IREM Clermont-Ferrand

UNIVERSITÉ Clermont Auvergne

Le B.A. BA des maths pour le post-bac

Mai 2014

IREM
Campus Universitaire des Cézeaux – 3 place Vasarely
TSA 60026 – CS 60026 – 63178 Aubière cedex
Tél. : **04 73 40 70 98** – Mail : **irem@uca.fr** – Site : **www.irem.univ-bpclermont.fr**

Cette brochure est le fruit des travaux d'un groupe de
l'IREM de Clermont-Ferrand.

Sont à l'origine de son élaboration :

Jacques CHAZAL
Annette CORPART
Nelly LASSALLE
Gisèle PROVOST

Avec la collaboration de :

François MARTIN
Emmanuel ROYER

Préface du Président du département de Mathématiques et Informatique de l'Université Blaise Pascal

Les meilleurs projets sont souvent le fruit d'une rencontre et les rencontres sont d'autant plus belles qu'elles réunissent des acteurs aux cultures et aux origines différentes.

Une fois encore, l'IREM, véritable lien entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur, a rempli son rôle, permettant les rencontres, dynamisant les projets.

Il y avait au départ une demande autour d'une question : quel socle minimum doit-on fournir à des étudiants, non issus des filières scientifiques et qui cherchent à se remettre à niveau en s'inscrivant dans notre université à la « préparation aux études scientifiques » ?

C'est de cette question qu'est né ce B.A.BA des Maths, ouvrage vivant, à la structure simple, pouvant s'exploiter en auto-formation ou dans le cadre d'un enseignement encadré et qui permet de poser les bases du calcul mathématique. Sa réalisation a été l'objet d'échanges fructueux entre ses auteurs d'un coté et deux collègues intervenant dans notre préparation aux études scientifiques de l'autre. C'est sans doute ce qui en fait son originalité et sa richesse.

Je ne doute pas que cet ouvrage rencontrera le succès, bien au delà du périmètre qui lui était initialement réservé. Je pense par exemple aux futurs professeurs des écoles issus de filières littéraires, aux étudiants de psychologie qui ont souvent besoin d'un minimum de bagage mathématique. Il est le reflet de ce qui se fait de mieux à l'IREM de Clermont-Ferrand. Souhaitons lui longue vie.

Yanick Heurteaux

Président du département de Mathématiques et Informatique de l'Université Blaise Pascal.

Préface de l'Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques

Ce document a été élaboré par une équipe de professeurs expérimentés qui s’est penchée sur la question de chercher à réactiver des connaissances et savoir-faire sur un ensemble de notions centrales des mathématiques.

Le résultat de leurs travaux est particulièrement intéressant, nous soulignons la qualité des fiches de cours tant au niveau de leur présentation que de leur contenu. Les exercices d’application directe ou de mise en œuvre de méthodes classiques viennent judicieusement trouver leur place. Les pages d’indications pour leur résolution sont elles aussi parfaitement « mesurées » en termes d’aide pour accompagner l’élève dans le traitement des différentes situations qui lui sont proposées. L’objectif de transmettre aux futurs étudiants des rudiments de mathématiques est donc parfaitement atteint.

Nous souhaitons que de nombreux étudiants trouvent dans la lecture de ces belles pages de mathématiques une source non seulement d’enrichissement intellectuel mais aussi un appui fondamental dans leur poursuite d’études.

Françoise Barachet et Jean-Alain Roddier

IA-IPR de mathématiques.

Avant propos

Cette brochure est le fruit des travaux d'un groupe de l'IREM de Clermont-Ferrand.

Ce groupe s'est constitué pour concevoir un outil destiné à faire travailler les futurs étudiants en autonomie, avant leur entrée dans des sections nécessitant des connaissances mathématique de base.

Dans un premier temps, nous avons sélectionné les parties du programme de lycée essentielles pour une bonne poursuite d'étude. Puis des enseignants chercheurs de l'Université Blaise Pascal ont rejoint l'équipe afin d'aider à cadrer les travaux dans la continuité des programmes de l'enseignement supérieur.

Ensemble, nous avons élaboré un document comportant un mode d'emploi suivi de 30 chapitres, chacun d'eux composé de 4 pages : cours, exercices, indications, corrigés.

Nous avons utilisé tout au long de cet outil un langage mathématique volontairement imagé pour faciliter la compréhension. Dans le même esprit, les exercices sont simples mais essentiels à nos yeux pour aborder des notions plus complexes.

Ce document a également pour objectif de proposer aux enseignants de lycée des fiches directement utilisables en cas de remédiation ponctuelle.

Mode d'emploi

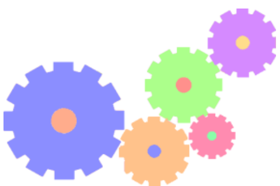
Cette brochure a été conçue pour permettre à chaque étudiant de travailler en autonomie.

Les notions abordées sont divisées en 30 chapitres comportant chacun quatre pages :

- Le cours, synthétique et s'appuyant sur des exemples.
- Des exercices d'application simples et peu nombreux.
- Des indications pour certains exercices.
- Les corrigés de tous les exercices.

Pour chaque chapitre :

- Commencer par lire attentivement le cours et chercher à bien comprendre les exemples. (En moyenne une demi-heure devrait suffire).
- Ensuite, muni d'un brouillon, vérifier ses acquis en abordant la page d'exercices.
  En cas de difficulté, plutôt que de regarder trop vite la page des corrigés, il est plus profitable de suivre dans l'ordre les conseils suivants :



1/ Relire le cours sans hésiter à revoir des chapitres antérieurs.

2/ Vérifier l'activation des neurones.

3/ Consulter les indications.

Une à deux heures, réparties dans la même journée, constituent une durée raisonnable pour l'étude complète d'un chapitre. Les 22 heures restantes pourront être consacrées à d'autres activités propices à l'aération et la réparation des neurones précédemment cités.

Le B.A. BA des maths pour le post-bac

1.	**Ensembles de nombres**	**4**
2.	**Calcul numérique**	**8**
3.	**Calcul algébrique**	**12**
4.	**Racine carrée**	**16**
5.	**Droites du plan**	**20**
6.	**Equations du premier degré**	**24**
7.	**Signe de $ax+b$**	**28**
8.	**Etude de ax^2+bx+c**	**32**
9.	**Fonctions polynômes et rationnelles**	**36**
10.	**Factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{R}$**	**40**
11.	**Trigonométrie**	**44**
12.	**Fonctions**	**48**
13.	**Limites-asymptotes**	**52**
14.	**Valeur absolue**	**56**
15.	**Fonctions de référence**	**60**
16.	**Fonction dérivée**	**64**
17.	**Nombre dérivé et tangente**	**68**
18.	**Etude des variations d'une fonction**	**72**
19.	**Fonction logarithme népérien**	**76**
20.	**Fonction exponentielle**	**80**
21.	**Calcul de limites**	**84**
22.	**Primitives d'une fonction**	**88**
23.	**Calcul intégral**	**92**
24.	**Statistiques à une variable**	**96**
25.	**Vocabulaire des probabilités**	**100**
26.	**Probabilités conditionnelles**	**104**
27.	**Variables aléatoires discrètes**	**108**
28.	**Loi binomiale**	**112**
29.	**Variables aléatoires continues**	**116**
30.	**Nombres complexes**	**120**

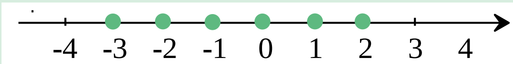
Chapitre 1 : ENSEMBLES DE NOMBRES

I Ensembles de nombres usuels

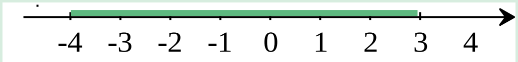
- Les nombres entiers positifs sont appelés **nombres entiers naturels**. Leur ensemble est noté $\mathbb{N}$.
  Exemples : 0 ; 3 ; 125 sont des entiers naturels.
  On peut écrire : $3 \in \mathbb{N}$ (le symbole $\in$ signifie « appartient à »)
- L'ensemble des **nombres entiers relatifs** (les positifs et les négatifs) est noté $\mathbb{Z}$**.**
  Exemples : -2 ; -1258 ; 3 ; 0 ; 1200 sont des entiers relatifs.
  $-2 \in \mathbb{Z}$ mais $-2 \notin \mathbb{N}$ (le symbole $\notin$ signifie « n'appartient pas à »).
- L'ensemble de **tous** les nombres est noté $\mathbb{R}$: c'est l'ensemble des **nombres réels**.
  Exemples : 3 ; – 27 ; 18,26 ; $\frac{5}{9}$; $\sqrt{3}$; π sont des réels.

II Ecriture d'un ensemble

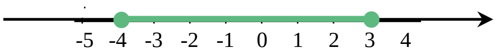
- L'ensemble des **entiers** compris strictement entre -4 et 3 contient -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 et 2.
  On l'écrit entre accolades : $\{-3;-2;-1;0;1;2\}$.

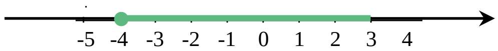


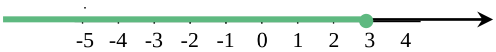
- L'ensemble des **réels** compris strictement entre -4 et 3 contient une infinité de nombres.
  C'est un intervalle ; on le note entre crochets : $]-4;3[$.
  $x \in]-4;3[$ signifie $-4 < x < 3$.

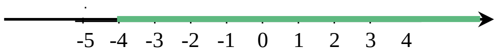


De même :

$[-4;3]$  $x \in [-4;3]$ signifie $-4 \le x \le 3$

$[-4;3[$  $x \in [-4;3[$ signifie $-4 \le x < 3$

$]-\infty;3]$  $x \in]-\infty;3]$ signifie $x \le 3$

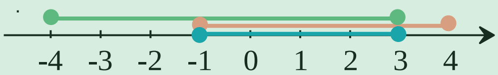
$]-4;+\infty[$  $x \in]-4;+\infty[$ signifie $x > -4$

Le symbole ∞ désigne l'infini. Ce n'est pas un nombre ; il ne peut pas figurer dans une inégalité.

III Intersection et réunion

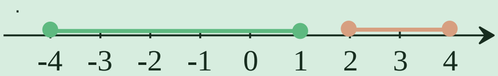
$\cap$ <u>est le symbole de l'**intersection**.</u>

- $[-4;3] \cap [-1;4]$ est l'ensemble des réels qui appartiennent à la fois à $[-4;3]$ **et** à $[-1;4]$.



$[-4;3] \cap [-1;4] = [-1;3]$

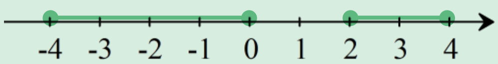
- Aucun réel n'appartient à la fois à $[-4;1]$ et à $[2;4]$,
  $[-4;1] \cap [2;4]$ est l'ensemble vide noté $\varnothing$.



$[-4;1] \cap [2;4] = \varnothing$

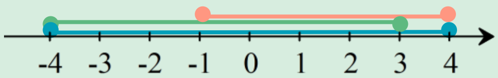
$\cup$ <u>est le symbole de la **réunion**</u> ; on l'utilise pour regrouper plusieurs intervalles.

- $[-4;0] \cup [2;4]$ est l'ensemble des réels qui appartiennent à $[-4;0]$ **ou** à $[2;4]$.



$[-4;0] \cup [2;4]$

- La réunion de deux intervalles se réduit parfois à un seul intervalle.



$[-4;3] \cup [-1;4] = [-4;4]$

EXERCICES (Chapitre 1)

Exercice 1

Ecrire les ensembles suivants sous forme symbolique, en utilisant soit des accolades soit des crochets.

a) I est l'ensemble des réels strictement compris entre $2{,}1$ et $10{,}03$.

b) J est l'ensemble des entiers naturels compris entre $2{,}1$ et $10{,}03$.

c) K est l'ensemble des entiers naturels pairs compris entre $2{,}1$ et $10{,}03$.

d) L est l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à $\dfrac{25}{8}$.

e) M est l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à $\dfrac{25}{8}$.

Exercice 2

Différentes manières de s'exprimer.
Compléter le tableau suivant.

Inégalités	Intervalle	Représentation graphique
$-2 \leq x \leq 3$		
	$x \in \left]-\infty ; 4\right]$	
		-12 $\quad$ -6
$x \geq -2$		
	$x \in \left]3 ; +\infty\right[$	

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, choisir la bonne réponse.
On pourra s'aider d'un schéma pour répondre.

1. On considère les intervalles $I = \left]1 ; +\infty\right[$ et $J = \left]-\infty ; 3{,}5\right]$.

	A	B	C	D
$I \cap J$	$[1 ; 3{,}5]$	$\left]-\infty ; +\infty\right[$	$\left]1 ; 3{,}5\right]$	$\varnothing$
$I \cup J$	$[1 ; 3{,}5]$	$\left]-\infty ; +\infty\right[$	$\left]1 ; 3{,}5\right]$	$\left[3{,}5 ; +\infty\right[$

2. On considère les intervalles $I = [-\pi ; \pi]$ et $J = [-3{,}2 ; 3{,}1]$.

	A	B	C	D
$I \cap J$	$[-3{,}2 ; 3{,}1]$	$[-\pi ; \pi]$	$[-3{,}2 ; \pi]$	$[-\pi ; 3{,}1]$
$I \cup J$	$[-3{,}2 ; 3{,}1]$	$[-\pi ; \pi]$	$[-3{,}2 ; \pi]$	$[-\pi ; 3{,}1]$

INDICATIONS (Chapitre 1)

Exercice 1

Voir le paragraphe II du cours.

a) I contient **tous** les nombres entre 2,1 et 10,03 : il y en a une infinité.
On écrit I en utilisant des crochets : $I = \left] \ldots ; \ldots \right[$
(les crochets sont ouverts car 2,1 et 10,03 ne sont pas dans I).

b) J contient une liste finie d'entiers.
On les écrit en utilisant des accolades et en les séparant par des points-virgules : $J = \{ \ldots \}$.

c) Pour K se rappeler qu'un entier est pair lorsqu'il est divisible par 2.

Exercice 2

On peut s'aider en commençant par la représentation graphique.

Rappel : le symbole ∞ n'est pas un nombre ; on peut l'écrire dans un intervalle qui est une notation simplifiée du graphique mais pas dans une inégalité.

Exercice 3

1 On fera la différence entre crochet ouvert et crochet fermé (voir paragraphe II du cours) et entre intersection et réunion (voir paragraphe III du cours).

2. Sur le graphique, on pensera à ranger les réels $-\pi$; π ; $-3,2$ et 3,1 dans l'ordre croissant.

CORRIGES (Chapitre 1)

Exercice 1

$I =]2,1;10,03[$

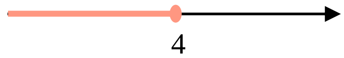
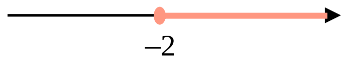
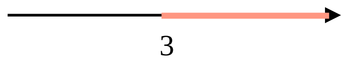
$J = \{3;4;5;6;7;8;9;10\}$

$K = \{4;6;8;10\}$

$L = \left]-\infty;\dfrac{25}{8}\right]$

$M = \{0;1;2;3\}$ car $\dfrac{25}{8} = 3,125$.

Exercice 2

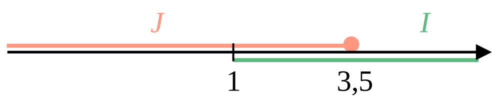
Inégalités	Intervalle	Représentation graphique
$-2 \le x \le 3$	$x \in [-2;3]$	
$x \le 4$	$x \in]-\infty;4]$	
$-12 \le x \le -6$	$x \in [-12;-6]$	
$x \ge -2$	$x \in [-2;+\infty[$	
$x > 3$	$x \in]3;+\infty[$	

Exercice 3

1. $I =]1;+\infty[$ et $J =]-\infty;3,5]$.

$I \cap J =]1;3,5]$: réponse C.

$I \cup J =]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$: réponse B.



2. $I = [-\pi;\pi]$ et $J = [-3,2;3,1]$.

$I \cap J = [-\pi;3,1]$: réponse D.

$I \cup J = [-3,2;\pi]$: réponse C.

Chapitre 2 : CALCUL NUMERIQUE

I Puissances d'un nombre

$2^5 \times 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$	Pour multiplier les puissances d'un même nombre, on ajoute les exposants	$\dfrac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$	Pour diviser les puissances d'un même nombre, on soustrait les exposants
$(3x)^2 = 3^2 \times x^2 = 9x^2$	Une puissance d'un produit est le produit des puissances	$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1^2}{2^2} = \dfrac{1}{4}$	Une puissance d'un quotient est le quotient des puissances

$2^3 + 2^2 = 12$ et $2^5 = 32$ Attention ! aucune propriété intéressante avec somme et différence

II Fractions

Simplifier une fraction	$\dfrac{6}{4} = \dfrac{2\times 3}{2\times 2} = \dfrac{3}{2}$	*6 et 4 sont des multiples de 2*
Multiplier et diviser des fractions	$\dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4\times 1}{5\times 3} = \dfrac{4}{15}$	*On multiplie numérateurs et dénominateurs entre eux*
	$2 \times \dfrac{5}{3} = \dfrac{2}{1} \times \dfrac{5}{3} = \dfrac{2\times 5}{1\times 3} = \dfrac{10}{3}$	*On multiplie le numérateur par 2*
	$\dfrac{2}{5} \div 7 = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{7} = \dfrac{2\times 1}{5\times 7} = \dfrac{2}{35}$	*Diviser par 7, c'est multiplier par* $\dfrac{1}{7}$
Ajouter et soustraire des fractions	$3 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{30}{10} + \dfrac{5}{10} - \dfrac{4}{10} = \dfrac{31}{10}$	*On réduit au même dénominateur*

III Priorités dans les calculs

En l'absence de parenthèses, on calcule dans l'ordre : les puissances, les produits puis les sommes.

$1 + 2\times 3 - 4 = 1 + 6 - 4 = 3$

$2\times 3^2 = 2\times 9 = 18$

$-3^2 = -9$

Les parenthèses sont prioritaires.

$(1+2)\times 3 - 4 = 3\times 3 - 4 = 9 - 4 = 5$

$(2\times 3)^2 = 6^2 = 36$

$(-3)^2 = 9$

Dans une fraction, les parenthèses sont sous-entendues : $\dfrac{2}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\left(2-\sqrt{3}\right)}$

Cette propriété doit être utilisée pour taper une séquence de calcul quand on s'aide d'une calculatrice.

EXERCICES (Chapitre 2)

Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes, choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s) :

	A	B	C
1. -9 est égal à :	$1-2\times 3^2$	$(1-2)\times 3^2$	$1-(2\times 3)^2$
2. 9 est égal à :	-2^2+5	$(-2)^2+5$	$(-2+5)^2$
3. -50 est égal à :	-2×5^2	$(-2\times 5)^2$	$(-2)^2\times 5$
4. $\dfrac{3}{8}$ est égal à :	$\dfrac{3}{4}\times 2$	$\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{4}\div 2$
5. $\dfrac{6}{5}$ est égal à :	$\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{3}{5}\div\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{4}{2}+\dfrac{2}{3}$

Exercice 2

Calculer " à la main " : $A=-3^2+\left(2-(-3)^2\right)-\left(-3+2\times(-1)^3\right)$.

Retrouver le résultat grâce à une calculatrice.

Exercice 3

1. Calculer $A(x)=2x^2-3x+1$ pour les valeurs de x suivantes :

a) $x=1$ **b)** $x=0$ **c)** $x=-2$ **d)** $x=\dfrac{1}{2}$

2. Calculer $B(x)=\dfrac{1-2x}{2+x}$ pour les valeurs de x suivantes :

a) $x=-3$ **b)** $x=\dfrac{1}{2}$ **c)** $x=-\dfrac{3}{4}$ **d)** $x=0$

INDICATIONS (Chapitre 2)

Exercice 1

1. 2. et **3.** Les parenthèses sont prioritaires.

4. Penser que : $2 = \frac{2}{1}$.

5. Diviser par $\frac{1}{2}$, c'est multiplier par l'inverse de $\frac{1}{2}$, c'est à dire 2.

Exercice 2

Attention à la présence ou non de parenthèses, en particulier pour les nombres élevés à une puissance :

$-3^2 = -9$ alors que $(-3)^2 = 9$.

Exercice 3

1. **a)** Pour calculer $A(1)$, on remplace x par 1 dans $A(x)$.

$A(x) = 2x^2 - 3x + 1$ donc $A(1) = 2\times 1^2 - 3\times 1 = 2 - 3 + 1 = 0$.

c) $A(-2) = 2\times(-2)^2 - 3\times(-2) + 1$.

On remarquera les parenthèses, indispensables ici, car $-2^2 \neq (-2)^2$.

d) Remplacer x par $\left(\frac{1}{2}\right)$: laisser les parenthèses dans un premier temps, puis utiliser toutes les propriétés des calculs sur les fractions.

2. Simplifier numérateur et dénominateur avant de terminer le calcul.

CORRIGES (Chapitre 2)

Exercice 1

Les cases coloriées correspondent aux bonnes réponses.
Le résultat des mauvaises réponses proposées est donné dans les autres cases.

	A	B	C
1. -9 est égal à :	$1-2\times 3^2=-17$	$(1-2)\times 3^2$	$1-(2\times 3)^2=-35$
2. 9 est égal à :	$-2^2+5=1$	$(-2)^2+5$	$(-2+5)^2$
3. -50 est égal à :	-2×5^2	$(-2\times 5)^2=100$	$(-2)^2\times 5=20$
4. $\frac{3}{8}$ est égal à :	$\frac{3}{4}\times 2=\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}\div 2$
5. $\frac{6}{5}$ est égal à :	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$	$\frac{3}{5}\div\frac{1}{2}$	$\frac{4}{2}+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$

Exercice 2

$$A=-9+(2-9)-(-3+2\times(-1))=-9-7-(-3-2)=-9-7+5=-11.$$

Exercice 3

1. **a)** $A(1)=0$

b) $A(0)=2\times 0^2-3\times 0+1=1$

c) $A(-2)=2\times(-2)^2-3\times(-2)+1=8+6+1=15$

d) $A\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\times\left(\frac{1}{2}\right)+1=2\times\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+1=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+\frac{2}{2}=\frac{1-3+2}{2}=\frac{0}{2}=0$

2. **a)** $B(-3)=\dfrac{1-2\times(-3)}{2+(-3)}=\dfrac{1+6}{-1}=\dfrac{7}{-1}=-\dfrac{7}{1}=-7$

b) $B\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{1-2\times\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}}=\dfrac{1-1}{2+\frac{1}{2}}=\dfrac{0}{\frac{5}{2}}=0$

c) $B\left(-\frac{3}{4}\right)=\dfrac{1-2\times\left(-\frac{3}{4}\right)}{2+\left(-\frac{3}{4}\right)}=\dfrac{1+\frac{6}{4}}{2-\frac{3}{4}}=\dfrac{\frac{10}{4}}{\frac{5}{4}}=\dfrac{10}{4}\times\dfrac{4}{5}=2$

d) $B(0)=\dfrac{1}{2}$

Chapitre 3 : CALCUL ALGEBRIQUE

Dans une expression algébrique, certains nombres sont représentés par des lettres. On ne peut donc pas la calculer mais on peut la transformer (réduire, développer, factoriser) pour mieux l'exploiter.

Rappel : Une somme est formée de *termes* ; un produit est formé de *facteurs* ; un quotient est formé d'un *numérateur* et d'un *dénominateur*.

I Rôle des parenthèses

Dans l'écriture $\underset{1}{f(x)} = 2x\underset{2}{(x+3)} - x\underset{3}{(3\times 2x)} - \underset{4}{(3x-5)}$ les parenthèses n'ont pas toutes le même rôle.

1 *Parenthèses de fonction* : « f de x » signifiant que l'expression dépend de la variable x.
On ne peut jamais enlever de telles parenthèses.

2 *Parenthèses de multiplication d'une somme par un nombre* signifiant : $2x$ "fois" la somme $x+3$
Pour les enlever, on distribue : $2x^2+6x$.

3 *Parenthèses d'association d'un produit* signifiant : x "fois" 3 "fois" $2x$; pas de distribution à faire :
$-x\times 3\times 2x = -x\times 6x = -6x^2$.

4 *Parenthèses d'association d'une somme* signifiant simplement un regroupement ; on peut les enlever, à condition de changer les signes des termes si les parenthèses sont précédées de « $-$ » : $-3x+5$

II Propriétés

développer →

Distributivité : $k(a+b) = ka+kb$

Double distributivité : $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$

Identités remarquables :

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

← factoriser

III Fractions rationnelles

Ce sont des quotients où le dénominateur (et éventuellement le numérateur) est une expression de la variable *x*. On les multiplie ou ajoute ou divise avec les règles habituelles :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{(ad)+(cb)}{bd} \qquad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

EXERCICES (Chapitre 3)

Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes, choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s) :

	A	B	C	D
1. Le produit de b par la somme de a et c est égal à :	$ba+c$	$b(a+c)$	$a+cb$	$ba+bc$
2. La somme de a et du produit de b par c est égale à :	$a+bc$	$ab+c$	$(a+b)c$	$ac+b$
3. Le carré de la somme de x et de 3 est :	$9x^2$	x^2+9	x^2+3	$(x+3)^2$
4. La différence du carré de x et de l'inverse de x est :	$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$	$x-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}-x^2$	$x^2-\frac{1}{x}$
5. La somme du carré de -3 et de l'opposé de x est :	$(-3)^2+(-x)$	$9-x$	$-9-x$	-3^2-x
6. x^2-9 peut être factorisé en :	$(x-3)^2$	$(x-1)(x+9)$	$(x-3)(x+3)$	$(x-9)(x+9)$
7. a^2-2ab peut être factorisé en :	$a^2(1-2b)$	$a(a-2b)$	$a(2-2b)$	$(a-2)(a-b)$
8. $(u-v)(u+v)$ est une expression factorisée de :	u^2-v^2	v^2-u^2	u^2+v^2	u^2+v^2-2uv
9. $ac+ad+bc+bd$ est le développement de :	$(a+b)(c+d)$	$(a+d)(b+c)$	$(b+a)(d+c)$	$(a+c)(b+d)$
10. $1-a(b-1)$ est égal à :	$(1-a)(b-1)$	$1-ab+a$	$1-ab-a$	$1+a(1-b)$

Exercice 2

Pour chacune des expressions suivantes, dire si elle se présente sous la forme d'une somme ou d'un produit (préciser le nombre de termes ou de facteurs) puis développer et réduire.

$A(x)=(x-4)(x+3)+6$

$B(x)=4x(5-3x)$

$C(x)=2x-3(x+2)$

$D(x)=(2-x)(x+1)$

$E(x)=2-x(x+1)$

$F(x)=(5x+1)(2x+3)-(3x-1)(x+2)$

$G(x)=(2x+3)^2$

Exercice 3

Ecrire sous forme d'un seul quotient les expressions suivantes puis développer et réduire le numérateur.

$A(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}-4$ si $x\neq -1$

$B(x)=\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{1-3x}{x+2}$ si $x\neq -3$ et $x\neq -2$

$C(x)=\dfrac{x^2}{x-1}-x$ si $x\neq 1$

$D(x)=2x+1+\dfrac{7}{x-2}$ si $x\neq 2$

INDICATIONS (Chapitre 3)

Exercice 1

1. et **2.** Penser au rôle des parenthèses.

3. Le carré d'une somme n'est pas égal à la somme de deux carrés.

4. L'inverse de x est $\dfrac{1}{x}$.

5. Le carré de -3 est $(-3)^2 = (-3)(-3)$ alors que $-3^2 = -3\times 3$ est l'opposé du carré de 3.

6. et **8.** Penser aux identités remarquables.

7. Chercher un facteur commun.

9. Développer chaque réponse proposée.

10. Respecter la priorité des opérations.

Exercice 2

$C(x)$: on rappelle que $a-b=a+(-b)$; une différence est aussi une somme.

$D(x)$ et $E(x)$: comparer ces expressions et réfléchir à la présence ou non des parenthèses.

$F(x)$: attention au signe « − » devant les parenthèses du second terme.

$G(x)$: on rappelle que $a^2 = a\times a$.

Exercice 3

Pour ajouter deux fractions rationnelles, on les écrit avec un dénominateur commun qui est souvent le produit des deux dénominateurs (voir paragraphe III du cours**)** sans oublier que :

- $a = \dfrac{a}{1}$
- les parenthèses autour du numérateur et du dénominateur sont sous-entendues, par exemple :

$$\frac{2x+3}{x+1} = \frac{(2x+3)}{(x+1)}$$

- $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-(a)}{b}$

CORRIGES (Chapitre 3)

Exercice 1

1. réponses **B** et **D** (forme développée)
2. réponse **A**
3. réponse **D**
4. réponse **D**
5. réponses **A** et **B** (après calcul)
6. réponse **C**
7. réponse **B**
8. réponse **A**
9. réponses **A** et **C**
10. réponses **B** et **D** car : $1-a(b-1)=1-ab+a=1+a-ab=1+a(1-b)$

Exercice 2

$A(x)$ est une somme de deux termes : $(x-4)(x+3)$ et 6, $A(x)=x^2+3x-4x-12+6=x^2-x-6$

$B(x)$ est un produit de deux facteurs : $4x$ et $(5-3x)$, $B(x)=20x-12x^2$

$C(x)$ est une somme de deux termes : $2x$ et $-3(x+2)$, $C(x)=2x-3x-6=-x-6$

$D(x)$ est un produit de deux facteurs : $(2-x)$ et $(x+1)$, $D(x)=2x+2-x^2-x=-x^2+x+2$

$E(x)$ est une somme de deux termes : 2 et $-x(x+1)$, $E(x)=2-x^2-x=-x^2-x+2$

$F(x)$ est une somme de deux termes : $(5x+1)(2x+3)$ et $-(3x-1)(x+2)$,

$$F(x)=(10x^2+15x+2x+3)-(3x^2+6x-x-2)=10x^2+15x+2x+3-3x^2-6x+x+2=7x^2+12x+5$$

$G(x)$ est un produit de deux facteurs : $(2x+3)$ et $(2x+3)$, $G(x)=4x^2+12x+9$

Exercice 3

$$A(x)=\frac{(2x+3)-4(x+1)}{x+1}=\frac{2x+3-4x-4}{x+1}=\frac{-2x-1}{x+1}$$

$$B(x)=\frac{2(x+2)+(1-3x)(x+3)}{(x+3)(x+2)}=\frac{2x+4+x+3-3x^2-9x}{(x+3)(x+2)}=\frac{-3x^2-6x+7}{(x+3)(x+2)}$$

$$C(x)=\frac{x^2-x(x-1)}{x-1}=\frac{x^2-x^2+x}{x-1}=\frac{x}{x-1}$$

$$D(x)=\frac{(2x+1)(x-2)+7}{x-2}=\frac{2x^2-4x+x-2+7}{x-2}=\frac{2x^2-3x+5}{x-2}$$

Chapitre 4 : RACINE CARREE

I Racine carrée d'un nombre réel et positif

La racine carrée d'un nombre réel positif x , notée $\sqrt{x}$, est le nombre **réel positif** y dont le carré est x.

Autrement dit, pour x et y positifs : $\left(\sqrt{x}=y\right)\Leftrightarrow\left(x=y^2\right)$

Exemples :

- $\sqrt{16}=4$ car $16=4^2$
- $\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^2=3$

II Propriétés algébriques

$\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ La racine carrée d'un produit est égale au produit des racines carrées.

$\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ La racine carrée d'un quotient est égale au quotient des racines carrées.

$\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$ et $\sqrt{4}+\sqrt{9}=5$ Aucune propriété intéressante avec somme et différence.

Dans l'écriture $\sqrt{4+9}$, les parenthèses sont sous-entendues : $\sqrt{4+9}=\sqrt{(4+9)}$

$\sqrt{4+30\times2}=\sqrt{64}=8$ Effectuer prioritairement le calcul du nombre placé sous la racine.

III Rendre un dénominateur entier

On cherche à écrire un quotient sans racine carrée au dénominateur (on dit " *rendre le dénominateur rationnel* ").

- Si le dénominateur s'écrit sans somme (ou différence), alors on multiplie le numérateur et le dénominateur par la racine carrée qui figure au dénominateur.

  Exemples :

  - $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
  - $\dfrac{9}{2\sqrt{3}}=\dfrac{9\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2\times3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

- Si le dénominateur contient une somme (ou une différence), alors on multiplie le numérateur et le dénominateur par la même expression que celle du dénominateur, mais en changeant " + " en " − " (ou " − " en " + ").
  Cette expression est appelée " **quantité conjuguée du dénominateur** ".
  On se sert ensuite de la formule $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ pour calculer le dénominateur.

  Exemples :

  - $\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}=\dfrac{1\times\left(\sqrt{3}+2\right)}{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)}=\dfrac{\sqrt{3}+2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-2^2}=\dfrac{\sqrt{3}+2}{-1}=-\sqrt{3}-2$
  - $\dfrac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}+2}=\dfrac{\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}-2\right)}{\left(\sqrt{7}+2\right)\left(\sqrt{7}-2\right)}=\dfrac{7-2\sqrt{7}-2\sqrt{7}+4}{\left(\sqrt{7}\right)^2-2^2}=\dfrac{11-4\sqrt{7}}{7-4}=\dfrac{11-4\sqrt{7}}{3}$

EXERCICES (Chapitre 4)

Exercice 1

Effectuer les calculs suivants :

$A=\sqrt{9}-2\sqrt{16}$ $\quad B=\sqrt{49}-\sqrt{0,04}\times(-5)$ $\quad C=\sqrt{\dfrac{4}{9}}-\sqrt{\dfrac{9}{4}}$ $\quad D=\sqrt{0,04}+3\sqrt{0,36}$

Exercice 2

1. Ecrire sous la forme $a\sqrt{5}$, avec a entier, les nombres : $\sqrt{45}$; $\sqrt{500}$ et $\sqrt{125}$.

2. Simplifier : $A=4\sqrt{45}+\sqrt{500}-3\sqrt{125}$.

Exercice 3

Pour chacune des questions suivantes, indiquer la ou les bonne(s) réponse(s).

	A	B	C	D
1. $4\sqrt{3}+\sqrt{3}$ est égal à :	$5\sqrt{3}$	8,66	$4\sqrt{6}$	$\sqrt{75}$
2. $\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{50}$ est égal à :	0	$\sqrt{8}$	2,83	$2\sqrt{2}$
3. $\left(\sqrt{18}-\sqrt{8}\right)\times\sqrt{2}$ est égal à :	2	$\sqrt{10}\times\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\times\sqrt{2}$	$\sqrt{20}-\sqrt{10}$
4. $\left(\sqrt{5}+3\right)\left(3\sqrt{5}-5\right)$ est égal à :	$15-15$	$4\sqrt{5}$	8,944	$\sqrt{80}$
5. $\left(2\sqrt{7}-4\right)^2$ est égal à :	$30-16\sqrt{7}$	$4\left(\sqrt{7}-2\right)^2$	$44-16\sqrt{7}$	12
6. pour $x=3\sqrt{5}$, x^2+3x-1 est égal à :	$14+9\sqrt{5}$	$44+6\sqrt{5}$	$18\sqrt{5}-1$	$44+9\sqrt{5}$
7. $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ est égal à :	1	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{3}+\sqrt{2}$
8. $\dfrac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$ est égal à :	8	$8-3\sqrt{7}$	-1	$\dfrac{-8+3\sqrt{7}}{2}$

INDICATIONS (Chapitre 4)

Exercice 1

Revoir la définition d'une racine carrée.

Exercice 2

Utiliser les propriétés algébriques.
Exemple : $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

Exercice 3

1. On attend une valeur exacte et non une valeur approchée.

5. On rappelle :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

7. et **8.** Utiliser la quantité conjuguée.

CORRIGES (Chapitre 4)

Exercice 1

$A=\sqrt{9}-2\sqrt{16}=3-2\times4=3-8=-5$

$B=\sqrt{49}-\sqrt{0,04}\times(-5)=7-0,2\times(-5)=7+1=8$

$C=\sqrt{\frac{4}{9}}-\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{2}{3}-\frac{3}{2}=\frac{4}{6}-\frac{9}{6}=-\frac{5}{6}$

$D=\sqrt{0,04}+3\sqrt{0,36}=0,2+3\times0,6=0,2+1,8=2$

Exercice 2

1. $\sqrt{45}=\sqrt{9\times5}=\sqrt{9}\times\sqrt{5}=3\sqrt{5}$; $\sqrt{500}=\sqrt{100\times5}=10\sqrt{5}$ et $\sqrt{125}=\sqrt{25\times5}=5\sqrt{5}$

2. D'où : $A=4\sqrt{45}+\sqrt{500}-3\sqrt{125}=4\times3\sqrt{5}+10\sqrt{5}-3\times5\sqrt{5}=12\sqrt{5}+10\sqrt{5}-15\sqrt{5}=7\sqrt{5}$

Exercice 3

1. $4\sqrt{3}+\sqrt{3}=5\sqrt{3}=\sqrt{25}\times\sqrt{3}=\sqrt{25\times3}=\sqrt{75}$
Réponses A et D

2. $\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{50}=\sqrt{9\times2}+\sqrt{16\times2}-\sqrt{25\times2}=3\sqrt{2}+4\sqrt{2}-5\sqrt{2}=2\sqrt{2}=\sqrt{4}\times\sqrt{2}=\sqrt{8}$
Réponses B et D

3. $\left(\sqrt{18}-\sqrt{8}\right)\times\sqrt{2}=\sqrt{36}-\sqrt{16}=6-4=2=\sqrt{2}\times\sqrt{2}$
Réponses A et C

4. $\left(\sqrt{5}+3\right)\left(3\sqrt{5}-5\right)=3\times5-5\sqrt{5}+9\sqrt{5}-15=15+4\sqrt{5}-15=4\sqrt{5}=\sqrt{16}\times\sqrt{5}=\sqrt{80}$
Réponses B et D

5. $\left(2\sqrt{7}-4\right)^2=4\times7-2\times4\times2\sqrt{7}+16=28-16\sqrt{7}+16=44-16\sqrt{7}$

Mais on a aussi : $\left(2\sqrt{7}-4\right)^2=\left[2\left(\sqrt{7}-2\right)\right]^2=4\left(\sqrt{7}-2\right)^2$

Réponses B et C

6. Si $x=3\sqrt{5}$, alors $x^2+3x-1=9\times5+9\sqrt{5}-1=45+9\sqrt{5}-1=44+9\sqrt{5}$
Réponse D

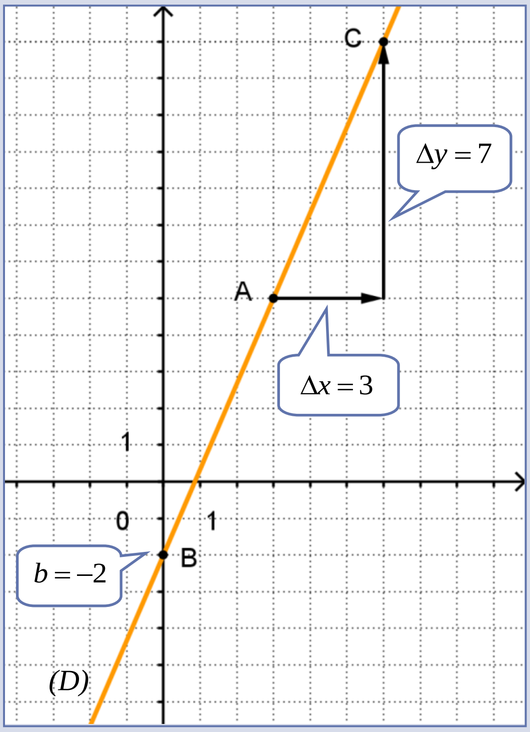
7. $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{1\times\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

Réponse D

8. $\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}=\frac{\left(3-\sqrt{7}\right)\left(3-\sqrt{7}\right)}{\left(3+\sqrt{7}\right)\left(3-\sqrt{7}\right)}=\frac{9-3\sqrt{7}-3\sqrt{7}+7}{3^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{16-6\sqrt{7}}{9-7}=\frac{16-6\sqrt{7}}{2}=8-3\sqrt{7}$

Réponse B

Chapitre 5 : DROITES DU PLAN



Toute droite (D), non parallèle à l'axe des ordonnées, a pour équation réduite :

$$\boldsymbol{y = a\,x + b}$$

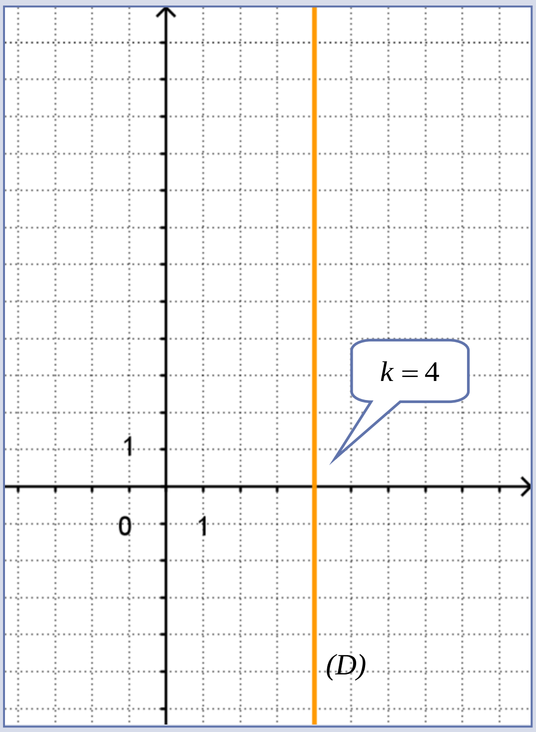
b s'appelle **l'ordonnée à l'origine** et correspond à l'ordonnée du point B de (D) d'abscisse 0.

a s'appelle **le coefficient directeur** et vaut $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$,

où Δx et Δy mesurent une quantité d'unités graphiques à parcourir en abscisse puis en ordonnée pour aller d'un point de (D) à un autre point de (D).

Exemple : (D) a pour équation $y = \dfrac{7}{3}x - 2$

Propriété :
Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont parallèles entre elles si et seulement si elles ont même coefficient directeur. Autrement dit :
Si (D) et (D') ont pour équations respectives $y = a\,x + b$ et $y = a'\,x + b'$, $(D // D') \Leftrightarrow (a = a')$



Toute droite (D), parallèle à l'axe des ordonnées, a pour équation réduite :

$$\boldsymbol{x = k}$$

k est l'abscisse commune à tous les points de la droite (D).

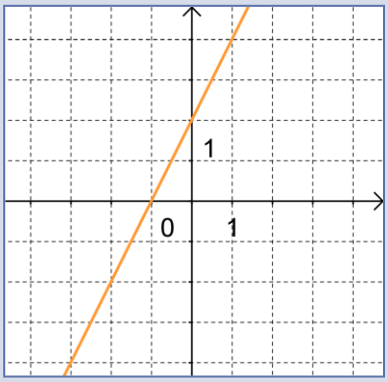
Exemple : (D) a pour équation $x = 4$

EXERCICES (Chapitre 5)

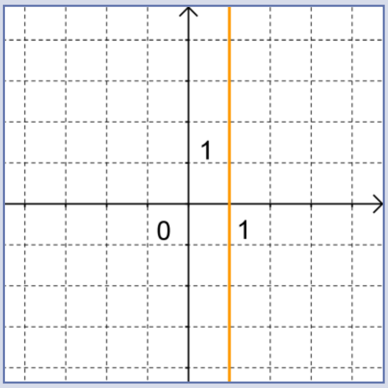
Exercice 1

Déterminer graphiquement l'équation réduite de chacune des droites :

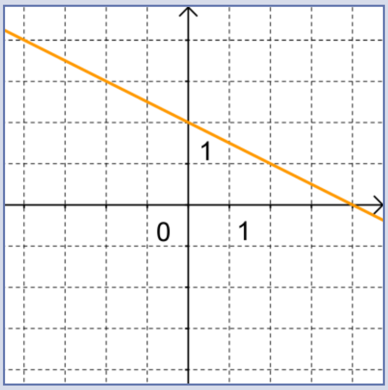
1



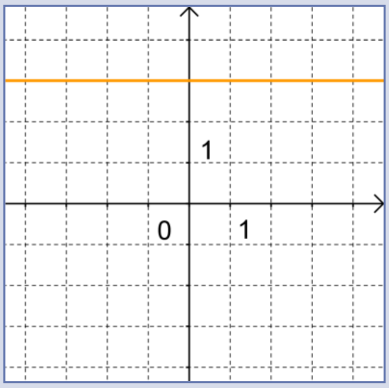
2



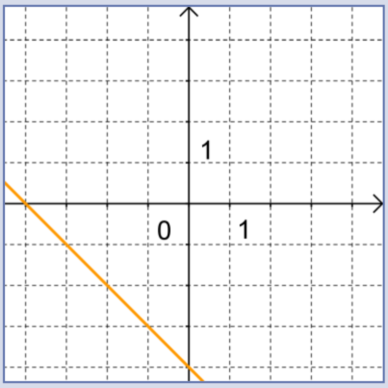
3



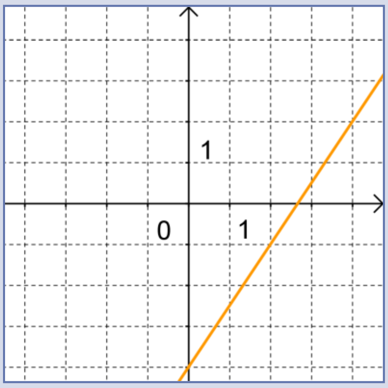
4



5



6



Exercice 2

Tracer dans un repère orthonormal les droites dont on donne l'équation réduite :

1. $y = 4x - 3$ **2.** $y = -2$ **3.** $x = 2$

4. $y = -2x$ **5.** $y = \frac{1}{2}x + 1$ **6.** $y = -x + 3$

Exercice 3

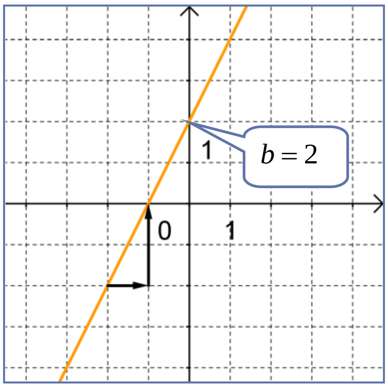
1. Déterminer l'équation réduite de la droite D_1 passant par le point $A\,(1\,;-3)$ et de coefficient directeur 2.

2. Déterminer l'équation réduite de la droite D_2 passant par les points $B\,(4\,;2)$ et $C\,(0\,;-4)$.

3. Les droites D_1 et D_2 sont-elles parallèles ?

Exercice 1

1.

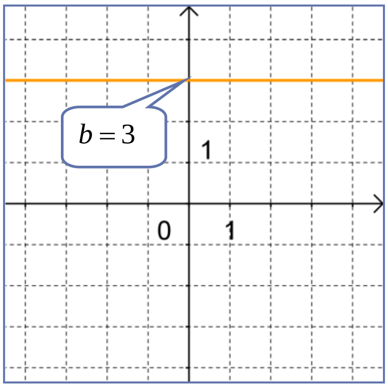


$\Delta x = 1$ et $\Delta y = 2$ donc $a = \frac{2}{1} = 2$

Donc la droite a pour équation : $y = 2x + 2$.

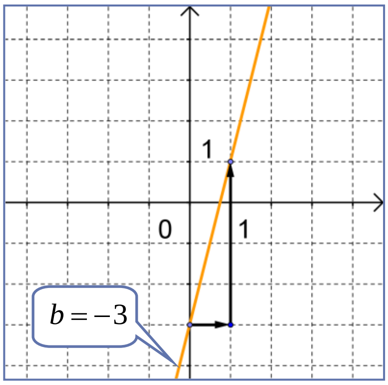
3. Attention : *a* est négatif !

4.



Dans ce cas particulier $\Delta y = 0$ donc $a = 0$

Exercice 2



1. $b = -3$

$a = 4 = \frac{4}{1}$ donc on peut choisir $\Delta x = 1$ et $\Delta y = 4$.

Exercice 3

1. La droite D_1 n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées : elle a donc pour équation réduite $y = ax + b$.
Le texte donne la valeur de *a*.
Pour déterminer *b*, il reste à remplacer *y* par l'ordonnée du point *A* et *x* par l'abscisse de *A* dans l'équation réduite.

2. Pour le calcul du coefficient directeur, on rappelle que $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$.

CORRIGES (Chapitre 5)

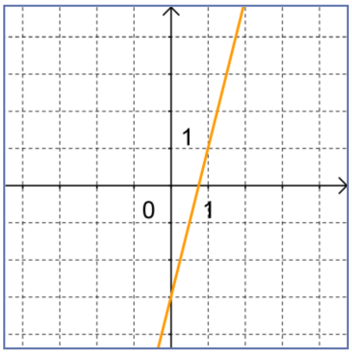
Exercice 1

1. $y = 2x + 2$ **2.** $x = 1$ **3.** $y = -\frac{1}{2}x + 2$

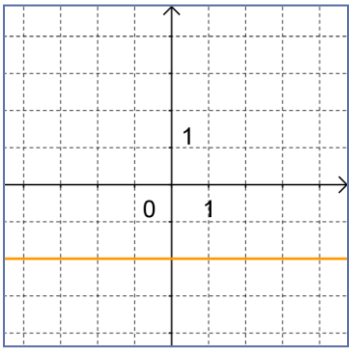
4. $y = 3$ **5.** $y = -x - 4$ **6.** $y = \frac{3}{2}x - 4$

Exercice 2

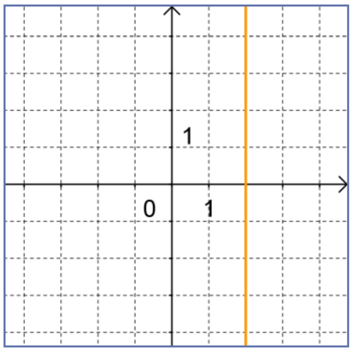
1



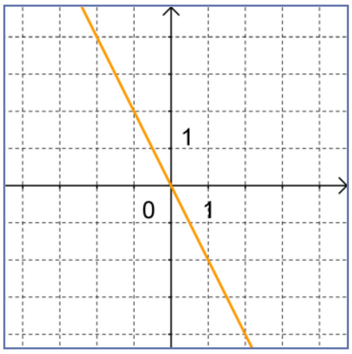
2



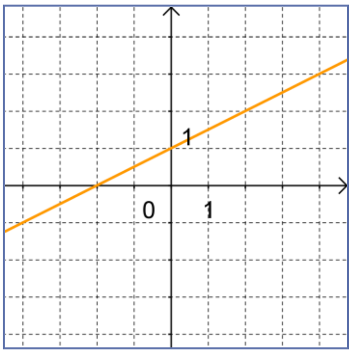
3



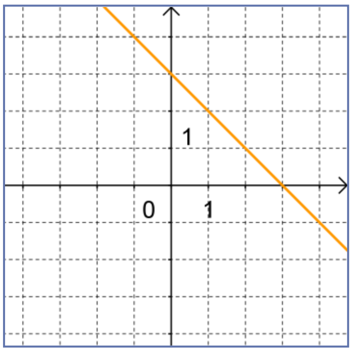
4



5

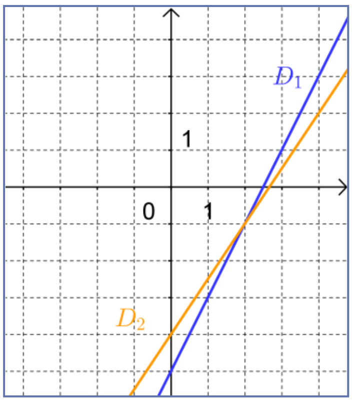


6



Exercice 3

1. D_1 n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées et $a = 2$: cette droite a donc pour équation réduite $y = 2x + b$. D'autre part :
$A \in D_1 \Leftrightarrow y_A = 2x_A + b \Leftrightarrow -3 = 2 \times 1 + b$. On déduit : $b = -5$.
D_1 a pour équation réduite $y = 2x - 5$.



2. D_2 n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées : cette droite a pour équation réduite $y = ax + b$.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-4-2}{0-4} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}.$$

D'autre part, $C \in D_2 \Leftrightarrow y_C = \frac{3}{2}x_C + b \Leftrightarrow -4 = \frac{3}{2} \times 0 + b$.

On déduit : $b = -4$.

D_2 a pour équation réduite $y = \frac{3}{2}x - 4$.

3. Le coefficient directeur de D_1 est 2, et celui de D_2 est $\frac{3}{2}$: D_1 et D_2 n'ont pas même coefficient directeur donc elles ne sont pas parallèles.

Chapitre 6 : EQUATIONS DU PREMIER DEGRE

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue (s'il en existe) qui rendent l'égalité vraie.

inconnue

$$\underbrace{3\,x+1}_{\text{membre de gauche}}=\underbrace{7}_{\text{membre de droite}}$$

Exemples :

- 2 est une solution de cette équation car l'égalité « $3\times2+1=7$ » est vraie
- 5 n'est pas solution de cette équation car l'égalité « $3\times5+1=7$ » est fausse

L'ensemble des solutions, noté S, contient tous les réels qui vérifient l'équation.

I Equations du premier degré

Propriété 1 Quand on **ajoute (ou retranche)** un même nombre aux deux membres d'une équation, on obtient une équation **équivalente** (qui a les mêmes solutions).

Propriété 2 Quand on **multiplie (ou divise)** les deux membres d'une équation par un même réel non nul, on obtient une équation équivalente.

Exemple 1 :

$3x+1=7$

on retranche 1

$\Leftrightarrow\ 3x=6$

on divise par 3 $(\neq 0)$

$\Leftrightarrow\ x=\dfrac{6}{3}$

$\Leftrightarrow\ x=2$

$S=\{2\}$

Exemple 2 :

$-\dfrac{1}{3}x-2=0$

on ajoute 2

$\Leftrightarrow\ -\dfrac{1}{3}x=2$

on multiplie par -3 $(\neq 0)$

$\Leftrightarrow\ x=2\times(-3)$

$\Leftrightarrow\ x=-6$

$S=\{-6\}$

II Equations se ramenant au premier degré

Théorème 1 Un produit $A\times B$ est nul si et seulement si A est nul ou B est nul $(A\times B=0\Leftrightarrow A=0 \text{ ou } B=0)$

$$(x+3)(2x-5)=0\Leftrightarrow x+3=0 \text{ ou } 2x-5=0$$
$$\Leftrightarrow x=-3 \text{ ou } x=\frac{5}{2}$$
$$S=\left\{-3\,;\frac{5}{2}\right\}$$

Théorème 2 Un quotient $\dfrac{A}{B}$ est nul si et seulement si A est nul et B est non nul $\left(\dfrac{A}{B}=0\Leftrightarrow A=0 \text{ et } B\neq 0\right)$

$$\frac{-x+6}{7x+1}=0\Leftrightarrow -x+6=0 \text{ et } 7x+1\neq 0$$
$$\Leftrightarrow x=6 \text{ et } x\neq-\frac{1}{7}$$
$$S=\{6\}$$

EXERCICES (Chapitre 6)

Exercice 1

Q.C.M. : pour chacune des questions suivantes, choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s).

	A	B	C
1. Le nombre 2 est solution de l'équation	$3x+5=2x+7$	$(x+2)(x-2)=0$	$7-3x=1$
2. L'équation $3x-5=2$ a pour solution	2,33	$\frac{7}{3}$	$-\frac{7}{3}$
3. L'équation $2x+7=-3+5x$ a pour solution	$-\frac{10}{3}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{10}{3}$
4. L'équation $-4x=0$	a pour solution 0	n'a pas de solution	a pour solution 4
5. L'équation $0x=4$	a pour solution 0	n'a pas de solution	a pour solution 4
6. L'équation $x(3x-15)=0$	a pour solutions 0 et 5	a pour seule solution 5	a pour solutions 0 et -5
7. L'équation $\frac{3-x}{x-1}=0$	a pour solutions 3 et 1	a une seule solution 3	a pour solution 1

Exercice 2

On appelle **racine** d'une expression $P(x)$, une **solution de l'équation** $\boldsymbol{P(x)=0}$.
Exemple : 2 est racine de $3x-6$ car $3\times 2-6=0$.

De même, déterminer la racine de chacune des expressions suivantes :

1. $-x+7$ **3.** $8-4x$

2. $5x+3$ **4.** $\frac{3}{4}x-5$

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes et donner l'ensemble des solutions :

1. $2x(x+5)(3x-1)=0$

2. $\frac{(x+8)(-2x+6)}{x-3}=0$

INDICATIONS (Chapitre 6)

Exercice 1

1. Le nombre 2 est solution d'une équation si, en remplaçant *x* par 2, les deux membres de l'égalité sont égaux.

2. et **3.** Isoler l'inconnue *x* en utilisant les propriétés du cours (paragraphe I).
Attention : une valeur approchée de *x* n'est pas solution d'une équation.

4. et **5.** Ne pas confondre multiplication et addition.
Se souvenir que la division par 0 n'est pas permise.
Réfléchir plutôt au sens de ces équations.

6. et **7.** Voir paragraphe II du cours.

Exercice 2

Résoudre pour chaque expression $P(x)$ l'équation $P(x)=0$.

Exercice 3

1. Un produit de trois facteurs est nul si et seulement si ….

2. En utilisant le paragraphe II du cours, on déduit que :

$$\frac{(x+8)(-2x+6)}{x-3}=0 \Leftrightarrow (x+8)(-2x+6)=0 \text{ et } x-3\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \ldots$$

Attention : bien réfléchir avant d'écrire l'ensemble des solutions.

CORRIGES (Chapitre 6)

Exercice 1

1. Réponses **A**, **B** et **C**.
2. Réponse **B** : $3x-5=2 \Leftrightarrow 3x=7 \Leftrightarrow x=\dfrac{7}{3}$.
3. Réponse **C**.
4. Réponse **A** : $-4x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{0}{-4}=0$
5. Réponse **B** : le produit de 0 par n'importe quel nombre vaut 0.
6. Réponse **A** : $x(3x-15)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $3x-15=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=5$.
7. Réponse **B** : $\dfrac{3-x}{x-1}=0 \Leftrightarrow 3-x=0$ et $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x=3$ et $x\neq 1$.

Exercice 2

1. $-x+7=0 \Leftrightarrow 7=x$ donc 7 est racine de $-x+7$.
2. $5x+3=0 \Leftrightarrow 5x=-3 \Leftrightarrow x=\dfrac{-3}{5}$ donc $-\dfrac{3}{5}$ est racine de $5x+3$.
3. $8-4x=0 \Leftrightarrow 8=4x \Leftrightarrow x=2$ donc 2 est racine de $8-4x$.
4. $\dfrac{3}{4}x-5=0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{4}x=5 \Leftrightarrow 3x=20 \Leftrightarrow x=\dfrac{20}{3}$ donc $\dfrac{20}{3}$ est racine de $\dfrac{3}{4}x-5$.

Exercice 3

1. $2x(x+5)(3x-1)=0 \Leftrightarrow 2x=0$ ou $x+5=0$ ou $3x-1=0$.

   $\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-5$ ou $x=\dfrac{1}{3}$

   D'où $S=\left\{-5\,;0\,;\dfrac{1}{3}\right\}$.

2. $\dfrac{(x+8)(-2x+6)}{x-3}=0 \Leftrightarrow (x+8)(-2x+6)=0$ et $x-3\neq 0$

   $\Leftrightarrow (x+8=0$ ou $-2x+6=0)$ et $x-3\neq 0$

   $\Leftrightarrow (x=-8$ ou $x=3)$ et $x\neq 3$

   Le nombre 3 ne peut convenir car il rendrait nul le dénominateur.

   Par conséquent $S=\{-8\}$.

Chapitre 7 : SIGNE DE $a\,x+b$

I Résolution d'inéquations

Propriété 1 Quand on **ajoute** (ou **retranche**) un même nombre aux deux membres d'une inégalité, le sens de l'inégalité est **conservé.**

Propriété 2 Quand on **multiplie** (ou **divise**) les deux membres d'une inégalité par un même nombre non nul, le sens de l'inégalité est **conservé** si ce nombre est positif, ou **changé**, s'il est négatif.

$3x+2\leq 0$

on retranche 2

$\Leftrightarrow\ 3x\leq -2$

on divise par 3 (positif)

$\Leftrightarrow\ x\leq -\dfrac{2}{3}$

L'ordre est conservé.

$S=\left]-\infty\,;-\dfrac{2}{3}\right]$

$-2x-6<0$

on ajoute 6

$\Leftrightarrow\ -2x<6$

on divise par -2 (négatif)

$\Leftrightarrow\ x>\dfrac{6}{-2}$

L'ordre est changé.

$\Leftrightarrow\ x>-3$

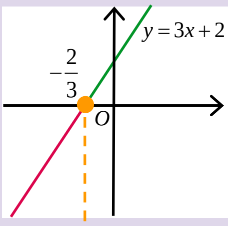
$S=\left]-3\,;-\infty\right[$

L'ensemble des solutions, noté S, contient tous les réels qui vérifient l'inéquation.

II Signe de $ax+b$

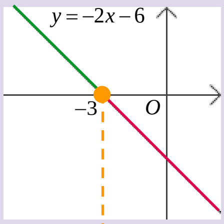
Etudier le signe de $ax+b$, c'est trouver pour quelles valeurs de x, $ax+b$ est positif et pour quelles valeurs de x, $ax+b$ est négatif .

Signe de $(3x+2)$



x	$-\infty$		$-2/3$		$+\infty$
signe de $(3x+2)$		$-$	0	$+$	

Signe de $(-2x-6)$



x	$-\infty$		-3		$+\infty$
signe de $(-2x-6)$		$+$	0	$-$	

Dans le cas général, on retiendra (les professeurs l'espèrent …) un résumé de ces deux cas :

x	$-\infty$		r		$+\infty$
signe de $(ax+b)$		signe de $(-a)$	0	signe de a	

r est la racine de $(ax+b)$; c'est la solution de l'équation $ax+b=0$.

III Signe d'un produit, d'un quotient

L'étude du signe d'un produit $A\times B$ ou d'un quotient $\dfrac{A}{B}$ se fait à l'aide d'un tableau de signes.

x	$-\infty$		-3		$-2/3$		$+\infty$
signe de $(3x+2)$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(-2x-6)$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $(3x+2)(-2x-6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
signe de $\dfrac{3x+2}{-2x-6}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

On range les racines de A et de B dans l'ordre croissant.

On étudie le signe de A.

On étudie le signe de B.

$A\times B$ et $\dfrac{A}{B}$ sont :

- positifs si A et B sont de même signe,
- négatifs si A et B sont de signes contraires.

Attention : La division par 0 n'a pas de sens : on note ce cas interdit en mettant une double barre.

EXERCICES (Chapitre 7)

Exercice 1

Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle.

1. $3x+5\geq 0$ **3.** $-5+x\leq 0$

2. $-3x+5\geq 0$ **4.** $-5x\leq 0$

Exercice 2

On donne le tableau de signe d'une expression $P(x)$.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour chacune des phrases suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

1. Si $x\geq 4$ alors $P(x)\geq 0$.

2. Si $x\geq 1$ alors $P(x)\geq 0$.

3. Si $x\in[1;4]$ alors $P(x)\geq 0$.

4. Si $x>5$ alors $P(x)<0$.

5. Si $x<1$ ou $x>4$ alors $P(x)<0$.

Exercice 3

Voici trois tableaux incomplets dont les expressions perdues sont pêle-mêle dans la liste suivante :
$-5-x$; $-x+1$; $3x$; $3-x$; $5-x$; $2x-2$; $-3+x$.

Retrouver pour chaque tableau l'expression qui convient.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de …		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
signe de …		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de …		$+$	0	$-$	

Exercice 4

1. Etudier, dans un tableau, le signe de $P(x)=(2x+3)(-3x+4)$.

En déduire la résolution de l'inéquation $P(x)<0$.

2. Etudier, dans un tableau, le signe de $Q(x)=\dfrac{-x+5}{7x+3}$.

En déduire la résolution de l'inéquation $Q(x)\geq 0$.

INDICATIONS (Chapitre 7)

Exercice 1

Utiliser les propriétés 1 et 2 du cours (paragraphe I) pour isoler x.
En particulier, ne pas oublier de changer l'ordre quand on multiplie ou divise par un réel négatif.

Exercice 2

- On rappelle que $P(x) \geq 0$ signifie « $P(x)$ est positif ou nul » et se note par les signes + et 0 dans un tableau de signe.
  De même, $P(x) < 0$ signifie « $P(x)$ est strictement négatif » et se note par le symbole $-$.
- On rappelle également qu'**une phrase est vraie si elle est vérifiée pour tout nombre *x***.
  Au contraire, une phrase est fausse si on peut trouver **une valeur** de x pour laquelle la phrase n'est pas vérifiée (cette valeur particulière s'appelle un **contre-exemple**).

2. $x \geq 1$ signifie que x peut prendre toutes les valeurs dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$.
Prendre, par exemple, la valeur $x = 5$ et regarder si la phrase est vraie pour cette valeur.

5. $x < 1$ ou $x > 4 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;1[\cup]4\,;+\infty[$.

Exercice 3

Dans le premier tableau, on remarque que 1 est racine de l'expression cherchée ; parmi les 7 expressions proposées, seules $(-x+1)$ et $(2x-2)$ ont 1 pour racine.
Il suffit ensuite de départager les deux réponses précédentes en examinant le signe du coefficient de a.
Ce coefficient vaut -1 dans $(-x+1)$ et 2 dans $(2x-2)$.
Conclure en utilisant le cours (paragraphe II).

Exercice 4

Pour le tableau de signes, suivre les consignes données dans le paragraphe III du cours.

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) < 0$ correspond aux valeurs de x telles que $P(x)$ soit de signe $-$ dans la dernière ligne du tableau.

2. Penser à ranger les racines de $(-x+5)$ et $(7x+3)$ dans l'ordre croissant sur la « ligne de x ».

CORRIGES (Chapitre 7)

Exercice 1

1. $3x+5\geq 0 \Leftrightarrow 3x\geq -5 \Leftrightarrow x\geq -\frac{5}{3}$ $\qquad S=\left[-\frac{5}{3};+\infty\right[$

2. $-3x+5\geq 0 \Leftrightarrow -3x\geq -5 \Leftrightarrow x\leq \frac{-5}{-3} \Leftrightarrow x\leq \frac{5}{3}$ $\qquad S=\left]-\infty;\frac{5}{3}\right]$

3. $-5+x\leq 0 \Leftrightarrow x\leq 5$ $\qquad S=\left]-\infty;5\right]$

4. $-5x\leq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{0}{-5} \Leftrightarrow x\geq 0$ $\qquad S=\left[0;+\infty\right[$

Exercice 2

1. Faux : $5\geq 4$ et, d'après le tableau, $P(5)$ est négatif.

2. Faux : $5\geq 1$ et $P(5)$ est négatif.

3. Vrai.

4. Vrai.

5. Vrai.

Exercice 3

Tableau 1 : signe de $2x-2$ ($r=1$ et $a=2$ positif : $2x-2$ est positif à droite de r).

Tableau 2 : signe de $-5-x$ ($r=-5$ et $a=-1$ négatif : $-5-x$ est négatif à droite de r).

Tableau 3 : signe de $3-x$ ($r=3$ et $a=-1$ négatif : $3-x$ est négatif à droite de r).

Exercice 4

1.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$	
signe de $(2x+3)$		$-$	0	$+$		$+$		$r=-\frac{3}{2}$ et a est positif
signe de $(-3x+4)$		$+$		$+$	0	$-$		$r=\frac{4}{3}$ et a est négatif
signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		

$P(x)<0 \Leftrightarrow x<-\frac{3}{2}$ ou $x>\frac{4}{3}$ donc $S=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$

2.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{7}$		5		$+\infty$	
signe de $(-x+5)$		$+$		$+$	0	$-$		$r=5$ et a est négatif
signe de $(7x+3)$		$-$	0	$+$		$+$		$r=-\frac{3}{7}$ et a est positif
signe de $Q(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$		

$Q(x)\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{7}<x\leq 5$ donc $S=\left]-\frac{3}{7};5\right]$

Chapitre 8 : ETUDE DE $a\,x^2+b\,x+c$

I Equations du second degré

Pour chercher les solutions éventuelles de l'équation $ax^2+bx+c=0$ (où *a*, *b* et *c* sont des constantes réelles avec $a\neq 0$), on procède en deux étapes (à connaître par cœur) :

- On calcule le **discriminant** Δ avec la formule : $\Delta=(b)^2-4\times a\times c$
- On examine le signe du discriminant :

Si $\Delta>0$ alors l'équation a deux solutions : $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta=0$ alors l'équation a une solution : $x_0=\dfrac{-b}{2a}$.

Si $\Delta<0$ alors l'équation n'a pas de solution réelle.

Exemples :

$2x^2+5x-3=0$

$a=2,\ b=5,\ c=-3$

$\Delta=25-4\times 2\times(-3)=49$

$\Delta>0$

l'équation a deux solutions :

$x_1=\dfrac{-5+\sqrt{49}}{2\times 2}=\dfrac{-5+7}{4}=\dfrac{1}{2}$

et $x_2=\dfrac{-5-\sqrt{49}}{2\times 2}=\dfrac{-5-7}{4}=-3$.

$S=\left\{-3\,;\dfrac{1}{2}\right\}$

$-9x^2+6x-1=0$

$a=-9,\ b=6,\ c=-1$

$\Delta=36-4\times(-9)\times(-1)=0$

$\Delta=0$

l'équation a une solution :

$x_0=\dfrac{-6}{2\times(-9)}=\dfrac{1}{3}$

$S=\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

$x^2+5x+7=0$

$a=1,\ b=5,\ c=7$

$\Delta=25-4\times 1\times 7=-3$

$\Delta<0$

l'équation n'a pas de solution réelle.

$S=\varnothing$

II Signe de ax^2+bx+c $(a\neq 0)$

Pour étudier le signe de l'expression ax^2+bx+c, on procède en deux étapes :

- On détermine les racines éventuelles de l'expression (les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$) en calculant le discriminant.
- On dresse un tableau de signes en utilisant la règle :

  l'expression ax^2+bx+c est du signe de a partout, sauf entre ses racines éventuelles.

Exemples :

Signe de $P(x)=2x^2+5x-3$

$P(x)$ a deux racines : -3 et $\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe $P(x)$		+	0	−	0	+	

Signe de $Q(x)=-9x^2+6x-1$

$Q(x)$ a une seule racine $\dfrac{1}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
signe $Q(x)$		−	0	−	

Signe de $R(x)=x^2+5x+7$

$R(x)$ n'a pas de racine réelle

x	$-\infty$		$+\infty$
signe $R(x)$		+	

EXERCICES (Chapitre 8)

Exercice 1

Résoudre, en calculant le discriminant,

1. $x^2 - 7x + 6 = 0$

2. $-2x^2 + 5x - 13 = 0$

3. $2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$

4. $8x^2 + 1 - 6x = 0$

Exercice 2

Dans certains cas, le calcul du discriminant est une perte de temps :

- si l'équation se transforme facilement en un produit nul ($A \times B = 0 \Leftrightarrow \ldots$ à revoir dans le chapitre 6).

  Exemple : $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ ou $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.

- si l'équation n'a manifestement pas de solution réelle.

  Exemple : $x^2 + 4$ est un réel strictement positif car x^2 est un carré.
  Par conséquent, $x^2 + 4$ ne peut pas être nul; l'équation $x^2 + 4 = 0$ n'a donc pas de solution réelle.

Résoudre les équations suivantes, sans calculer le discriminant.

1. $9x^2 - 1 = 0$

2. $x^2 - 3x = 0$

3. $x^2 + 2 = 0$

4. $x^2 - 2 = 0$

Exercice 3

Dresser le tableau de signes des expressions suivantes (on pourra utiliser les résultats de l'exercice **1**).

1. $P(x) = x^2 - 7x + 6$

2. $Q(x) = -2x^2 + 5x - 13$

3. $R(x) = 2x^2 - 2x + \frac{1}{2}$

INDICATIONS (Chapitre 8)

Exercice 1

1. $a=1$; $b=-7$ et $c=6$.

   Montrer que $\Delta=25$ puis déterminer les deux solutions de l'équation avec les formules du cours.

2. $\Delta<0$.

3. $\Delta=0$.

4. Attention à bien repérer les valeurs de *a*, *b* et *c*.

Exercice 2

1. et **2.** Factoriser les membres de gauche.

3. Examiner les valeurs que peut prendre l'expression x^2+2.

4. $2=\left(\sqrt{2}\right)^2$.

Exercice 3

Utiliser les étapes indiquées dans le paragraphe II du cours, sachant que les racines éventuelles des expressions ont été déterminées dans l'exercice 1.

CORRIGES (Chapitre 8)

Exercice 1

1. $a=1$; $b=-7$ et $c=6$.

$\Delta=(-7)^2-4\times1\times6=49-24=25$. $\Delta>0$; l'équation a deux solutions :

$x_1=\dfrac{-(-7)+\sqrt{25}}{2\times1}=\dfrac{7+5}{2}=\dfrac{12}{2}=6$ et $x_2=\dfrac{-(-7)-\sqrt{25}}{2\times1}=\dfrac{7-5}{2}=\dfrac{2}{2}=1$ $\quad S=\{1;6\}$

2. $a=-2$; $b=5$ et $c=-13$.

$\Delta=(5)^2-4\times(-2)\times(-13)=25-104=-79$. $\Delta<0$; l'équation n'a pas de solution réelle. $\quad S=\varnothing$

3. $a=2$; $b=-2$ et $c=\dfrac{1}{2}$.

$\Delta=(-2)^2-4\times2\times\dfrac{1}{2}=4-4=0$. $\Delta=0$; l'équation a une seule solution : $x_0=\dfrac{-(-2)}{2\times2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ $\quad S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

4. $a=8$; $b=-6$ et $c=1$.

$\Delta=(-6)^2-4\times8\times1=36-32=4$. $\Delta>0$; l'équation a deux solutions :

$x_1=\dfrac{-(-6)+\sqrt{4}}{2\times8}=\dfrac{6+2}{16}=\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{-(-6)-\sqrt{4}}{2\times8}=\dfrac{6-2}{16}=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$ $\quad S=\left\{\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right\}$

Exercice 2

1. $9x^2-1=0\Leftrightarrow(3x)^2-(1)^2=0\Leftrightarrow(3x-1)(3x+1)=0\Leftrightarrow 3x-1=0$ ou $3x+1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$ ou $x=-\dfrac{1}{3}$

$S=\left\{-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right\}$

2. $x^2-3x=0\Leftrightarrow x(x-3)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x-3=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=3$ $\quad S=\{0;3\}$

3. $x^2+2>0$ donc l'équation $x^2+2=0$ n'a pas de solution. $\quad S=\varnothing$

4. $x^2-2=0\Leftrightarrow x^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=0\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)=0\Leftrightarrow x-\sqrt{2}=0$ ou $x+\sqrt{2}=0\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

$S=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$

Exercice 3

1. $\Delta>0$
L'expression est du signe de $a=1$ sauf entre les racines 1 et 6.

x	$-\infty$		1		6		$+\infty$
signe de (x^2-7x+6)		+	0	−	0	+	

2. $\Delta<0$
L'expression est partout du signe de $a=-2$.

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $(-2x^2+5x-13)$		−	

3. $\Delta=0$
L'expression est partout du signe de $a=2$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $\left(2x^2-2x+\frac{1}{2}\right)$		+	0	+	

Chapitre 9 : FONCTIONS POLYNÔMES ET RATIONNELLES

I Vocabulaire

$P(x) = -2x^5 + 4x^3 - 7x^2 + 5x - 1$ est un **polynôme** de la variable réelle *x*.

Il est nécessaire de connaître le vocabulaire relatif aux polynômes :

5 est le **degré** de *P*
(exposant de *x* le plus élevé)

$4x^3$ est le **terme de degré 3**

$$P(x) = -2\,x^5 \quad + 4\,x^3 - 7\,x^2 + 5\,x - 1$$

Le coefficient de x^4 est 0
(x^4 n'apparaît pas dans le polynôme)

-1 est le coefficient **constant**

-7 est le **coefficient** de x^2

II Egalité de deux polynômes

- Soit *P*(*x*) et *Q*(*x*) deux polynômes :

$$P(x) = Q(x) \iff \begin{cases} P(x) \text{ et } Q(x) \text{ ont même degré} \\ \text{les coefficients des termes de même degré sont égaux} \end{cases}$$

- Cas particulier important :

$P(x) = 0$ signifie que tous les coefficients de $P(x)$ sont nuls.

III Fonction rationnelle

Définition : Une fonction rationnelle est le **quotient** de deux polynômes.
Elle s'écrit donc $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.
Elle est définie pour tout *x* tel que $Q(x) \neq 0$.

Exemple : $\dfrac{2x^2 - 4}{x + 1}$ est une fonction rationnelle définie pour tout *x* différent de -1.

EXERCICES (Chapitre 9)

Exercice 1

On donne les polynômes $P(x) = 4x^3 - 2x + 4$ et $Q(x) = x^3 - 5$.
Développer et réduire :

1. $P(x) - 4Q(x)$
2. $P(x) \times Q(x)$
3. $\left[Q(x)\right]^2$

Exercice 2

1. On donne les polynômes :
$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 7 \text{ et } Q(x) = ax^3 + (b+1)x^2 + (7-c)x + d.$$
Déterminer les réels *a*, *b*, *c* et *d* tels que $P(x)$ et $Q(x)$ soient égaux.

2. On donne les polynômes :
$$P(x) = x^2 - 6x + 5 \text{ et } Q(x) = (ax+b)^2 - c.$$
Déterminer les réels *a*, *b* et *c* tels que $P(x)$ et $Q(x)$ soient égaux.

Exercice 3

1. Soit la fonction rationnelle f définie sur $\left]1;+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{5x+1}{(x-1)(x+2)}$.

   Déterminer les réels *a* et *b* tels que $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+2}$.

2. Soit la fonction rationnelle *g* définie sur $\left]3;+\infty\right[$ par $g(x) = \dfrac{6}{x^2-9}$.

   Déterminer les réels *a* et *b* tels que $g(x) = \dfrac{a}{x+3} + \dfrac{b}{x-3}$.

INDICATIONS (Chapitre 9)

Exercice 1

Voir le chapitre 3.

Exercice 2

1. On utilise la définition du paragraphe II du cours.
$P(x)$ et $Q(x)$ sont bien de même degré.
Par conséquent, ils sont égaux si et seulement si les coefficients des termes de même degré sont égaux.
Donc :

$$1x^3 - 2x^2 + 0x + 7 = ax^3 + (b+1)x^2 + (7-c)x + d \text{ si et seulement si } \begin{cases} a = 1 \\ b+1 = -2 \\ 7-c = 0 \\ d = 7 \end{cases}$$

2. Développer $Q(x)$, puis procéder avec la même méthode que dans le **1.**

Exercice 3

1. Réduire au même dénominateur $\dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+2}$.

Comparer les deux écritures de $f(x)$: on rappelle que deux fractions de même dénominateur sont égales si leurs numérateurs sont égaux.

2. On remarque que $(x+3)(x-3) = x^2 - 9$.

CORRIGES (Chapitre 9)

Exercice 1

1. $P(x)-4Q(x)=-2x+24$
2. $P(x)\times Q(x)=4x^6-2x^4+4x^3-20x^3+10x-20=4x^6-2x^4-16x^3+10x-20$
3. $\left[Q(x)\right]^2=x^6-10x^3+25$

Exercice 2

1. $\begin{cases} a=1 \\ b+1=-2 \\ 7-c=0 \\ d=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=7 \\ d=7 \end{cases}$

2. $Q(x)=(ax+b)^2-c=a^2x^2+2abx+b^2-c$.

   On veut : $Q(x)=P(x)=x^2-6x+5$.

   On en déduit le système : $\begin{cases} a^2=1 \\ 2ab=-6 \\ b^2-c=5 \end{cases}$.

   Deux solutions conviennent : $\begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=4 \end{cases}$

Exercice 3

1. $f(x)=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+2}=\dfrac{a(x+2)+b(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{ax+2a+bx-b)}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{(a+b)x+2a-b}{(x-1)(x+2)}$

   Par hypothèse, $f(x)=\dfrac{5x+1}{(x-1)(x+2)}$

   Par identification des coefficients des termes de même degré des numérateurs, on obtient :

   $\begin{cases} a+b=5 \\ 2a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=5-a \\ 2a-(5-a)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=2 \end{cases}$ ainsi $f(x)=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x+2}$

2. $g(x)=\dfrac{a}{x+3}+\dfrac{b}{x-3}=\dfrac{a(x-3)+b(x+3)}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{ax-3a+bx+3b}{x^2-9}=\dfrac{(a+b)x-3a+3b}{x^2-9}$.

   Par hypothèse, $g(x)=\dfrac{6}{x^2-9}=\dfrac{0x+6}{x^2-9}$

   Par identification des coefficients des termes de même degré des numérateurs, on obtient :

   $\begin{cases} a+b=0 \\ -3a+3b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ 3b+3b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$ ainsi $g(x)=\dfrac{-1}{x+3}+\dfrac{1}{x-3}$

Chapitre 10 : FACTORISATION D'UN POLYNÔME DANS $\mathbb{R}$

I Racine d'un polynôme

Soit $P(x)$ un polynôme.

Un réel α est appelé **racine** du polynôme $P(x)$ si α vérifie l'égalité : $\boldsymbol{P(\alpha)=0}$.

Exemple 1 : $P(x)=x^3+x^2+3x+3$

-1 est une racine du polynôme $P(x)$ car $(-1)^3+(-1)^2+3(-1)+3=-1+1-3+3=0$.

Exemple 2 : $Q(x)=x^2-x-2$

-1est une racine du polynôme $Q(x)$ car $(-1)^2-(-1)-2=1+1-2=0$.

Déterminer les **racines** de $P(x)$ équivaut à **résoudre** l'équation $\boldsymbol{P(x)=0}$.

Exemple 1 : $P(x)=x^3+x^2+3x+3$. On vérifie que $P(x)=(x+1)(x^2+3)$

$P(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+3)=0 \Leftrightarrow x+1=0$ ou $x^2+3=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ (car $x^2=-3$ n'a pas de solution réelle)

Le polynôme $P(x)$ a une seule racine qui est -1.

Exemple 2 : $Q(x)=x^2-x-2$. On vérifie que $Q(x)=(x+1)(x-2)$

$Q(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x+1=0$ ou $x-2=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=2$

Le polynôme $Q(x)$ a deux racines qui sont -1 et 2.

II Factorisation par $(x-\alpha)$

Soit $P(x)$ un polynôme de degré $n, n\geq 2$.

Si α est une racine de $P(x)$, il existe alors un polynôme $Q(x)$ de degré $n-1$ tel que, pour tout réel x :

$$P(x)=(x-\alpha)\times Q(x)$$

Exemple : $P(x)=x^3-8$ est un polynôme de degré 3.

2 est une racine du polynôme $P(x)$ car $P(2)=2^3-8=0$.

Il existe donc un polynôme $Q(x)$, de degré $3-1=2$ tel que, pour tout réel x :

$P(x)=(x-2)\times Q(x)$. $Q(x)$, étant de degré 2, s'écrit sous la forme $Q(x)=ax^2+bx+c$.

$$P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c$$

$$=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$$

On détermine les réels a, b et c par la méthode d'identification des coefficients *(voir partie exercices du chapitre 9).*

On obtient : $\begin{cases} a=1 \\ b-2a=0 \\ c-2b=0 \\ -2c=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=4 \end{cases}$

En conclusion, $P(x)=(x-2)(x^2+2x+4)$

EXERCICES (Chapitre 10)

Exercice 1

Soit le polynôme $P(x)$ défini par $P(x) = 4x^3 + 15x^2 + 8x - 3$.

1. Calculer $P(-3)$.

2. Justifier l'affirmation :
« Il existe un polynôme $Q(x)$ du second degré tel que, pour tout réel x, $P(x) = (x+3) \times Q(x)$ ».
Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x, $P(x) = (x+3) \times (ax^2 + bx + c)$.

3. Résoudre l'équation : $P(x) = 0$.

Exercice 2

Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 - x - 1$.

1. Trouver par calcul mental une racine de ce polynôme.

2. En déduire une factorisation de $P(x)$.

3. Ce polynôme a-t-il d'autres racines que 1?

Exercice 3

Le texte d'un exercice est illisible; les coefficients des termes de degré 3 et de degré 2 d'un polynôme ont été effacés. On ne voit que :

$$P(x) = x^4 + \ldots x^3 + \ldots x^2 + 3x - 2.$$

La question de cet exercice est : « Vérifier que -1 et 2 sont des racines du polynôme $P(x)$. »

Pour pouvoir répondre, il faudrait retrouver les coefficients effacés. Comment procéder ?

INDICATIONS (Chapitre 10)

Exercice 1

1. Faire attention aux puissances d'un nombre négatif.

2. Utiliser la propriété du paragraphe II du cours.
Développer $(x+3)\times(a\,x^2+b\,x+c)$ puis identifier les coefficients des deux écritures de $P(x)$.

3. Utiliser la « règle du produit nul » : $(A\times B=0) \Leftrightarrow (A=0 \text{ ou } B=0)$, puis la résolution d'une équation du second degré (voir chapitre 8).

Exercice 2

1. Tester différentes valeurs entières et simples de x pour en trouver une qui annule le polynôme.

3. Il faut résoudre l'équation : $P(x)=0$.

Exercice 3

Appeler *a* et *b* les deux coefficients manquants.
Dire que -1 est une racine du polynôme $P(x)$ signifie que $P(-1)=0$. Cette égalité se traduit par une équation à deux inconnues *a* et *b*.
Procéder de même avec l'autre racine.

Il reste à résoudre un système de deux équations à deux inconnues.

CORRIGES (Chapitre 10)

Exercice 1

1. $P(-3)=0$.

2. -3 étant une racine de $P(x)$, on peut factoriser $P(x)$ par $(x-(-3))$.

$P(x)=(x+3)\times Q(x)$ où $Q(x)$ est de degré 2 et s'écrit donc sous la forme $Q(x)=ax^2+bx+c$.

$P(x)=(x+3)\times(ax^2+bx+c)=ax^3+(3a+b)x^2+(3b+c)x+3c$ et $P(x)=4x^3+15x^2+8x-3$.

On obtient le système : $\begin{cases} a=4 \\ 3a+b=15 \\ 3b+c=8 \\ 3c=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=3 \\ c=-1 \end{cases}$.

3. $P(x)=(x+3)\times(4x^2+3x-1)=0 \Leftrightarrow (x+3)=0$ ou $(4x^2+3x-1)=0$

- $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$;
- $4x^2+3x-1=0$: $\Delta=25$; les solutions sont $x=\frac{1}{4}$ ou $x=-1$.

Conclusion : $S=\left\{-3;-1;\frac{1}{4}\right\}$.

Exercice 2

1. On remarque que $P(1)=2-1-1=0$ donc que 1 est une racine du polynôme.

2. $P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$.

Or $P(x)=2x^3-x-1$. Par identification des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} a=2 \\ b-a=0 \\ c-b=-1 \\ -c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$$

Donc $P(x)=(x-1)(2x^2+2x+1)$

3. $P(x)=(x-1)\times(2x^2+2x+1)=0 \Leftrightarrow (x-1)=0$ ou $(2x^2+2x+1)=0$

$2x^2+2x+1$ a un discriminant négatif ($\Delta=-4$) donc n'a pas de racine.

Conclusion : 1 est la seule racine de $P(x)$.

Exercice 3

Posons $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+3x-2$.

$P(-1)=0 \Leftrightarrow 1-a+b-3-2=0 \Leftrightarrow -a+b=4$

$P(2)=0 \Leftrightarrow 16+8a+4b+6-2=0 \Leftrightarrow 8a+4b=-20$

On résout : $\begin{cases} -a+b=4 \\ 8a+4b=-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4+a \\ 8a+4(4+a)=-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4+a \\ 12a=-36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=1 \end{cases}$

Conclusion : $P(x)=x^4-3x^3+x^2+3x-2$.

Chapitre 11 : TRIGONOMETRIE

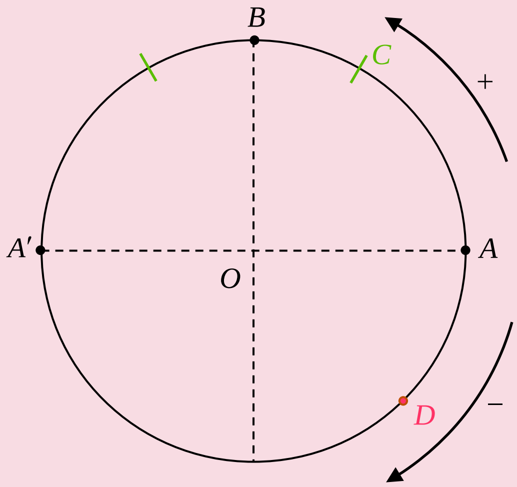
I Placer des points sur le cercle trigonométrique

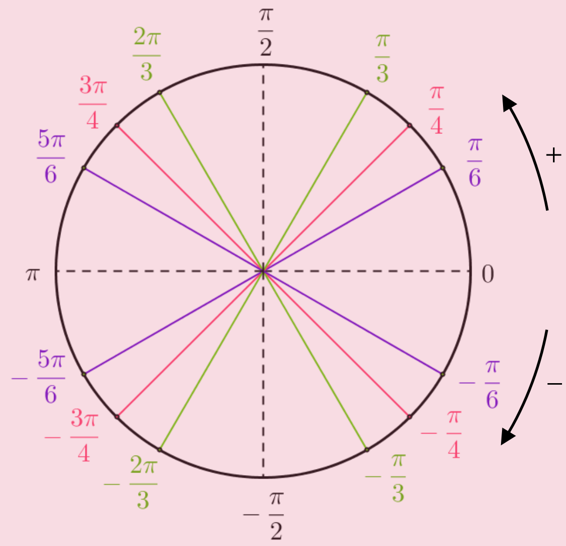
On appelle cercle trigonométrique un cercle orienté de rayon 1. Son périmètre est $2\pi\times 1=2\pi$.

Le point *A* est appelé origine sur ce cercle ; il est associé au réel 0.

En partant de *A*, on arrive à *A'* en parcourant un demi-cercle : le point *A'* est associé au réel π.

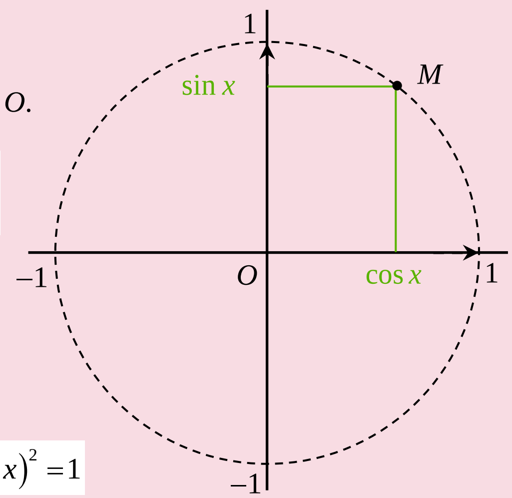
De même : le point *B* est associé à $\frac{\pi}{2}$, le point *C* est associé à $\frac{\pi}{3}$, le point *D* est associé à $-\frac{\pi}{4}$.





II Cosinus et sinus d'un nombre réel

Le plan est muni d'un repère orthonormal d'origine *O*.
x est un nombre réel.
M est le point associé à *x* sur le cercle trigonométrique de centre *O*.



Le **cosinus du réel *x*** est l'**abscisse du point *M*** dans le repère.
On le note $\cos x$.

Le **sinus du réel *x*** est l'**ordonnée du point *M*** dans le repère.
On le note $\sin x$.

Le point *M* de coordonnées $(\cos x;\sin x)$ étant sur le cercle de rayon 1 :

$-1\leq\cos x\leq 1$ $-1\leq\sin x\leq 1$ $(\cos x)^2+(\sin x)^2=1$

Valeurs remarquables à retenir :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

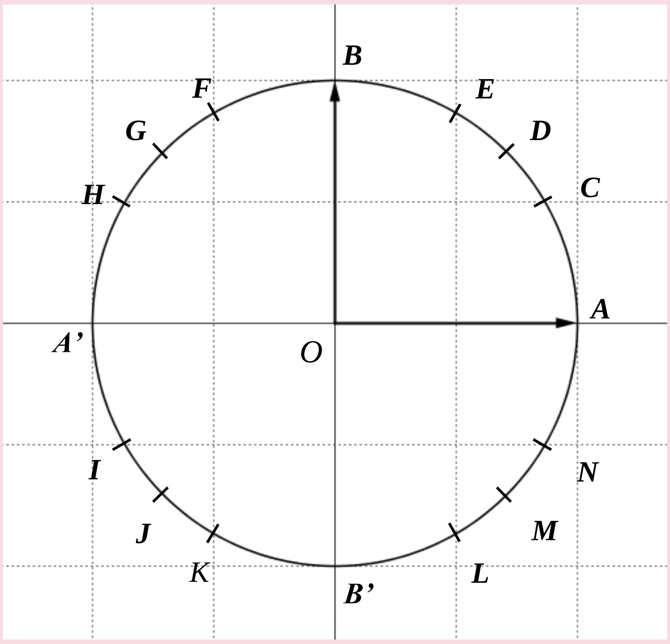
Pour les autres valeurs remarquables de *x*, on utilise les symétries par rapport aux axes de coordonnées ou par rapport au point *O*.

Exemple : $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

EXERCICES (Chapitre 11)

Exercice 1

A l'aide du cercle trigonométrique ci-contre, compléter le tableau suivant :



Réel x	$\frac{\pi}{3}$	0			$\frac{3\pi}{4}$			$-\frac{5\pi}{6}$			
Point associé	***E***		***C***			***K***			***L***		
$\cos x$	$\frac{1}{2}$			0			$\frac{\sqrt{2}}{2}$			$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$			-1			$-\frac{\sqrt{2}}{2}$			$\frac{1}{2}$	0

Exercice 2

Résoudre dans $\left[-\pi\,;\,\pi\right]$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\sin x = -\frac{1}{2}$

3. $\cos x \geq 0$

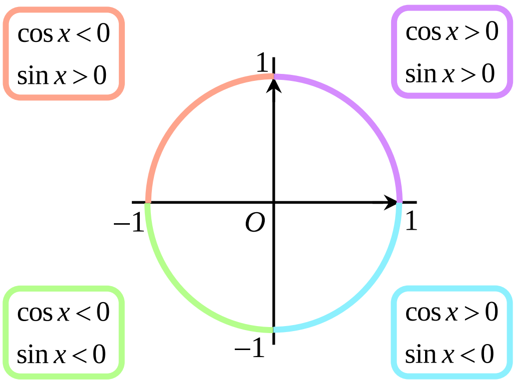
4. $\sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

INDICATIONS (Chapitre 11)

Exercice 1

- $\cos x$ se lit en abscisse.
  $\sin x$ se lit en ordonnée.

- Attention aux signes.



Exemple : N et C sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
Ces deux points ont donc même abscisse et des ordonnées opposées.

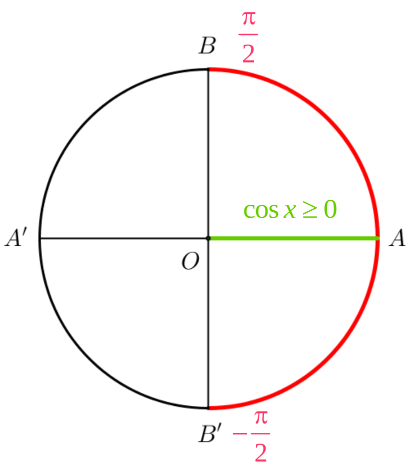
$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Exercice 2

1. Penser à utiliser un cercle trigonométrique.
Placer, sur le cercle, les points correspondant à l'équation donnée.
Les solutions sont les nombres réels de $\left[-\pi\,;\,\pi\right]$ associés à ces points.

3. Colorier sur le cercle les points correspondant à l'inéquation donnée (en rouge ci-dessous).
Les solutions sont les nombres réels de $\left[-\pi\,;\,\pi\right]$ associés à ces points.



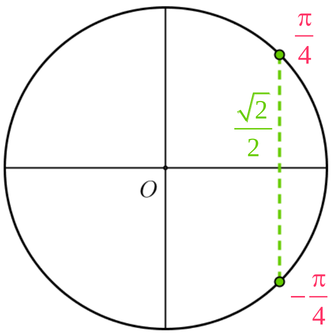
CORRIGES (Chapitre 11)

Exercice 1

Réel x	$\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Point associé	***E***	***A***	***C***	***B'***	***G***	***K***	***M***	***I***	***L***	***H***	***A'***
$\cos x$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

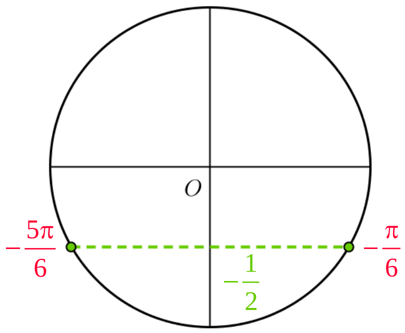
Exercice 2

1. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$



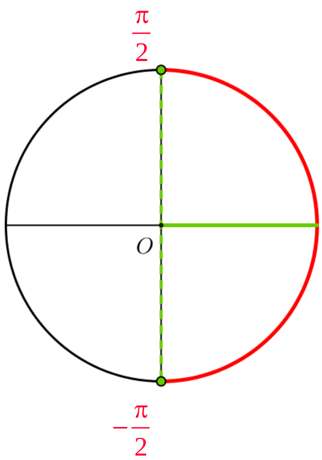
$x = -\frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{4}$ donc $S = \left\{-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right\}$

2. $\sin x = -\frac{1}{2}$



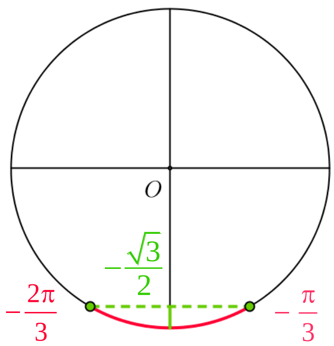
$x = -\frac{5\pi}{6}$ ou $x = -\frac{\pi}{6}$ donc $S = \left\{-\frac{5\pi}{6} ; -\frac{\pi}{6}\right\}$

3. $\cos x \geq 0$



$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ donc $S = \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$

4. $\sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$



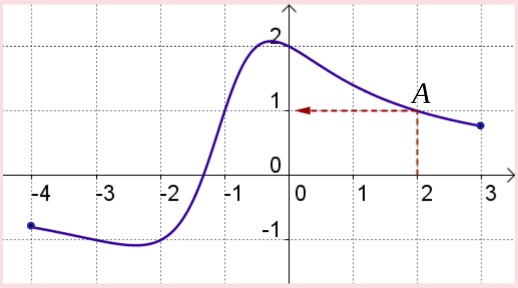
$-\frac{2\pi}{3} \leq x \leq -\frac{\pi}{3}$ donc $S = \left[-\frac{2\pi}{3} ; -\frac{\pi}{3}\right]$

Chapitre 12 : FONCTIONS

I Exemple de fonction définie par une courbe

f est la fonction définie par la courbe ci-contre.
Tout point de cette courbe a pour coordonnées $\boldsymbol{x}$ **et** $\boldsymbol{y = f(x)}$.

Ici, $A(2;1)$ est un point de la courbe.



- Les valeurs de *x* se lisent sur l'axe des abscisses. L'ensemble des abscisses des points de la courbe s'appelle **ensemble de définition** de la fonction *f* ;
  ici, l'ensemble de définition est $D = [-4\,;3]$.
- Les valeurs de $f(x)$ se lisent sur l'axe des ordonnées ;
  ici, $f(2) = 1$. On dit que « 2 a pour **image** 1 » ou que « l'image de 2 est 1 ».

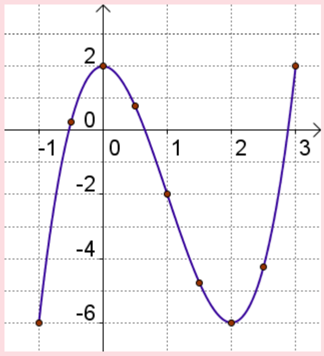
II Exemple de fonction définie par une expression algébrique

f est la fonction définie sur $[-1;3]$ par $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2$

- Pour toute valeur de *x* comprise entre –1 et 3, on peut calculer son image « à la main ».
  Par exemple : $f(1) = 2\times(1)^3 - 6\times(1)^2 + 2 = 2 - 6 + 2 = -2$
- Après avoir calculé ainsi plusieurs images, « à la main » ou avec un tableur de calculatrice, on peut présenter ces résultats dans un **tableau de valeurs**.

x	$f(x)$
–1	–6
–0,5	0,25
0	2
0,5	0,75
1	–2
1,5	–4,75
2	–6
2,5	–4,25
3	2

- Dans un repère, on place les points de coordonnées $(x, f(x))$ pour différentes valeurs de *x*, et on trace la courbe en reliant ces points de façon «régulière ». On obtient ainsi la **courbe représentative** de *f*.



III Sens de variation d'une fonction

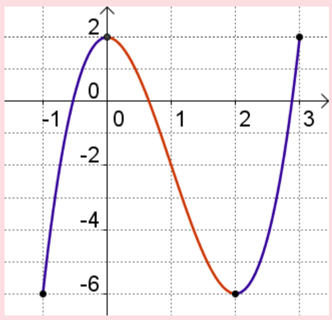
Une fonction peut être croissante sur un intervalle et décroissante sur un autre.

En lisant le graphique de gauche à droite,
- si la courbe « monte », on dit que *f* est croissante
- si la courbe « descend », on dit que *f* est décroissante

On résume les variations de *f* dans un **tableau de variation.**

Exemple : voici le tableau de variation de la fonction *f* définie par la courbe ci-contre :

x	–1	0	2	3
Variations de *f*	–6 ↗	2 ↘	–6 ↗	2



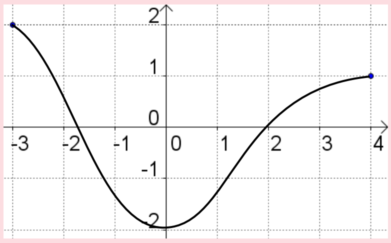
EXERCICES (Chapitre 12)

Exercice 1

La courbe ci-contre représente une fonction *f* sur l'intervalle $[-3\,;4]$.

Décrire le comportement de *f* en utilisant :

« *f* est croissante sur … ».
« *f* est décroissante sur … ».
« *f* admet un maximum pour $x = ...$ et ce maximum vaut … ».
« *f* admet un minimum pour $x = ...$ et ce minimum vaut … ».



Exercice 2

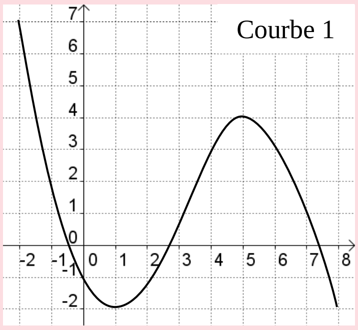
La courbe ci-contre représente une fonction *f* sur l'intervalle $[0\,;8]$.

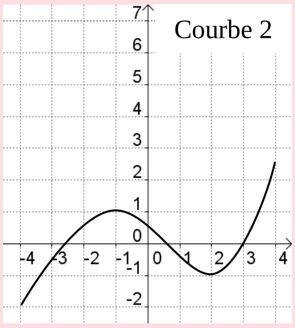
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $f(7) = 4$.
2. $f(4) = 2$.
3. $f(3) > f(5)$.
4. L'équation $f(x) = 3$ a deux solutions dans $[0\,;8]$.
5. *f* est croissante sur l'intervalle $[0\,;8]$.
6. *f* est décroissante sur l'intervalle $[2\,;4]$.

Exercice 3

Associer chaque courbe à son tableau de variation :





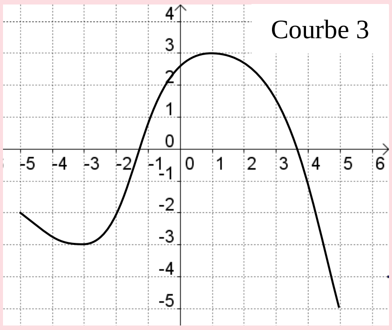


Tableau A

x	-2		-1		2		$2{,}5$
Variations de f	-4	↗	1	↘	-1	↗	4

Tableau B

x	-5		-3		1		5
Variations de f	-2	↘	-3	↗	3	↘	-5

Tableau C

x	-4		-1		2		4
Variations de f	-2	↗	1	↘	-1	↗	$2{,}5$

Tableau D

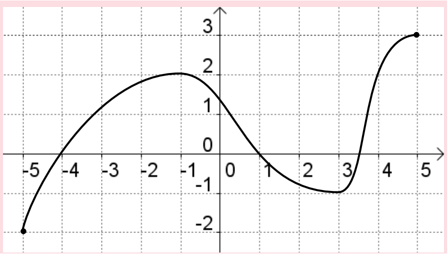
x	-2		1		5		8
Variations de f	7	↘	-2	↗	4	↘	-2

Exercice 4

La courbe ci-contre représente une fonction *f* définie sur $[-5\,;5]$.

On précise de plus que $f(3{,}5) = 0$.

1. Dresser le tableau de variation de *f*.
2. Résoudre graphiquement $f(x) = 0$ et $f(x) > 2$.
3. Sur quels intervalles *f* est-elle négative ? positive ?



INDICATIONS (Chapitre 12)

Exercice 1

« f est **croissante** » signifie que, graphiquement, « la courbe **monte** ». La courbe « monte » pour x allant de 0 à 4, donc f est croissante sur $[0;4]$.

« f est **décroissante** » signifie que, graphiquement, « la courbe **descend** ».

Le **maximum** d'une fonction est la valeur **la plus grande** de $f(x)$, c'est donc l'ordonnée du point « **le plus haut** » de la courbe de f. Le point « le plus haut » de la courbe est le point de coordonnées $(-3;2)$.
Donc f admet un maximum pour $x=-3$ et ce maximum vaut 2.

Le **minimum** d'une fonction est la valeur **la plus petite** de $f(x)$, c'est donc l'ordonnée du point « **le plus bas** » de la courbe de f.

Exercice 2

4. Repérer les points de la courbe d'ordonnée 3 et lire leurs abscisses.

Exercice 4

2. Résoudre graphiquement $f(x)=0$ revient à déterminer les abscisses des **points d'intersection** de la courbe et de l'axe des abscisses. La courbe coupe trois fois l'axe des abscisses, il y a donc 3 solutions à l'équation $f(x)=0$.

Pour résoudre graphiquement $f(x)>2$, on trace la droite d'équation $y=2$ et l'on détermine les abscisses de tous les points de la courbe qui sont **situés strictement au-dessus** de cette droite.

3. Pour déterminer les intervalles où f est négative, on cherche les « morceaux » de courbe qui sont situés **en dessous de l'axe des abscisses** et on lit les abscisses de tous ces points.

Pour déterminer les intervalles où f est positive, on cherche les « morceaux » de courbe qui sont situés **au-dessus de l'axe des abscisses** et on lit les abscisses de tous ces points.

CORRIGES (CHAPITRE 12)

Exercice 1

f est croissante sur $[\,0\,;4\,]$.

f est décroissante sur $[\,-3\,;0\,]$.

f admet un maximum pour $x=-3$ et ce maximum vaut 2.

f admet un minimum pour $x=0$ et ce minimum vaut -2.

Exercice 2

1. $f(7)=4$	Vrai
2. $f(4)=2$	Faux : $f(4)\approx 1{,}5$.
3. $f(3)>f(5)$	Vrai : $f(3)=3$ et $f(5)=1$.
4. L'équation $f(x)=3$ a deux solutions dans $[\,0\,;8\,]$.	Faux : il y a 3 solutions : 1 ; 3 et 6,5 (environ).
5. f est croissante sur $[\,0\,;8\,]$.	Faux : f est croissante, décroissante puis croissante.
6. f est décroissante sur $[\,2\,;4\,]$.	Vrai

Exercice 3

La courbe 1 est associée au tableau D.

La courbe 2 est associée au tableau C.

La courbe 3 est associée au tableau B.

Exercice 4

1. Tableau de variation de f :

x	-5		-1		3		5
f	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

2. L'équation $f(x)=0$ a pour ensemble de solutions $S=\{-4\,;1\,;3{,}5\}$.
L'inéquation $f(x)>2$ a pour ensemble de solutions $S=]\,4\,;5\,]$.

3. f est négative sur $[-5\,;-4]$ et sur $[\,1\,;3{,}5\,]$;
f est positive sur $[-4\,;1]$ et sur $[3{,}5\,;5]$.

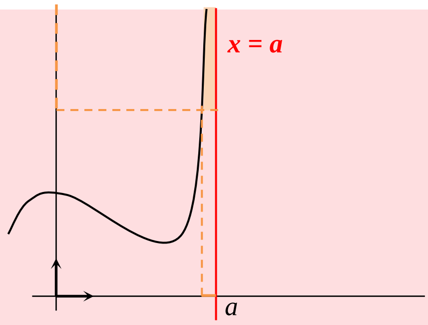
Chapitre 13 : LIMITES - ASYMPTOTES

I Limite infinie au voisinage d'un point

Si, lorsque x « s'approche » d'un nombre a, $f(x)$ devient très grand, alors on dit que la limite de f en a est égale à $+\infty$ et on écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

(on peut aussi avoir $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$),

La droite d'équation $x = a$ est une **asymptote à la courbe de *f* parallèle à (O*y*)** (« verticale »).



Remarques :

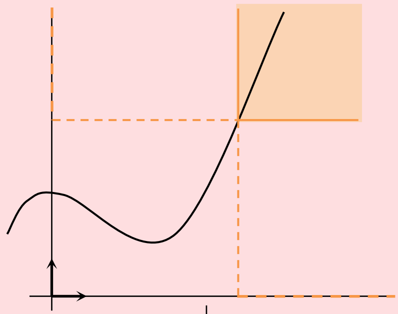
- a est une « valeur interdite » (d'où une double barre dans le tableau de variation de f).
- Si f est définie à gauche et à droite de a, on étudie alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$.

II Limite au voisinage de l'infini

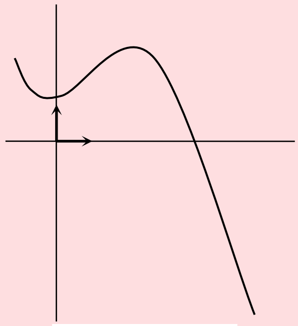
1. Limite infinie

Si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ devient très grand, alors on dit que la limite de f en $+\infty$ est égale à $+\infty$ et on écrit :

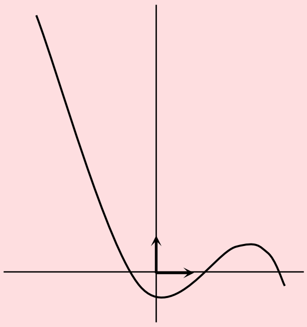
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$



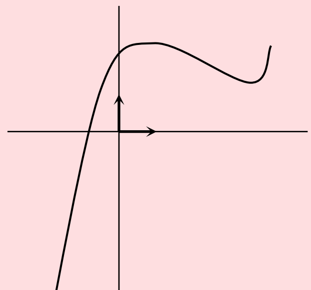
On a de même :



$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$



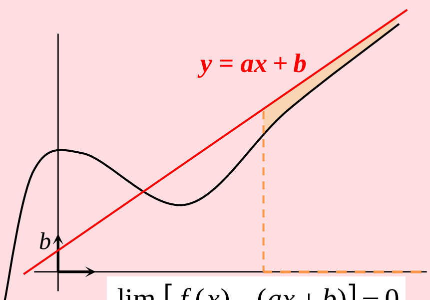
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

Cas particulier : asymptote oblique

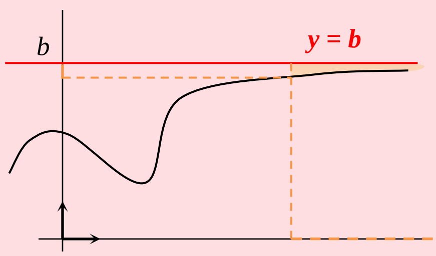
Dans certains cas, « l'écart » entre la courbe de f et la droite d'équation $y = ax + b$ se rapproche de 0 au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$) : on dit alors que la droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique à la courbe de *f*** quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$).



$\lim\limits_{x\to +\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0$

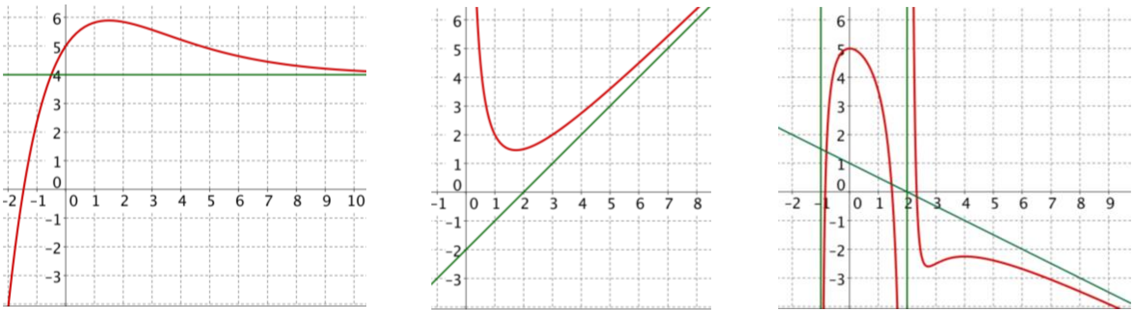
2. Limite finie

Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$ (ou si $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$), alors la droite d'équation $y = b$ est une **asymptote à la courbe de *f* parallèle à (O*x*)** (« horizontale »).



EXERCICES (Chapitre 13)

Exercice 1



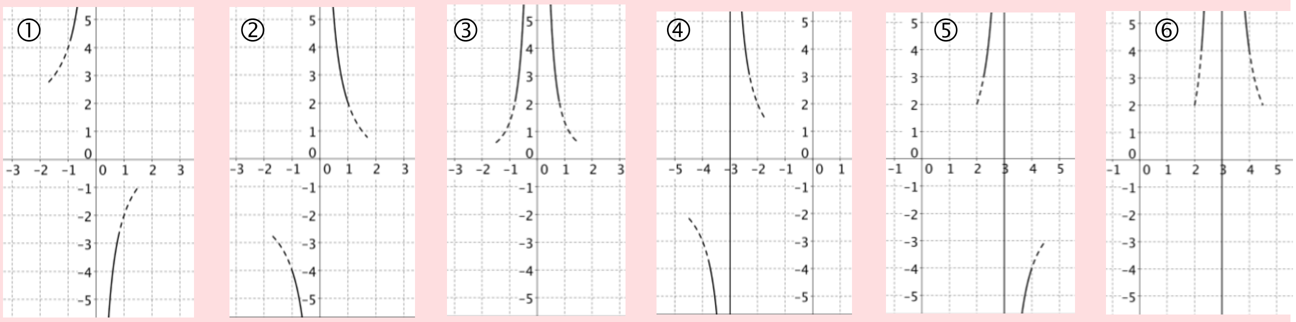
Les courbes ci-dessus représentent les fonctions *f*, *g* et *h* définies respectivement sur ℝ, sur]0 ; +∞[et sur]-1 ; 2[∪]2 ; +∞[. Pour chacune de ces fonctions :

1. Ecrire les limites aux bornes de l'ensemble de définition (*exemples* : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ldots$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} h(x) = \ldots$).

2. Donner les équations des asymptotes à chacune des trois courbes.

Exercice 2

Les graphiques ci-dessous donnent l'allure de la courbe représentative d'une fonction pour *x* proche d'une valeur interdite.



Pour chacune des fonctions suivantes, données par leur expression $f(x)$, retrouver le graphique possible.

(Justifier le choix). **a)** $f(x)=\dfrac{x+8}{3x}$; **b)** $f(x)=\dfrac{4}{3x^2}$; **c)** $f(x)=\dfrac{4x}{(x-3)^2}$; **d)** $f(x)=\dfrac{x-3}{x}$

Exercice 3

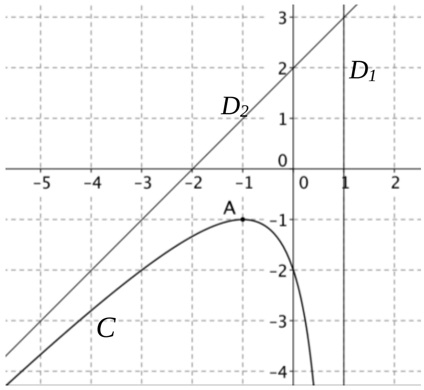
La courbe C de la figure ci-contre est la courbe représentative de la fonction *f* définie sur $]-\infty;1[$ par $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+d}$ où *a*, *b*, *c*, *d* sont quatre nombres réels que l'on se propose de déterminer.

1. D_1 est une asymptote à la courbe C parallèle à (O*y*). Lire sur le graphique une équation de D_1 et en déduire la valeur de *d*.

2. D_2, d'équation $y=ax+b$, est une asymptote oblique à C.

Lire une équation de D_2 et en déduire les valeurs de *a* et de *b*.

3. En remarquant que C passe par le point $A(-1;-1)$, déterminer la valeur de *c*.



INDICATIONS (Chapitre 13)

Exercice 2

Pour chacune des expressions données, il faut identifier la valeur interdite a, puis étudier le signe de $f(x)$ au voisinage de a.

Exemple avec $f(x)=\dfrac{x+8}{3x}$:

- 0 est une valeur interdite.
- Au voisinage de 0 : si $x < 0$, $f(x)<0$ (car $x + 8 > 0$ et $3x < 0$) ;
  si $x > 0$, $f(x)>0$ (car $x + 8 > 0$ et $3x > 0$).
- On a donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$: seule la courbe 2 est possible.

Exercice 3

1. D_1 étant une asymptote à C parallèle à (Oy), on peut en déduire la valeur interdite pour $f(x)$.

2. Pour lire l'équation de D_2 , voir chapitre 5.

3. C passe par le point $\mathrm{A}(-1;-1)$, on a donc $f(-1)=-1$.

CORRIGES (Chapitre 13)

Exercice 1

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4$; $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-1} h(x)=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} h(x)=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} h(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$.

2. D_1 : $y=4$ est asymptote à C_f.

D_2 : $x=0$ et D_3 : $y=x-2$ sont asymptotes à C_g .

D_4 : $x=-1$, D_5 : $x=2$ et D_6 : $y=-\dfrac{1}{2}x+1$ sont asymptotes à C_h .

Exercice 2

a) $f(x)=\dfrac{x+8}{3x}$: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$. Seule la courbe 2 est possible.

b) $f(x)=\dfrac{4}{3x^2}$: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$. Seule la courbe 3 est possible.

c) $f(x)=\dfrac{4x}{(x-3)^2}$: $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)=+\infty$. Seule la courbe 6 est possible.

d) $f(x)=\dfrac{x-3}{x}$: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$. Seule la courbe 1 est possible.

Exercice 3

1. Equation de D_1 : $x=1$.
1 est alors une valeur interdite, ce qui signifie que le dénominateur s'annule pour $x=1$.

Donc $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ et $d=-1$.

2. Equation de D_2 : $y=x+2$.

Donc $f(x)=x+2+\dfrac{c}{x-1}$.

3. C passe par le point $A(-1;-1)$, donc $f(-1)=-1$.

D'où : $f(-1)=-1+2+\dfrac{c}{-1-1}=-1$, soit $\dfrac{c}{-2}=-2$. Donc $c=4$ et $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-1}$.

Chapitre 14 : VALEUR ABSOLUE

I Fonction valeur absolue

1. La valeur absolue d'un réel x, notée $|x|$, est définie par : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Exemples :

- $|\pi - 2| = \pi - 2$ car $\pi - 2 \geq 0$
- $|-\pi + 2| = -(-\pi + 2) = \pi - 2$ car $-\pi + 2 < 0$

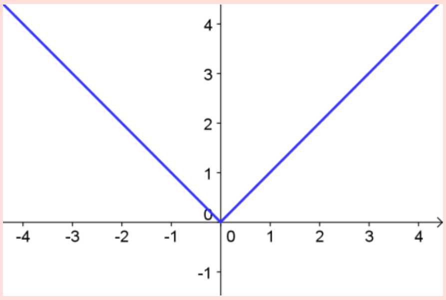
2. La fonction : $x \mapsto |x|$ définie sur $\mathbb{R}$ est appelée fonction valeur absolue.

Sa courbe représentative est formée des deux demi-droites d'équations respectives : $\begin{cases} y = x & \text{si } x \geq 0 \\ y = -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Tableau de variations

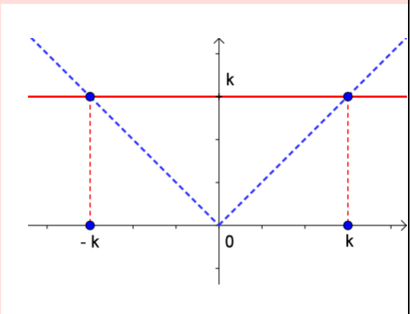
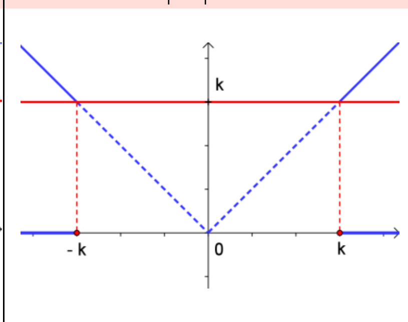
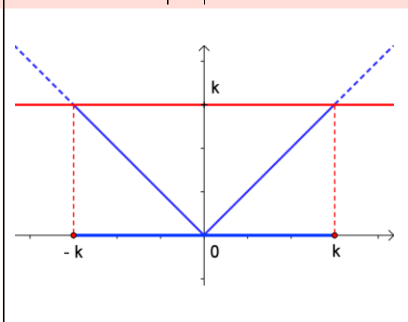
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lvert x \rvert$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

Courbe représentative



II Equations - Inéquations

On utilise les résultats suivants pour résoudre des équations ou des inéquations (k réel positif) :

$\lvert x \rvert = k$	$\lvert x \rvert > k$	$\lvert x \rvert < k$
		
$x = -k$ ou $x = k$	$x \in]-\infty ; -k[\cup]k ; +\infty[$	$x \in]-k ; k[$

III Propriétés

Pour tous réels x et y :

$|x| \geq 0$ — Cas particulier : $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$|x| = |-x|$ — $\sqrt{x^2} = |x|$ — $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$

$|x \times y| = |x| \times |y|$ — $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ pour $y \neq 0$

EXERCICES (Chapitre 14)

Exercice 1

Effectuer les calculs suivants :

$A = |3| - |-4|$ $\quad$ $B = |-2-3|$ $\quad$ $C = \left|\dfrac{1}{3}\right| - |-3|$

$D = |2| - |-2| \times (-2)$ $\quad$ $E = |0{,}01 - 0{,}1|$ $\quad$ $F = \left|0{,}33 - \dfrac{1}{3}\right|$

Exercice 2

Pour chacune des questions suivantes, indiquer la bonne réponse. Justifier.

A : $\lvert 2-\sqrt{3}\rvert$ est égal à : **a)** $2-\sqrt{3}$ **b)** $2+\sqrt{3}$ **c)** $\sqrt{3}-2$	**B :** $\lvert 4\rvert + \lvert -4\rvert$ est égal à : **a)** -8 **b)** 0 **c)** 8
C : $\lvert 9\rvert - \lvert -9\rvert \times 8$ est égal à : **a)** 0 **b)** 81 **c)** -63	**D :** $\lvert 3-\pi\rvert - \lvert 2\pi-3\rvert$ est égal à : **a)** -3π **b)** $-\pi$ **c)** $6-3\pi$

Exercice 3

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

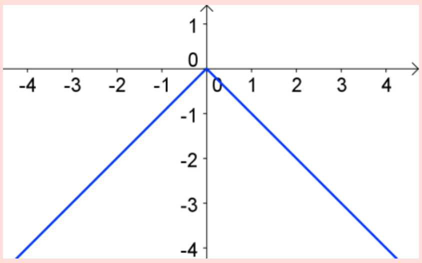
A l'aide du tableau de variation de la fonction : $x \mapsto |x|$ représenté ci-dessus, déterminer l'intervalle décrit par $|x|$ lorsque :

a) $x \in [0;\, 5[$ $\quad$ **b)** $x \in [-3; -1]$ $\quad$ **c)** $x \in [-2;\, 7[$

Exercice 4

Pour chacune des questions suivantes, indiquer la bonne réponse :

1. Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à : **a)** l'axe des abscisses. **b)** l'axe des ordonnées. **c)** l'origine du repère.



2. La courbe représentative ci-contre, obtenue avec la fenêtre graphique : $-4 \le x \le 4$ et $-4 \le y \le 1$, représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = |x|$ $\quad$ **b)** $f(x) = -|x|$ $\quad$ **c)** $f(x) = -2|x|$

Exercice 5

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

a) $|x| = 3$ $\quad$ **b)** $|x| = -4$ $\quad$ **c)** $|x| = \sqrt{2} - 1$

d) $|x| < 1$ $\quad$ **e)** $|x| \le 100$ $\quad$ **f)** $|x| > 0{,}01$

INDICATIONS (Chapitre 14)

Exercice 1

Effectuer, si nécessaire, le calcul à l'intérieur du symbole de valeur absolue.
Pour D, tenir compte des priorités de calculs.

Pour F, on pensera à écrire : $0,33 = \dfrac{33}{100}$.

Exercice 2

Penser à étudier le signe de chaque nombre placé à l'intérieur du symbole de valeur absolue.

Exercice 3

b) Compléter le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$	-3	-1	0	$+\infty$
$\lvert x \rvert$	$+\infty$ $\searrow$	?	?	0 $\nearrow$	$+\infty$

Lire ensuite la réponse en faisant attention à l'ordre des bornes.

Exercice 5

Voir le paragraphe II du cours.

CORRIGES (Chapitre 14)

Exercice 1

$A = 3 - 4 = -1$ $\qquad$ $B = |-5| = 5$ $\qquad$ $C = \frac{1}{3} - 3 = -\frac{8}{3}$

$D = 2 - 2 \times (-2) = 2 + 4 = 6$ $\qquad$ $E = |-0{,}09| = 0{,}09$ $\qquad$ $F = \left|\frac{33}{100} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{99-100}{300}\right| = \left|\frac{-1}{300}\right| = \frac{1}{300}$

Exercice 2

A : $2 - \sqrt{3} > 0$ donc $\left|2 - \sqrt{3}\right| = 2 - \sqrt{3}$: réponse **a)**

B : $|4| + |-4| = 4 + 4 = 8$: réponse **c)**

C : $|9| - |-9| \times 8 = 9 - 9 \times 8 = 9 - 72 = -63$: réponse **c)**

D : $3 - \pi < 0$ donc $|3 - \pi| = -3 + \pi$ et $2\pi - 3 > 0$ donc $|2\pi - 3| = 2\pi - 3$

Ainsi : $|3 - \pi| - |2\pi - 3| = -3 + \pi - (2\pi - 3) = -\pi$: réponse **b)**

Exercice 3

a) Si $x \in [0\ ;\ 5[$, alors $|x| \in [0\ ;\ 5[$

b) Si $x \in [-3\ ;\ -1]$, alors $|x| \in [1\ ;\ 3]$

c) Si $x \in [-2\ ;\ 7[$, alors $|x| \in [0\ ;\ 7[$

Exercice 4

1. Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : réponse **b)**

2. La courbe représentative donnée représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -|x|$: réponse **b)**

Exercice 5

a) $|x| = 3 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$. Donc $S = \{-3\ ;\ 3\}$.

b) $|x| = -4$ n'a pas de solution car une valeur absolue est toujours positive. Donc $S = \varnothing$.

c) $|x| = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 1$ ou $x = -\sqrt{2} + 1$. Donc $S = \left\{-\sqrt{2} + 1\ ;\ \sqrt{2} - 1\right\}$.

d) $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$. Donc $S =]-1;1[$.

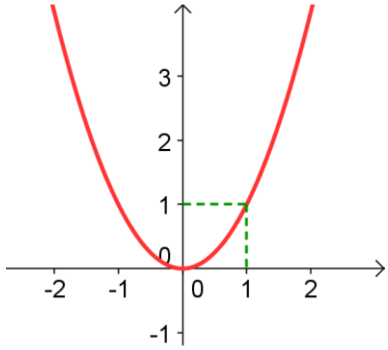
e) $|x| \leq 100 \Leftrightarrow -100 \leq x \leq 100$. Donc $S = [-100\ ;100]$.

f) $|x| > 0{,}01 \Leftrightarrow x < -0{,}01$ ou $x > 0{,}01$. Donc $S =]-\infty;-0{,}01[\cup]0{,}01;+\infty[$.

Chapitre 15 : FONCTIONS DE REFERENCE

Les courbes des fonctions de référence sont à connaître : elles permettent de retrouver quelques propriétés essentielles de ces fonctions.

I Fonction carré

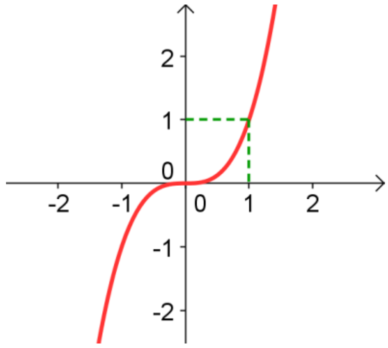


- La fonction carré $x \mapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$
- Variation :
  - si $a < b < 0$ alors $a^2 > b^2$

    Deux réels négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs carrés.
  - si $a > b > 0$ alors $a^2 > b^2$

    Deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

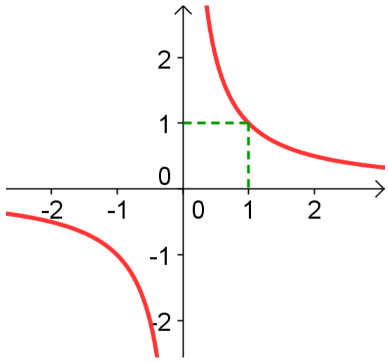
II Fonction cube



- La fonction cube $x \mapsto x^3$ est définie sur $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
- Variation : $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$

Deux réels sont rangés dans le même ordre que leurs cubes.

III Fonction inverse

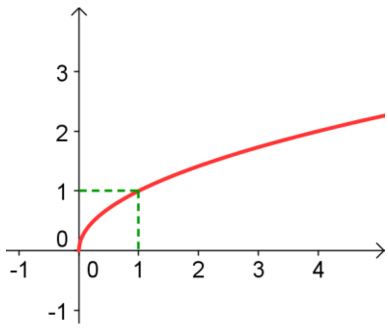


- La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie sur $]-\infty;0[\,\cup\,]0;+\infty[$

  $\dfrac{1}{A}$ existe si et seulement si $A \neq 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$
- Variation :
  - si $a < b < 0$ alors $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$
  - si $a > b > 0$ alors $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

Deux réels non nuls de même signe sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.

IV Fonction racine carrée



- La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0;+\infty[$

  $\sqrt{A}$ existe si et seulement si $A \geq 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- Variation : pour a et b positifs, $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

  Deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrées.

EXERCICES (Chapitre 15)

Exercice 1

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2$ dont on donne le tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$-\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

Dans chacun des cas suivants, donner sous forme d'intervalle l'ensemble des valeurs prises par x^2. Justifier la réponse en s'aidant du tableau de variation.

a) $2 \leq x \leq 5$

b) $x \in [-2;0]$

c) $x < -\dfrac{2}{3}$

d) $x \in]-5;2[$

Exercice 2

On donne ci-contre les représentations graphiques des fonctions :

$f : x \mapsto x$, $g : x \mapsto x^2$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

En s'aidant du graphique, dire, pour chaque proposition, si elle est vraie ou fausse.
Dans le cas où elle est fausse, corriger la fin de la proposition.

a) si $x > 2$ alors $x^2 > 4$

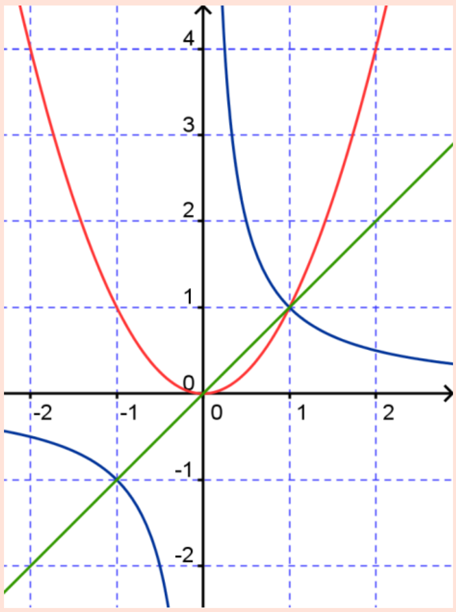
b) si $x^2 > 4$ alors $x > 2$

c) si $0 < x < 1$ alors $x^2 < x$

d) si $x < -1$ alors $x < \dfrac{1}{x}$

e) si $-1 < x < 2$ alors $1 < x^2 < 4$

f) si $\dfrac{1}{x} > -1$ alors $x < -1$



Exercice 3

On considère les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto x - 2$.

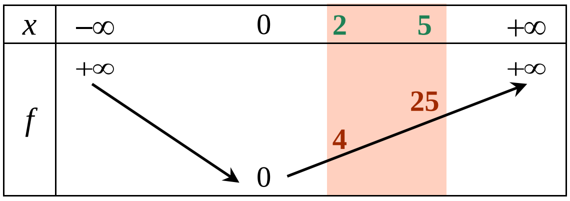
1. Tracer les courbes représentatives de ces deux fonctions dans un même repère.

2. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $\sqrt{x} = x - 2$.

3. Résoudre, par le calcul, l'équation $\sqrt{x} = x - 2$.

INDICATIONS (Chapitre 15)

Exercice 1

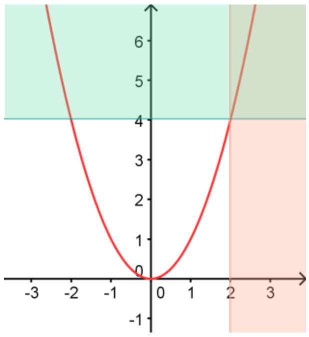


a) Placer les valeurs 2 et 5 dans le tableau de variation (ligne des *x*) en tenant compte de l'ordre des réels, puis leurs images par *f* , et enfin lire dans le tableau les valeurs prises par x^2 : dans ce cas, on voit que x^2 varie entre 4 et 25.
On peut conclure : $x^2 \in [4;25]$.

b) c) et **d)** Veiller à l'ordre des images pour écrire l'intervalle demandé.

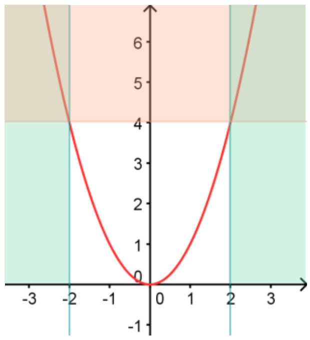
Exercice 2

Pour chacune des questions posées, se référer à la "bonne " courbe.



a) si $x > 2$ alors $x^2 > 4$?

Colorier les points du plan dont l'abscisse est supérieure à 2 (en rose sur la figure) puis lire les ordonnées des points de la courbe de *g* situés dans cette partie (en vert).
Ici, $g(x) > 4$. La proposition est vraie.

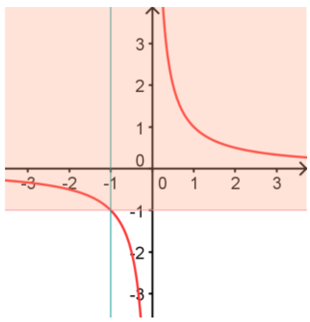


b) si $x^2 > 4$ alors $x > 2$?

Colorier les points du plan dont l'ordonnée est supérieure à 4 (en rose sur la figure) puis lire les abscisses des points de la courbe de *g* situés dans cette partie (en vert).
A-t-on nécessairement $x > 2$?

c) Les courbes de *f* et *g* sont ici utiles puisqu'on veut comparer *x* et x^2.

f) Voir dessin ci-contre.



Exercice 3

2. On résout ici $f(x) = g(x)$: les solutions sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes demandées dans la question **1.**

3. Attention : *x* doit être positif pour assurer l'existence de $\sqrt{x}$ et $x - 2$ doit être également positif puisqu'il est égal à $\sqrt{x}$. On peut alors élever les deux membres de l'égalité au carré.

CORRIGES (Chapitre 15)

Exercice 1

En s'aidant du tableau de variation de *f*, on obtient les résultats suivants :

a) si $2 \leq x \leq 5$ alors $x^2 \in [4;25]$

b) si $x \in [-2;0]$ alors $x^2 \in [0;4]$

c) si $x < -\frac{2}{3}$ alors $x^2 \in \left]\frac{4}{9};+\infty\right[$

d) si $x \in]-5;2[$ alors $x^2 \in [0;25[$

Exercice 2

a) si $x > 2$ alors $x^2 > 4$: vrai

b) si $x^2 > 4$ alors $x > 2$: faux (si $x^2 > 4$ alors $x < -2$ ou $x > 2$)

c) si $0 < x < 1$ alors $x^2 < x$: vrai

d) si $x < -1$ alors $x < \frac{1}{x}$: vrai

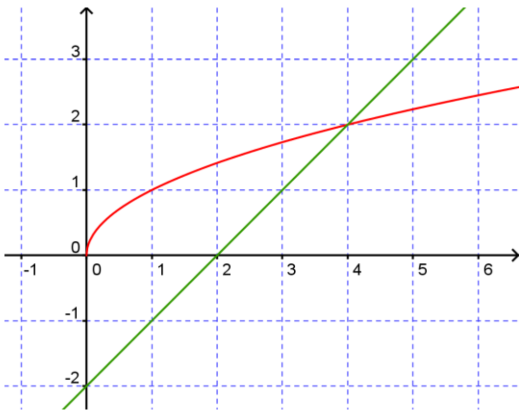
e) si $-1 < x < 2$ alors $1 < x^2 < 4$: faux (si $-1 < x < 2$ alors $0 \leq x^2 < 4$)

f) si $\frac{1}{x} > -1$ alors $x < -1$: faux (si $\frac{1}{x} > -1$ alors $x < -1$ ou $x > 0$)

Exercice 3

$f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto x - 2$.

1. Voir graphique ci-contre.



2. Les solutions de l'équation $\sqrt{x} = x - 2$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes de *f* et de *g*.
Les courbes ont un seul point commun donc on peut conjecturer qu'il y a une seule solution à l'équation $\sqrt{x} = x - 2$.

3. $\sqrt{x} = x - 2$.
$x - 2$ doit être positif donc il faut $x \geq 2$.
Deux nombres égaux ont même carré.
D'où : $x = (x-2)^2$ soit, après avoir développé et réduit, $x^2 - 5x + 4 = 0$ dont les solutions sont 1 et 4 (voir chapitre 9).
Seul 4 est supérieur à 2 donc l'unique solution est $x = 4$.
Ce résultat est cohérent avec la conjecture de la question précédente.
Conclusion : $S = \{4\}$.

Chapitre 16 : FONCTION DERIVEE

A toute fonction *f* définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, on associe une **nouvelle fonction** appelée **fonction dérivée** de *f* et notée f'. Ces fonctions dérivées sont à connaître par cœur.

I Dérivées des fonctions usuelles

si $f(x) =$	alors $f'(x) =$
k (k constante)	0
$ax+b$	a
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

II Opérations

g, *u* et *v* sont des fonctions de dérivées g', u' et v'.

Formules	Exemples
$(u+v)' = u'+v'$	Si $f(x) = x^2+5x$ alors $f'(x) = 2x+5$
$(u-v)' = u'-v'$	Si $f(x) = \sin x - x$ alors $f'(x) = \cos x - 1$
$(ku)' = ku'$ (k constante)	Si $f(x) = 2\cos x$ alors $f'(x) = 2\times(-\sin x) = -2\sin x$
$(uv)' = u'v+uv'$	Si $f(x) = xe^x$ alors $f'(x) = 1\times e^x + x\times e^x = (1+x)e^x$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{2x+5}{x-3}$ alors $f'(x) = \frac{2\times(x-3)-(2x+5)\times 1}{(x-3)^2} = \frac{-11}{(x-3)^2}$
$[g(u)]' = g'(u)\times u'$	Si $f(x) = \ln(2x+5)$ alors $f'(x) = \frac{1}{2x+5}\times 2 = \frac{2}{2x+5}$

EXERCICES (Chapitre 16)

Exercice 1 **Q.C.M.** Pour chaque fonction, trois dérivées sont proposées.
Donner la ou les bonne(s) réponse(s).

	A	**B**	**C**
1. $f(x)=2x+1$	$f'(x)=2x$	$f'(x)=3$	$f'(x)=2$
2. $g(x)=2x^3-x^2+1$	$g'(x)=4x^2-2x$	$g'(x)=6x^2-2x$	$g'(x)=6x^2-2x+1$
3. $h(x)=3x-\cos x$	$h'(x)=3-\sin x$	$h'(x)=3+\sin x$	$h'(x)=3+\cos x$
4. $i(x)=e^x+2x^2$	$i'(x)=e^x+4x$	$i'(x)=e+4x$	$i'(x)=xe^x+4x$
5. $j(x)=2\ln x+5$	$j'(x)=\dfrac{2}{x}+5$	$j'(x)=\dfrac{2}{x}$	$j'(x)=-\dfrac{2}{x}$
6. $k(x)=\dfrac{x}{e^x}$	$k'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$	$k'(x)=\dfrac{1}{e^x}$	$k'(x)=\dfrac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}$
7. $l(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$	$l'(x)=\dfrac{4x+1}{(x-1)^2}$	$l'(x)=\dfrac{2(x-1)-(2x+3)}{(x-1)^2}$	$l'(x)=\dfrac{-5}{(x-1)^2}$
8. $m(x)=\ln(3x)$	$m'(x)=\ln 3$	$m'(x)=\dfrac{1}{3x}$	$m'(x)=\dfrac{1}{x}$
9. $n(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$	$n'(x)=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$	$n'(x)=2\cos(2x)$	$n'(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$
10. $p(x)=xe^{2x}$	$p'(x)=2e^{2x}$	$p'(x)=(2x+1)e^{2x}$	$p'(x)=e^{2x}+x\times 2e^{2x}$

Exercice 2

Calculer les dérivées des fonctions suivantes (donner le résultat sous une forme simplifiée) :

a) $f(x)=0{,}3x^2-1{,}2x+0{,}32$

b) $g(x)=(2x-3)e^x$

c) $h(x)=\dfrac{2x-7}{x^2+1}$

Exercice 3

Même question avec les fonctions suivantes :

a) $f(x)=\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

b) $h(x)=\ln(x^2)$

c) $l(x)=\sqrt{3x^2-4x+3}$

INDICATIONS (Chapitre 16)

Exercice 1

1. $f(x)=2x+1$ donc $f(x)$ est de la forme $ax+b$.

2. $g(x)$ est une somme de trois termes : on dérive donc « terme à terme » : $(u+v+w)'=u'+v'+w'$.

3. Attention aux signes !

6. $k(x)$ est un quotient : $k(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x)=x$ et $v(x)=e^x$.

2 réponses sont exactes.

7. $l(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}=\dfrac{u(x)}{v(x)}$.

Ici, deux réponses sont exactes, l'une n'est pas simplifiée, l'autre l'est (la forme simplifiée est préférable).
Remarque : il est souvent inutile de développer le dénominateur.

8. $m(x)=\ln(u(x))$ où $u(x)=3x$.

$m'(x)=\ln'(3x)\times 3$

9. n est de la forme $\sin u$.

10. $p(x)$ est un produit : $p(x)=u(x)\times v(x)$ où $u(x)=x$ et $v(x)=e^{2x}$. Penser à factoriser le résultat.

Exercice 2

b) g est un produit : utiliser $(uv)'$.
Penser à factoriser le résultat.

c) h est un quotient : utiliser $\left(\dfrac{u}{v}\right)'$.

Exercice 3

Ces fonctions sont de la forme $g(u)$: utiliser $\left[g(u)\right]'$.

a) $f=g(u)$ où g est la fonction cos et u une fonction affine.

b) $h=g(u)$ où g est la fonction ln et u la fonction carré.

c) $l=g(u)$ où g est la fonction racine et u une fonction polynôme.

CORRIGES (Chapitre 16)

Exercice 1

1. Réponse **C**
2. Réponse **B**
3. Réponse **B**
4. Réponse **A**
5. Réponse **B**
6. Réponses **A** et **C**
7. Réponses **B** et **C**
8. Réponse **C**
9. Réponse **A**
10. Réponses **B** et **C**

Exercice 2

a) $f'(x) = 0{,}3 \times 2x - 1{,}2 \times 1 = 0{,}6x - 1{,}2$

b) $g'(x) = 2 \times e^x + e^x \times (2x-3) = 2e^x + (2x-3)e^x = (2+2x-3)e^x = (2x-1)e^x$

c) $h'(x) = \dfrac{2(x^2+1) - (2x-7) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2x^2+14x+2}{(x^2+1)^2}$

Exercice 3

a) $f'(x) = -\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) \times 3 = -3\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

b) $h'(x) = \dfrac{1}{x^2} \times 2x = \dfrac{2}{x}$

c) $l'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{3x^2-4x+3}} \times (6x-4) = \dfrac{6x-4}{2\sqrt{3x^2-4x+3}} = \dfrac{3x-2}{\sqrt{3x^2-4x+3}}$

Chapitre 17 : NOMBRE DERIVE ET TANGENTE

I Tangente à une courbe

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3.$$

On donne sa représentation graphique.

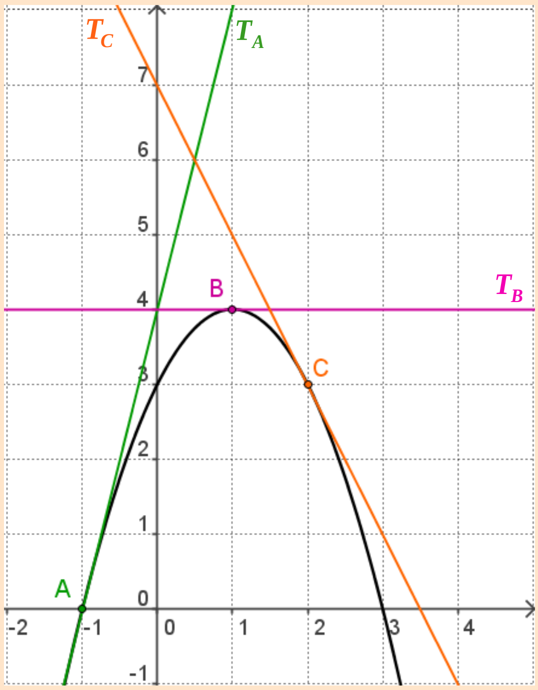
On a tracé les **tangentes** T_A, T_B et T_C à la courbe aux points A d'abscisse -1, B d'abscisse 1 et C d'abscisse 2.

Par lecture graphique (voir chapitre 5),

T_A a pour coefficient directeur 4,

T_B a pour coefficient directeur 0,

T_C a pour coefficient directeur -2.



II Nombre dérivé

Dans l'exemple précédent, $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

On peut calculer sa fonction dérivée f' (voir chapitre 16) : $f'(x) = -2x + 2$.

Le nombre dérivé de f en -1 est $f'(-1) = -2 \times (-1) + 2 = 4$.

Le nombre dérivé de f en 1 est $f'(1) = -2 \times 1 + 2 = 0$.

Le nombre dérivé de f en 2 est $f'(2) = -2 \times 2 + 2 = -2$.

III Lien entre nombre dérivé et tangente

Dans l'exemple, on constate que :

Le nombre dérivé de f en -1 est égal au coefficient directeur de la tangente au point A d'abscisse -1,
Le nombre dérivé de f en 1 est égal au coefficient directeur de la tangente au point B d'abscisse 1,
Le nombre dérivé de f en 2 est égal au coefficient directeur de la tangente au point C d'abscisse 2.

Dans le cas général, on retiendra :

Si f est une fonction définie sur un intervalle I, f' sa fonction dérivée et x_A un réel de I, alors le nombre dérivé de f en x_A est $f'(x_A)$.

Le nombre dérivé $f'(x_A)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse x_A.

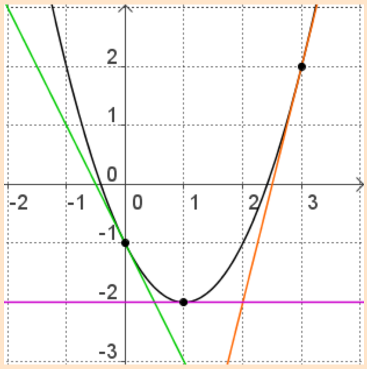
EXERCICES (Chapitre 17)

Exercice 1

On donne la courbe représentant une fonction f et les tangentes à cette courbe aux points d'abscisses 0, 1 et 3.

Indiquer si les égalités et inégalités suivantes sont vraies ou fausses.

	A	B	C	D
1	$f(1)=0$	$f(0)=-1$	$f(3)=4$	$f(2)>0$
2	$f'(1)=-2$	$f'(0)=1$	$f'(3)=4$	$f'(2)>0$

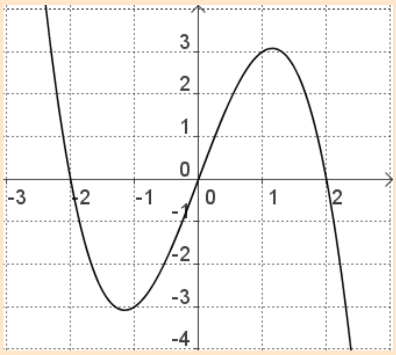


Exercice 2

On donne la courbe représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=-x^3+4x.$$

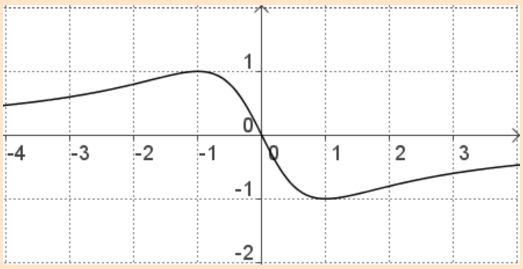
1. Calculer $f'(x)$, puis le nombre dérivé $f'(1)$.
2. Tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.
3. Donner une équation de cette tangente.



Exercice 3

On donne la courbe représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{-2x}{x^2+1}$

1. Calculer $f'(x)$, puis le nombre dérivé $f'(1)$.
2. Tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.
3. Donner une équation de cette tangente.

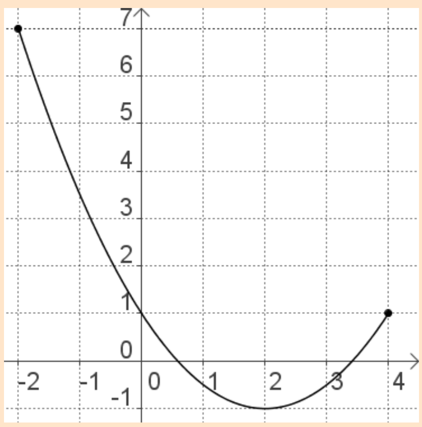


Exercice 4

La courbe ci-contre représente la fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;4]$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2x+1$.

1. A partir du graphique, dresser le tableau de variation de f.
2. **a)** Calculer $f'(x)$.

   b) Etablir le tableau de signe de $f'(x)$ sur $[-2\,;4]$.
3. Quel lien peut-on faire entre les deux tableaux ?



INDICATIONS (Chapitre 17)

Exercice 1

- Ne pas confondre $f(1)$ et $f'(1)$.
  $f(1)$ est l'ordonnée du point d'abscisse 1.
  $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse1.

- Le coefficient directeur d'une droite est positif si cette droite « monte ».
  Le coefficient directeur d'une droite est négatif si cette droite « descend ».

Exercice 2

3. On peut déterminer l'équation de la tangente par lecture graphique.
On peut aussi déterminer l'équation de cette tangente par calcul :
le point A d'abscisse $x_A = 1$ a pour ordonnée $y_A = f(1)$,
la tangente en A a une équation de la forme $y = ax + b$ où le coefficient directeur est $a = f'(1)$,
on calcule b en écrivant que cette tangente passe par le point A : $y_A = ax_A + b$.

Exercice 3

1. Pour calculer $f'(x)$, on utilisera la formule donnant la dérivée d'un quotient : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
(voir chapitre 16).

Exercice 4

2. Pour établir le tableau de signe, revoir le chapitre 7 : $f'(x)$ est de la forme $ax + b$.

CORRIGES (Chapitre 17)

Exercice 1

1 **A** est fausse : la courbe passe par le point de coordonnées $(1;-2)$ donc $f(1)=-2$.

1 **B** est vraie car la courbe passe par le point de coordonnées $(0;-1)$.

1 **C** est fausse : $f(3)=2$.

1 **D** est fausse : $f(2)=-1$.

2 **A** est fausse : la tangente au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(1)=0$.

2 **B** est fausse : la tangente au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur -2 donc $f'(0)=-2$

2 **C** est vraie.

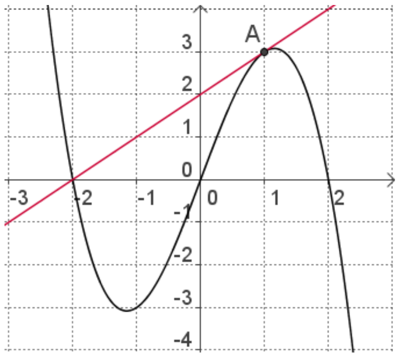
2 **D** est vraie : la tangente au point d'abscisse 2 a un coefficient directeur positif.

Exercice 2

1. $f'(x)=-3x^2+4$, d'où $f'(1)=-3\times1^2+4=1$.

2. Le point de la courbe d'abscisse 1 a pour ordonnée $f(1)=3$.
La tangente cherchée est la droite passant par $A(1;3)$ de coefficient directeur $f'(1)=1$.

3. Par lecture graphique, cette tangente a pour équation $y=x+2$.
Par le calcul :
La tangente ayant pour coefficient directeur $f'(1)=1$, son équation est de la forme $y=1x+b$ soit $y=x+b$.
Elle passe par le point $A(1;3)$ donc $3=1+b$, d'où $b=2$.
La tangente a donc pour équation $y=x+2$.

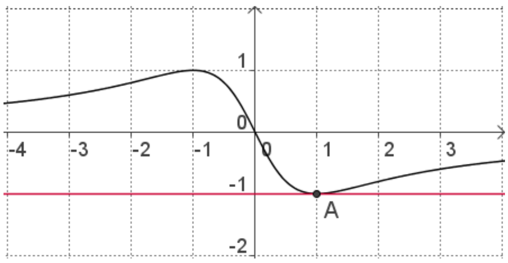


Exercice 3

1. $f'(x)=\dfrac{-2(x^2+1)-(-2x)\times(2x)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x^2-2+4x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}$, d'où $f'(1)=\dfrac{2\times1^2-2}{(1^2+1)^2}=0$.

2. Le point de la courbe d'abscisse 1 a pour ordonnée $f(1)=-1$.
La tangente cherchée est la droite passant par $A(1;-1)$ de coefficient directeur $f'(1)=0$; elle est parallèle à l'axe des abscisses.

3. Cette tangente a pour équation $y=-1$.



Exercice 4

1.

x	-2		2		4
variations de f	7	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

2. $f'(x)=x-2$.

x	-2		2		4
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	

3. On constate que : sur l'intervalle $[-2;2]$, la fonction f est décroissante et sa dérivée f' est négative.
sur l'intervalle $[2;1]$, la fonction f est croissante et sa dérivée f' est positive.

Chapitre 18 : ETUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION

I Lien entre signe de la dérivée et variation d'une fonction

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, f' sa fonction dérivée :

f' est positive sur I si et seulement si f est croissante sur I.

f' est négative sur I si et seulement si f est décroissante sur I.

II Etude des variations d'une fonction

Exemple : étude des variations de la fonction f définie sur $\left[-1\,;2\right]$ par $f(x)=2x^3+x^2-8x$.

L'étude des variations d'une fonction s'effectue en trois étapes :

- **Calcul de la dérivée** : $f'(x)=6x^2+2x-8$.
- **Etude du signe de la dérivée** : $6x^2+2x-8$ est un polynôme du second degré.
  On cherche ses racines et on dresse son tableau de signes (voir chapitre 8)
  Le discriminant est $\Delta=196$. Les racines sont $-\frac{4}{3}$ et 1

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$	-1	1	2	$+\infty$
signe de $(6x^2+2x-8)$		+	0	–	0	+	

- **Tableau de variation** :

  Le signe de la dérivée donne le sens de variation de f sur $\left[-1\,;2\right]$.

  On calcule les valeurs exactes de $f(-1)$, $f(1)$ et $f(2)$.

x	-1		1		2
signe de $f'(x)$		–	0	+	
variation de f	7	$\searrow$	-5	$\nearrow$	4

III Tracé de la courbe représentative

Exemple : Tracé de la courbe représentant la fonction f définie sur $\left[-1\,;2\right]$ par $f(x)=2x^3+x^2-8x$ dans un repère orthogonal.

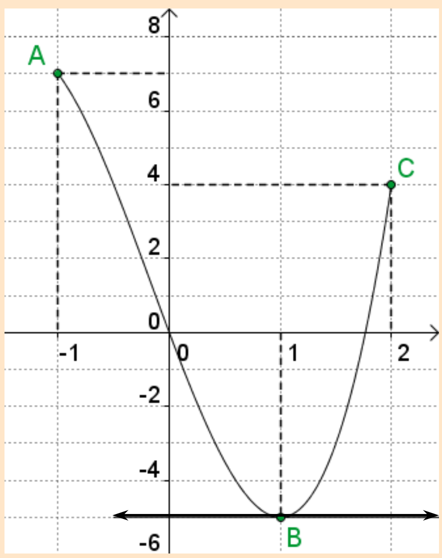
On place les éléments qui apparaissent dans le tableau de variation :

- les points $A(-1\,;7)$, $B(1\,;-5)$ et $C(2\,;4)$,
- la tangente à la courbe en B d'abscisse 1 qui est horizontale.

On complète en calculant les coordonnées d'autres points de la courbe avec la calculatrice

x	f(x)
-1	7
-0.5	4
0	0
0.5	-3.5
1	-5
1.5	-3
2	4

On peut ensuite tracer la courbe en concordance avec le tableau de variation.



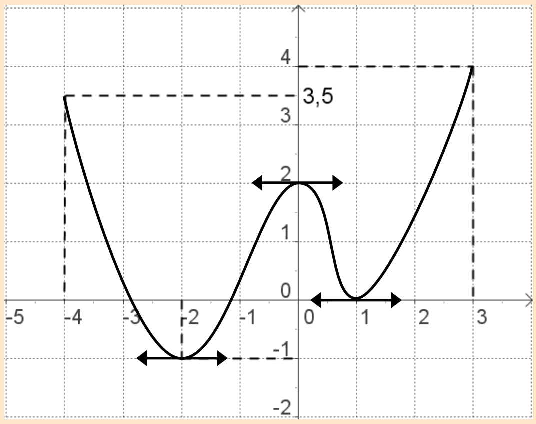
EXERCICES (CHAPITRE 18)

Exercice 1

La fonction f est donnée par sa courbe.

1. Préciser sur quel(s) intervalle(s), $f'(x)$ est positif.

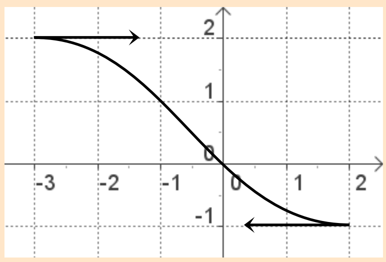
2. Préciser sur quel(s) intervalle(s), $f'(x)$ est négatif.



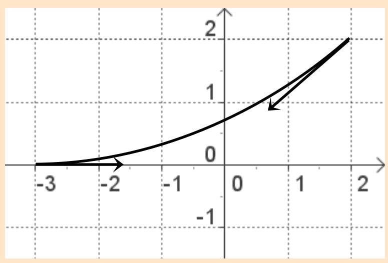
Exercice 2

Associer chaque courbe à son tableau de variation puis compléter ce tableau de variation par lecture graphique.

Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

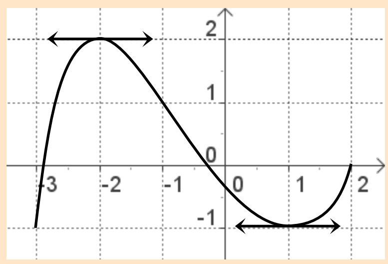


Tableau A

x	-3		-2		1		2
signe de $f'(x)$							
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Tableau B

x	-3		2
signe de $f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$			

Tableau C

x	-3		2
signe de $f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$			

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[-2\,;\,2{,}5]$ par $f(x)=x^3-3x-1$.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[-2\,;\,2{,}5]$.

3. En déduire le tableau de variation de f sur $[-2\,;\,2{,}5]$.

4. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

INDICATIONS (CHAPITRE 18)

Exercice 1

Sur l'intervalle $[-2\,;0]$, la fonction *f* est croissante donc $f'(x)$ est positive sur $[-2\,;0]$.

Exercice 2

- Compléter la ligne « signe de $f'(x)$ » avec $+$, $-$ ou 0.
  Compléter la ligne « $f(x)$ » avec des flèches et des valeurs.

- La courbe 1 est associée au tableau C car elle représente la seule fonction décroissante sur tout l'intervalle $[-3\,;2]$.

Exercice 3

1. Montrer que $f'(x)=3x^2-3$.

2. $f'(x)$ est un polynôme du second degré dont on déterminera les racines.
Pour étudier le signe de $f'(x)$, on pourra se rapporter au chapitre 8.

3. Il faudra compléter le tableau suivant :

x	-2	-1	1	$2{,}5$
$f'(x)$				
$f(x)$				

4. Placer les éléments qui apparaissent dans le tableau de variation.
Compléter en calculant avec la calculatrice les coordonnées d'autres points de la courbe, par exemple les points d'abscisses $-1{,}5$; 0 ; 2.
Tracer ensuite la courbe.

CORRIGES (CHAPITRE 18)

Exercice 1

$f'(x)$ est positif sur $[-2\,;0]$ et sur $[1;3]$.

$f'(x)$ est négatif sur $[-4\,;-2]$ et sur $[0\,;1]$.

Exercice 2

Courbe 1 : tableau C

x	-3		2
signe de $f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	2	$\searrow$	-1

Courbe 2 : tableau B

x	-3		2
signe de $f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2

Courbe 3 : tableau A

x	-3		-2		1		2
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Exercice 3

1. Calcul de la fonction dérivée de f

$f'(x) = 3x^2 - 3$.

2. Etude du signe de f'

$f'(x)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont -1 et 1.

Signe de ce polynôme selon les valeurs de x :

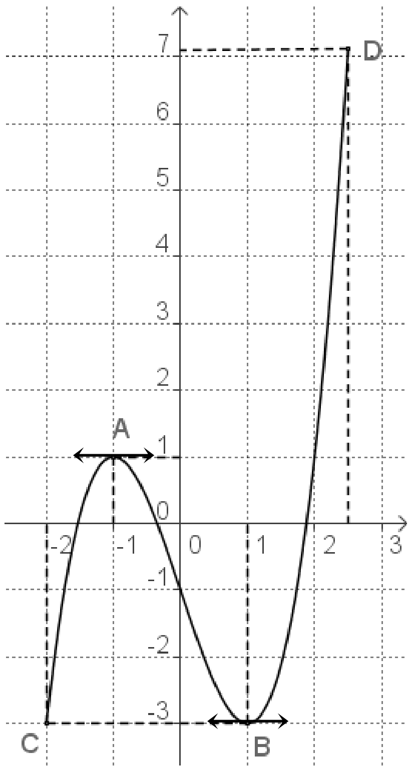
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$(x-1)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que f' est positive sur $[-2\,;-1]$, négative sur $[-1;1]$ et positive sur $[1;2{,}5]$.

3. Tableau de variation de f

x	-2		-1		1		$2{,}5$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$7{,}125$

4. Tracé de la courbe de f



Chapitre 19 : FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

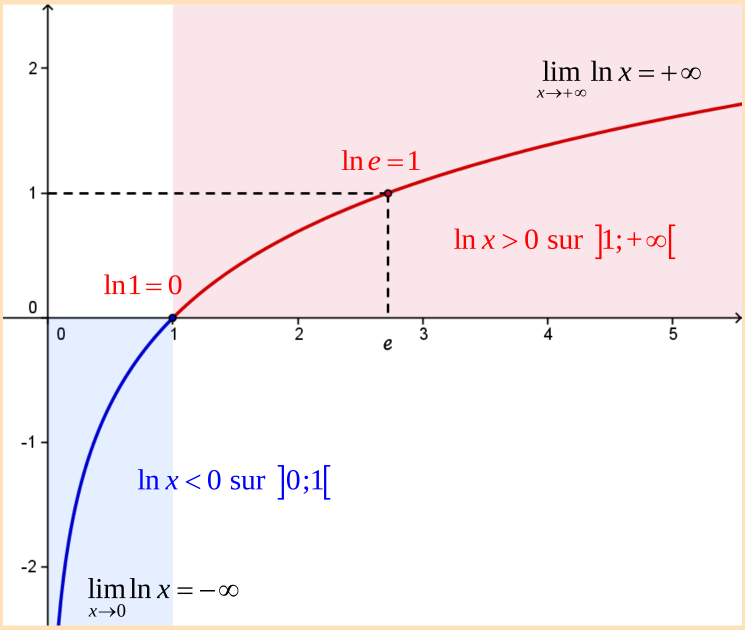
La fonction logarithme népérien est définie sur $\left]0;+\infty\right[$.

L'image d'un réel x est noté $\ln(x)$ ou $\ln x$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

I Variation et courbe représentative

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et, pour tout x strictement positif : $\ln' x = \dfrac{1}{x}$.

La courbe représentative de la fonction ln permet de retenir certaines propriétés :



- $\ln(A)$ existe si et seulement si $A > 0$
- La fonction ln est strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$

  Conséquences : $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$
  $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- Il existe un **nombre réel** noté e tel que $\ln e = 1$: une valeur approchée de e est 2,7.

II Propriétés

- **Relations algébriques :** Pour tous réels strictement positifs x et y,

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

Conséquences :

$\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$ $\quad$ $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ $\quad$ $\ln(x^n) = n\ln x$ $\quad$ $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2}\ln x$

- **Croissance comparée :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$

- **Dérivée de $\ln u$:** Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur I, alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et :

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} \times u'$$

EXERCICES (Chapitre 19)

Exercice 1

1. Exprimer en fonction de $\ln 2$:

$A = \ln 4$ $\quad B = \ln\frac{1}{8}$ $\quad C = \frac{1}{2}\ln 16$ $\quad D = \ln\sqrt{2} - \ln\frac{1}{4}$

2. Calculer (donner le résultat sous la forme la plus simple possible) :

$A = \ln\left(e^2\right)$ $\quad B = \ln\frac{1}{e}$ $\quad C = \ln\sqrt{e}$ $\quad D = 2\ln\left(e^3\right)$

3. Ecrire sous la forme $\ln\alpha$ où α est un nombre :

$A = -\ln 3$ $\quad B = 3\ln 2$ $\quad C = \frac{1}{2}\ln 16 + 2\ln 3$ $\quad D = 4\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 9$

4. Comparer les nombres A et B dans les cas suivants :

$A = 3\ln 2$ et $B = 2\ln 3$ $\qquad A = \ln 5 - \ln 2$ et $B = \ln 12 - \ln 5$

Exercice 2

On donne les valeurs approchées suivantes : $\ln 2 \approx 0,7$ et $\ln 3 \approx 1,1$.
Sans l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant :

$\ln 4$	$\ln 6$	$\ln 9$	$\ln 8$	$\ln 27$	$\ln 72$	$\ln\frac{1}{6}$	$\ln\frac{3}{2}$	$\ln\frac{1}{16}$	$\ln\frac{9}{4}$

Exercice 3

Résoudre les équations et inéquations suivantes, après avoir donné leur ensemble de définition :

a) $\ln(x+1) = \ln 2$ $\quad$ **b)** $\ln(5-x) = 1$ $\quad$ **c)** $\ln(3-x) \geq 0$ $\quad$ **d)** $\ln(3x+4) < 2\ln 3$

Exercice 4

Calculer les dérivées des fonctions définies par :

a) $f(x) = \ln(3x+5)$ $\quad$ **b)** $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ $\quad$ **c)** $h(x) = \ln\left(x^2+4\right)$ $\quad$ **d)** $k(x) = (\ln x)^2$

INDICATIONS (Chapitre 19)

Exercice 1

Utiliser sans modération les propriétés algébriques de la fonction ln ...

1. 4, 8 et 16 sont des puissances de 2. Par exemple, $\ln 4 = \ln\left(2^2\right) = 2\ln 2$.

2. e est le nombre réel tel que $\ln e = 1$

4. Ecrire A et B sous la forme d'un seul logarithme et utiliser la propriété : $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.

Exercice 2

Tous les réels figurant dans le tableau s'écrivent en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$, que l'on remplace ensuite par leurs valeurs approchées respectives.

Exemple : $\ln 4 = 2\ln 2$ donc $\ln 4 \approx 2 \times 0,7$ soit $\ln 4 \approx 1,4$.

Exercice 3

Pour résoudre des équations ou inéquations comportant la fonction ln, il faut, **avant de faire le moindre calcul**, chercher l'ensemble de définition *D* (voir l'exercice précédent).

Ensuite, on écrit chaque membre sous la forme d'un seul logarithme puis on utilise :

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ pour les équations
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$ pour les inéquations

Attention : pour déterminer l'ensemble solution *S*, bien tenir compte de l'ensemble de définition *D*.

Exercice 4

a) f est de la forme $\ln u$ où u est une fonction affine.

b) g est de la forme $\frac{u}{v}$, or $\left(\frac{u}{v}\right)' = \ldots$

c) h est de la forme $\ln u$ où u est une fonction polynôme.

d) k est de la forme $u^2 = u \times u$ où u est la fonction ln.

CORRIGES (Chapitre 19)

Exercice 1

1. $A = \ln 4 = \ln\left(2^2\right) = 2\ln 2$ $\qquad B = -\ln 8 = -\ln 2^3 = -3\ln 2$

$C = \frac{1}{2}\ln 16 = \frac{1}{2}\ln\left(2^4\right) = 2\ln 2$ $\qquad D = \ln\sqrt{2} - \ln\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ln 2 + 2\ln 2 = \frac{5}{2}\ln 2$

2. $A = \ln\left(e^2\right) = 2\ln e = 2$ $\qquad B = \ln\frac{1}{e} = -\ln e = -1$

$C = \ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}$ $\qquad D = 2\ln\left(e^3\right) = 2\times 3\ln e = 6$

3. $A = -\ln 3 = \ln\frac{1}{3}$ $\qquad B = 3\ln 2 = \ln\left(2^3\right) = \ln 8$

$C = \frac{1}{2}\ln 16 + 2\ln 3 = \ln\sqrt{16} + \ln\left(3^2\right) = \ln 4 + \ln 9 = \ln\left(4\times 9\right) = \ln 36$

$D = 4\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 9 = \ln\left(2^4\right) - \ln\sqrt{9} = \ln 16 - \ln 3 = \ln\frac{16}{3}$

4. $A = \ln 2^3 = \ln 8$ et $B = \ln 3^2 = \ln 9$ or $8 < 9$ donc : $A < B$

$A = \ln\frac{5}{2}$ et $B = \ln\frac{12}{5}$ or $\frac{5}{2} > \frac{12}{5}$ donc : $A > B$

Exercice 2

$\ln 4$	$\ln 6$	$\ln 9$	$\ln 8$	$\ln 27$	$\ln 72$	$\ln\frac{1}{6}$	$\ln\frac{3}{2}$	$\ln\frac{1}{16}$	$\ln\frac{9}{4}$
1,4	1,8	2,2	2,1	3,3	4,3	–1,8	0,4	–2,8	0,8

Exercice 3

a) $D = \left]-1;+\infty\right[$; $\ln(x+1) = \ln 2 \Leftrightarrow x+1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$ et $1 \in D$ $\qquad S = \{1\}$

b) $D = \left]-\infty;5\right[$; $\ln(5-x) = 1 \Leftrightarrow \ln(5-x) = \ln e \Leftrightarrow 5-x = e \Leftrightarrow x = 5-e$ et $5-e \in D$ $\qquad S = \{5-e\}$

c) $D = \left]-\infty;3\right[$; $\ln(3-x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(3-x) \geq \ln 1 \Leftrightarrow 3-x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 2$

L'inéquation est équivalente à $x \leq 2$ et $x < 3$ donc $\qquad S = \left]-\infty;2\right]$

d) $D = \left]-\frac{4}{3};+\infty\right[$; $\ln(3x+4) < 2\ln 3 \Leftrightarrow \ln(3x+4) < \ln 9 \Leftrightarrow 3x+4 < 9 \Leftrightarrow x < \frac{5}{3}$

L'inéquation est équivalente à $x > -\frac{4}{3}$ et $x < \frac{5}{3}$ donc $\qquad S = \left]-\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right[$

Exercice 4

a) $f'(x) = \frac{3}{3x+5}$ $\qquad$ **b)** $g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ $\qquad$ **c)** $h'(x) = \frac{2x}{x^2+4}$ $\qquad$ **d)** $k'(x) = \frac{2\ln x}{x}$

Chapitre 20 : FONCTION EXPONENTIELLE

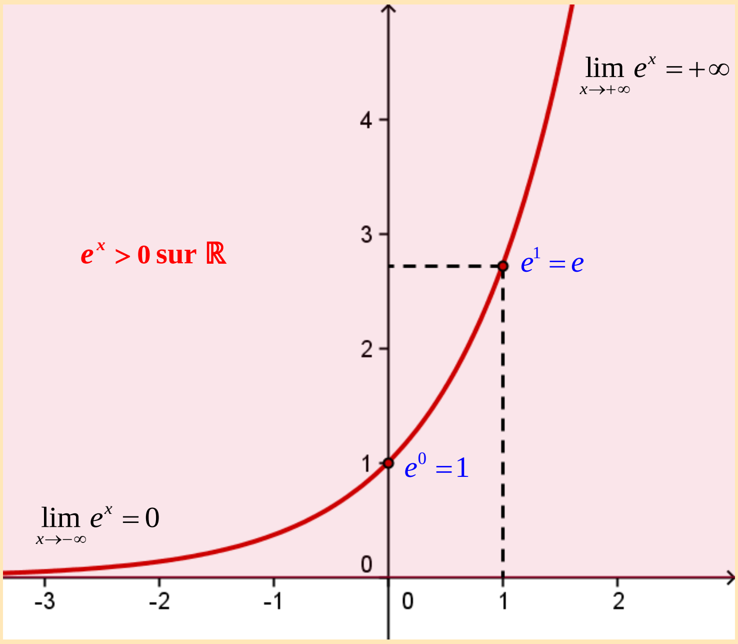
La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$. L'image d'un réel x est noté $\exp(x)$ ou e^x.
Les fonctions logarithme et exponentielle sont réciproques l'une de l'autre, c'est à dire :

$$\begin{pmatrix} y=e^x \\ x\in\mathbb{R} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x=\ln y \\ y\in]0;+\infty[\end{pmatrix} \qquad \ln\left(e^x\right)=x \qquad e^{\ln x}=x$$

I Variation et courbe représentative

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x : $\exp'(x)=\exp x$
Autrement dit, la fonction exponentielle est égale à sa fonction dérivée.

La courbe représentative de la fonction exponentielle permet de retenir certaines propriétés :



La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Conséquences :

$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$
$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

II Propriétés

- **Relations algébriques**

Pour tous réels x et y, et pour tout entier n,

$$e^{x+y}=e^x\times e^y \qquad e^{-x}=\frac{1}{e^x} \qquad e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y} \qquad \left(e^x\right)^n=e^{nx}$$

On remarquera l'analogie avec les propriétés des puissances.

- **Croissance comparée**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x e^x = 0$$

- **Dérivée de $\exp u$**

Propriété : Si u est une fonction dérivable sur I, alors la fonction e^u est dérivable sur I et

$$\left(e^u\right)'=e^u\times u'$$

EXERCICES (Chapitre 20)

Exercice 1

Dans les questions suivantes, simplifier les nombres ou expressions proposés :

1. $A = e^{\ln 2}$ $\quad B = e^{3\ln 2}$ $\quad C = e^{-\ln 3}$ $\quad D = e^{\frac{1}{2}\ln 3}$

2. $E = e^{-3} \times e^{4}$ $\quad F = e^{1+\ln 2}$ $\quad G = \left(e^{x}\right)^{3} \times e^{-2x}$ $\quad H = \dfrac{e^{2x+1}}{e^{-2x}}$

Exercice 2

1. Calculer $A(x) = \left(e^{x} + e^{-x}\right)^{2} - \left(e^{x} - e^{-x}\right)^{2}$ et montrer que cette expression est indépendante de x.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{e^{x} + 1}$.

Montrer que, pour tout réel x : $f(-x) = -f(x)$.

Exercice 3

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $e^{x} = 3$ $\quad$ **b)** $e^{x} + 1 = 0$ $\quad$ **c)** $e^{3x} = 1$

d) $e^{2x} \geq 5$ $\quad$ **e)** $2e^{x} - 1 < 0$

Exercice 4

Calculer les dérivées des fonctions définies par :

a) $f(x) = e^{3x+2}$ $\quad$ **b)** $g(x) = (x+1)e^{x}$ $\quad$ **c)** $h(x) = \dfrac{e^{2x}}{x}$ $\quad$ **d)** $l(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{e^{x} + 1}$

Exercice 5

On donne ci-contre les courbes représentatives des 4 fonctions suivantes :

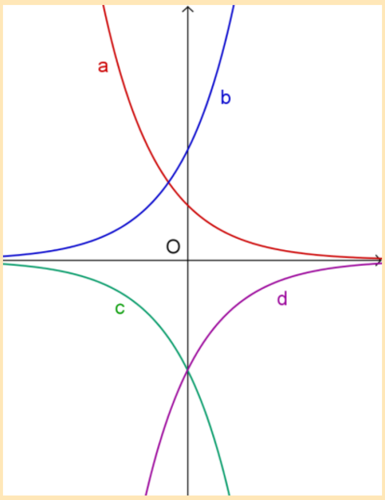
$f_1 : x \mapsto 2e^{x}$

$f_2 : x \mapsto -2e^{-x}$

$f_3 : x \mapsto e^{-x}$

$f_4 : x \mapsto -2e^{x}$

Associer à chaque courbe la fonction qu'elle représente.



INDICATIONS (CHAPITRE 20)

Exercice 1

1. Utiliser $e^{\ln \alpha} = \alpha$.
Il est parfois nécessaire de transformer l'exposant. Par exemple, $3\ln 2$ doit être écrit sous la forme $\ln \alpha$.

2. Utiliser les propriétés de la fonction exponentielle (sans en inventer !).

Exercice 2

1. Développer en utilisant les identités remarquables.

2. Ecrire $f(-x)$ puis multiplier numérateur et dénominateur par e^x qui est non nul.

Exercice 3

Pour résoudre des équations ou inéquations comportant la fonction exponentielle, on peut utiliser :

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ pour les équations
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$ pour les inéquations

ou appliquer aux deux membres de l'équation ou inéquation, si ceux-ci sont strictement positifs, la fonction logarithme népérien.
Exemple : $e^x = 3 \Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) = \ln 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$

Exercice 4

a) f est de la forme e^u où u est une fonction affine.

b) **c)** et **d)** Utiliser les règles de dérivation d'un produit et d'un quotient.

Exercice 5

On peut calculer l'image de 0 par chacune de ces fonctions.
On peut aussi regarder la variation et le signe de chaque fonction proposée.
Par exemple, la fonction $f_2 : x \mapsto -2e^{-x}$ est négative et croissante (calculer sa dérivée et regarder le signe de cette dérivée).

CORRIGES (CHAPITRE 20)

Exercice 1

1. $A=2$ $\quad$ $B=2^3=8$ $\quad$ $C=\dfrac{1}{3}$ $\quad$ $D=\sqrt{3}$

2. $E=e$ $\quad$ $F=e^{1+\ln 2}=e^1\times e^{\ln 2}=2e$

$G=e^{3x}\times e^{-2x}=e^x$ $\quad$ $H=e^{2x+1-(-2x)}=e^{4x+1}$

Exercice 2

1. $A(x)=\left(e^{2x}+2e^0+e^{-2x}\right)-\left(e^{2x}-2e^0+e^{2x}\right)=4$ donc $A(x)$ ne dépend pas de *x*.

2. $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{e^x\left(e^{-x}-1\right)}{e^x\left(e^{-x}+1\right)}=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}=\dfrac{-\left(e^x-1\right)}{e^x+1}=-f(x)$.

Exercice 3

a) $e^x=3\Leftrightarrow x=\ln 3$ $\quad$ $S=\{\ln 3\}$

b) $e^x+1=0\Leftrightarrow e^x=-1$ $\quad$ $S=\varnothing$

c) $e^{3x}=1\Leftrightarrow 3x=0$ $\quad$ $S=\{0\}$

d) $e^{2x}\geq 5\Leftrightarrow 2x\geq \ln 5\Leftrightarrow x\geq \dfrac{1}{2}\ln 5$ $\quad$ $S=\left[\ln\sqrt{5};+\infty\right[$

e) $2e^x-1<0\Leftrightarrow e^x<\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x<\ln\dfrac{1}{2}$ $\quad$ $S=\left]-\infty;-\ln 2\right[$

Exercice 4

a) $f'(x)=e^{3x+2}\times 3=3e^{3x+2}$

b) $g'(x)=1\times e^x+(x+1)\times e^x=(x+2)e^x$

c) $h'(x)=\dfrac{2e^{2x}\times x-1\times e^{2x}}{x^2}=\dfrac{(2x-1)e^{2x}}{x^2}$

d) $l'(x)=\dfrac{e^x\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

Exercice 5

$f_1(0)=2$; $f_2(0)=-2$; $f_3(0)=1$; $f_4(0)=-2$.

On en déduit que f_1 est représentée par la courbe bleue **b** (c'est aussi la seule fonction positive et croissante).
et que f_3 est représentée par la courbe rouge **a** (seule fonction positive et décroissante).
Il reste à départager f_2 et f_4.
$f_2'(x)=2e^{-x}$ donc $f_2'(x)>0$: f_2 est croissante. Elle est donc représentée par la courbe violette **d**.
$f_4'(x)=-2e^x$ donc $f_2'(x)<0$: f_4 est décroissante. Elle est donc représentée par la courbe verte **c**.

Chapitre 21 : CALCULS DE LIMITES

I Opérations

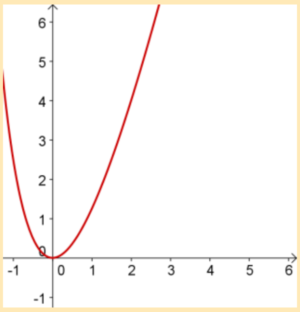
On peut additionner, soustraire, multiplier, diviser des limites sauf dans quatre cas qu'on appelle formes indéterminées :

« (+ ∞) + (– ∞) » « 0 × (∞) » « $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ » « $\left(\frac{0}{0}\right)$ »

En présence de ces formes indéterminées, tout peut arriver.

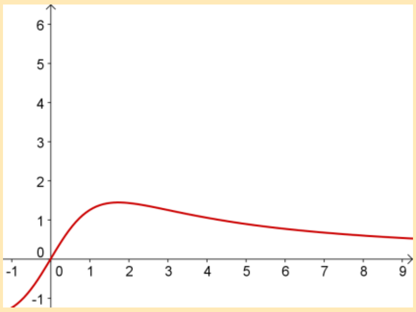
Exemples graphiques :

$f(x)=\dfrac{5x^2}{x+3}$



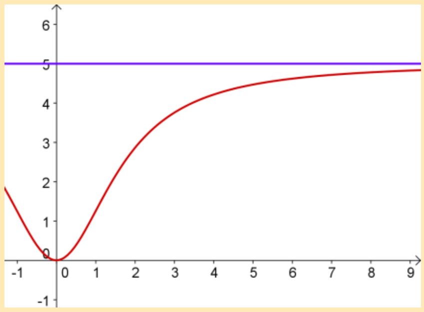
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$g(x)=\dfrac{5x}{x^2+3}$



$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

$h(x)=\dfrac{5x^2}{x^2+3}$



$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=5$

II Limite à l'infini d'une fonction polynôme et d'une fraction rationnelle

1. La limite à l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite à l'infini de son terme de plus haut degré.

   Exemple : $f(x)=-3x^2+2x-4$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^2\right)=-\infty$

2. La limite à l'infini d'une fraction rationnelle est égale à la limite à l'infini du quotient de ses termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.

   Exemple : $g(x)=\dfrac{5x}{x^2+3}$: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5}{x}\right)=0$

III Formes indéterminées avec *ln* et *exp*

En présence d'une forme indéterminée pour une expression avec *ln* ou *exp*, on transforme son écriture pour utiliser les résultats du cours sur les croissances comparées (voir chapitres 19 et 20).

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\ln x}{x}-x\right)$. Or : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0 \text{ d'où } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}-x\right)=-\infty\\ \text{et } \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\end{cases}$

  donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-x^2\right)=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)$ Or : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty \text{ d'où } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)=+\infty\\ \text{et } \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\end{cases}$

  donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)=+\infty$

EXERCICES (Chapitre 21)

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes. On utilisera les limites des fonctions de référence.

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 + \dfrac{2}{x} \right)$

2. $\lim\limits_{x \to 0} (2x - \ln x)$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2xe^x)$

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - 1)$

Exercice 2

Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de chaque fonction polynôme ou rationnelle suivante :

1. $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$

2. $g(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x + 2}$

3. $h(x) = \dfrac{2x^2 - 5}{4x^2 - 3x + 1}$

Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction *h* ?

Exercice 3

Chaque limite suivante présente une forme indéterminée.
Préciser de quelle forme il s'agit puis utiliser l'indication du texte pour déterminer la limite demandée.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 3e^x)$ *Indication* : mettre x en facteur dans l'expression de la fonction.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x + \ln x)$ *Indication* : mettre x en facteur dans l'expression de la fonction.

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x(3x + 1)$ *Indication* : développer.

4. $\lim\limits_{x \to 0} 5x(1 - \ln x) + 2$ *Indication* : développer.

Exercice 4

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = -2x + 3 + \dfrac{1}{x+1}$.
Montrer que la droite *D* d'équation $y = -2x + 3$ est asymptote à la courbe représentative *C* de *f*.

INDICATIONS (Chapitre 21)

Exercice 1

1. $x^2 + \frac{2}{x} = x^2 + 2 \times \frac{1}{x}$

En se reportant si besoin au chapitre 15, on visualise la courbe de la fonction carré pour déterminer $\lim_{x \to -\infty} x^2$ et celle de la fonction inverse pour déterminer $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$. On ajoute ensuite les deux limites obtenues.

3. On détermine $\lim_{x \to +\infty} (-2x)$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x$ puis on utilise la règle des signes pour le produit des deux limites obtenues.

Exercice 2

Pour toutes les limites demandées, utiliser les résultats du cours, énoncés au paragraphe II.

3. A la suite d'un calcul de limite, on peut déduire une éventuelle asymptote pour la courbe représentative de la fonction étudiée. Se reporter au chapitre 13 pour répondre à la question.

Exercice 3

1. Pour déterminer $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$, on utilise une propriété de croissance comparée, vue au chapitre 20.

2. Pour déterminer $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$, on utilise une propriété de croissance comparée, vue au chapitre 19.

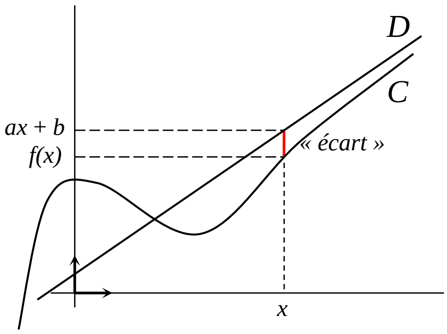
3. Pour déterminer $\lim_{x \to -\infty} xe^x$, on utilise une propriété de croissance comparée, vue au chapitre 20.

4. Pour déterminer $\lim_{x \to 0} x \ln x$, on utilise une propriété de croissance comparée, vue au chapitre 19**.**

Exercice 4

D est asymptote à C quand x tend vers $+\infty$ si $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$ (voir chapitre 13).

Donc, pour montrer que D est asymptote à C, on calcule « l'écart » entre la courbe et la droite, c'est-à-dire la différence $\left[f(x) - (ax+b) \right]$. Puis on montre que sa limite est nulle en l'infini.



CORRIGES (Chapitre 21)

Exercice 1

1. $x^2+\frac{2}{x}=x^2+2\times\frac{1}{x}$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$; on déduit : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+\frac{2}{x}\right)=+\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to0} 2x=0$ et $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$; on déduit : $\lim\limits_{x\to0}(2x-\ln x)=+\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$; on déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2xe^x\right)=-\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$; on déduit : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-1\right)=-1$.

Exercice 2

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-4x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^3-4x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3=+\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2-5}{4x^2-3x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{4x^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5}{4x^2-3x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{4x^2}=\frac{1}{2}$.

En conséquence, la courbe représentative de la fonction h admet, au voisinage de l'infini, une asymptote horizontale d'équation $y=\frac{1}{2}$.

Exercice 3

1. Il s'agit de la forme indéterminée $(+\infty)+(-\infty)$. On remarque que : $2x-3e^x=x\left(2-3\frac{e^x}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3\frac{e^x}{x}\right)=-\infty$; on déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-3e^x\right)=-\infty$.

2. Il s'agit de la forme indéterminée $(-\infty)+(+\infty)$. On remarque que : $-3x+\ln x=x\left(-3+\frac{\ln x}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$; on déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x+\ln x)=-\infty$.

3. Il s'agit de la forme indéterminée $0\times\infty$. On remarque que : $e^x(3x+1)=3xe^x+e^x$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$; on déduit : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x(3x+1)=0$.

4. Il s'agit de la forme indéterminée $0\times\infty$. On remarque que : $5x(1-\ln x)+2=5x-5x\ln x+2$.

$\lim\limits_{x\to0}5x=0$ et $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$; on déduit : $\lim\limits_{x\to0}5x(1-\ln x)+2=2$.

Exercice 4

Calcul de la différence $f(x)-(-2x+3)$: $f(x)-(-2x+3)=\left(-2x+3+\frac{1}{x+1}\right)-(-2x+3)=\frac{1}{x+1}$.

Etude de la limite à l'infini de $f(x)-(-2x+3)$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x+1}=0$.

Donc D est asymptote à C quand x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

Chapitre 22 : PRIMITIVES D'UNE FONCTION

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
La fonction F définie sur I est **une primitive** de f sur I si pour tout x de I, on a $F'(x) = f(x)$
(f est **la dérivée** de F sur I)

Exemple :

on intègre $\quad f(x) = 3x^2+4x-9 \quad$ *on dérive*

$\qquad\qquad F(x) = x^3+2x^2-9x$

Propriété : si F est une primitive de f sur I, alors toutes les primitives de f sont de la forme $F + k$ où k est une constante réelle.

Exemple : la fonction G définie par $G(x) = x^3+2x^2-9x+7$ est aussi une primitive de f.

I Primitives des fonctions usuelles

si $f(x)$ =	alors $F(x)$ =
a (a nombre réel)	$ax+k$
$x^n\ (n \geq 0)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+k$
$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{-1}{x}+k$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+k$
e^x	e^x+k
$\sin x$	$-\cos x+k$
$\cos x$	$\sin x+k$

II Fonctions composées

si f =	alors F =
$u'\,u^n\ (n \geq 0)$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}+k$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$\dfrac{-1}{u}+k$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert+k$
$u'\,e^u$	e^u+k
$u'\,\sin u$	$-\cos u+k$
$u'\,\cos u$	$\sin u+k$

Exemples

Si $f(x)=2x(x^2+5)^3$ alors $F(x)=\dfrac{(x^2+5)^4}{4}+k$

Si $f(x)=\dfrac{5}{(5x+7)^2}$ alors $F(x)=\dfrac{-1}{5x+7}+k$

Si $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+5}$ alors $F(x)=\ln(x^2+5)+k$

Si $f(x)=5e^{5x}$ alors $F(x)=e^{5x}+k$

Si $f(x)=3\sin(3x)$ alors $F(x)=-\cos(3x)+k$

Si $f(x)=3x^2\cos(x^3+9)$ alors $F(x)=\sin(x^3+9)+k$

EXERCICES (Chapitre 22)

Exercice 1

On considère les fonctions f et g définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x+1$ et $g(x)=2x$.

1. Déterminer une primitive F de f et une primitive G de g.

2. On pose $h=f+g$; $j=f-g$; $k=f\times g$; $l=\dfrac{f}{g}$.

a) Calculer $h(x)$, $j(x)$, $k(x)$ sous forme développée et réduite.

b) Montrer que $l(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{x}$.

3. a) Déterminer une primitive H, J, K et L respectivement des fonctions h, j, k et l.

b) $F+G$ est-elle une primitive de $f+g$? $F-G$ est-elle une primitive de $f-g$?

$F\times G$ est-elle une primitive de $f\times g$? $\dfrac{F}{G}$ est-elle une primitive de $\dfrac{f}{g}$?

Exercice 2

Q.C.M. Pour chaque fonction, trois primitives sont proposées. Donner la ou les bonne(s) réponse(s).

	A	**B**	**C**
1. $f(x)=-2x+1$	$F(x)=-2$	$F(x)=-x^2+x$	$F(x)=-x^2+x+1$
2. $f(x)=x-\dfrac{1}{x^2}$	$F(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{x}$	$F(x)=1+\dfrac{2}{x^3}$	$F(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x}+2$
3. $f(x)=(2x+1)^3$	$F(x)=\dfrac{(2x+1)^4}{4}$	$F(x)=(2x+1)^4$	$F(x)=\dfrac{1}{8}(2x+1)^4$
4. $f(x)=\cos(2x)$	$F(x)=-\sin(2x)$	$F(x)=\dfrac{1}{2}\sin(2x)$	$F(x)=-\dfrac{1}{2}\sin(2x)$
5. $f(x)=\dfrac{2}{2x+1}$	$F(x)=\dfrac{2x}{x^2+x}$	$F(x)=\ln\lvert x+1\rvert$	$F(x)=\ln\lvert 2x+1\rvert$
6. $f(x)=2e^{3x+2}$	$F(x)=\dfrac{2}{3}e^{3x+2}$	$F(x)=2e^{3x+2}$	$F(x)=\dfrac{2}{3}e^{x}$
7. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$	$F(x)=\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}$	$F(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$	$F(x)=\ln(x^2+1)$
8. $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$	$F(x)=2e^{\frac{x}{2}}$	$F(x)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$	$F(x)=2e^{\frac{x}{2}}+2$

Exercice 3

Calculer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x)=x^2-1+\dfrac{3}{x^2}$ **b)** $g(x)=e^{4x-1}$

c) $h(x)=\sin(2x)-\dfrac{1}{2}\cos x$ **d)** $j(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

INDICATIONS (Chapitre 22)

Exercice 1

1. Il existe une infinité de primitives pour la fonction f (et pour la fonction g). Dans la pratique, on choisira celle pour laquelle $k = 0$.

2. b) $l(x)=\dfrac{x+1}{2x}=\dfrac{x}{2x}+\dfrac{1}{2x}$.

Il sera ainsi plus facile dans la question suivante de déterminer une primitive de l si $l(x)$ est écrit sous cette forme.

3. Appliquer la propriété du cours : « si F est une primitive de f sur I, alors toutes les primitives de f sont de la forme $F + k$ (k constante réelle) ». Donc pour savoir si $F+G$ est une primitive de $h=f+g$, il suffit de voir si $F(x)+G(x)=H(x)+k$.

Raisonner de même pour $F-G$, $F\times G$ et $\dfrac{F}{G}$.

Exercice 2

Pour cet exercice, on peut procéder de deux façons différentes :

- soit chercher une primitive de f.
- soit dériver chaque fonction F proposée.

3. Penser à écrire $f(x)=(2x+1)^3=\dfrac{1}{2}\times 2(2x+1)^3$ afin que f soit sous la forme $\dfrac{1}{2}\times u'\,u^n$.

5. f est de la forme $\dfrac{u'}{u}$.

7. Ecrire f sous la forme $C\times\dfrac{u'}{u}$, où C est une constante à déterminer.

8. Penser à écrire $f(x)=2\times\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ afin que f soit sous la forme $2\times u'\,e^u$.

Exercice 3

b) Pour $G(x)$, se rappeler qu'on connaît les primitives de $u'e^u$.

c) Pour $H(x)$, faire attention aux signes des primitives.

d) Pour $J(x)$, remarquer que j est de la forme $\dfrac{u'}{u}$.

CORRIGES (Chapitre 22)

Exercice 1

1. $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+x$; $G(x)=x^2$.

2. **a)** $h(x)=3x+1$; $j(x)=-x+1$; $k(x)=2x^2+2x$.

b) $l(x)=\dfrac{x+1}{2x}=\dfrac{x}{2x}+\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{x}$.

3. **a)** $H(x)=\dfrac{3x^2}{2}+x$; $J(x)=-\dfrac{x^2}{2}+x$; $K(x)=\dfrac{2x^3}{3}+x^2$; $L(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\ln|x|$.

b) $F(x)+G(x)=\dfrac{3}{2}x^2+x=H(x)$: $F+G$ est une primitive de $f+g$.

$F(x)-G(x)=-\dfrac{x^2}{2}+x=J(x)$: $F-G$ est une primitive de $f-g$.

$F(x)\times G(x)=\dfrac{x^4}{2}+x^3$, ne peut pas s'écrire sous la forme $K(x)+k$:

$F\times G$ n'est pas une primitive de $f\times g$.

$\dfrac{F(x)}{G(x)}=\dfrac{x^2}{2x^2}+\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x}$, ne peut pas s'écrire sous la forme $L(x)+k$:

$\dfrac{F}{G}$ n'est pas une primitive de $\dfrac{f}{g}$.

Propriété : $F+G$ et $F-G$ sont toujours des primitives respectivement de $f+g$ et de $f-g$.
Par contre, en général, $F\times G$ n'est pas une primitive de $f\times g$.
De même, en général, $\dfrac{F}{G}$ n'est pas une primitive de $\dfrac{f}{g}$.

Exercice 2

1. Réponses B et C
2. Réponse C
3. Réponse C
4. Réponse B
5. Réponse C
6. Réponse A
7. Réponse B
8. Réponses A et C

Exercice 3

a) $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-x-\dfrac{3}{x}$

b) $G(x)=\dfrac{1}{4}e^{4x-1}$

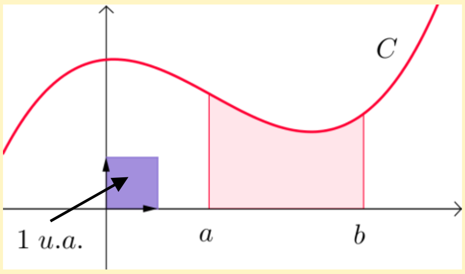
c) $H(x)=-\dfrac{1}{2}\cos(2x)-\dfrac{1}{2}\sin x$

d) $J(x)=\ln(e^x+1)$

Chapitre 23 : CALCUL INTEGRAL

I Intégrale d'une fonction positive sur un intervalle

Soit *f* une fonction définie, continue et **positive** sur $[a;b]$ (avec $a<b$). On appelle **intégrale de *a* à *b* de la fonction *f***, et on note $\int_a^b f(x)\,dx$, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de la fonction *f*, l'axe des abscisses et les deux droites d'équation $x=a$ et $x=b$.



$\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire « sous la courbe » de la fonction *f*

Cette aire est exprimée en **u.a.** (unité d'aire)

Exemple : soit la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=-x+4$ et représentée graphiquement par la droite *D*. Sur l'intervalle $[1;2]$, *f* est positive.
L'intégrale de 1 à 2 de la fonction *f* est égale à l'aire de la partie du plan comprise entre la droite *D*, l'axe des abscisses et les deux droites d'équation $x=1$ et $x=2$. On a donc : $\int_1^2(-x+4)\,dx=\frac{5}{2}$

II Intégrale et primitive

1. *f* étant une fonction définie, continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ de ℝ et *F* une primitive de *f* sur $[a;b]$, on montre que l'intégrale de *f* entre *a* et *b* est égale au nombre :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

Exemple : $$\int_1^2(-x+4)\,dx=\left[-\frac{x^2}{2}+4x\right]_1^2=\left(-\frac{4}{2}+8\right)-\left(-\frac{1}{2}+4\right)=6-\frac{7}{2}=\frac{5}{2}$$

2. Cette formule est étendue au cas d'une fonction continue de signe quelconque.

Exemple : $$\int_0^1\left(x^2-3\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-3x\right]_0^1=\left(\frac{1}{3}-3\right)-(0)=-\frac{8}{3}$$

Remarque : ce nombre est indépendant de la primitive choisie.

III Propriétés

Soient *f* et *g* deux fonctions définies et continues sur un intervalle *I* de ℝ, *a*, *b* et *c* trois réels de *I*, *k* un réel.
On a :

- $\int_a^a f(x)\,dx=0$; $\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$
- Linéarité : $\int_a^b\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$ et $\int_a^b k\,f(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$
- Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$
- Ordre : pour *a* et *b* dans *I* avec ***a* < *b*** : si $f\le g$ sur *I* , alors $\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$

EXERCICES (Chapitre 23)

Exercice 1

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+4$.

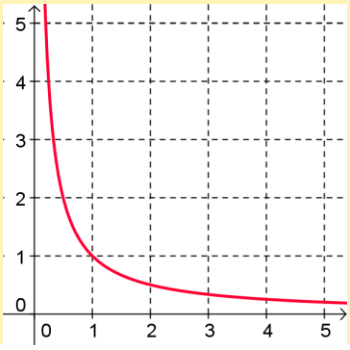
1. Tracer sa représentation graphique dans un repère.

2. Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de la fonction *f*, l'axe des abscisses et les deux droites d'équation $x=-2$ et $x=2$.

Exercice 2

Soit la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Sa représentation graphique est donnée dans le repère ci-contre.



1. Soit $I=\int_1^4 f(x)\,dx$. Que représente graphiquement ce nombre ?
En s'aidant du quadrillage du repère, donner un encadrement de *I* par deux entiers consécutifs.

2. Calculer *I*.

Exercice 3

Soient *f* et *g* les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x$ et $g(x)=x$.

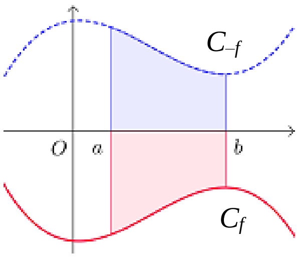
1. Représenter sur un même graphique les fonctions *f* et *g* (Unité graphique : 2 cm)

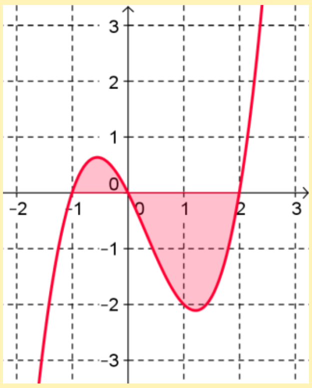
2. **a)** En utilisant la différence de deux aires, calculer en u.a. l'aire de la partie du plan délimitée par les deux courbes et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

b) En donner une valeur approchée en cm².

Exercice 4

Si *f* est une fonction **négative** sur $[a;b]$, par symétrie, l'aire rouge « au dessus de C_f » est égale à l'aire bleue « en dessous de C_{-f} ».
$(-f)$ étant positive sur $[a;b]$, cette aire est donc égale à $\int_a^b -f(x)\,dx$.





Sur la figure ci-contre, *C* est la courbe représentative de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-x^2-2x$.

1. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

2. Calculer l'aire de la surface coloriée (*Indication* : on partagera l'intervalle $[-1;2]$ en deux intervalles).

3. Calculer $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$. Retrouve-t-on le résultat précédent ?

INDICATIONS (Chapitre 23)

Exercice 1

f étant positive sur l'intervalle $[-2;2]$, il faut calculer l'aire « sous la courbe de f », soit $\int_{-2}^{2} \left(-x^2+4\right)\, dx$.
Ce qui revient à déterminer une primitive F de la fonction f, puis à calculer $F(2)-F(-2)$.
Attention aux signes lors du calcul de $F(-2)$.

Exercice 2

1. f étant positive sur l'intervalle $[1;4]$, l'intégrale représente une aire ; il reste à définir explicitement la partie du plan concernée.
Pour en donner un encadrement, il suffit d'évaluer approximativement le nombre de carreaux « sous la courbe » entre $x = 1$ et $x = 4$.

Exercice 3

2. **a)** Après avoir tracé les courbes des deux fonctions f et g, on remarquera que l'aire de la partie du plan demandée correspond à la différence entre l'aire « sous la courbe de f » et l'aire « sous la courbe de g ».
Il faut donc calculer $\int_0^1 e^x dx - \int_0^1 x\, dx$.

b) La différence entre les deux intégrales correspond à la valeur de l'aire en u.a. (unité d'aire). L'échelle étant de 2 cm sur chacun des deux axes, l'unité d'aire est égale à 4 cm^2.

Exercice 4

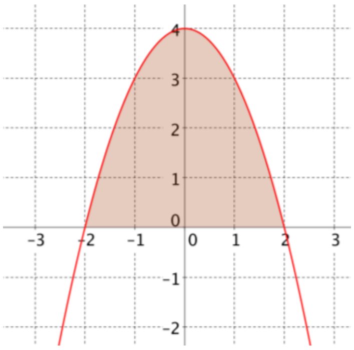
1. Les points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses correspondent à des points d'ordonnée nulle. Il faut donc résoudre l'équation $f(x)=0$ (Voir chapitre 10).

2. f est positive sur l'intervalle $[-1;0]$ et négative sur l'intervalle $[0;2]$. On va donc calculer l'aire « sous la courbe de f » entre –1 et 0, puis l'aire « sous la courbe de $(-f)$ » entre 0 et 2.

3. f ne gardant pas un signe constant sur l'intervalle $[-1;2]$, le nombre $\int_{-1}^{2} f(x)\, dx$ ne représente pas une aire, c'est pourquoi on ne retrouve pas le résultat précédent.

CORRIGES (Chapitre 23)

Exercice 1

1. 

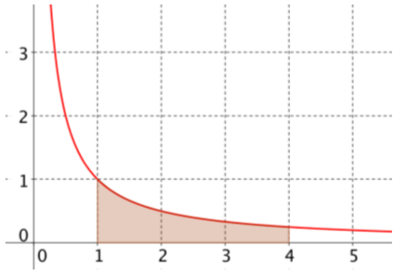
2. $A=\int_{-2}^{2}\left(-x^2+4\right)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{2}=\left(-\frac{8}{3}+8\right)-\left(\frac{8}{3}-8\right)$

$=-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}+8=16-\frac{16}{3}=\frac{48}{3}-\frac{16}{3}=\frac{32}{3}$ u.a.

Exercice 2

1. I représente l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les deux droites d'équation $x=1$ et $x=4$.

On lit graphiquement : $1\le I\le 2$



2. $I=\int_1^4\left(\frac{1}{x}\right)\,dx=\left[\ln x\right]_1^4=\ln 4-\ln 1=\ln 4$

Remarque : Avec la calculatrice, on obtient $\ln 4\approx 1{,}39$, ce qui est cohérent avec la question 1.

Exercice 3

2. a) $A=\int_0^1 e^x dx-\int_0^1 x\,dx=\left[e^x\right]_0^1-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$=\left(e^1-e^0\right)-\left(\frac{1}{2}-0\right)=e-1-\frac{1}{2}=e-\frac{3}{2}$ u.a

b) $A=\left(e-\frac{3}{2}\right)\times 4\text{ cm}^2$, soit environ 4,87 cm^2.

Exercice 4

1. $f(x)=0\Leftrightarrow x(x^2-x-2)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x^2-x-2=0\quad(\Delta=9)$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-1$ ou $x=2$

La courbe coupe l'axe des abscisses aux points : $\mathrm{A}(-1;0)$, $\mathrm{O}(0;0)$ et $\mathrm{B}(2;0)$.

2. $A=\int_{-1}^{0}f(x)\,dx+\int_0^2-f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\left(x^3-x^2-2x\right)dx+\int_0^2\left(-x^3+x^2+2x\right)dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2=0-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)+\left(\frac{-16}{4}+\frac{8}{3}+4\right)-0=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$ u.a.

3. $\int_{-1}^{2}f(x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{2}=\left(\frac{16}{4}-\frac{8}{3}-4\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)=-\frac{8}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1=-2-\frac{1}{4}=-\frac{9}{4}$

Chapitre 24 : STATISTIQUES A UNE VARIABLE

I Vocabulaire

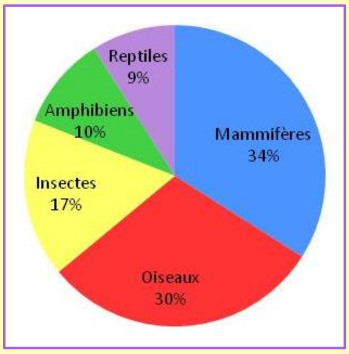
Les statistiques descriptives étudient, sur une **population** (par exemple un groupe d'étudiants), une **variable** (par exemple le nombre de frères et sœurs) dans le but d'en donner un résumé.

- L'effectif *n* d'une valeur de la variable est le nombre d'**individus** que prend la valeur.
- **L'étendue** est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur.
- La **fréquence** d'une valeur est égale à : $f = \dfrac{n}{N} = \dfrac{\text{effectif de la valeur}}{\text{effectif total}}$

II Représentations graphiques

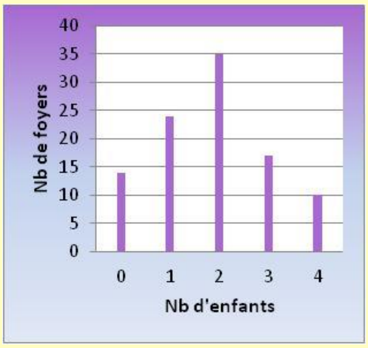
Une série statistique peut être représentée par :

un **diagramme circulaire** pour une variable **qualitative** (valeurs non numériques)



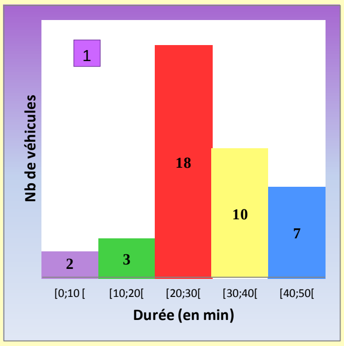
Répartition de la faune par espèces menacées dans le monde

un **diagramme en bâtons** pour une variable **quantitative discrète**(valeurs isolées)



Répartition de 100 foyers par nombre d'enfants

un **histogramme** pour une variable **quantitative continue** (données regroupées en classes)



Répartition de 40 véhicules par durée de stationnement sur un parking

III Paramètres de position : pour donner une idée de l'ordre de grandeur de la série

On considère une série prenant les valeurs x_i avec les effectifs respectifs n_i.

1. **la moyenne,** notée $\bar{x}$, est : $\bar{x} = \dfrac{\sum n_i \times x_i}{N}$

   Dans le cas d'une variable continue, on utilise pour x_i les **centres de classe**.

2. **la médiane** est la valeur qui partage l'effectif total en deux parties de même effectif lorsque les valeurs de la série sont classées par ordre croissant.

Exemple : pour la série de notes 7; 9; 10; **11**; 11; 17; 19 , la moyenne est 12 et la médiane est **11**.

IV Paramètres de dispersion : pour donner une idée de l'étalement de la série

1. **la variance et l'écart type** mesurent la dispersion autour de la moyenne.
   - **Variance** : $V = \dfrac{\sum n_i \times (x_i - \bar{x})^2}{N}$
   - **Ecart type** : $s = \sqrt{V}$
2. **l'écart interquartile** mesure la dispersion autour de la médiane.
   - **les quartiles** sont les valeurs Q_1, Q_2, Q_3 qui partagent la population en quatre sous populations de même effectif $\dfrac{N}{4}$ (lorsque les valeurs de la série sont classées par ordre croissant)
   - **l'écart interquartile** est la différence $Q_3 - Q_1$; l'intervalle $\left[Q_1 ; Q_3\right]$ contient 50 % des valeurs.

EXERCICES (Chapitre 24)

Exercice 1

Le personnel soignant d'une clinique reçoit une prime de fin d'année répartie selon le tableau ci-contre.

Montant de la prime en €	200	300	400	500	600
Effectifs	25	40	60	20	55

Compléter les phrases suivantes :

Le 1er quartile est : ……
La médiane est : ……
Le 3ème quartile est : ……

La moyenne est : ……
La variance est : ……
L'écart type est : ……

Exercice 2

Voici les salaires annuels des 1000 employés d'une clinique suivant l'âge :

Salaires en milliers d'euros / Age en années	$[10;20[$	$[20;40[$	$[40;70[$
[20 ; 30[	50	100	50
[30 ; 40[	50	300	50
[40 ; 60[	0	250	150

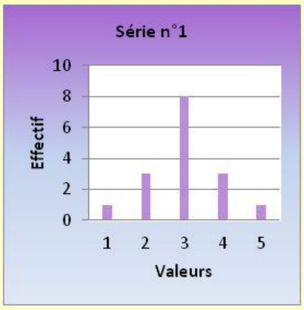
Compléter les phrases suivantes :

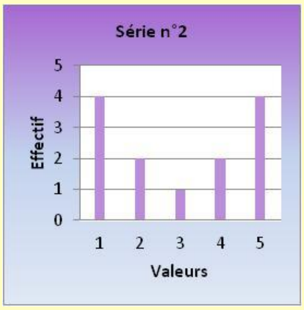
La fréquence f_1 des salariés qui ont moins de 30 ans est ……

La fréquence f_2 des salariés qui reçoivent entre 20 000 € et 40 000 € par an est ……

La fréquence f_3 des salariés qui reçoivent entre 20 000 € et 40 000 € par an parmi ceux qui ont entre 20 et 30 ans est ……

Exercice 3





Laquelle des deux séries statistiques a :

- la plus grande moyenne ?
- le plus petit écart type ?

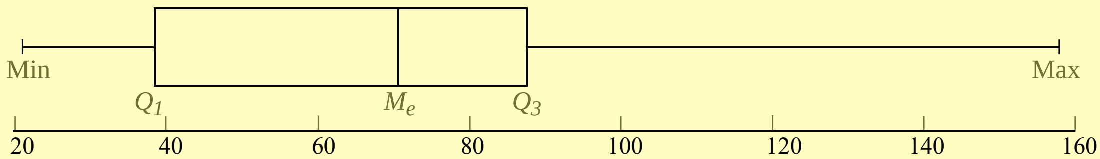
Exercice 4

Un **diagramme en boîte** (ou **boîte à moustaches**) est un graphique qui représente la répartition des valeurs suivantes : médiane, quartiles et valeurs extrêmes. Il peut être utile pour comparer des séries.

Les séries suivantes donnent les précipitations moyennes mensuelles en millimètres à Nice et à Paris :

	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Nice	67	83	71	70	39	37	21	38	83	109	158	92
Paris	53	48	40	45	53	57	54	61	54	50	58	51

Le diagramme en boîte représentant les précipitations à Nice est le suivant :



1. Construire le diagramme en boîte représentant les précipitations à Paris en utilisant la même graduation. Comparer alors les précipitations à Paris et à Nice.

2. Calculer pour chaque série la moyenne et l'écart-type.

INDICATIONS (Chapitre 24)

Exercice 1

Pour déterminer la médiane et les quartiles, compléter d'abord le tableau en ajoutant une ligne avec les effectifs cumulés croissants :

Montant de la prime en €	200	300	400	500	600
Effectifs	25	40	60	20	55
Effectifs cumulés croissants	**25**	**65**			

Pour déterminer la moyenne, la variance et l'écart type, on peut, dans ce cas simple, faire le calcul « à la main ». Mais on peut aussi utiliser le mode stat de la calculatrice.

Méthode : comment déterminer des paramètres statistiques avec une calculatrice.
Par exemple, pour la série des primes de l'exercice ci-dessus,

- avec une **Casio** : Aller dans le menu **STAT**.
  Entrer les valeurs des primes dans la liste **L1** puis les effectifs dans la liste **L2**.
  Appuyer sur **CALC**, puis sur **SET** pour accéder à la sélection des listes.
  Compléter de la façon suivante : **1Var Xlist : List1**
  1Var Freq : List2
  Appuyer sur **EXIT** puis sur **1VAR**.

- avec une **TI** : Appuyer sur **stats** puis choisir dans le menu **EDIT** l'option **Edite**.
  Entrer les valeurs des primes dans la liste **L1** puis les effectifs dans la liste **L2**.
  Appuyer sur **stats** puis choisir dans le menu **CALC** l'option **Stats 1-Var**.
  Taper **2nde 1, 2nde 2** : l'écran affiche **Stats 1-Var L1, L2**.
  Appuyer sur **entrer**.

La calculatrice affiche moyenne, effectif total, quartiles, médiane, écart-type….

Exercice 3

Il n'est pas nécessaire de calculer les différents paramètres des deux séries. Il suffit d'observer les deux graphiques.

Exercice 4

Penser à ranger les valeurs de la série des précipitations à Paris par ordre croissant avant de calculer la médiane et les quartiles.

CORRIGES (Chapitre 24)

Exercice 1

Montant de la prime en €	200	300	400	500	600
Effectifs	25	40	60	20	55
Effectifs cumulés croissants	25	65	125	145	200

Le premier quartile est la 50ème valeur, soit 300.
La médiane est la 100ème valeur, soit 400.
Le troisième quartile est la 150ème valeur, soit 600.

La moyenne est : $\dfrac{25\times 200+40\times 300+60\times 400+20\times 500+55\times 600}{200}=420$.

La variance est : $\dfrac{25\times(200-420)^2+40\times(300-420)^2+\ \ldots\ +55\times(600-420)^2}{200}=18600$.

L'écart type est : $\sqrt{18600}\approx 136,4$.

Exercice 2

Salaires en milliers d'€ / Age en années	[10 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 70[	Total
[20 ; 30[	50	100	50	200
[30 ; 40[	50	300	50	400
[40 ; 60[	0	250	150	400
Total	100	650	250	1000

$f_1=\dfrac{200}{1000}=0,2$; $f_2=\dfrac{650}{1000}=0,65$; $f_3=\dfrac{100}{200}=0,5$.

Exercice 3

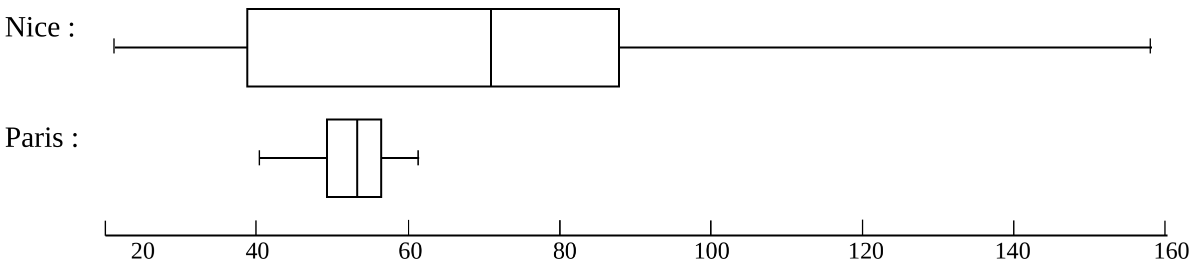
Les deux graphiques sont symétriques par rapport à « la valeur 3 » ; on peut donc en déduire que les moyennes sont égales. D'autre part, la série n°1 est moins dispersée que la série n°2 autour de la moyenne ; elle a donc un plus petit écart type.

Vérification par les calculs :	Série 1 :	$n=16$	$\overline{x}=3$	$\sigma\approx 0,94$
	Série 2 :	$n=13$	$\overline{x}=3$	$\sigma\approx 1,66$

Exercice 4

1. Nice : $Q_1=38,5$ $M_e=70,5$ $Q_3=87,5$

Paris : $Q_1=49$ $M_e=53$ $Q_3=55,5$



Les précipitations sont plus régulières tout au long de l'année à Paris, la série est moins dispersée.
A Nice, plus de 50% des mois ont des précipitations supérieures au maximum de Paris.
Autrement dit, il ne pleut pas beaucoup à Paris, mais il pleut souvent !

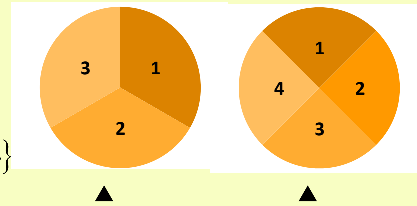
2. Nice : $\overline{x}\approx 72,3$ $\sigma\approx 35,9$

Paris : $\overline{x}\approx 52$ $\sigma\approx 5,5$

Chapitre 25 : VOCABULAIRE DES PROBABILITES

I Expérience aléatoire

Pour jouer à une loterie, on lance successivement deux roues bien équilibrées : lorsque les roues s'arrêtent de tourner, on lit le nombre de deux chiffres obtenu (ici 23).



Cette situation est une **expérience aléatoire** car :

- on connaît l'ensemble de toutes les **issues** possibles.
  C'est l'**univers** $\Omega = \{11; 12; 13; 14; 21; 22; 23; 24; 31; 32; 33; 34\}$
- avant de lancer les roues, on ne connaît pas l'issue du jeu.

Un **évènement** est une partie de l'univers ; par exemple : l'évènement C : « le nombre obtenu est un nombre premier » est $C = \{11; 13; 23; 31\}$.

Rappel : *un entier naturel (différent de 1) est dit premier s'il possède exactement deux diviseurs, 1 et lui-même.*

Propriété : pour tout évènement E, $0 \leq P(E) \leq 1$

II Calculs élémentaires

Réalisation d'un évènement	Probabilité correspondante
A : « le nombre est multiple de 3 » A = {12 ; 21 ; 24 ; 33}	$P(A) = \dfrac{\text{nombre d'issues dans A}}{\text{nombre d'issues dans } \Omega} = \dfrac{4}{12} \approx 0,33$
B : « le nombre est inférieur à 25 » B = {11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 21 ; 22 ; 23 ; 24}	$P(B) = \dfrac{8}{12} \approx 0,67$
$\overline{A}$ est l'**évènement contraire** de A : c'est le complémentaire de A dans **Ω**. $\overline{A}$ = {11 ; 13 ; 14 ; 22 ; 23 ; 31 ; 32 ; 34}	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \dfrac{8}{12} \approx 0,67$
$A \cap B$: « le nombre est multiple de 3 **et** inférieur à 25 » est l'**évènement intersection** de A et de B. $A \cap B$ = {12 ; 21 ; 24}	$P(\text{A et B}) = P(A \cap B) = \dfrac{3}{12} = 0,25$
A et C n'ont aucun élément commun donc $A \cap C = \varnothing$: A et C sont appelés **évènements incompatibles** ou **disjoints**.	$P(\text{A et C}) = P(A \cap C) = 0$
$A \cup B$: « le nombre est multiple de 3 **ou** inférieur à 25 » est **l'évènement réunion** de A et de B. $A \cup B = \{11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 21 ; 22 ; 23 ; 24 ; 33\}$	On obtient la formule de la réunion : $P(\text{A ou B}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(A \cup B) = \dfrac{4}{12} + \dfrac{8}{12} - \dfrac{3}{12} = \dfrac{9}{12} = 0,75$
$A \cup C = \{11 ; 12 ; 13 ; 21 ; 23 ; 24 ; 31 ; 33\}$	Dans le cas d'évènements disjoints, comme A et C, $P(A \cup C) = P(A) + P(C)$ $P(A \cup C) = \dfrac{4}{12} + \dfrac{4}{12} = \dfrac{8}{12} \approx 0,67$

EXERCICES (Chapitre 25)

Exercice 1

Les Grecs et les Romains utilisaient comme dés des osselets d'agneaux, appelés astragales. Ces astragales pouvaient retomber sur une de leurs quatre faces numérotées, ici : 1, 2, 3, 4.
p_i désignant la probabilité qu'un astragale retombe sur la face n°i, on constate que :
$p_1 = p_2$, $p_3 = p_4$ et $p_1 = 4p_3$.

Lorsqu'on jette un astragale, calculer les probabilités d'obtention de chaque face.

Exercice 2

Une usine d'horlogerie fabrique des montres. Certaines peuvent présenter un défaut x ou un défaut y.
Des études statistiques menées sur 10 000 montres ont donné les renseignements suivants :

- 10 % des montres présentent le défaut x ;
- parmi les montres présentant le défaut x, 12 % présentent le défaut y ;
- parmi les montres ne présentant pas le défaut x, 5 % présentent le défaut y .

1. Compléter le tableau suivant :

nombre de montres :	présentant le défaut x	ne présentant pas le défaut x	Total
présentant le défaut y			
ne présentant pas le défaut y			
Total			10 000

2. On choisit au hasard une de ces 10 000 montres, chacune de ces montres ayant la même probabilité d'être choisie.

Déterminer la probabilité de l'évènement A : " la montre choisie présente le défaut x " ;
Déterminer la probabilité de l'évènement B : " la montre choisie présente le défaut y " ;
Définir par une phrase l'évènement $A \cap B$. Déterminer la probabilité de $A \cap B$.
Déterminer la probabilité d'obtenir une montre sans défaut.
Définir par une phrase l'évènement $A \cup B$. Déterminer la probabilité de $A \cup B$.

Exercice 3

Deux véhicules M et N se présentent en même temps à une aire de péage comportant 3 voies de passage ouvertes, numérotées 1, 2, 3 de gauche à droite. On suppose qu'ils s'engagent au hasard et dans des voies différentes.

1. Représenter toutes les répartitions possibles de ces deux véhicules dans les trois voies.

2. On admet que toutes les répartitions ont la même probabilité de se réaliser.
Calculer les probabilités des évènements suivants :

A : « les véhicules sont côte à côte » ;
B : « les deux véhicules ne sont pas côte à côte » ;
C : « la voie n° 3 reste libre » ;
D : « le véhicule M est à gauche du véhicule N ».

INDICATIONS (Chapitre 25)

Exercice 1

On rappelle que la somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1, soit $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$.

Exercice 2

1. Si 10% des montres présentent le défaut *x*, alors le total des montres présentant ce défaut est de 1000. 12% de ces 1000 montres présentent aussi le défaut *y*, donc présentent à la fois les défauts *x* et *y*.

Exercice 3

1. On pourra raisonner d'abord sur le véhicule M : sur quelles voies peut-il s'engager ?

Une fois que M est engagé sur une voie, où N peut-il aller ?

Il reste à dénombrer les couples (i, j) où i désigne la voie prise par M et j celle prise par N.

CORRIGES (Chapitre 25)

Exercice 1

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 1 \Leftrightarrow 4p_3 + 4p_3 + p_3 + p_3 = 1$ soit : $10\,p_3 = 1$ d'où $p_3 = \frac{1}{10}$

Donc : $p_1 = \frac{4}{10}$; $p_2 = \frac{4}{10}$; $p_3 = \frac{1}{10}$ et $p_4 = \frac{1}{10}$

Exercice 2

1.

nombre de montres	présentant le défaut x	ne présentant pas le défaut x	Total
présentant le défaut y	120	450	570
ne présentant pas le défaut y	880	8550	9430
Total	1000	9000	10 000

2. $P\,(\text{A}) = 0,1$; $P\,(\text{B}) = \frac{570}{10000} = 0{,}057$.

$\text{A} \cap \text{B}$: " la montre choisie présente les deux défauts " ; $P(\text{A} \cap \text{B}) = 0{,}012$.

P (« montre sans défaut ») = 0,855.
On peut noter $P(\overline{\text{A}} \cap \overline{\text{B}}) = 0{,}855$.

$\text{A} \cup \text{B}$: " la montre choisie présente au moins un défaut " ; $P(\text{A} \cup \text{B}) = 0{,}145$.
On remarquera que $P(\text{A} \cup \text{B})$ peut se calculer de plusieurs manières :

- en lisant le tableau précédent : il y a $(120 + 880 + 450)$ issues pour l'évènement $\text{A} \cup \text{B}$.
- en utilisant la formule de la réunion : $P(\text{A} \cup \text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{A} \cap \text{B})$
- en utilisant le complémentaire de $\text{A} \cup \text{B}$ dans l'univers des montres :
  $P(\text{A} \cup \text{B}) = 1 - P(\overline{\text{A}} \cap \overline{\text{B}})$

Exercice 3

Véhicule M	Véhicule N
1	2
1	3
2	1
2	3
3	1
3	2

1. Il y a six répartitions possibles, c'est-à-dire six issues dans l'univers des répartitions.

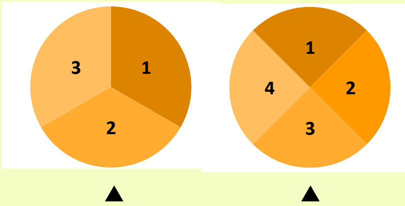
2. $P(\text{A}) = \frac{4}{6} \approx 0{,}67$; $P(\text{B}) = P(\overline{\text{A}}) = \frac{2}{6} \approx 0{,}33$;

$P(\text{C}) = \frac{2}{6} \approx 0{,}33$; $P(\text{D}) = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

Chapitre 26 : PROBABILITES CONDITIONNELLES

I Représenter une situation de probabilité

Dans ce paragraphe, on reprend l'expérience du chapitre 25 (lancer de deux roues) : on rappelle que l'**univers** est $\Omega=\{11;12;13;14;21;22;23;24;31;32;33;34\}$.

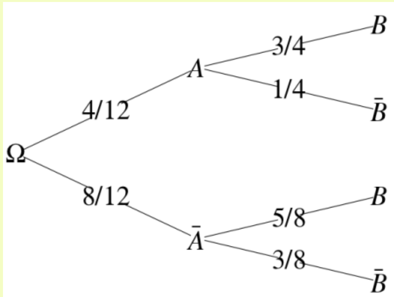


On s'intéresse aux évènements A : « le nombre est multiple de 3 » et B : « le nombre est inférieur à 25 ».

On peut schématiser cette situation de deux manières :

1. Par un **arbre pondéré** :

On écrit les évènements au bout des branches puis on remplit les branches avec les probabilités. Si A est réalisé (le nombre est multiple de 3), on n'a plus que 4 issues possibles et parmi ces 4 issues, 3 issues réalisent B (le nombre est inférieur à 25) : $\frac{3}{4}$ est une **probabilité conditionnelle**.



On note : $P_A(B)=\frac{3}{4}$

A est le nouvel univers

et on lit : «la probabilité de B sachant que A est réalisé vaut $\frac{3}{4}$ »

- En suivant le chemin **A et B**, on obtient **la formule de l'intersection** : $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$

  $P(A\cap B)=\frac{4}{12}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{12}=0,25$

- **A ou B** correspond à la réunion de trois évènements incompatibles $A\cap B$, $A\cap\overline{B}$ et $\overline{A}\cap B$, donc à trois chemins :

  $P(A\cup B)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)=\frac{4}{12}\times\frac{3}{4}+\frac{4}{12}\times\frac{1}{4}+\frac{8}{12}\times\frac{5}{8}=0,75$

  Plus simplement : $P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-\frac{8}{12}\times\frac{3}{8}=0,75$

2. Par un **tableau** :

On remplit les cases avec le nombre d'issues correspondant à chaque évènement.

$$P(B)=\frac{\text{nombre d'issues qui réalisent B}}{\text{nombre d'issues dans l'univers }\Omega}=\frac{8}{12}$$

$$P_A(B)=\frac{\text{nombre d'issues qui réalisent B et A}}{\text{nombre d'issues dans l'univers A}}=\frac{3}{4}$$

	A	$\overline{A}$	
B	3	5	8
$\overline{B}$	1	3	4
	4	8	12

issues dans B

issues dans A

issues dans l'univers Ω

Attention à ne pas confondre les deux notions précédentes.

$P(A\cap B)=\frac{\text{nombre d'issues qui réalisent B et A}}{\text{nombre d'issues dans l'univers }\Omega}=\frac{3}{12}$ et $P(A\cup B)=\frac{3+5+1}{12}=0,75$

II Evènements indépendants

E et F sont deux évènements indépendants si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur la réalisation ou non de l'autre. Autrement dit : E et F sont indépendants $\Leftrightarrow$ $P_E(F)=P(F)$

On remarque que, dans ce cas, la formule de l'intersection s'écrit : $P(E\cap F)=P(E)\times P(F)$.
Dans l'expérience précédente, A et B sont deux évènements dépendants car $P_A(B)=P(B)$.

EXERCICES (Chapitre 26)

Exercice 1

On dispose de dix cartons. Sur chacun figure un nombre différent. Cinq de ces nombres sont positifs, les cinq autres sont négatifs.

1. On tire successivement sans remise deux cartons. Quelle est la probabilité p_1 d'obtenir deux nombres dont le produit est négatif ?

2. On tire successivement avec remise deux cartons. Quelle est la probabilité p_2 d'obtenir deux nombres dont le produit est négatif ?

Exercice 2

Deux cents fumeurs ont suivi dans un centre d'aide au sevrage tabagique, soit le traitement T1, soit le traitement T2. Au bout de quelques mois, ces 200 personnes subissent un test permettant d'évaluer leur nouvelle dépendance tabagique. Les résultats sont les suivants :

- Parmi les 80 personnes ayant suivi le traitement T1, 27 sont non dépendantes (ND).
- Parmi les personnes ayant suivi le traitement T2, 33 sont non dépendantes et 47 sont faiblement dépendantes (D).
- 28 % des 200 personnes sont fortement dépendantes (FD).

1. Modéliser ce problème dans un tableau.

2. On choisit au hasard une personne traitée pour un sevrage tabagique.
Déterminer la probabilité que cette personne :

a) ait suivi le traitement T2.
b) soit faiblement dépendante.
c) ait suivi le traitement T2 et soit fortement dépendante.

3. On considère que le traitement le plus efficace est celui pour lequel le pourcentage de personnes non dépendantes, parmi les personnes ayant suivi le traitement, est le plus élevé. Quel est le traitement le plus efficace ?

Exercice 3

Une étude statistique a permis d'établir que 20% des ménages français ont un chien, 30% ont un chat et 5% ont à la fois un chien et un chat.
Un ménage étant choisi au hasard, on considère les événements :
D : « le ménage a un chien » et C : « le ménage a un chat ».
Les événements D et C sont-ils indépendants ?

Exercice 4 *Les probabilités pour s'amuser*

1. Monsieur et Madame Dupond et leurs trois enfants Julien, Cécile et Léa tirent les rois. La galette contenant une seule fève a été partagée en cinq parts égales : chacun tire une part au hasard. Léa peut être reine si elle obtient elle-même la fève ou si un roi la choisit pour reine. Monsieur Dupond couronnera sa reine en tirant au hasard un carton dans un chapeau contenant les noms des trois femmes. Julien jouera à pile ou face pour savoir qui de ses deux sœurs sera reine.

Quelle probabilité p_1 Léa a-t-elle d'être reine ?

2. Grand-père a trois bérets et une casquette. Quand il descend acheter sa baguette, il saisit un couvre-chef au hasard. Sachant qu'il prend une fois sur trois une baguette moulée et que, deux fois sur cinq, il oublie de chausser ses souliers, calculer la probabilité p_2 de le voir remonter en charentaises, un béret sur la tête et une baguette non moulée sous le bras.

INDICATIONS (Chapitre 26)

Exercice 1

On peut modéliser ce problème par un arbre pondéré à deux niveaux de branches : le premier niveau correspond au tirage du premier carton et le deuxième au tirage du second carton..
On note ⊕ (respectivement ⊖) l'évènement : « le carton tiré est un nombre positif (respectivement négatif) ».

1. On tire au hasard un premier carton parmi les dix cartons disponibles. Le second tirage étant sans remise, on tire au hasard un deuxième carton parmi les **neuf** cartons restants disponibles.

Exercice 2

1.

	T1	T2	total
ND			
D			
FD			
total			200

3. On doit comparer $P_{T1}(\text{ND})$ et $P_{T2}(\text{ND})$.

Exercice 3

Il ne faut pas confondre les deux affirmations suivantes : « un ménage n'a qu'un chien » avec « un ménage a un chien », cette dernière pouvant sous-entendre que le ménage a peut-être aussi une tortue ou…
On peut modéliser ce problème par un tableau à double entrée, en supposant que l'univers comporte 100 ménages :

	D	$\overline{\text{D}}$	total
C			
$\overline{\text{C}}$			
total			

Pour justifier l'indépendance ou la dépendance des évènements D et C, revoir le paragraphe II du cours.

Exercice 4

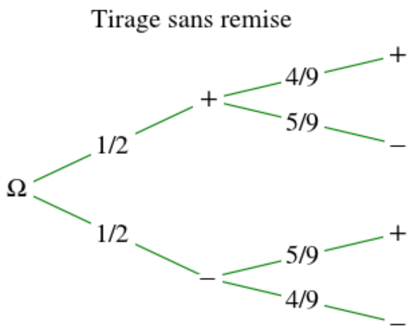
1. On peut modéliser par un arbre pondéré.

2. On écrit la formule de l'intersection des trois évènements en supposant que tous ces évènements sont indépendants.

CORRIGES (Chapitre 26)

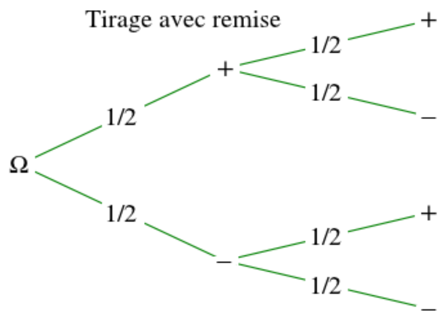
Exercice 1

1.



$$p_1 = \frac{1}{2}\times\frac{5}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$$

2.



$$p_2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Exercice 2

	T1	T2	total
ND	27	33	60
D	37	47	84
FD	16	40	56
total	80	120	200

1. Voir tableau ci-contre.

2. $P(\mathrm{T2})=\dfrac{120}{200}=0,6$; $P(\mathrm{D})=\dfrac{84}{200}=0,42$; $P(\mathrm{T2}\cap\mathrm{FD})=\dfrac{40}{200}=0,2$

3. $P_{\mathrm{T1}}(\mathrm{ND})=\dfrac{27}{80}=0,3375$; $P_{\mathrm{T2}}(\mathrm{ND})=\dfrac{33}{120}=0,275$.

Le traitement T1 est donc plus efficace.

Exercice 3

	D	$\overline{\mathrm{D}}$	total
C	5	25	30
$\overline{\mathrm{C}}$	15	55	70
total	20	80	100

$P(\mathrm{C})=\dfrac{30}{100}=0,3$ et $P_{\mathrm{D}}(\mathrm{C})=\dfrac{5}{20}=0,25$ donc $P(\mathrm{C})\neq P_{\mathrm{D}}(\mathrm{C})$

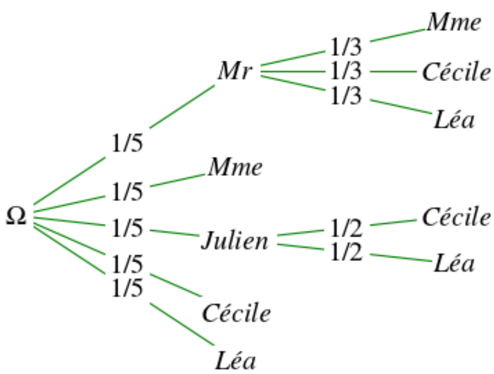
ou : $P(\mathrm{D})=\dfrac{20}{100}=\dfrac{1}{5}$ et $P_{\mathrm{C}}(\mathrm{D})=\dfrac{5}{30}=\dfrac{1}{6}$ donc $P(\mathrm{D})\neq P_{\mathrm{C}}(\mathrm{D})$

ou : $P(\mathrm{C}\cap\mathrm{D})\neq P(\mathrm{C})\times P(\mathrm{D})$

Les évènements D et C sont donc dépendants.

Exercice 4

1.



$$p_1=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}\;+\;\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\;+\;\frac{1}{5}\;=\;\frac{1}{15}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=\frac{2}{30}+\frac{3}{30}+\frac{6}{30}=\frac{11}{30}$$

2. $p_2=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{5}$

Chapitre 27 : VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES

I Loi de probabilité

On reprend le jeu de loterie décrit au chapitre 25.
On rappelle que l'univers est $\Omega = \{11; 12; 13; 14; 21; 22; 23; 24; 31; 32; 33; 34\}$

Pour participer à cette loterie, on mise 2 € puis on lance successivement les deux roues :

- si la somme des deux chiffres est inférieure ou égale à 3, on a perdu ;
- si cette somme est égale à 7, on reçoit 15 € ;
- sinon, on reçoit 3 €.

A chacune des issues de l'univers, on associe le gain final X (positif ou négatif, car on tient compte de la mise de départ de 2 €).

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction appelée **variable aléatoire** ; c'est une variable **discrète** car elle ne prend que des valeurs ponctuelles, isolées les unes des autres.
X prend ici les valeurs : -2 ; 13 ou 1.

Pour chaque valeur x_i prise par X, on peut calculer $P(X = x_i)$, ce qui définit la **loi de probabilité** de X :

$$P(X=-2) = P(\{11;12;21\}) = \frac{3}{12}; \quad P(X=13) = P(\{34\}) = \frac{1}{12};$$

$$P(X=1) = P(\{13; 14; 22; 23; 24; 31; 32; 33\}) = \frac{8}{12}.$$

On peut résumer cette loi dans un tableau :

Valeurs x_i prises par le gain X	-2	1	13
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{1}{12}$

II Espérance mathématique

L'**espérance** d'une variable aléatoire X, notée $E(X)$, est définie par : $E(X) = \sum x_i \times p_i$

$E(X)$ est la **moyenne des valeurs x_i** prises par X, pondérées par leurs probabilités p_i.

Pour le jeu de loterie, $E(X) = -2 \times \frac{3}{12} + 1 \times \frac{8}{12} + 13 \times \frac{1}{12} = 1,25.$

En répétant un grand nombre de fois ce jeu, on peut espérer un gain moyen de 1,25 € par partie jouée.

III Variance et écart -type

La **variance** d'une variable aléatoire X, notée $V(X)$, est définie par : $V(X) = \sum (x_i - E(X))^2 \times p_i$

L'**écart type** de la variable X, notée $\sigma(X)$, est défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

$\sigma(X)$ mesure la **dispersion moyenne** des valeurs x_i autour de l'espérance mathématique $E(X)$.

Pour le jeu de loterie, $V(X) = (-2-1,25)^2 \times \frac{3}{12} + (1-1,25)^2 \times \frac{8}{12} + (13-1,25)^2 \times \frac{1}{12} \approx 14.$

et $\sigma(X) = \sqrt{14} \approx 3,7.$

En répétant un grand nombre de fois ce jeu, on peut espérer un gain moyen de 1,25 € par partie, avec une dispersion moyenne de 3,7 € autour de ce gain moyen.

EXERCICES (Chapitre 27)

Exercice 1

Une entreprise fabrique des machines pour l'industrie textile. Soit X la variable aléatoire qui, à un mois choisi au hasard, associe le nombre de machines vendues pendant cette période. Une étude statistique permet d'admettre que la loi de probabilité de la variable X est donnée par le tableau suivant :

Nombre x_i de machines vendues	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{15}$

Calculer l'espérance mathématique de X. Quel sens a-t-elle dans le contexte de ce problème?

Exercice 2

Un joueur lance trois pièces de monnaie parfaitement équilibrées.
Il gagne 6 € s'il obtient trois faces, 3 € s'il obtient deux faces exactement, 1 € s'il obtient une face exactement, mais perd 10 € s'il n'obtient que des piles.
On désigne par G la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain, positif ou négatif, en euros.

1. Etablir le tableau de la loi de probabilité de G.

2. Déterminer la probabilité de gagner strictement moins de 3€, de gagner au moins 1€.

3. Calculer l'espérance mathématique de G puis la variance et l'écart-type de G.

4. **a)** Expliquer pourquoi le jeu est favorable au joueur.
b) Quelle somme le joueur devrait-il perdre lorsqu'il n'obtient que des piles pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 3

Un chef d'entreprise envisage de placer une somme d'un million d'euros. Deux opérations lui sont proposées :

- La première a une probabilité de réussite de 0,6 et permettra de doubler la somme engagée.
  Si cette opération est manquée, le chef d'entreprise ne récupérera que la moitié de la somme engagée.
- La seconde a une probabilité de réussite de 0,8 et permettra de récupérer une fois et demie la somme engagée.
  Si cette opération est manquée, le chef d'entreprise ne récupérera que 40 % de la somme engagée.

Soit X la variable aléatoire qui, à tout placement d'un million d'euros selon la première opération financière, associe le gain (positif ou négatif) ainsi obtenu.

Soit Y la variable aléatoire qui, à tout placement d'un million d'euros selon la seconde opération financière, associe le gain (positif ou négatif) ainsi obtenu.

1. Donner le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer son espérance $E(X)$.

2. Donner le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire Y et calculer son espérance $E(Y)$.

3. Quelle est l'opération de placement la plus avantageuse quand on la répète un grand nombre de fois ?

INDICATIONS (Chapitre 27)

Exercice 1

Voir paragraphe II du cours.

Exercice 2

1. Ecrire tous les triplets décrivant les issues du jeu consistant à lancer trois pièces de monnaie (que l'on peut supposer de valeurs différentes).
   Par exemple (P, P, F) résume l'issue : on obtient pile avec la première pièce, pile avec la seconde et face avec la troisième.
   Chacun de ces triplets est associé à un gain dépendant du nombre de faces obtenus.

2. Utiliser la loi de probabilité de la question précédente.

3. **a)** Un jeu est dit équitable si l'espérance est nulle. Dans ce cas, aucun des adversaires n'est favorisé.

   b) On pourra noter x la perte du joueur lorsqu'il n'obtient que des piles puis résoudre une équation.

Exercice 3

Une lecture attentive du texte s'impose.
Si le chef d'entreprise place un million d'euros dans une opération bancaire et réussit à doubler la somme engagée, son gain n'est pas de deux millions d'euros mais de un million d'euros !!

CORRIGES (Chapitre 27)

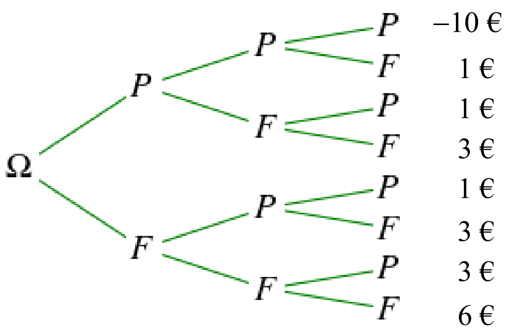
Exercice 1

$$E(X)=0\times\frac{1}{60}+1\times\frac{1}{20}+2\times\frac{1}{12}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{15}+5\times\frac{1}{15}+6\times\frac{1}{60}+7\times\frac{1}{12}+8\times\frac{1}{15}=4,25$$

L'entreprise peut espérer vendre en moyenne 4,25 machines par mois. Autrement dit, en un an, elle peut espérer vendre 51 machines.

Exercice 2

1. L'univers des tirages de trois pièces comporte 8 issues :



Valeurs g du gain G	-10	1	3	6
$P(G=g)$	0,125	0,375	0,375	0,125

2. $P(G<3)=P(G=-10)+P(G=1)=0,5$

$P(G\geq 1)=1-P(G=-10)=0,875$

3. $E(G)=1;\quad V(G)=19,75;\ \sigma(G)\approx 4,4$

4. **a)** Le jeu est favorable au joueur car l'espérance de gain est positive : la moyenne théorique de gain par partie est 1€.

b) Le jeu est équitable si $E(G)=0$.
En notant x la perte du joueur lorsqu'il n'obtient que des piles, il suffit de résoudre l'équation :
$x\times 0,125+1\times 0,375+3\times 0,375+6\times 0,125=0$
On obtient $x=-18$. Lorsqu'il n'obtient que des piles, le joueur devrait perdre 18 €.

Exercice 3

Valeurs x du gain X	1 000 000	-500000
$P(X=x)$	0,6	0,4

$E(X)=400000$ euros

Valeurs y du gain Y	500 000	-600000
$P(Y=y)$	0,8	0,2

$E(Y)=280000$ euros

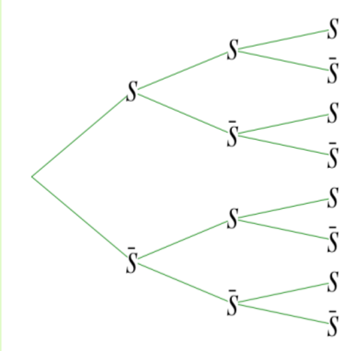
Le premier placement sera plus avantageux à longue échéance, c'est-à-dire si ce type de placement est renouvelé de nombreuses fois.

Chapitre 28 : LOI BINOMIALE

I Répétition d'épreuves indépendantes à deux issues

On reprend l'expérience du chapitre 25 pour un autre jeu : on décide qu'on réalise un succès (évènement noté S) lorque le nombre obtenu a deux chiffres identiques, un échec (évènement noté $\bar{S}$) dans le cas contraire.

$$P(S) = P(\{11 ; 22 ; 33\}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = p \text{ et } P(\bar{S}) = 1 - p = \frac{3}{4}.$$



On répète trois fois ce jeu en replaçant les roues dans la même position initiale avant chaque lancer : les trois épreuves sont alors **identiques et indépendantes**. On modélise cette situation par un arbre pondéré.

On considère la variable aléatoire X qui prend pour valeurs le nombre k de succès au bout des trois épreuves. Sa loi de probabilité est définie par le tableau suivant :

k	0	1	2	3
Chemins sur l'arbre	$\bar{S}\bar{S}\bar{S}$	$S\bar{S}\bar{S}$ ou $\bar{S}S\bar{S}$ ou $\bar{S}\bar{S}S$	$SS\bar{S}$ ou $S\bar{S}S$ ou $\bar{S}SS$	SSS
$P(X = k)$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3$	$\left(\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times 3$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)\times 3$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$

II Loi binomiale

1. On répète n fois de manière indépendante la même épreuve à deux issues : succès (de probabilité p) ou échec (de probabilité $1-p$).
Le nombre de chemins sur l'arbre pondéré qui conduisent à k succès au bout des n épreuves est appelé **combinaison de *k* parmi *n***. Il se note $\binom{n}{k}$ et peut être déterminé avec une calculatrice (voir indications).

2. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre total de succès; sa loi de probabilité est appelée **loi binomiale, de paramètres *n* (nombre de répétitions) et *p* (probabilité de succès d'une épreuve).**
On note : X suit $\mathcal{B}(n, p)$

Pout tout entier k compris entre 0 et n, la probabilité de réaliser k succès est :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Exemple : dans le paragraphe précédent, X suit $\mathcal{B}\left(3, \frac{1}{4}\right)$.

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{3-1} = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{3-0} = 1 \times 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

L'espérance mathématique de X est : $E(X) = n \times p$
La variance de X est : $V(X) = n \times p \times (1-p)$
L'écart-type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Exemple : $E(X) = 3 \times \frac{1}{4} = 0,75$; $V(X) = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 0,5625$ et $\sigma(X) = \sqrt{0,5625} = 0,75$.

EXERCICES (Chapitre 28)

Exercice 1

Un document imprimé comporte 20 erreurs typographiques. Lors de la relecture, une erreur a 75% de chance d'être détectée par un correcteur. On suppose qu'il y a indépendance entre la détection des différentes erreurs. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre d'erreurs détectées par un correcteur.

1. X suit une loi binomiale de paramètres n et p.
a) Dans cet exercice, qu'appelle-t-on succès ? échec ? Que vaut p ?
b) Combien d'épreuves identiques un correcteur répète-t-il ?
c) Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X ?

2. Calculer la probabilité que, lors de la relecture, un correcteur détecte :
a) exactement 12 erreurs.
b) au moins 18 erreurs.
c) moins de 18 erreurs.

3. Calculer le nombre moyen d'erreurs que l'on peut espérer détecter après relecture du document.

Exercice 2

Dans le bureau d'étude d'une entreprise comportant neuf ordinateurs, douze informaticiens passent, indépendamment les uns des autres et au hasard de la semaine, $\frac{2}{3}$ de leur temps au bureau et $\frac{1}{3}$ à la maison en télétravail.
Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre d'informaticiens présents au bureau au même instant.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser les paramètres de cette loi.

2. Quelle est la probabilité que tous les informaticiens se trouvent au bureau en même temps ?

3. Quelle est la probabilité qu'à un instant donné, tous les informaticiens présents au bureau puissent disposer d'un ordinateur ?

4. Calculer l'espérance mathématique de X. Quelle signification ce nombre a-t-il dans le contexte du problème ?

Exercice 3

Le sang de tout être humain possède une caractéristique appelée facteur Rhésus, pouvant revêtir deux formes notées Rh^+ et Rh^-.
En France, pour chacun des deux sexes, la probabilité qu'une personne soit Rh^+ est 0,85 ; la probabilité pour qu'elle soit Rh^- est 0,15. Chez les couples où l'homme est Rh^+ et la femme Rh^-, il se produit dans 8% des naissances des accidents qui nécessitent un traitement spécial du nouveau-né.

1. a) Calculer la probabilité d'avoir un couple où l'homme est Rh^+ et la femme Rh^-.
b) Déduire la probabilité p qu'un nouveau-né, de parents français dont on ne connaît pas le facteur Rhésus, doive subir ce traitement.

2. Dans une maternité, il y a vingt naissances par semaine. X est la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre hebdomadaire de nouveau-nés nécessitant le traitement.
a) Déterminer la probabilité qu'au cours d'une semaine prise au hasard, k nouveau-nés aient à subir le traitement.
b) Quelle est la probabilité qu'il se présente plus d'un cas à traiter durant la même semaine ?

INDICATIONS (Chapitre 28)

Exercice 1

1. Une épreuve consiste à la détection, ou pas, d'une erreur dans le document par le relecteur.
Le document comporte 20 erreurs.

2. **a)** Il s'agit d'utiliser le cours : $P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}$ avec $k=12$.

Méthode : comment déterminer le nombre $\binom{n}{k}$ avec une calculatrice.

Par exemple, pour faire afficher $\binom{12}{10}$,

- avec une **Casio** : Aller dans le menu **RUN**, appuyer sur **OPTN** puis choisir l'option **PROB**.
  Taper : 12 **nCr** 10.
- avec une **TI** : Taper 12.
  Appuyer sur **math** puis choisir dans le menu **PRB** l'option **Combinaison**.
  Taper 10 puis appuyer sur **entrer**.

La calculatrice affiche 66.

b) Si un correcteur détecte au moins 18 erreurs, il détecte 18, 19 ou 20 erreurs.
On calcule $P(X\geq 18)$, c'est-à-dire la somme de trois probabilités (pour $X=18$, $X=19$ et $X=20$).

c) Si un correcteur détecte moins de18 erreurs, il détecte 17, 16, 15,….2, 1 ou 0 erreurs.
On calcule $P(X<18)=P(X\leq 17)$. Ce calcul étant très long, on s'intéresse plutôt à la probabilité de l'évènement contraire $P(\overline{\text{A}})$.

On rappelle que $P(\text{A})=1-P(\overline{\text{A}})$.

3. Le nombre moyen d'erreurs détectées est l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Exercice 2

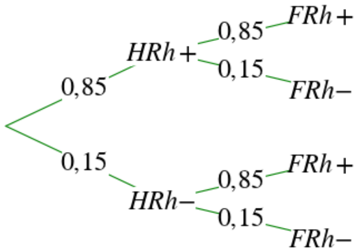
1. Cette situation peut être modélisée par une répétition d'épreuves indépendantes à deux issues.
Qu'appelle-t-on ici un succès ?

2. Il s'agit de calculer $P(X=12)$.

3. Il y a X informaticiens présents au bureau et 9 ordinateurs dans l'entreprise.

Exercice 3

1. **a)** En notant H l'évènement : « être un homme » et F l'évènement : « être une femme », on pourra s'aider de l'arbre pondéré ci-dessous :



b) 8% des nouveau-nés des couples (HRh^+, FRh^-) nécessitent le traitement.

2. X suit une loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=0,01$.

CORRIGES (Chapitre 28)

Exercice 1

1. **a)** Pour chaque erreur typographique, on n'observe que deux issues :
- succès : un relecteur détecte l'erreur avec une probabilité $p = 0,75$.
- échec : un relecteur ne détecte pas l'erreur avec une probabilité $1 - p = 0,25$.

b) Comme le document comporte 20 erreurs, cette épreuve est répétée 20 fois. On a donc $n = 20$.

c) X peut prendre pour valeur tout **entier** k allant de 0 à 20.

2. **a)** $P(X = 12) = \binom{20}{12} \times 0,75^{12} \times 0,25^{8} \approx 0,06$

b) $P(X \geq 18) = P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20)$

$$= \binom{20}{18} \times 0,75^{18} \times 0,25^{2} + \binom{20}{19} \times 0,75^{19} \times 0,25 + \binom{20}{20} \times 0,75^{20} \times 0,25^{0} \approx 0,09$$

Un relecteur détecte au moins 18 erreurs avec une probabilité de 9%.

c) $P(X < 18) = P(X \leq 17) = 1 - P(X \geq 18) \approx 1 - 0,09 = 0,91$.

Un relecteur détecte moins de 18 erreurs avec une probabilité de 91%.

3. $E(X) = n \times p = 20 \times 0,75 = 15$.

Un relecteur détecte en moyenne 15 erreurs sur un document en comportant 20.

Exercice 2

1. Pour chaque informaticien, l'épreuve aléatoire observée n'a que deux issues : cet informaticien est présent au bureau (avec une probabilité p = 2/3) ou il est en télétravail à la maison.
Cette épreuve est répétée 12 fois, les douze épreuves étant indépendantes.
La variable aléatoire X, qui prend pour valeur le nombre d'informaticiens présents au bureau au même instant, suit donc la loi binomiale de paramètres n = 12 et p = 2/3.

2. $P(X = 12) = \left(\frac{2}{3}\right)^{12} \approx 0,008$.

3. $P(X \leq 9) = 1 - [P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12)]$

$$= 1 - \left[\binom{12}{10} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{2} + \binom{12}{11} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \times \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^{12}\right] \approx 0,82$$

A un instant donné, tous les informaticiens présents au bureau peuvent disposer d'un ordinateur avec une probabilité de 82%.

4. $E(X) = 12 \times \frac{2}{3} = 8$.

En moyenne, on peut espérer que huit informaticiens soient présents au même instant au bureau.

Exercice 3

1. **a)** En notant H l'évènement : « être un homme » et F l'évènement : « être une femme », la probabilité d'avoir un couple où l'homme est Rh^{+} et la femme Rh^{-} est :

$P(HRh^{+} \cap FRh^{-}) = 0,85 \times 0,15 \approx 0,13$.

b) 8% des nouveau-nés des couples (HRh^{+}, FRh^{-}) nécessitent le traitement donc

$p = 0,08 \times 0,13 = 0,0102$.

2. Si X est la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre hebdomadaire de nouveau-nés nécessitant le traitement, X suit la loi binomiale de paramètres n = 20 et p = 0,01.

a) $P(X = k) = \binom{20}{k} \times 0,01^{k} \times 0,99^{20-k}$.

b) $P(X > 1) = P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 1) + P(X = 0)] = 1 - \left[20 \times 0,01 \times 0,99^{19} + 0,99^{20}\right] \approx 0,017$.

La probabilité qu'il se présente plus d'un nouveau-né à traiter durant la même semaine est faible.

Chapitre 29 : VARIABLES ALEATOIRES CONTINUES

I Du discret au continu

Deux étudiants, Romain et Chloé, jouent au jeu suivant :
Romain choisit au hasard un nombre dans l'intervalle [0 ; 1[et Chloé doit deviner ce nombre.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur tout réel dans [0 ; 1[.

☺ Si Romain précise que ce nombre a au plus deux décimales, Chloé va le deviner avec une probabilité de réussite de $\frac{1}{100}$ car X est ici une variable aléatoire discrète prenant 100 valeurs possibles, de 0,00 à 0,99.
☹ Si Romain ne précise rien, deviner ce nombre est pour Chloé un évènement impossible car il y a une infinité de réels dans l'intervalle [0 ; 1[, donc **une infinité de valeurs prises par la variable aléatoire X**.

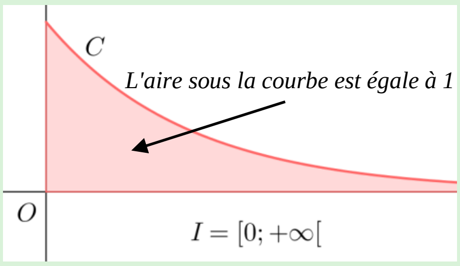
$X : [0;1[\to \mathbb{R}$ est une **variable aléatoire continue**. Dans ce cas, la probabilité de chaque valeur de X est nulle. On calcule alors la probabilité d'un intervalle de valeurs.

Par exemple, $P(0,50 \leq X \leq 0,75) = \frac{1}{4}$.

II Loi continue

1. Fonction densité

Pour établir la loi de probabilité d'une variable aléatoire continue X, prenant ses valeurs dans un intervalle I, on doit définir une fonction f, appelée **densité**, vérifiant les propriétés suivantes :

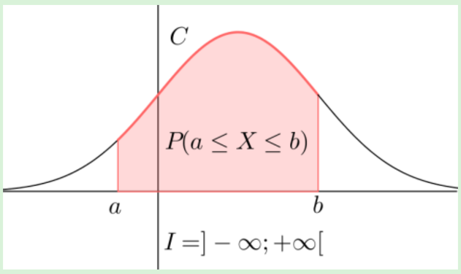


- f est définie, continue et positive sur l'intervalle I.
- l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe C_f et par l'axe des abscisses est égale à 1 :

$$\int_I f(x)dx = 1$$

2. Probabilité d'un évènement

Soit X une variable aléatoire continue, prenant ses valeurs dans un intervalle I, de densité f.
On considère deux réels a et b de I avec $a < b$.
La probabilité de l'évènement « $X \in [a\ ;\ b]$ » est définie comme l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$:



$$P(X \in [a\ ;\ b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

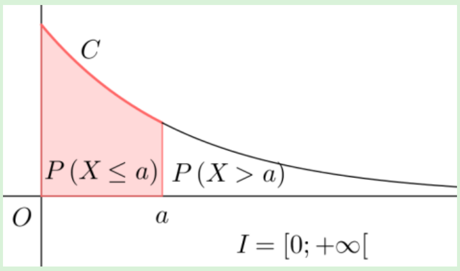
Conséquences :

- Si k est un réel de l'intervalle I,

$$P(X = k) = P(k \leq X \leq k) = \int_k^k f(x)dx = 0\ :$$

la probabilité de l'évènement « $X = k$ » est nulle.
On déduit :

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b)$$
$$= P(a < X \leq b) = P(a < X < b).$$



- $P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$

EXERCICES (Chapitre 29)

Exercice 1 *loi uniforme*

Olivier vient tous les matins entre 7h30 et 8h45 chez Karine prendre un café. Il ne vient jamais en dehors de la plage horaire indiquée et il peut arriver à tout instant avec les mêmes chances.
La variable aléatoire X : « heure d'arrivée d'Olivier chez Karine » prend ses valeurs dans l'intervalle [7,50 ; 8,75].

X suit une loi, dite uniforme, de densité f définie sur [7,50 ; 8,75] par $f(x) = \dfrac{1}{8,75-7,50} = \dfrac{1}{1,25}$.

1. Montrer que si a et b sont deux réels de l'intervalle [7,50 ; 8,75], $P(a \leq X \leq b) = \dfrac{b-a}{1,25}$.
2. En déduire la probabilité qu'Olivier sonne chez Karine :
   a) entre 7h 45 et 8h15.
   b) après 8h.
   c) à 8h15 très exactement.

Exercice 2

Le temps d'accomplissement (en secondes) d'une certaine action mécanique est un phénomène aléatoire.
Soit T la variable aléatoire qui, à chaque action mécanique, associe son temps d'accomplissement.
La loi physique suivie par celle-ci suggère que la fonction de densité de T est définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}t\right) & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

1. Montrer que, si $a \in [0;2]$, $\int_0^a f(t)\,dt = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}a\right)$.
2. En déduire la probabilité que le temps d'accomplissement dépasse 1,6 s.

Exercice 3 *loi exponentielle*

Soit T la variable aléatoire mesurant la durée de bon fonctionnement (en jours) d'un équipement électronique fabriqué en grande série.

T suit une loi, dite exponentielle, de densité f définie sur [0 ; + ∞[par : $f(t) = 0,002e^{-0,002t}$

1. Montrer que si $a \geq 0$, $\int_0^a f(t)\,dt = 1 - e^{-0,002a}$.
2. Quelle est la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un équipement soit inférieure à 1000 jours ?
3. Quelle est la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un équipement soit supérieure à 400 jours ?

Exercice 4

Soit X la variable aléatoire qui, à une année prise au hasard, fait correspondre la hauteur maximale annuelle de l'Oise au pont d'Auvers (en mètres).

X suit une loi, *dite de Rayleigh*, de densité f définie sur [0 ; + ∞[+∞[par : $f(t) = 0,44te^{-0,22t^2}$.

1. Montrer que si $a \geq 0$, $\int_0^a f(t)\,dt = 1 - e^{-0,22a^2}$.
2. Quelle est la probabilité que la hauteur de cette rivière dépasse 3,80 m (ce qui correspond à une crue exceptionnelle) ?

INDICATIONS (Chapitre 29)

Exercice 1

1. Utiliser la définition du cours.
2. **a)** 7h45 correspond à 7,75 h en système décimal.

   b) L'heure d'arrivée d'Olivier chez Karine ne dépasse pas 8h45.

Exercice 2

1. Sur [0 ; 2], f est de la forme $u'\cos u$.
2. On rappelle que pour tout réel a positif, $P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - \int_0^a f(t)\,dt$.

Exercice 3

1. Sur $[0;+\infty[$, f est, au signe près, de la forme $u'e^u$.

Exercice 4

1. Sur $[0;+\infty[$, f est, au signe près, de la forme $u'e^u$.

CORRIGES (Chapitre 29)

Exercice 1

1. $P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{1,25}\,dx = \left[\frac{1}{1,25}x\right]_a^b = \frac{b}{1,25} - \frac{a}{1,25} = \frac{b-a}{1,25}$.

2. **a)** $P(7,75 \le X \le 8,25) = \frac{8,25-7,75}{1,25} = \frac{0,5}{1,25} = 0,40$.

Il y a 40% de chance qu'Olivier sonne chez Karine entre 7h 45 et 8h15.

b) $P(8 \le X \le 8,75) = \frac{0,75}{1,25} = 0,60$.

Il y a 60% de chance qu'Olivier sonne chez Karine après 8h.

c) $P(X = 8,25) = 0$.

La probabilité qu'Olivier sonne chez Karine à 8h15 **très exactement** est nulle.

Exercice 2

1. $\int_0^a f(t)\,dt = \int_0^a \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)dt = \left[\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right]_0^a = \sin\left(\frac{\pi}{4}a\right) - \sin(0) = \sin\left(\frac{\pi}{4}a\right)$.

2. $P(T > 1,6) = 1 - P(T \le 1,6) = 1 - \int_0^{1,6} f(t)\,dt = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{4}\times 1,6\right) \approx 0,05$.

La probabilité que le temps d'accomplissement dépasse 1,6 s est d'environ 5%.

Exercice 3

1. $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b 0,002\, e^{-0,002t}\,dt = \left[-e^{-0,002t}\right]_0^a = -e^{-0,002a} - (-e^0) = -e^{-0,002a} + 1$.

2. $P(T < 1000) = \int_0^{1000} f(t)\,dt = 1 - e^{-0,002\times 1000} \approx 0,86$.

La probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un équipement soit inférieure à 1000 jours est de 86%.

3. $P(T > 400) = 1 - P(T \le 400) = 1 - \int_0^{400} f(t)\,dt = 1 - \left(1 - e^{-0,002\times 400}\right) \approx 0,45$.

La probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un équipement soit supérieure à 400 jours est de 45%.

Exercice 4

1. $\int_0^a f(t)\,dt = \int_0^a 0,44t \times e^{-0,22t^2}\,dt = \left[-e^{-0,22t^2}\right]_0^a = -e^{-0,22a^2} - \left(-e^0\right) = -e^{-0,22a^2} + 1$.

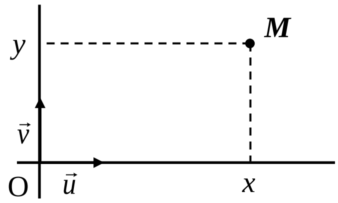
2. $P(X > 3,80) = 1 - P(X \le 3,80) = 1 - \int_0^{3,80} f(t)\,dt = 1 - (1 - e^{-0,22\times 3,80^2}) \approx 0,04$.

La probabilité que la hauteur de cette rivière dépasse 3,80 mètres est de 4%, ce qui en fait un évènement rare.

Chapitre 30 : NOMBRES COMPLEXES

I Du repérage dans le plan aux nombres complexes

Tout point M du plan peut être repéré par ses coordonnées **cartésiennes** $(x;y)$ ou **polaires** $[r;\theta]$.
On décide de faciliter ce repérage en utilisant un nombre unique z, appelé **nombre complexe**, s'écrivant sous deux formes possibles, à l'aide d'un nouveau nombre **non réel** noté i.

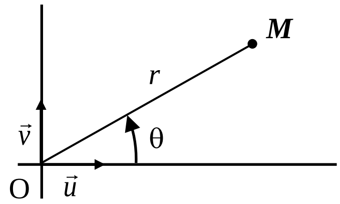


M est connu par ses coordonnées cartésiennes

z est défini par son écriture **algébrique**

$$\boxed{z = x + i\,y}$$

L'abscisse x est la **partie réelle** de z
L'ordonnée y est la **partie imaginaire** de z



M est connu par ses coordonnées polaires

z est défini par son écriture **exponentielle**

$$\boxed{z = r\,e^{i\theta}}$$

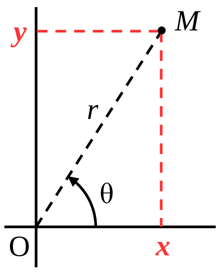
r est le **module** de z : r est la distance OM
θ est un **argument** de z : θ est une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$

M est **l'image** de z et z s'appelle **l'affixe** de M

II Passage d'une écriture à l'autre

On connaît r et θ.
On cherche x et y.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}}$$



Exemple : $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\quad (r = 2 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{3})$

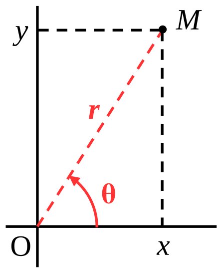
$x = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\times\frac{1}{2} = 1$

$y = 2\sin\frac{\pi}{3} = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

d'où : $\quad z = 1 + i\sqrt{3}$

On connaît x et y.
On cherche r et θ.

$$\boxed{\begin{gathered} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \frac{x}{r} \ \text{ et } \ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{gathered}}$$



Exemple : $z = 1 + i$ $\quad (x = 1 \text{ et } y = 1)$

$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{4}$

d'où : $\quad z = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

III Calculs avec les nombres complexes

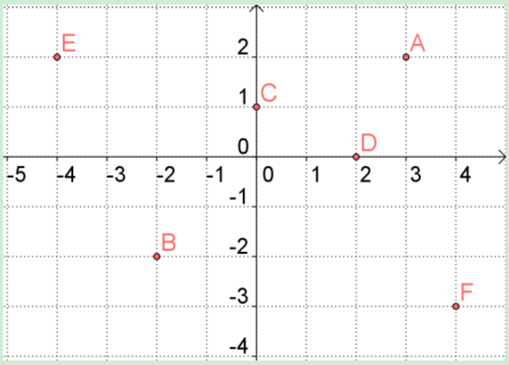
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.
Les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ (addition, soustraction, multiplication) sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$ avec la condition $\quad i^2 = -1$

EXERCICES (Chapitre 30)

Exercice 1

Déterminer graphiquement les coordonnées cartésiennes des points A, B, C, D, E et F représentés ci-contre.

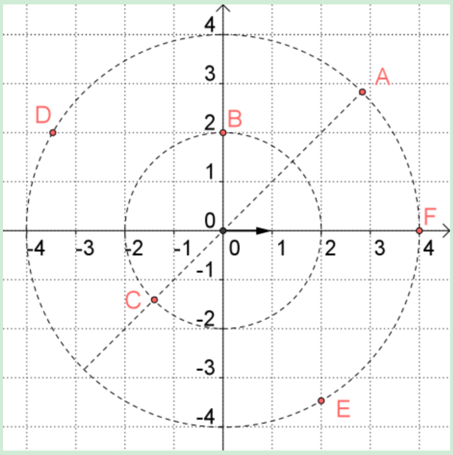
En déduire les affixes de ces points sous forme algébrique.



Exercice 2

Déterminer graphiquement les coordonnées polaires des points A, B, C, D, E et F représentés ci-contre.

En déduire les affixes de ces points sous forme exponentielle.



Exercice 3

1. Placer dans le plan complexe les points A, B, C, D et E dont les affixes respectives sont :

$$z_1 = 2+3i \;;\; z_2 = -3i \;;\; z_3 = 1-i \;;\; z_4 = -4+2i \;;\; z_5 = 2$$

2. Placer dans le plan complexe les points F, G, H, I et J dont les affixes respectives sont :

$$z_6 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \;;\; z_7 = e^{i\frac{\pi}{3}} \;;\; z_8 = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \;;\; z_9 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \;;\; z_{10} = \frac{1}{2}e^{i\pi}$$

Exercice 4

1. Déterminer la partie réelle x et la partie imaginaire y des nombres suivants, puis leur écriture algébrique :

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \;;\; z_2 = 4\,e^{i\frac{\pi}{6}} \;;\; z_3 = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \;;\; z_4 = e^{i\pi}$$

2. Déterminer le module r et un argument θ des nombres suivants, puis leur écriture exponentielle :

$$z_1 = 1-i \;;\; z_2 = -1+i\sqrt{3} \;;\; z_3 = -2i$$

Exercice 5

Soit $z = 2+3i$ et $z' = 1-i$. Calculer : $3z$; $-z'$; $z+z'$; $z-z'$; $2z-5z'$; zz' ; z^2.

INDICATIONS (Chapitre 30)

Exercice 1

Par lecture graphique, le point A a pour coordonnées $(3\,;2)$.
Donc l'affixe de A est le nombre complexe de partie réelle $x=3$ et de partie imaginaire $y=2$: $z_A=3+2i$

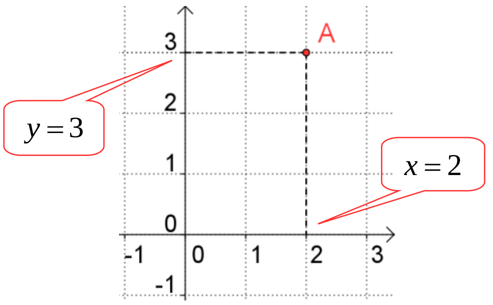
Exercice 2

Le point A est sur le cercle de centre O et de rayon 4 donc $OA=4$ et une mesure de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{OA}\right)$ est $\dfrac{\pi}{4}$.

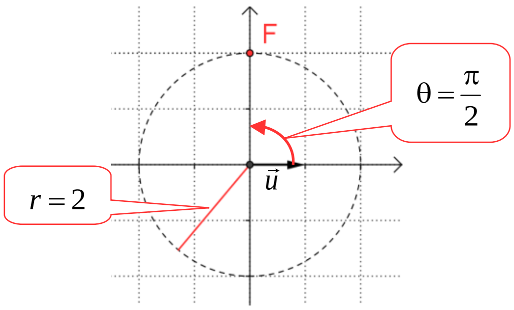
Le point A a donc pour coordonnées polaires : $r=4$ et $\theta=\dfrac{\pi}{4}$: l'affixe de A est $z_A=4\times e^{i\frac{\pi}{4}}$

Exercice 3

1. L'image de $z_1=2+3i$ est le point A de coordonnées $(2\,;3)$.



2. L'image de $z_6=2e^{i\frac{\pi}{2}}$ est le point F de coordonnées polaires $r=2$ et $\theta=\dfrac{\pi}{2}$.
F est sur le cercle de centre O et de rayon 2, et une mesure de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{OF}\right)$ est $\dfrac{\pi}{2}$.



Exercice 4

1. $z_1=2e^{i\frac{\pi}{2}}$: on calcule *x* et *y*.

$$r=2 \text{ et } \theta=\frac{\pi}{2} \text{ d'où } \begin{cases} x=r\cos\theta=2\times\cos\dfrac{\pi}{2}=0 \\ y=r\sin\theta=2\times\sin\dfrac{\pi}{2}=2 \end{cases} \quad \text{donc } z_1=0+2i \quad \text{soit } z_1=2i$$

2. $z_1=1-i$: $x=1$ et $y=-1$. On calcule *r* et θ :

$$r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l} \cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \text{donc } \theta=-\frac{\pi}{4} \quad \text{d'où } z=\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

Exercice 5

$3z=3\times(2+3i)=6+9i$
$z+z'=(2+3i)+(1-i)=2+3i+1-i=3+2i$
$z^2=(2+3i)^2=2^2+2\times6i+(3i)^2=4+12i+9i^2=4+12i-9=-5+12i$

CORRIGES (Chapitre 30)

Exercice 1

$A(3;2)$, $B(-2;-2)$, $C(0;1)$, $D(2;0)$, $E(-4;2)$, $F(4;-3)$

$z_A = 3+2i$, $z_B = -2-2i$, $z_C = i$, $z_D = 2$, $z_E = -4+2i$, $z_F = 4-3i$

Exercice 2

Pour A : $r=4$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$ donc $z_A = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

Pour B : $r=2$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ donc $z_B = 2\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

Pour C : $r=2$ et $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ donc $z_C = 2\,e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$

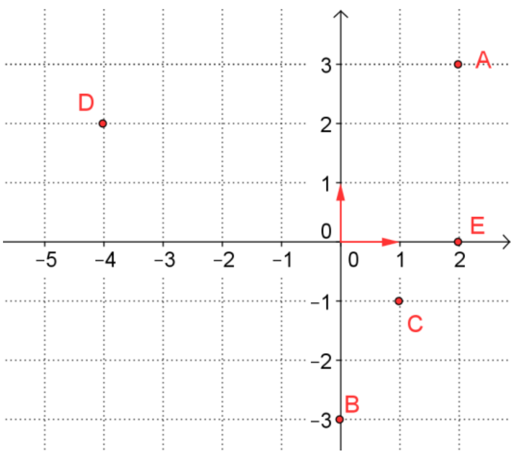
Pour D : $r=4$ et $\theta = \frac{5\pi}{6}$ donc $z_D = 4\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Pour E : $r=4$ et $\theta = -\frac{\pi}{3}$ donc $z_E = 4\,e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

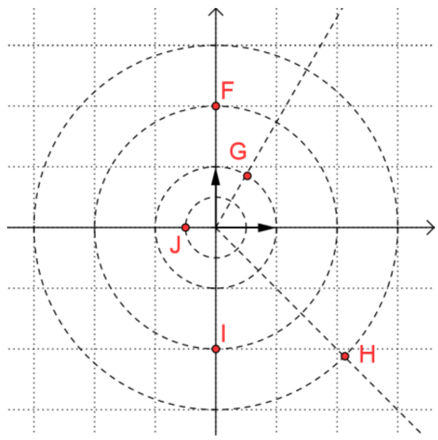
Pour F : $r=4$ et $\theta = 0$ donc $z_F = 4\,e^{i0}$

Exercice 3

1. A, B, C, D et E sont les images respectives des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4 et z_5.



2. F, G, H, I et J sont les images respectives des nombres complexes z_6, z_7, z_8, z_9 et z_{10}



Exercice 4

1. $z_1 = 2i$, $z_2 = 2\sqrt{3}+2\text{i}$, $z_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $z_4 = -1$.

2. $z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$, $z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $z_3 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$.

Exercice 5

$3z = 6+9i$, $-z' = -1+i$, $z+z' = 3+2i$, $z-z' = 1+4i$, $2z-5z' = -1+11i$

$zz' = 5+i$, $z^2 = -5+12i$.

AUTEURS :	Jacques CHAZAL Annette CORPART Nelly LASSALLE Gisèle PROVOST
TITRE :	Le B.A. BA des maths pour le post-bac.
EDITEUR :	IREM de Clermont-Ferrand.
DATE :	Mai 2014.
PUBLIC CONCERNE :	Lycéens et futurs étudiants dans les domaines scientifiques.
RESUME :	L'objectif est de permettre une appropriation des notions essentielles de mathématique, en vue d'une préparation à des études scientifiques.
MOTS CLES :	Pré requis post-bac - Calcul numérique - Calcul algébrique - Fonctions - Dérivation - Limites - Calcul intégral Trigonométrie - Statistiques - Probabilités.
FORMAT A4 :	124 pages.