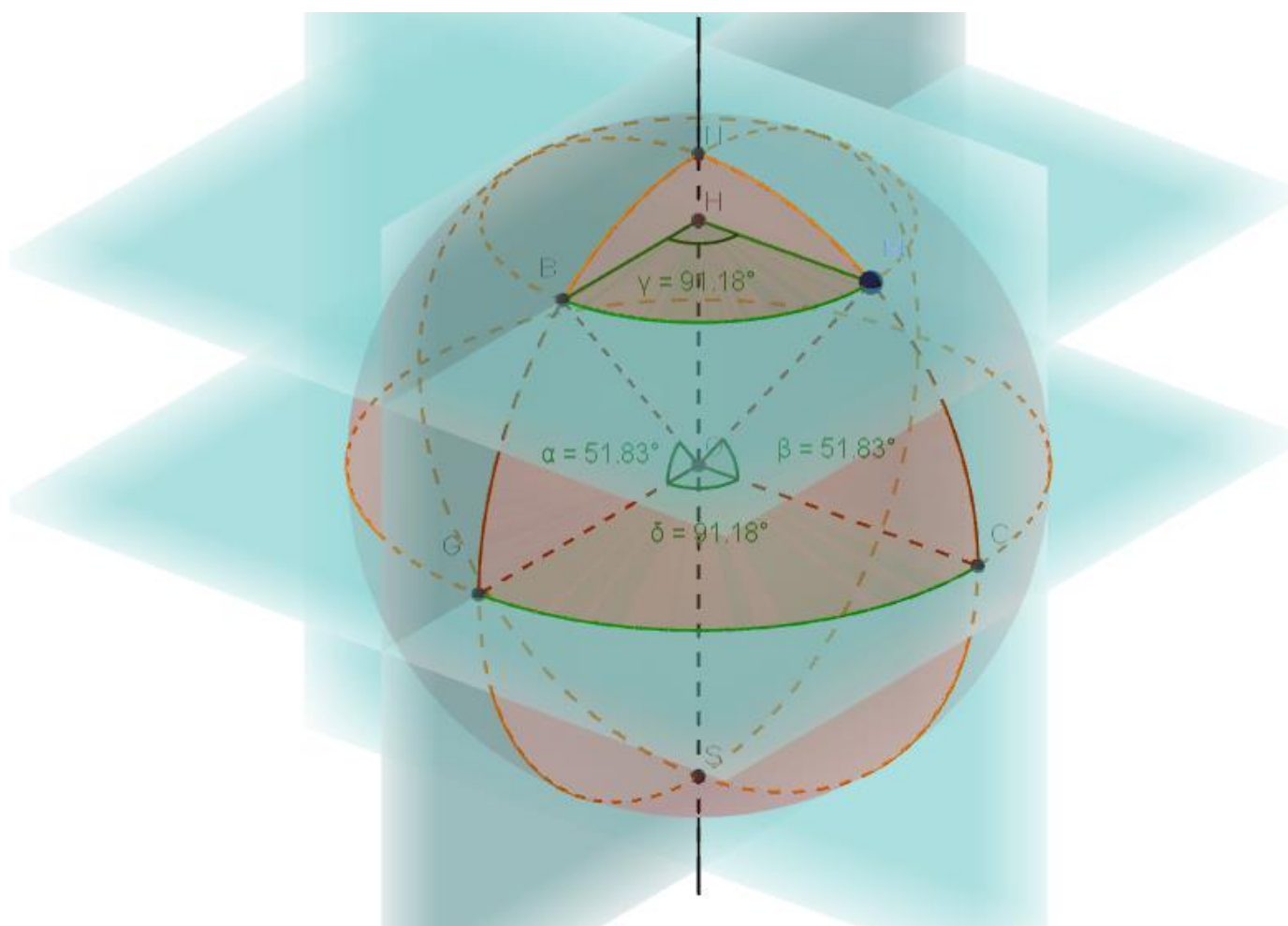
Construction de la figure de base geogebra3D donnée en ci-dessous.

- a) Construire dans le repère les points O centre de la Terre et les points N (Nord) et S (Sud) en utilisant la barre de saisie :
 $O = (0,0,0)$ puis $N = (0,0,6370)$ et enfin $S = (0,0, - 6370)$. Ensuite, recadrer en cliquant droit avec la souris, pour faire apparaître les deux points.
Faire disparaître le repère et le plan de base.
Construire la droite (NS) correspondant à l'axe de rotation de la Terre
- b) Construire la sphère S de centre O de rayon 6370 avec  puis dans « propriétés », désopacifier un peu la sphère (20%).
Construire le plan P orthogonal à l'axe (NS) passant par O avec  pour obtenir le plan de l'équateur. Puis l'intersection des deux surfaces S (sphère) et P (plan de l'équateur) avec  pour obtenir le cercle de l'équateur.
- c) Faire réapparaître le repère et construire le point G sur le cercle de l'équateur à son intersection avec l'axe rouge du repère de base qui donnera le méridien de Greenwich et l'origine des longitudes (des deux points d'intersection, G est celui du côté des nombres positifs). Faire disparaître le repère à nouveau.
- d) Construire le plan passant par les trois points G, S et N avec  . Vérifier en construisant l'intersection entre ce plan et la sphère que l'on obtient bien un grand cercle méridien terrestre. (Puis on fera tourner la figure pour obtenir G vers la gauche comme sur la figure fournie).
- e) Positionner un point M sur la sphère avec  puis le faire bouger avec la flèche  pour vérifier qu'il reste bien sur la sphère.
- f) Construire le plan parallèle au plan de base P passant par le point M avec  puis l'intersection de ce plan et de la sphère. Vérifier que l'on obtient le parallèle terrestre passant par ce point. Construire le point H centre de ce cercle par exemple comme l'intersection en gras entre le plan et l'axe (NS).
- g) Construire le plan passant par les points M, N et S, puis l'intersection de ce plan avec la sphère et vérifier que l'on obtient le méridien terrestre passant par le point M.
- h) Construire les angles $\widehat{GOB}$ avec  où B est l'intersection du méridien de Greenwich et du parallèle passant par M (On peut simplement utiliser  en faisant attention au pointage de la souris ou bien utiliser « intersection »  , en ne faisant pas afficher l'autre point d'intersection), puis l'angle $\widehat{COM}$ où C est l'intersection du méridien passant par M et de l'équateur. Vérifier qu'ils ont bien la même mesure qui correspond à la latitude de M (il faudra rajouter Sud ou Nord pour la lecture). Pour mieux les visualiser, on peut construire des secteurs circulaires avec 
- i) Construire les deux angles $\widehat{GOC}$ et $\widehat{BHM}$ et vérifier qu'ils ont la même mesure correspondant à la longitude de M (il faudra rajouter Est ou Ouest pour la lecture).

- j) Faire bouger le point M et la vue avec la souris pour visualiser et lire les coordonnées géographiques.
- k) Positionner le point M en déplaçant la souris à l'emplacement d'Aurillac (2° Est, 45° Nord), puis Saint Pétersbourg (30° E - 60° N).
Vérifier que l'on peut obtenir directement la position du point M en utilisant dans la barre de saisie :
AURILLAC = (6370 ; 2° ; 45°)
(« ; » pour les coordonnées polaires ou sphériques et « , » pour les coordonnées cartésiennes).
Le méridien de Greenwich a été défini par défaut à partir des axes initiaux du repère et **les coordonnées d'un point sont entrées avec M = (6370 ; longitude ; latitude)** avec un nombre négatif pour montrer l'ouest ou le sud, l'est et le nord sont comptés positivement.

Compléter : Tous les points d'un même méridien ont la même

Tous les points d'un même parallèle ont la même



2.11. Calcul de distances sur la sphère

Utilisation de la figure de base geogebra3D précédemment construite et/ou de la maquette en carton (voir en annexe)

1) Calculs sur l'équateur

- a- À l'aide de la figure de base geogebra3D et du bouton  , mesurer la longueur de l'équateur en repérant dans la fenêtre algèbre comment il est nommé (en surgras). Vérifier par le calcul.
- b- Calculer la longueur d'un arc du grand cercle de l'équateur de 1° d'arc, puis celle d'un arc de grand cercle de 1 minute d'arc (1° correspond à $60'$) à 1 mètre près. (On l'appelle le mille marin).

On rappelle que la longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à l'angle au centre.

2) Calculs le long d'un méridien

- a- Vérifier avec geogebra3D que la longueur d'un méridien (cercle entier) est la même que celle de l'équateur. Puis positionner sur la figure les deux villes L et M' en utilisant les coordonnées dans la barre de saisie :
Libreville : 10° Est – 0° et Milan : 10° Est et 43° Nord.
- b- L et M' sont sur un même méridien, construire l'angle au centre $\widehat{LOM'}$, puis l'arc de cercle de ce méridien LM' en utilisant  . Conjecturer la longueur de cet arc de cercle à l'aide de .
- c- Positionner le point M de la figure de base sur les deux points tour à tour et faire tourner la figure jusqu'à obtenir une configuration permettant de visualiser la longueur de l'arc de cercle de face.
- d- Retrouver par le calcul la distance, en suivant un méridien, entre les deux villes L et M.
- e- Reprendre la méthode pour déterminer la distance entre Ushuaïa 70° Ouest - 55° Sud et Boston 70° Ouest - 43° Nord.

3) Calculs sur les parallèles du globe.

- a- Les parallèles ont-ils la même longueur ? Conjecturer à l'aide de la figure geogebra3D et du point libre M une valeur approchée de la longueur du $43^{\text{ème}}$ parallèle Nord.
- b- Retrouver cette valeur par le calcul en utilisant le cosinus d'un angle dans un triangle rectangle bien choisi. (On s'aidera de la création d'une vue 2D du plan (NSM) en cliquant droit sur le plan).
- c- En utilisant la figure geogebra3D et la longueur d'un arc de cercle bien centré, déterminer la distance en suivant ce parallèle entre les villes suivantes :
 - Marseille (5° E – 43° N) et Boston : (70° O – 43° N)
 - Marseille (5° E – 43° N) et SAPPORO (143° E – 43° Nord)
 - Boston et Sapporo (que remarque – t – on ?)Retrouver ces distances par le calcul (on pourra utiliser une vue dans le plan du $43^{\text{ème}}$ parallèle).
- d- Quelle est la vitesse en km.s^{-1} d'un marseillais à Marseille emporté dans le mouvement de rotation de la Terre autour de son axe (NS) (on prendra un tour en 24h).
- e- Quelle est la différence d'heure locale (au midi vrai) entre les trois villes Marseille, Boston et Sapporo.

4) Problème

Utiliser la figure de base geogebra3D pour visualiser que les villes d'Anchorage (60°N - 150°O) et Saint Pétersbourg (60°N - 30°E) sont situées sur un même parallèle et qu'elles sont diamétralement opposées sur ce parallèle. Donner une explication.

Un avion doit se rendre d'Anchorage à Saint Pétersbourg. Il a le choix entre deux itinéraires : celui qui suit le 60^{ème} parallèle et celui qui passe par le pôle Nord.

Conjecturer à l'aide de la figure GeoGebra les distances parcourues pour ces deux itinéraires et trouver une conclusion. Retrouver la longueur des deux trajets par le calcul.

5) Dans le cas général

Dans le cas général, c'est-à-dire lorsque les deux villes ne sont pas sur un même méridien ou sur un même parallèle, il est très compliqué de calculer sur le globe la distance la plus courte entre les deux villes. Le théorème est le suivant : *le plus court chemin sur le globe entre deux points est obtenu par l'arc de grand cercle centré au centre du globe joignant les deux villes.*

Construire une figure GeoGebra pour illustrer cette propriété.

Indication : On pourra positionner un point K libre sur l'axe Nord-Sud et construire le plan passant par les deux villes et le point K. Puis le cercle obtenu par intersection avec la sphère, dont on pourra définir le centre avec la commande « Centre [conique] » à saisir dans la barre de saisie. L'arc de cercle n'est plus qu'à définir ... et il suffit d'observer sa mesure en faisant bouger K sur son axe. (Attention dans cette construction à ne pas prendre les deux villes sur un même méridien ! sinon les plans ne sont pas balayés)

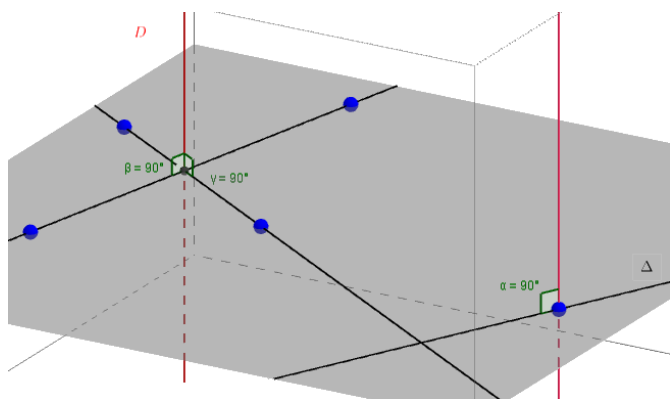


3. Fonctionnalités supplémentaires pour la classe de terminale S

En classe de terminale, on aborde de nouvelles notions. GeoGebra 3D devient alors un outil très pratique pour progresser dans les projections mentales que l'on peut se faire des énoncés, et pour vérifier certains résultats, issus notamment d'exercices du baccalauréat.

Cette présentation n'a toutefois pas vocation à remplacer le cours de mathématiques.

3.1. Orthogonalité dans l'espace



Une droite $\mathcal{D}$ est orthogonale à un plan si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan.

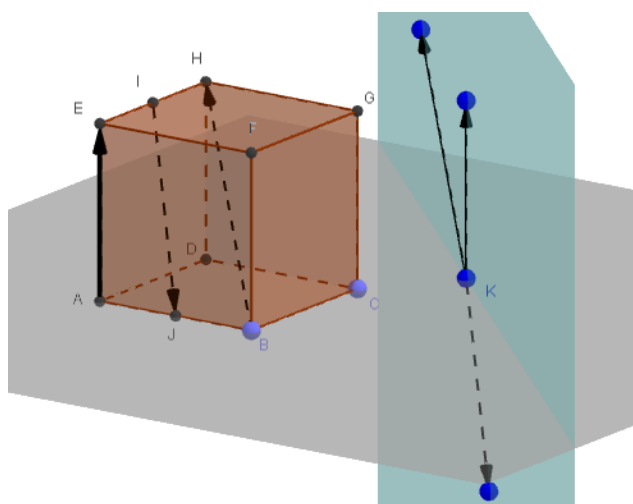
Dans ce cas, elle est orthogonale à toutes du plan.

Vous pouvez vous entraîner à reproduire cette figure.

3.2. Vecteurs dans l'espace

La notion de vecteur abordée dans le plan en seconde est généralisée à l'espace, avec un très grand nombre de propriétés communes.

La notion de **vecteurs coplanaires** est introduite.



ABCDEFGH est un cube. I et J sont les milieux respectifs des arêtes [EH] et [AB].

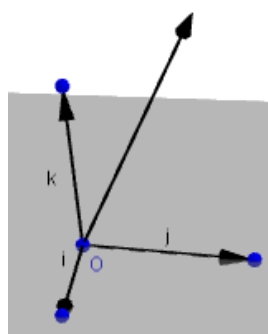
Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont alors coplanaires.

Pour le visualiser, vous pouvez construire la figure ci – contre :

- Commencer par le cube et les vecteurs
- Construire un représentant de chacun de ces vecteurs à partir d'un point K extérieur au cube.
- Afficher le plan...

Ne pas hésiter à faire pivoter la figure !

3.3. Base de l'espace



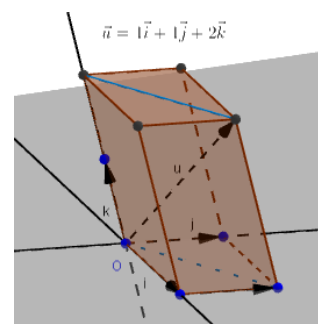
$\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs d'origine O, non coplanaires.

Tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace peut s'écrire de manière unique $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

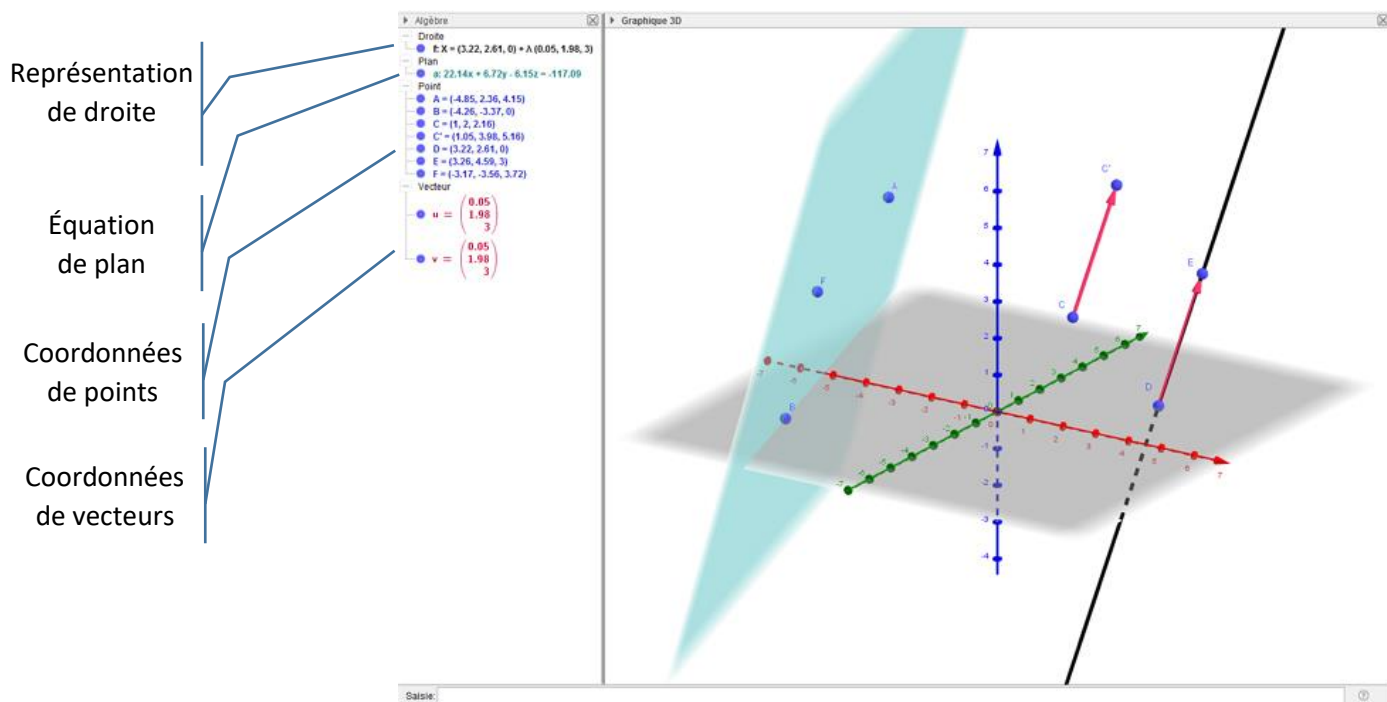
Voilà qui nous conduit à la notion de coordonnées !

Dans l'exemple à gauche, $\vec{u} = 1\vec{i} + 1\vec{j} + 2\vec{k}$

Pour visualiser mieux encore, on peut construire la figure de droite.



3.4. Coordonnées dans l'espace



3.5. Représentation paramétrique d'une droite

La droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}(a; b; c)$ est l'ensemble des points M(x ; y ; z) vérifiant :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Avec GeoGebra 3D :

1. Définir le point et le vecteur en question
2. Utiliser la commande **Droite[<Point>,<Vecteur>]** dans la barre de saisie.

Dans le volet *algèbre*, on retrouvera l'écriture suivante : $X = (x_A, y_A, z_A) + \lambda(a, b, c)$

3.6. Produit scalaire dans l'espace

Le produit scalaire de $\vec{u}(x; y; z)$ par $\vec{v}(x'; y'; z')$ est le réel $xx' + yy' + zz'$. Il est nul si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. Geogebra intègre une fonction produit scalaire, dans la ligne de saisie, taper :

ProduitScalaire[<Vecteur>, <Vecteur>]

3.7. Équation de plan

Un plan est défini par : $\begin{cases} \text{Un point A} \\ \text{Un vecteur normal } \vec{u}(a; b; c) \end{cases}$

L'équation de ce plan est alors de forme : $ax + by + cz + d = 0$

Avec Geogebra 3D :

- On utilise la commande « Plan passant par trois points » ; l'équation du plan s'affiche dans le volet algèbre.

OU ALORS

- On entre l'équation du plan dans la barre de saisie

4. Activités pour la classe de terminale S

4.1. Intersection de deux droites

Utiliser GeoGebra pour conjecturer les positions relatives et compléter le tableau ci – contre :

$$(d_1) \text{ est définie par : } \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -t - 1, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t + 1 \end{cases}$$

$$(d_2) \text{ est définie par : } \begin{cases} x = -5s + 2 \\ y = -3s - 1, \quad s \in \mathbb{R} \\ z = -s + 1 \end{cases}$$

(d_3) est la droite passant par $A(2 ; -1 ; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(6 ; -2 ; 2)$

(d_4) est la droite passant par $B(-1 ; 0 ; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(6 ; -2 ; 4)$

	(d_1)	(d_2)	(d_3)	(d_4)
(d_1)				
(d_2)				
(d_3)				
(d_4)				

4.2. Intersection d'une droite et d'un plan

Utiliser GeoGebra pour conjecturer les positions relatives et compléter le tableau ci – contre :

$$(d_1) \text{ est définie par : } \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 6t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3 - t \end{cases}$$

$$(d_2) \text{ est définie par : } \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - 3s, \quad s \in \mathbb{R} \\ z = 4 - 3s \end{cases}$$

$\mathcal{P}$ a pour équation $5x + y - z + 3 = 0$

	(d_1)	(d_2)
$\mathcal{P}$		

4.3. Intersection de deux plans

Utiliser GeoGebra pour conjecturer les positions relatives et compléter le tableau ci – contre :

$\mathcal{P}_1$ a pour équation $x + y + z + 3 = 0$

$\mathcal{P}_2$ a pour équation $2x + 2y + 2z + 7 = 0$

$\mathcal{P}_3$ a pour équation $3x - y + 2 = 0$

	$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_3$
$\mathcal{P}_1$			
$\mathcal{P}_2$			

4.4. Intersection de plans

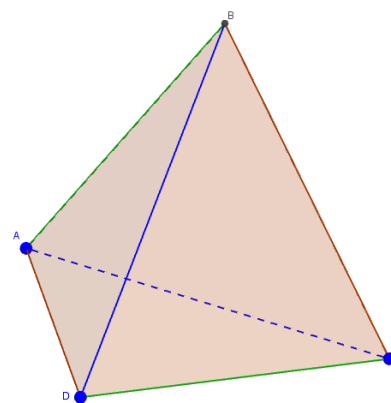
On se place dans le repère orthonormé, menu « 3D » de GeoGebra.

1. Construire dans ce repère les points : A(1 ; 1 ; 0), B(1 ; 2 ; 1) et C(3 ; -1 ; 2)
2. Construire le plan (ABC) et utiliser le logiciel pour conjecturer une équation cartésienne de ce plan.
3. Démontrer la conjecture précédente.
4. Construire les plans (P) et (Q) d'équations respectives :
 - a. $x + 2y - z - 4 = 0$
 - b. $2x + 3y - 2z - 5 = 0$
5. Les plans (P) et (Q) sont sécants selon une droite (d).
 - a. Utiliser le logiciel pour conjecturer une représentation paramétrique de la droite (d).
 - b. Prouver cette conjecture.
6. Étudier l'intersection des plans (ABC), (P) et (Q).

4.5. Tétraèdre équifacial

On se place dans le repère orthonormé, menu « 3D » de GeoGebra.

1. Construire un tétraèdre ABCD **équifacial**, mais non régulier.
(Trois couples d'arêtes opposées de même longueur)
La figure sera complétée et servira de support aux démonstrations demandées ci-dessous.
2. Montrer que les bimédianes de ABCD (segments reliant les milieux de deux arêtes opposées) :
 - sont perpendiculaires aux arêtes dont elles sont issues
 - sont concourantes en un point G.
3. Montrer que G est le centre de la sphère circonscrite à ABCD.



4.6. Volume d'un tétraèdre

L'espace est rapporté au repère au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère : le plan P d'équation $2x + y - 2z + 4 = 0$ et les points A(3 ; 2 ; 6), B(1 ; 2 ; 4) et C(4 ; -2 ; 5).

1-a- Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.

Aide : Pour placer A entrer dans la barre de saisie A=(3,2,6)

b- Vérifier que ce plan est le plan P.

Aide : Pour tracer P, entrer dans la barre de saisie l'équation du plan.

2-a- Montrer que le triangle ABC est rectangle.

Aide : Utiliser l'outil **Angle**



b- Écrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan P.

Aide : Utiliser l'outil **Orthogonale**  et lire dans la fenêtre Algèbre une représentation paramétrique de cette droite.

c- Soit K le projeté orthogonal de O sur P. Calculer la distance OK.

Aide : Utiliser l'outil **Intersection**  pour placer K et l'outil **Distance ou longueur** 

d- Calculer le volume du tétraèdre OABC.

Aide : Utiliser l'outil **Pyramide**  et lire dans la fenêtre Algèbre son volume.

4.7. Vrai / Faux

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère :

- Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations :

$$\mathcal{P} : x - y - z - 2 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}' : x + y + 3z = 0$$

- La droite $\mathcal{D}$ ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Pour chacune des propositions suivantes, utiliser GeoGebra pour conjecturer si elle est vraie ou si elle est fausse. Démontrer ensuite le résultat.

Proposition 1 : La droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

Proposition 2 : La sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon 2 est tangente au plan $\mathcal{P}$.

Proposition 3 : L'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est la droite Δ ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}$$

Proposition 4 : Les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont coplanaires.

4.8. Plan tangent à une sphère

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(-2 ; 0 ; 1), B(1 ; 2 ; -1) et C(-2 ; 2 ; 2).

1- a- Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Aide : Par exemple, pour placer A entrer dans la barre de saisie : A=(-2,0,1)

Utiliser l'outil **Vecteur** . Le premier vecteur se nommera u et le second v.

Entrer dans la barre de saisie : u*v

b- Calculer les longueurs AB et AC.

Aide : Utiliser l'outil **Distance ou longueur** 

c- En déduire l'arrondi au degré de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Aide : Utiliser l'outil **Angle** 

d- En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2- Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - y + 2z + 2 = 0$.

Aide : Entrer dans la barre de saisie : $2x - y + 2z + 2 = 0$

3- $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont les plans d'équations : $\mathcal{P}_1 : x + y - 3z = 0$ et $\mathcal{P}_2 : x - 2y + 6z = 0$.

Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon une droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases} \quad \text{avec } t \text{ réel}$$

Aide : Créer le point $D(2 ; -1 ; 0)$ de $\mathcal{D}$ et $\vec{w}(0;3;1)$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$:

pour le vecteur, entrer dans la barre de saisie : $w=(0,3,1)$.

Créer la droite $\mathcal{D}$ en entrant dans la barre de saisie :

$\text{Droite}[\langle \text{Point} \rangle, \langle \text{Vecteur} \rangle]$.

4- Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Aide : Utiliser l'outil **Intersection** 

5- $\mathcal{S}$ est l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que : $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 9$

a- Justifier que $\mathcal{S}$ est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon r .

Aide : Utiliser l'outil **Sphère (centre-rayon)** 

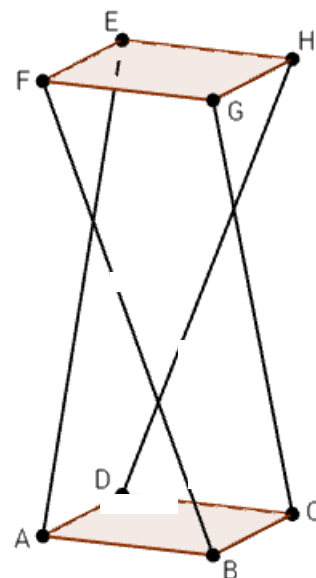
b- Étudier l'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

c- Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère $\mathcal{S}$.

Aide : Utiliser l'outil **Intersection de deux surfaces** 

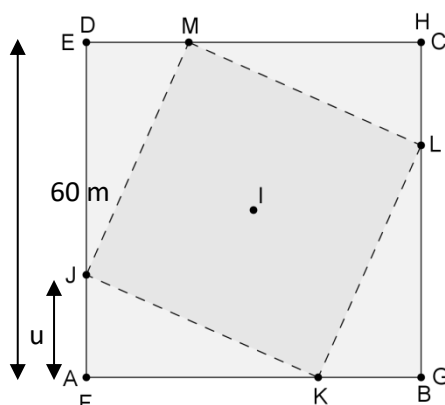
5. Activités transversales

Un architecte veut concevoir une tour de 150 m de hauteur, the Pythales Tower, « inspirée » de la Tour Cayan à Dubaï. La base sera un carré de 60 m de côté, sa hauteur sera de 150 m. Voici ci-contre un schéma de son projet.



1. a. Avec le logiciel GeoGebra 3D, placer les points A, B, C, et D puis E, F, G et H.
(Dans Saisie, taper : $A = (30, -30, 0)$ puis $B = (30, 30, 0)$, $C = (-30, 30, 0)$, etc.)
- b. Construire les carrés ABCD et EFGH.
- c. Construire les segments [AE], [BF], [CG] et [DH], qui modéliseront les poutres métalliques constituant l'ossature de la tour.
2. Les 4 façades de cette tour sont-elles planes ? Justifier.
3. Un unique ascenseur est placé au centre de la tour, permettant de desservir chacun des 30 étages de 5 m de hauteur, de l'étage 0 à l'étage 29.
 - a. Placer un point I libre sur l'axe vertical (zz'). Ce point représentera l'ascenseur de la tour.
 - b. Construire le plan parallèle à la base passant par I.
 - c. Construire les points d'intersection J, K, L et M de ce plan avec respectivement chacune des 4 poutres métalliques [AE], [BF], [CG] et [DH].
 - d. Construire le quadrilatère JKLM.
 - e. Déplacer votre ascenseur. Quelle conjecture pourriez-vous faire quant à la nature du quadrilatère JKLM ? (Pour la suite, on admettra cette conjecture)
 - f. La surface au sol vous paraît-elle être la même pour chaque étage de la tour ?

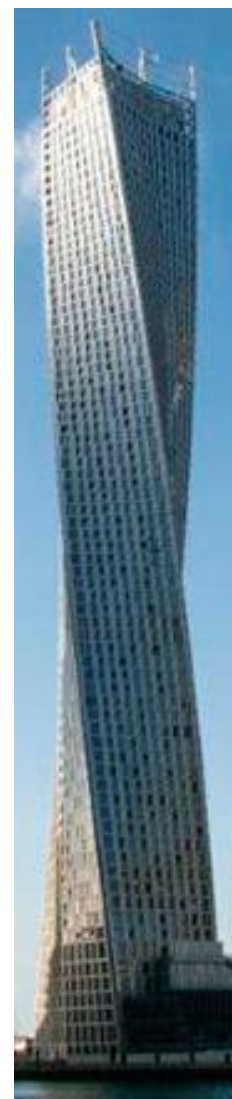
4. Voici une vue de dessus de la tour, avec un étage JKLM pour une position quelconque de l'ascenseur I.



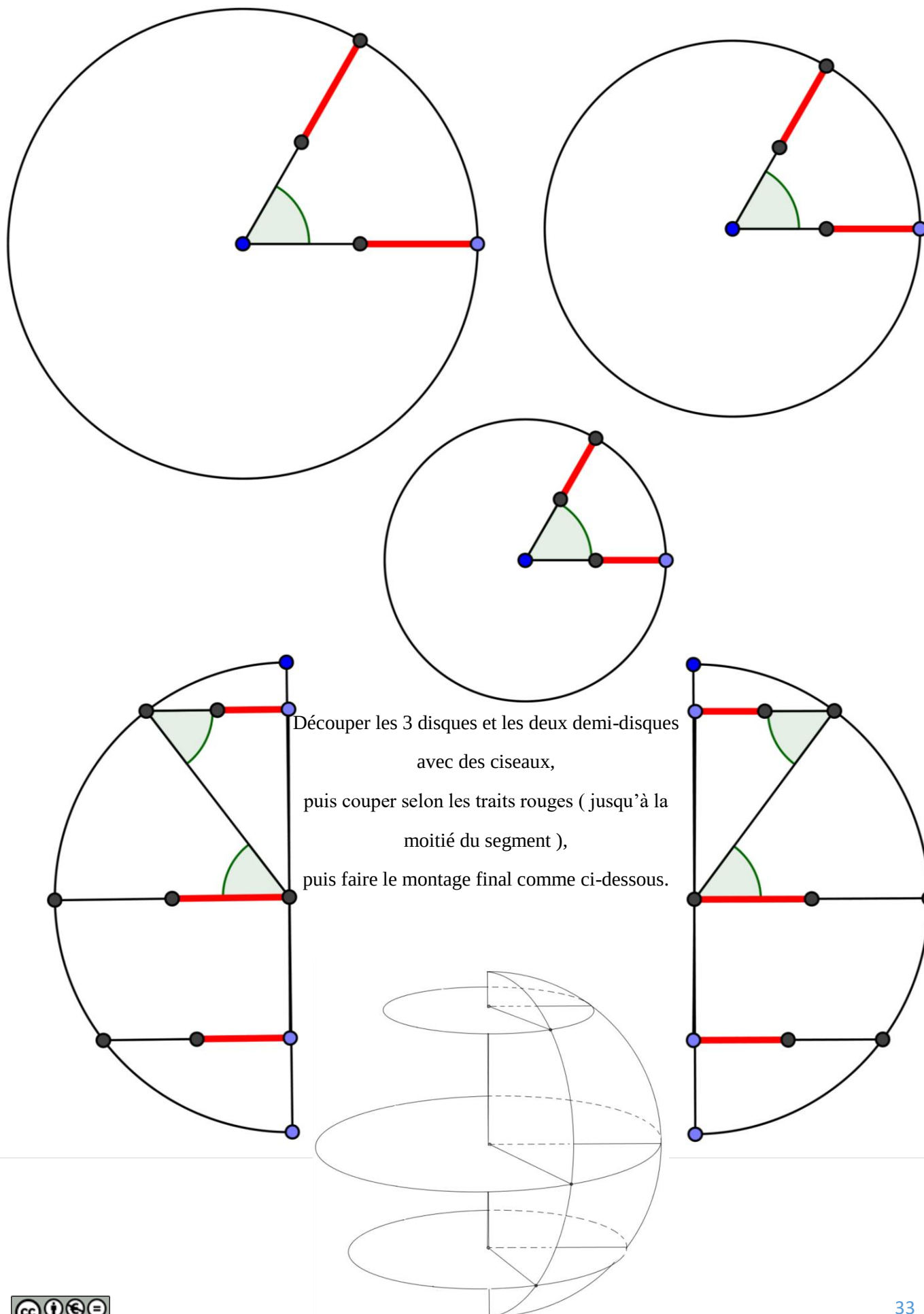
- a. Exprimer, en fonction de la hauteur z de l'ascenseur, la valeur de u représentée sur cette figure.
(Pour cela, on dessinera d'abord sur la copie le triangle AEF à l'échelle 1/100)
- b. Exprimer, en fonction de u , la longueur JK.
- c. En déduire que la surface S d'un étage situé à une hauteur z vaut :

$$S(z) = \frac{8}{25}z^2 - 48z + 3600.$$

5. a. Établir le tableau de valeurs de la fonction S sur $[0 ; 150]$ avec un pas de 10.
- b. Représenter graphiquement sur votre calculatrice la fonction $S(z)$.
On choisira une fenêtre adaptée. Lire graphiquement la surface au sol du 27^{ème} étage.
6. a. Une fois la tour construite, des entreprises pourront acheter des étages entiers.
Le prix étant proportionnel à la surface, quel étage sera vendu le moins cher ?
- b. Quelle inquiétude pourrait-on avoir avec un tel projet ?
- c. Dans la tour de notre architecte, les points J, K, L et M décrivent une trajectoire rectiligne. Ce n'est pas le cas pour la tour Cayan. Observez bien.
Quel type de trajectoire décrivent les points J, K, L et M dans la tour de Cayan ?



Cayan Tower
Dubaï



Ce document est sous licence Créative Commons



Attribution — Vous devez créditer l’Oeuvre, intégrer un lien vers la licence et indiquer si des modifications ont été effectuées à l’Oeuvre. Vous devez indiquer ces informations par tous les moyens raisonnables, sans toutefois suggérer que l’Offrant vous soutient ou soutient la façon dont vous avez utilisé son Oeuvre.



Pas d’Utilisation Commerciale — Vous n’êtes pas autorisé à faire un usage commercial de cette Oeuvre, tout ou partie du matériel la composant.



Pas de modifications — Dans le cas où vous effectuez un remix, que vous transformez, ou créez à partir du matériel composant l’Oeuvre originale, vous n’êtes pas autorisé à distribuer ou mettre à disposition l’Oeuvre modifiée.

Pas de restrictions complémentaires — Vous n’êtes pas autorisé à appliquer des conditions légales ou des mesures techniques qui restreindraient légalement autrui à utiliser l’Oeuvre dans les conditions décrites par la licence.

AUTEURS :	Groupe Aurillac-Lycée de l'IREM de Clermont-Ferrand
TITRE :	GeoGebra 3D au lycée
EDITEUR :	IREM de Clermont-Ferrand
DATE :	01 mars 2018
PUBLIC CONCERNÉ :	Enseignants de lycée
RESUMÉ :	Cette brochure propose une prise en main des principales fonctionnalités 3D de GeoGebra ainsi que quelques exemples d'exercices et d'activités à mener en classe de seconde ou de terminale S.
MOTS CLÉS :	Géométrie dans l'espace, GeoGebra, Lycée, TICE
FORMAT A4 :	Nombre de pages : 35