



Université Blaise Pascal

IREM de CLERMONT-FERRAND



Le B.A. BA des maths avant une STS

Juin 2010

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques - Complexe scientifique des Cézeaux,
63177 AUBIERE cedex - Tél : 04.73.40.70.98 - Fax : 04.73.40.70.78 - irem@univ-bpclermont.fr

Cette brochure est le fruit des travaux d'un groupe de
l'IREM de Clermont-Ferrand.

Sont à l'origine de son élaboration :

Annette CORPART

Clara LAMARTINE

Nelly LASSALLE

Gisèle PROVOST

Avec la collaboration de :

Jacques CHAZAL

Thierry DURAND

Nadine PIALOUX

Le B.A. BA des maths avant une STS

Avant propos	2
Le mot des inspecteurs	2
Mode d'emploi	3
1. Ensembles de nombres	4
2. Calcul numérique	8
Puissances, racines carrées, fractions. Priorité des opérations.	
3. Calcul algébrique	12
Développements, factorisations, fractions rationnelles.	
4. Droites du plan	16
Equation réduite d'une droite, lecture et tracé.	
5. Equations du premier degré	20
6. Signe de $ax + b$	24
7. Polynômes du second degré	28
8. Fonctions	32
Lecture de courbes et de tableaux.	
9. Fonctions de référence	36
Tableaux de variation et courbes des fonctions de référence.	
10. Trigonométrie	40
Utilisation du cercle trigonométrique, angles remarquables.	
11. Nombres complexes	44
Différentes écritures d'un nombre complexe. Somme et produit de nombres complexes sous forme algébrique.	
12. Fonction dérivée	48
Dérivées des fonctions usuelles. Opérations sur les fonctions dérivées.	
13. Nombre dérivé et tangente	52
14. Etude des variations d'une fonction	56
Lien entre signe de la dérivée et variation d'une fonction.	

Avant propos

Cette brochure est le fruit des travaux d'un groupe de l'IREM de Clermont-Ferrand.

Les enseignants de Section de Technicien Supérieur sont confrontés à un nombre toujours plus important d'étudiants en possession d'un baccalauréat professionnel et, par conséquent, à une hétérogénéité toujours plus grande des connaissances de leur public.

Face à ce constat, un groupe de travail s'est constitué pour concevoir un outil destiné à faire travailler les futurs étudiants en autonomie avant leur entrée en STS. Dans un premier temps, ce groupe a sélectionné les parties du programme de lycée essentielles pour une bonne poursuite d'étude. Puis des collègues de lycée professionnel ont rejoint l'équipe afin d'aider à cadrer les travaux dans la continuité des programmes de ce cycle.

Ensemble, nous avons élaboré un document comportant un mode d'emploi suivi de 14 chapitres, chacun d'eux composé de 4 pages : cours, exercices, indications, corrigés.

Il est souhaitable qu'un futur étudiant désirant travailler avec ce document puisse en disposer dès son projet d'entrée en STS.

Nous avons utilisé tout au long de cet outil un langage mathématique volontairement imagé pour faciliter la compréhension. Dans le même esprit, les exercices sont simples mais essentiels à nos yeux pour aborder en STS industriel des notions plus complexes.

Ce document a également pour objectif de proposer aux enseignants de lycées des fiches directement utilisables en cas de remédiation ponctuelle.

Le mot des inspecteurs

Les futurs détenteurs d'un baccalauréat professionnel sont de plus en plus nombreux à désirer poursuivre leurs études et méritent d'être accompagnés dans leur projet. La plupart d'entre eux s'inscrivent en section de technicien supérieur où ils doivent être accueillis dans les meilleures conditions.

Nous remercions vivement cette équipe auvergnate de s'être engagée dans cette réflexion en proposant une brochure qui répond à cette attente.

Les chapitres traités ont été jugés indispensables pour aborder sereinement les notions plus difficiles du programme de section de technicien supérieur. Cette sélection nous paraît très pertinente.

Nous avons grandement apprécié la qualité du travail fourni par les rédacteurs de cette brochure. Nul doute qu'elle sera d'une grande utilité.

L'IREM de Clermont-Ferrand s'enrichit ainsi d'un nouvel ouvrage. En renouvelant nos remerciements, nous espérons que ses auteurs poursuivront leur investigation dans ce domaine.

Catherine TISON, IEN EG Mathématiques-Sciences

Françoise BARACHET, IA-IPR Mathématiques.

Jean-François BILGOT, IA-IPR Mathématiques

Mode d'emploi

Cette brochure a été conçue pour permettre à chaque futur étudiant de travailler en autonomie.

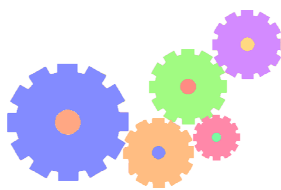
Les notions abordées sont divisées en 14 chapitres comportant chacun quatre pages :

- Le cours, synthétique et s'appuyant sur des exemples.
- Des exercices d'application simples et peu nombreux.
- Des indications pour certains exercices.
- Les corrigés de tous les exercices.

Il est recommandé de suivre l'ordre des chapitres. Par exemple, le chapitre 11 « Nombres complexes » fait appel aux notions vues dans le chapitre 10 « Trigonométrie ». De même, le chapitre 13 « Nombre dérivé et tangente » fait appel aux notions vues dans le chapitre 4 « Droites du plan ».

Pour chaque chapitre :

- Commencer par lire attentivement le cours et chercher à bien comprendre les exemples. (En moyenne une demi-heure devrait suffire).
- Ensuite, muni d'un brouillon, vérifier ses acquis en abordant la page d'exercices.
En cas de difficulté, plutôt que de regarder trop vite la page des corrigés, il est plus profitable de suivre dans l'ordre les conseils suivants :



- 1/ Relire le cours sans hésiter à revoir des chapitres antérieurs.
- 2/ Vérifier l'activation des neurones.
- 3/ Consulter les indications.

Une à deux heures, réparties dans la même journée, constituent une durée raisonnable pour l'étude complète d'un chapitre. Les 22 heures restantes pourront être consacrées à d'autres activités propices à l'aération et la réparation des neurones précédemment cités.

Chapitre 1 : ENSEMBLES DE NOMBRES

I Ensembles de nombres usuels

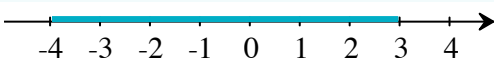
- Les nombres entiers positifs sont appelés **nombres entiers naturels**. Leur ensemble est noté $\mathbb{N}$.
Exemples : 0 ; 3 ; 125 sont des entiers naturels.
On peut écrire : $3 \in \mathbb{N}$ (le symbole $\in$ signifie « appartient à »)
- L'ensemble des **nombres entiers relatifs** (positifs et négatifs) est noté $\mathbb{Z}$.
Exemples : -2 ; -1258 ; 3 ; 0 ; 1200 sont des entiers relatifs.
 $-2 \in \mathbb{Z}$ mais $-2 \notin \mathbb{N}$ (le symbole $\notin$ signifie « n'appartient pas à »).
- L'ensemble de **tous** les nombres positifs ou négatifs est noté $\mathbb{R}$: c'est l'ensemble des **nombres réels**.
Exemples : 3 ; -27 ; $18,26$; $\frac{5}{9}$; $\sqrt{3}$; π sont des réels.

II Ecriture d'un ensemble

- L'ensemble des **entiers** compris strictement entre -4 et 3 contient -3, -2, -1, 0, 1 et 2.
On l'écrit entre accolades : $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.



- L'ensemble des **réels** compris strictement entre -4 et 3 contient une infinité de nombres.
C'est un intervalle ; on le note entre crochets : $] -4; 3[$.
 $x \in] -4; 3[$ signifie $-4 < x < 3$.



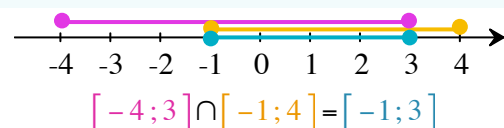
De même : $[-4; 3]$		$x \in [-4; 3]$ signifie $-4 \leq x \leq 3$
$[-4; 3[$		$x \in [-4; 3[$ signifie $-4 \leq x < 3$
$]-\infty; 3]$		$x \in]-\infty; 3]$ signifie $x \leq 3$
$]-4; +\infty[$		$x \in]-4; +\infty[$ signifie $x > -4$

Le symbole ∞ désigne l'infini. Ce n'est pas un nombre ; il ne peut pas figurer dans une inégalité.

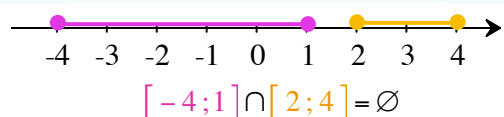
III Intersection et réunion

$\cap$ est le symbole de l'**intersection**.

- $[-4; 3] \cap [-1; 4]$ est l'ensemble des réels qui appartiennent à la fois à $[-4; 3]$ et à $[-1; 4]$.

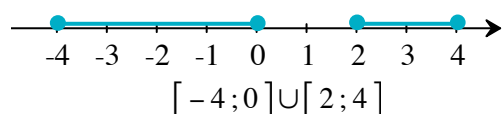


- Aucun réel n'appartient à la fois à $[-4; 1]$ et à $[2; 4]$,
 $[-4; 1] \cap [2; 4]$ est l'ensemble vide noté $\emptyset$.

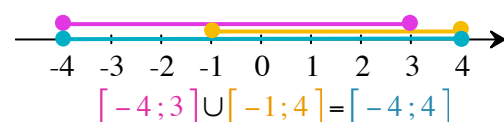


$\cup$ est le symbole de la **réunion** ; on l'utilise pour regrouper plusieurs intervalles.

- $[-4; 0] \cup [2; 4]$ est l'ensemble des réels qui appartiennent à $[-4; 0]$ ou à $[2; 4]$.



- La réunion de deux intervalles se réduit parfois à un seul intervalle.



EXERCICES (Chapitre 1)

Exercice 1

Ecrire les ensembles suivants sous forme symbolique, en utilisant soit des accolades soit des crochets.

I est l'ensemble des réels strictement compris entre 2,1 et 10,03.

J est l'ensemble des entiers naturels compris entre 2,1 et 10,03.

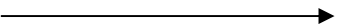
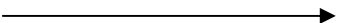
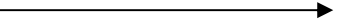
K est l'ensemble des entiers naturels pairs compris entre 2,1 et 10,03.

L est l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à $\frac{25}{8}$.

M est l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à $\frac{25}{8}$.

Exercice 2

Différentes manières de s'exprimer.
Compléter le tableau suivant.

Inégalités	Intervalle	Représentation graphique
$-2 \leq x \leq 3$		
	$x \in]-\infty; 4]$	
		
$x \geq -2$		
	$x \in]3; +\infty[$	

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, choisir la bonne réponse.
On pourra s'aider d'un schéma pour répondre.

1. On considère les intervalles $I =]1; +\infty[$ et $J =]-\infty; 3,5]$.

	A	B	C	D
$I \cap J$	$[1; 3,5]$	$] -\infty; +\infty[$	$]1; 3,5]$	$\emptyset$
$I \cup J$	$[1; 3,5]$	$] -\infty; +\infty[$	$]1; 3,5]$	$[3,5; +\infty[$

2. On considère les intervalles $I = [-\pi; \pi]$ et $J = [-3,2; 3,1]$.

	A	B	C	D
$I \cap J$	$[-3,2; 3,1]$	$[-\pi; \pi]$	$[-3,2; \pi]$	$[-\pi; 3,1]$
$I \cup J$	$[-3,2; 3,1]$	$[-\pi; \pi]$	$[-3,2; \pi]$	$[-\pi; 3,1]$

INDICATIONS (Chapitre 1)

Exercice 1

Voir le paragraphe II du cours.

I contient **tous** les nombres entre 2,1 et 10,03 : il y en a une infinité.

On écrit I en utilisant des crochets : $I =] \dots ; \dots [$

(les crochets sont ouverts car 2,1 et 10,03 ne sont pas dans I).

J contient une liste finie d'entiers.

On les écrit en utilisant des accolades et en les séparant par des points-virgules : $J = \{ \dots \}$.

Pour K se rappeler qu'un entier est pair lorsqu'il est divisible par 2.

Exercice 2

On peut s'aider en commençant par la représentation graphique.

Rappel : le symbole ∞ n'est pas un nombre ; on peut l'écrire dans un intervalle qui est une notation simplifiée du graphique mais pas dans une inégalité.

Exercice 3

- 1 On fera la différence entre crochet ouvert et crochet fermé (voir paragraphe II du cours) et entre intersection et réunion (voir paragraphe III du cours).
2. Sur le graphique, on pensera à ranger les réels $-\pi$; π ; $-3,2$ et $3,1$ dans l'ordre croissant.

CORRIGES (Chapitre 1)

Exercice 1

$$I =]2,1;10,03[$$

$$J = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$$

$$K = \{4; 6; 8; 10\}$$

$$L = \left] -\infty; \frac{25}{8} \right]$$

$$M = \{0; 1; 2; 3\} \quad \text{car } \frac{25}{8} = 3,125.$$

Exercice 2

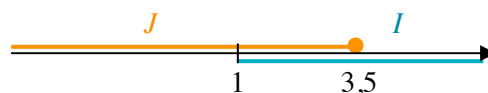
Inégalités	Intervalle	Représentation graphique
$-2 \leq x \leq 3$	$x \in [-2; 3]$	
$x \leq 4$	$x \in]-\infty; 4]$	
$-12 \leq x \leq -6$	$x \in [-12; -6]$	
$x \geq -2$	$x \in [-2; +\infty[$	
$x > 3$	$x \in]3; +\infty[$	

Exercice 3

1. $I =]1; +\infty[$ et $J =]-\infty; 3,5]$.

$I \cap J =]1; 3,5]$: réponse C.

$I \cup J =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$: réponse B.



2. $I = [-\pi; \pi]$ et $J = [-3,2; 3,1]$.

$I \cap J = [-\pi; 3,1]$: réponse D.

$I \cup J = [-3,2; \pi]$: réponse C.



Chapitre 2 : CALCUL NUMERIQUE

I Puissances d'un nombre

$$2^5 \times 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$$

On multiplie les puissances d'un même nombre en ajoutant les exposants

$$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$$

On divise les puissances d'un même nombre en soustrayant les exposants

$$(3x)^2 = 3^2 \times x^2 = 9x^2$$

Une puissance d'un produit est le produit des puissances

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Une puissance d'un quotient est le quotient des puissances

$$2^3 + 2^2 = 12 \text{ et } 2^5 = 32$$

Attention ! aucune propriété intéressante avec somme et différence

II Racine carrée

$$\sqrt{9} = 3$$

$$(\sqrt{5})^2 = 5$$

Simplifier dès que possible un nombre comportant une racine

$$\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{4} \times \sqrt{9} = 2 \times 3 = 6$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

La racine d'un produit est égale au produit des racines

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

La racine d'un quotient est égale au quotient des racines

$$\sqrt{4+9} = \sqrt{13} \text{ et } \sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$$

Aucune propriété intéressante avec somme et différence.

Dans l'écriture $\sqrt{4+9}$, les parenthèses sont sous-entendues : $\sqrt{4+9} = \sqrt{(4+9)}$

III Fractions

Simplifier une fraction

$$\frac{6}{4} = \frac{2 \times 3}{2 \times 2} = \frac{3}{2}$$

6 et 4 sont des multiples de 2

Multiplier et diviser des fractions

$$\frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{4 \times 1}{5 \times 3} = \frac{4}{15}$$

On multiplie numérateurs et dénominateurs entre eux

$$2 \times \frac{5}{3} = \frac{2}{1} \times \frac{5}{3} = \frac{2 \times 5}{1 \times 3} = \frac{10}{3}$$

On multiplie le numérateur par 2

$$\frac{2}{5} \div 7 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{2 \times 1}{5 \times 7} = \frac{2}{35}$$

Diviser par 7, c'est multiplier par $\frac{1}{7}$

Ajouter et soustraire des fractions

$$3 + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{30}{10} + \frac{5}{10} - \frac{4}{10} = \frac{31}{10}$$

On réduit au même dénominateur

IV Priorités dans les calculs

En l'absence de parenthèses, on calcule dans l'ordre : les puissances, les produits puis les sommes.

$$1 + 2 \times 3 - 4 = 1 + 6 - 4 = 3$$

$$2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$$

$$-3^2 = -9$$

Les parenthèses sont prioritaires.

$$(1 + 2) \times 3 - 4 = 3 \times 3 - 4 = 9 - 4 = 5$$

$$(2 \times 3)^2 = 6^2 = 36$$

$$(-3)^2 = 9$$

EXERCICES (Chapitre 2)

Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes, choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s) :

	A	B	C
1. -9 est égal à :	$1 - 2 \times 3^2$	$(1 - 2) \times 3^2$	$1 - (2 \times 3)^2$
2. 9 est égal à :	$-2^2 + 5$	$(-2)^2 + 5$	$(-2 + 5)^2$
3. -50 est égal à :	-2×5^2	$(-2 \times 5)^2$	$(-2)^2 \times 5$
4. $\frac{3}{8}$ est égal à :	$\frac{3}{4} \times 2$	$\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} \div 2$
5. $\frac{6}{5}$ est égal à :	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{5}$	$\frac{3}{5} \div \frac{1}{2}$	$\frac{4}{2} + \frac{2}{3}$
6. $\sqrt{9+36}$ est égal à :	$\sqrt{45}$	$3+6$	$3\sqrt{5}$
7. $2\sqrt{6}$ est égal à :	$5\sqrt{6} - 3\sqrt{6}$	$\sqrt{24}$	$\sqrt{12}$
8. 12 est égal à :	$2\sqrt{3}^2$	$2^2\sqrt{3}$	$(2\sqrt{3})^2$
9. 7 est égal à :	$-2^2 + \sqrt{3}^2$	$(-2)^2 + \sqrt{3}^2$	$(-2)^2 + \sqrt{3}^2$
10. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est égal à :	$\frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 2

Calculer $A(x) = 2x^2 - 3x + 1$ pour les valeurs de x suivantes :

a) $x = 1$

b) $x = 0$

c) $x = -2$

d) $x = \sqrt{2}$

e) $x = \frac{1}{2}$

INDICATIONS (Chapitre 2)

Exercice 1

1, 2 et 3. Les parenthèses sont prioritaires.

4. Penser à $2 = \frac{2}{1}$.

5. Diviser par $\frac{1}{2}$, c'est multiplier par 2.

6. Effectuer la somme sous la racine (la racine d'une somme n'est pas la somme des racines).

7. La racine d'un produit est le produit des racines.

8 et 9. Attention aux priorités.

En l'absence de parenthèses, un exposant ne s'applique qu'au réel immédiatement à sa gauche :

$$2\sqrt{3}^2 = 2 \times (\sqrt{3})^2 \quad \text{et} \quad (2\sqrt{3})^2 = 2^2 \times (\sqrt{3})^2$$

10. Ne pas confondre inverse et opposé !

Exercice 2

a) Pour calculer $A(1)$, on remplace x par 1 dans $A(x)$.

$$A(x) = 2x^2 - 3x + 1 \text{ donc } A(1) = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1 = 2 - 3 + 1 = 0.$$

c) $A(-2) = 2 \times (-2)^2 - 3 \times (-2)$

On remarquera les parenthèses, indispensables ici car $-2^2 \neq (-2)^2$.

CORRIGES (Chapitre 2)

Exercice 1

- | | |
|--------------------|---------------------|
| 1. réponse B | 6. réponses A et C |
| 2. réponses B et C | 7. réponses A et B |
| 3. réponse A | 8. réponse C |
| 4. réponse C | 9. réponses B et C |
| 5. réponse B | 10. réponses A et C |

Exercice 2

- a) $A(1) = 0$
- b) $A(0) = 2 \times 0^2 - 3 \times 0 + 1 = 1$
- c) $A(-2) = 2 \times (-2)^2 - 3 \times (-2) + 1 = 8 + 6 + 1 = 15$
- d) $A(\sqrt{2}) = 2 \times (\sqrt{2})^2 - 3 \times (\sqrt{2}) + 1 = 4 - 3\sqrt{2} + 1 = 5 - 3\sqrt{2}$
- e) $A\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 2 \times \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{2}{2} = \frac{1-3+2}{2} = \frac{0}{2} = 0$

Chapitre 3 : CALCUL ALGEBRIQUE

Dans une expression algébrique, certains nombres sont représentés par des lettres. On ne peut donc pas la calculer mais on peut la transformer (réduire, développer, factoriser) pour mieux l'exploiter.

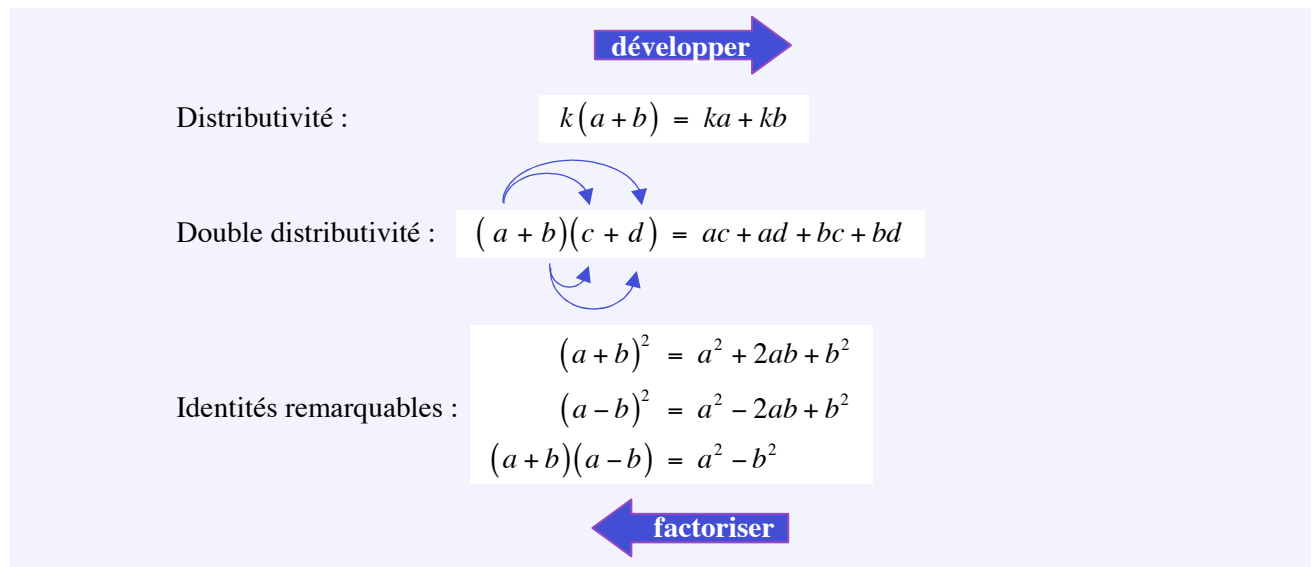
Rappel : Une somme est formée de *termes* ; un produit est formé de *facteurs* ; un quotient est formé d'un *numérateur* et d'un *dénominateur*.

I Rôle des parenthèses

Dans l'écriture $f(x) = 2x(x+3) - x(3 \times 2x) - (3x-5)$, les parenthèses n'ont pas toutes le même rôle.

- 1 *Parenthèses de fonction* : « f de x » signifiant que l'expression dépend de la variable x .
On ne peut jamais enlever de telles parenthèses.
- 2 *Parenthèses de multiplication d'une somme par un nombre* signifiant : $2x$ "fois" la somme $x+3$.
Pour les enlever, on distribue : $2x^2 + 6x$.
- 3 *Parenthèses d'association d'un produit* signifiant : $-x$ "fois" 3 "fois" $2x$; pas de distribution à faire :
 $-x \times 3 \times 2x = -x \times 6x = -6x^2$.
- 4 *Parenthèses d'association d'une somme* signifiant simplement un regroupement ; on peut les enlever, à condition de changer les signes des termes si les parenthèses sont précédées de « $-$ » : $-3x + 5$

II Propriétés



III Fractions rationnelles

Ce sont des quotients où le dénominateur est une expression de la variable x . On les multiplie ou ajoute ou divise avec les règles habituelles :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(ad) + (cb)}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

EXERCICES (Chapitre 3)

Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes, choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s) :

	A	B	C	D
1. Le produit de b par la somme de a et c est égal à :	$ba + c$	$b(a + c)$	$a + cb$	$ba + bc$
2. La somme de a et du produit de b par c est égale à :	$a + bc$	$ab + c$	$(a + b)c$	$ac + b$
3. Le carré de la somme de x et de 3 est :	$9x^2$	$x^2 + 9$	$x^2 + 3$	$(x + 3)^2$
4. La différence du carré de x et de l'inverse de x est :	$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$	$x - \frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x} - x^2$	$x^2 - \frac{1}{x}$
5. La somme du carré de -3 et de l'opposé de x est :	$(-3)^2 + (-x)$	$9 - x$	$-9 - x$	$-3^2 - x$
6. $x^2 - 9$ peut être factorisé en :	$(x - 3)^2$	$(x - 1)(x + 9)$	$(x - 3)(x + 3)$	$(x - 9)(x + 9)$
7. $a^2 - 2ab$ peut être factorisé en :	$a^2(1 - 2b)$	$a(a - 2b)$	$a(2 - 2b)$	$(a - 2)(a - b)$
8. $(u - v)(u + v)$ est une expression factorisée de :	$u^2 - v^2$	$v^2 - u^2$	$u^2 + v^2$	$u^2 + v^2 - 2uv$
9. $ac + ad + bc + bd$ est le développement de :	$(a + b)(c + d)$	$(a + d)(b + c)$	$(b + a)(d + c)$	$(a + c)(b + d)$
10. $1 - a(b - 1)$ est égal à :	$(1 - a)(b - 1)$	$1 - ab + a$	$1 - ab - a$	$1 + a(1 - b)$

Exercice 2

Pour chacune des expressions suivantes, dire si elle se présente sous la forme d'une somme ou d'un produit (préciser le nombre de termes ou de facteurs) puis développer et réduire.

$$A(x) = (x - 4)(x + 3) + 6$$

$$E(x) = 2 - x(x + 1)$$

$$B(x) = 4x(5 - 3x)$$

$$F(x) = (5x + 1)(2x + 3) - (3x - 1)(x + 2)$$

$$C(x) = 2x - 3(x + 2)$$

$$G(x) = (2x + 3)^2$$

$$D(x) = (2 - x)(x + 1)$$

Exercice 3

Ecrire sous forme d'un seul quotient les expressions suivantes puis développer et réduire le numérateur.

$$A(x) = \frac{2x + 3}{x + 1} - 4 \quad \text{si } x \neq -1$$

$$C(x) = \frac{x^2}{x - 1} - x \quad \text{si } x \neq 1$$

$$B(x) = \frac{2}{x + 3} + \frac{1 - 3x}{x + 2} \quad \text{si } x \neq -3 \text{ et } x \neq -2$$

$$D(x) = 2x + 1 + \frac{7}{x - 2} \quad \text{si } x \neq 2$$

INDICATIONS (Chapitre 3)

Exercice 1

1. et 2. Penser au rôle des parenthèses.
3. Le carré d'une somme n'est pas égal à la somme de deux carrés.
4. L'inverse de x est $\frac{1}{x}$.
5. Le carré de -3 est $(-3)^2 = (-3) \times (-3)$ alors que $-3^2 = -3 \times 3$ est l'opposé du carré de 3.
6. et 8. Penser aux identités remarquables.
7. Chercher un facteur commun.
9. Développer chaque réponse proposée.
10. Respecter la priorité des opérations.

Exercice 2

$C(x)$: on rappelle que $a - b = a + (-b)$; une différence est aussi une somme.

$D(x)$ et $E(x)$: comparer ces expressions et réfléchir à la présence ou non des parenthèses.

$F(x)$: attention au signe « $-$ » devant les parenthèses du second terme.

$G(x)$: on rappelle que $a^2 = a \times a$.

Exercice 3

Pour ajouter deux fractions rationnelles, on les écrit avec un dénominateur commun qui est souvent le produit des deux dénominateurs (voir cours III) sans oublier que :

- $a = \frac{a}{1}$
- les parenthèses autour du numérateur et du dénominateur sont sous-entendues, par exemple :

$$\frac{2x+3}{x+1} = \frac{(2x+3)}{(x+1)}$$

- $-\frac{a}{b} = \frac{-(a)}{b}$

CORRIGES (Chapitre 3)

Exercice 1

- réponses **B** et **D** (forme développée)
- réponse **A**
- réponse **D**
- réponse **D**
- réponses **A** et **B** (après calcul)
- réponse **C**
- réponse **B**
- réponse **A**
- réponses **A** et **C**
- réponses **B** et **D** car $1 - a(b - 1) = 1 - ab + a = 1 + a - ab = 1 + a(1 - b)$

Exercice 2

$A(x)$ est une somme de deux termes : $(x - 4)(x + 3)$ et 6, $A(x) = x^2 + 3x - 4x - 12 + 6 = x^2 - x - 6$.

$B(x)$ est un produit de deux facteurs : $4x$ et $(5 - 3x)$, $B(x) = 20x - 12x^2$.

$C(x)$ est une somme de deux termes : $2x$ et $-3(x + 2)$, $C(x) = 2x - 3x - 6 = -x - 6$.

$D(x)$ est un produit de deux facteurs : $(2 - x)$ et $(x + 1)$, $D(x) = 2x + 2 - x^2 - x = -x^2 + x + 2$.

$E(x)$ est une somme de deux termes : 2 et $-x(x + 1)$, $E(x) = 2 - x^2 - x = -x^2 - x + 2$

$F(x)$ est une somme de deux termes : $(5x + 1)(2x + 3)$ et $-(3x - 1)(x + 2)$,

$$F(x) = (10x^2 + 15x + 2x + 3) - (3x^2 + 6x - x - 2) = 10x^2 + 15x + 2x + 3 - 3x^2 - 6x + x + 2 = 7x^2 + 12x + 5.$$

$G(x)$ est un produit de deux facteurs : $(2x + 3)$ et $(2x + 3)$, $G(x) = 4x^2 + 12x + 9$

Exercice 3

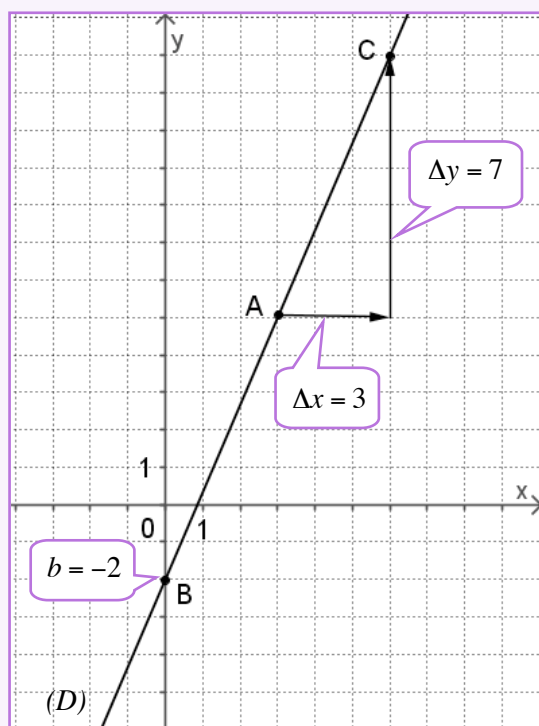
$$A(x) = \frac{(2x + 3) - 4(x + 1)}{x + 1} = \frac{2x + 3 - 4x - 4}{x + 1} = \frac{-2x - 1}{x + 1}$$

$$B(x) = \frac{2(x + 2) + (1 - 3x)(x + 3)}{(x + 3)(x + 2)} = \frac{2x + 4 + x + 3 - 3x^2 - 9x}{(x + 3)(x + 2)} = \frac{-3x^2 - 6x + 7}{(x + 3)(x + 2)}$$

$$C(x) = \frac{x^2 - x(x - 1)}{x - 1} = \frac{x^2 - x^2 + x}{x - 1} = \frac{x}{x - 1}$$

$$D(x) = \frac{(2x + 1)(x - 2) + 7}{x - 2} = \frac{2x^2 - 4x + x - 2 + 7}{x - 2} = \frac{2x^2 - 3x + 5}{x - 2}$$

Chapitre 4 : DROITES DU PLAN



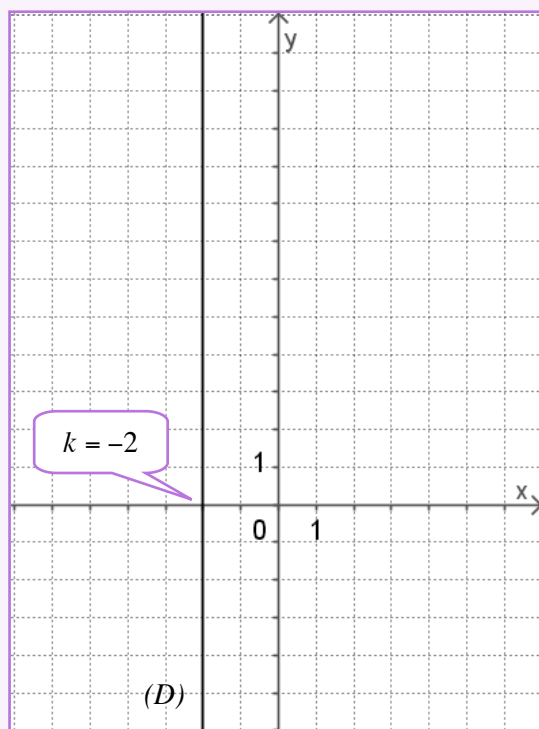
Toute droite (D) , non parallèle à l'axe des ordonnées, a pour équation réduite :

$$y = ax + b$$

b s'appelle **l'ordonnée à l'origine** et correspond à l'ordonnée du point B de (D) d'abscisse 0.

a s'appelle **le coefficient directeur** et vaut $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, où Δx et Δy mesurent une quantité d'unités graphiques à parcourir en abscisse puis en ordonnée pour aller d'un point de (D) à un autre point de (D) .

Exemple : (D) a pour équation $y = \frac{7}{3}x - 2$.



Toute droite (D) , parallèle à l'axe des ordonnées, a pour équation réduite :

$$x = k$$

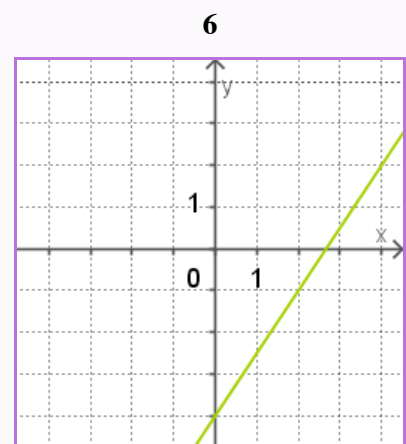
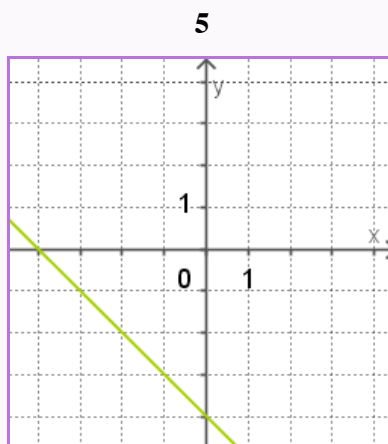
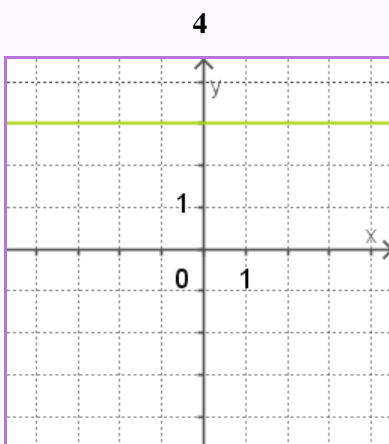
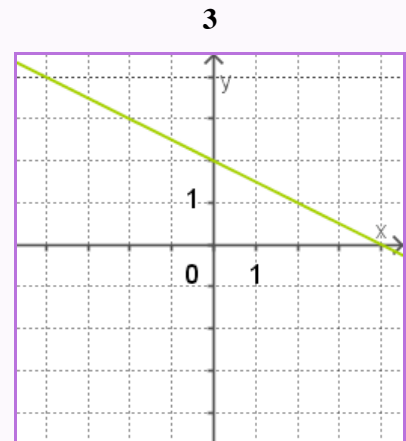
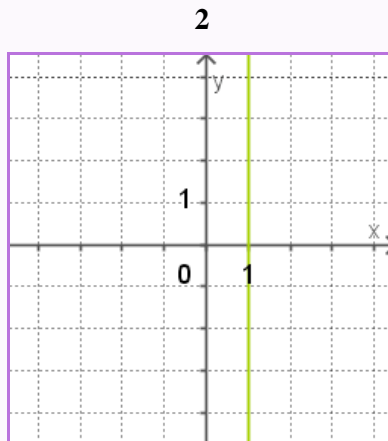
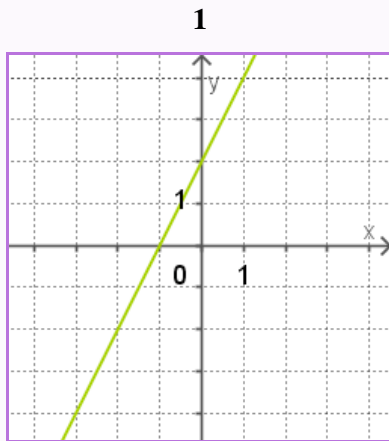
k est l'abscisse commune à tous les points de la droite (D) .

Exemple : (D) a pour équation $x = -2$.

EXERCICES (Chapitre 4)

Exercice 1

Déterminer graphiquement l'équation réduite de chacune des droites :



Exercice 2

Tracer dans un repère orthonormal les droites dont on donne l'équation réduite :

1. $y = 4x - 3$

2. $y = -2$

3. $x = 2$

4. $y = -2x$

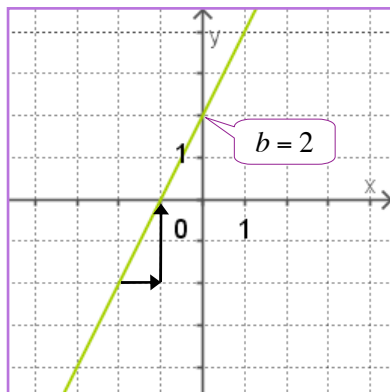
5. $y = \frac{1}{2}x + 1$

6. $y = -x + 3$

INDICATIONS (Chapitre 4)

Exercice 1

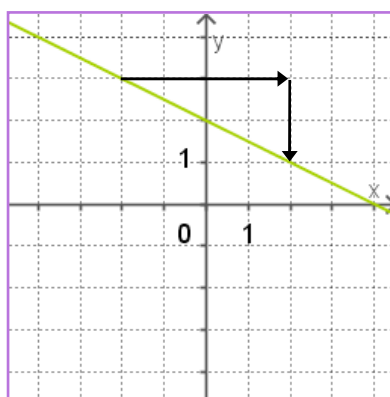
1.



$$\Delta x = 1 \text{ et } \Delta y = 2 \text{ donc } a = \frac{2}{1} = 2$$

Donc la droite a pour équation : $y = 2x + 2$.

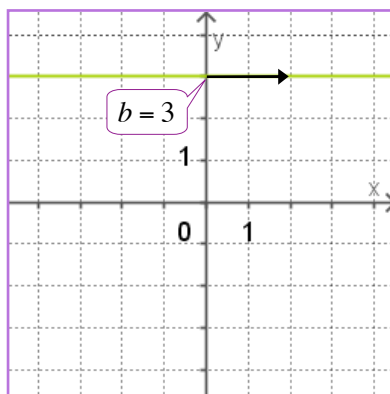
3.



$$\Delta x = 2 \text{ et } \Delta y = -1 \text{ donc } a = -\frac{1}{2}$$

Par lecture graphique $b = 1$

4.

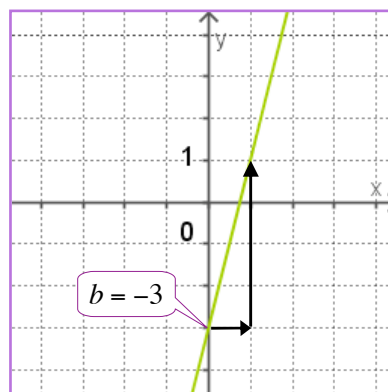


Dans ce cas particulier $\Delta y = 0$ donc $a = 0$

Exercice 2

1. $b = -3$

$$a = 4 = \frac{4}{1} \text{ donc } \Delta x = 1 \text{ et } \Delta y = 4.$$



CORRIGES (Chapitre 4)

Exercice 1

1. $y = 2x + 2$

2. $x = 1$

3. $y = -\frac{1}{2}x + 2$

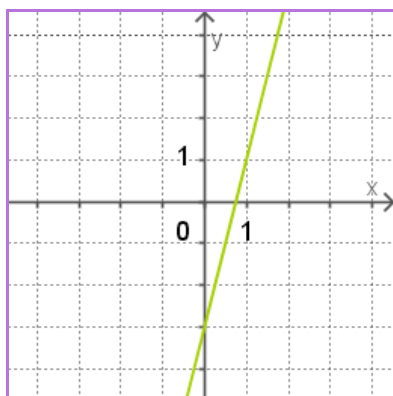
4. $y = 3$

5. $y = -x - 4$

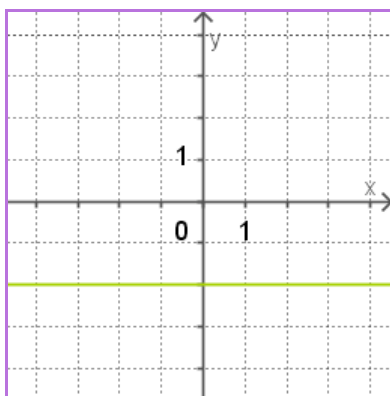
6. $y = \frac{3}{2}x - 4$

Exercice 2

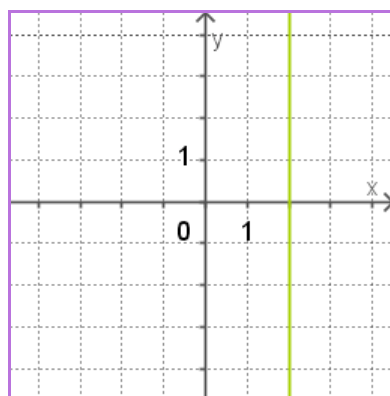
1



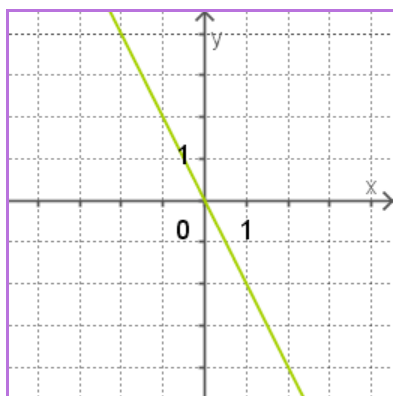
2



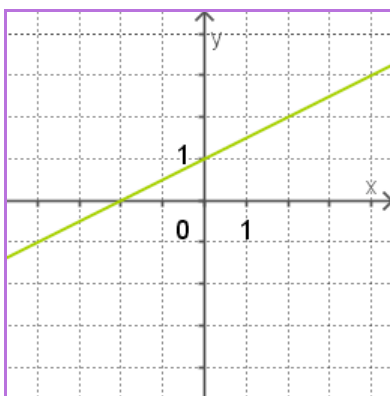
3



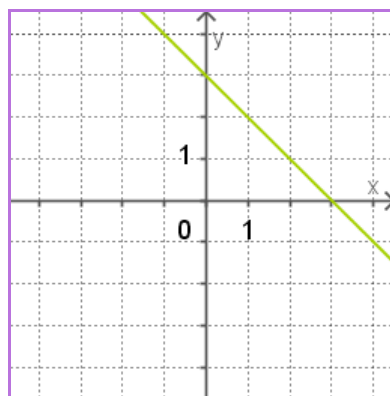
4



5



6



Chapitre 5 : EQUATIONS DU PREMIER DEGRE

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue (s'il en existe) qui rendent l'égalité vraie.

$$\begin{array}{ccc} \text{inconnue} & & \\ \underbrace{3x+1} & = & \underbrace{7} \\ \text{membre de gauche} & & \text{membre de droite} \end{array}$$

Exemples :

- 2 est une solution de cette équation car l'égalité « $3 \times 2 + 1 = 7$ » est vraie
- 5 n'est pas solution de cette équation car l'égalité « $3 \times 5 + 1 = 7$ » est fausse

L'ensemble des solutions, noté S , contient tous les réels qui vérifient l'équation.

I Equations du premier degré

Propriété 1 Quand on **ajoute (ou retranche)** un même nombre aux deux membres d'une équation, on obtient une équation **équivalente** (qui a les mêmes solutions).

Propriété 2 Quand on **multiplie (ou divise)** les deux membres d'une équation par un même réel non nul, on obtient une équation équivalente.

Exemple 1 :

$$\begin{array}{l} 3x + 1 = 7 \\ \Leftrightarrow 3x = 6 \\ \Leftrightarrow x = \frac{6}{3} \\ \Leftrightarrow x = 2 \\ S = \{2\} \end{array}$$

on retranche 1

on divise par 3 ($\neq 0$)

Exemple 2 :

$$\begin{array}{l} -\frac{1}{3}x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x = 2 \\ \Leftrightarrow x = 2 \times (-3) \\ \Leftrightarrow x = -6 \\ S = \{-6\} \end{array}$$

on ajoute 2

on multiplie par -3 ($\neq 0$)

II Equations se ramenant au premier degré

Théorème 1 Un produit $A \times B$ est nul si et seulement si A est nul ou B est nul ($A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$)

$$\begin{aligned} (x+3)(2x-5) = 0 &\Leftrightarrow x+3=0 \text{ ou } 2x-5=0 \\ &\Leftrightarrow x=-3 \text{ ou } x=\frac{5}{2} \end{aligned} \quad S = \left\{-3; \frac{5}{2}\right\}$$

Théorème 2 Un quotient $\frac{A}{B}$ est nul si et seulement si A est nul et B est non nul ($\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0$ et $B \neq 0$)

$$\begin{aligned} \frac{-x+6}{7x+1} = 0 &\Leftrightarrow -x+6=0 \text{ et } 7x+1 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x=6 \text{ et } x \neq -\frac{1}{7} \end{aligned} \quad S = \{6\}$$

EXERCICES (Chapitre 5)

Exercice 1

Q.C.M. : pour chacune des questions suivantes, choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s).

	A	B	C
1. Le nombre 2 est solution de l'équation	$3x + 5 = 2x + 7$	$(x + 2)(x - 2) = 0$	$7 - 3x = 1$
2. L'équation $3x - 5 = 2$ a pour solution	2,33	$\frac{7}{3}$	$-\frac{7}{3}$
3. L'équation $2x + 7 = -3 + 5x$ a pour solution	$-\frac{10}{3}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{10}{3}$
4. L'équation $-4x = 0$	a pour solution 0	n'a pas de solution	a pour solution 4
5. L'équation $0x = 4$	a pour solution 0	n'a pas de solution	a pour solution 4
6. L'équation $x(3x - 15) = 0$	a pour solutions 0 et 5	a pour seule solution 5	a pour solutions 0 et -5
7. L'équation $\frac{3-x}{x-1} = 0$	a pour solutions 3 et 1	a une seule solution 3	a pour solution 1

Exercice 2

On appelle **racine** d'une expression $P(x)$, une **solution de l'équation $P(x) = 0$** .

Exemple : 2 est racine de $3x - 6$ car $3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

De même, déterminer la racine de chacune des expressions suivantes :

- | | |
|-------------|-----------------------|
| 1. $-x + 7$ | 3. $8 - 4x$ |
| 2. $5x + 3$ | 4. $\frac{3}{4}x - 5$ |

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes et donner l'ensemble des solutions :

1. $2x(x + 5)(3x - 1) = 0$
2. $\frac{(x + 8)(-2x + 6)}{x - 3} = 0$

INDICATIONS (Chapitre 5)

Exercice 1

1. Le nombre 2 est solution d'une équation si, en remplaçant x par 2, les deux membres de l'égalité sont égaux.
2. et 3. Isoler l'inconnue x en utilisant les propriétés du cours (paragraphe I).
Attention : une valeur approchée de x n'est pas solution d'une équation.
4. et 5. Ne pas confondre multiplication et addition.
Se souvenir que la division par 0 n'est pas permise.
Réfléchir plutôt au sens de ces équations.
6. et 7. Voir cours (paragraphe III).

Exercice 2

Résoudre pour chaque expression $P(x)$ l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 3

1. Un produit de trois facteurs est nul si et seulement si
2. En utilisant le cours (paragraphe III), on déduit que :
$$\frac{(x+8)(-2x+6)}{x-3} = 0 \Leftrightarrow (x+8)(-2x+6) = 0 \text{ et } x-3 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \dots$$

Attention : bien réfléchir avant d'écrire l'ensemble des solutions.

CORRIGES (Chapitre 5)

Exercice 1

1. Réponses A, B et C.
2. Réponse B : $3x - 5 = 2 \Leftrightarrow 3x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$.
3. Réponse C.
4. Réponse A : $-4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{-4} = 0$
5. Réponse B : le produit de 0 par n'importe quel nombre vaut 0.
6. Réponse A : $x(3x - 15) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $3x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = 5$.
7. Réponse B : $\frac{3-x}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 3-x = 0$ et $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x = 3$ et $x \neq 1$.

Exercice 2

1. $-x + 7 = 0 \Leftrightarrow 7 = x$ donc 7 est racine de $-x + 7$.
2. $5x + 3 = 0 \Leftrightarrow 5x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}$ donc $-\frac{3}{5}$ est racine de $5x + 3$.
3. $8 - 4x = 0 \Leftrightarrow 8 = 4x \Leftrightarrow x = 2$ donc 2 est racine de $8 - 4x$.
4. $\frac{3}{4}x - 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = 5 \Leftrightarrow 3x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{20}{3}$ donc $\frac{20}{3}$ est racine de $\frac{3}{4}x - 5$.

Exercice 3

1. $2x(x+5)(3x-1) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0$ ou $x+5 = 0$ ou $3x-1 = 0$.
 $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -5$ ou $x = \frac{1}{3}$

$$\text{D'où } S = \left\{ -5; 0; \frac{1}{3} \right\}.$$

2. $\frac{(x+8)(-2x+6)}{x-3} = 0 \Leftrightarrow (x+8)(-2x+6) = 0$ et $x-3 \neq 0$
 $\Leftrightarrow (x+8 = 0 \text{ ou } -2x+6 = 0)$ et $x-3 \neq 0$
 $\Leftrightarrow (x = -8 \text{ ou } x = 3)$ et $x \neq 3$

Le nombre 3 ne peut convenir car il rendrait nul le dénominateur.

Par conséquent $S = \{-8\}$.

Chapitre 6 : SIGNE DE $ax + b$

I Résolution d'inéquations

Propriété 1 Quand on **ajoute** (ou **retranche**) un même nombre aux deux membres d'une inégalité, le sens de l'inégalité est **conservé**.

Propriété 2 Quand on **multiplie** (ou **divise**) les deux membres d'une inégalité par un même nombre non nul, selon le signe de ce nombre, le sens de l'inégalité est **conservé** ou **changé**.

$$\begin{aligned}
 3x + 2 &\leq 0 \\
 \Leftrightarrow 3x &\leq -2 \\
 \Leftrightarrow x &\leq -\frac{2}{3} \\
 S &= \left] -\infty ; -\frac{2}{3} \right]
 \end{aligned}$$

on retranche 2
on divise par 3 (positif)
L'ordre est conservé.

$$\begin{aligned}
 -2x - 6 &< 0 \\
 \Leftrightarrow -2x &< 6 \\
 \Leftrightarrow x &> \frac{6}{-2} \\
 \Leftrightarrow x &> -3 \\
 S &=] -3 ; -\infty [
 \end{aligned}$$

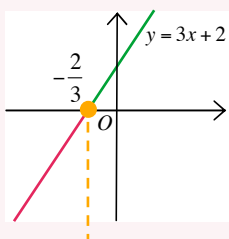
on ajoute 6
on divise par -2 (négatif)
L'ordre est changé.

L'ensemble des solutions, noté S , contient tous les réels qui vérifient l'inéquation.

II Signe de $ax + b$

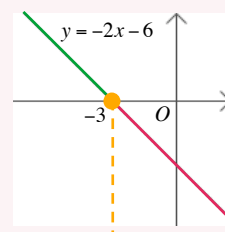
Etudier le signe de $ax + b$, c'est trouver pour quelles valeurs de x , $ax + b$ est positif et pour quelles valeurs de x , $ax + b$ est négatif.

Signe de $(3x + 2)$



x	$-\infty$	$-2/3$	$+\infty$
signe de $(3x + 2)$	-	0	+

Signe de $(-2x - 6)$



x	$-\infty$	-3	$+\infty$
signe de $(-2x - 6)$	+	0	-

Dans le cas général, on retiendra (les professeurs l'espèrent ...) un résumé de ces deux cas :

x	$-\infty$	r	$+\infty$
signe de $(ax + b)$	signe de $(-a)$	0	signe de a

r est la racine de $(ax + b)$; c'est la solution de l'équation $ax + b = 0$.

III Signe d'un produit, d'un quotient

L'étude du signe d'un produit $A \times B$ ou d'un quotient $\frac{A}{B}$ se fait à l'aide d'un tableau de signes.

x	$-\infty$	-3	$-2/3$	$+\infty$	
signe de $(3x + 2)$	-	-	0	+	
signe de $(-2x - 6)$	+	0	-	-	
signe de $(3x + 2)(-2x - 6)$	-	0	+	0	-
signe de $\frac{3x + 2}{-2x - 6}$	-		+	0	-

On range les racines de A et de B dans l'ordre croissant.

On étudie le signe de A .

On étudie le signe de B .

$A \times B$ et $\frac{A}{B}$ sont :

- positifs si A et B sont de même signe,
- négatifs si A et B sont de signes contraires.

Attention : La division par 0 n'a pas de sens : on note ce cas interdit en mettant une **double barre**.

EXERCICES (Chapitre 6)

Exercice 1

Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle.

1. $3x + 5 \geq 0$
2. $-3x + 5 \geq 0$
3. $-5 + x \leq 0$
4. $-5x \leq 0$

Exercice 2

On donne le tableau de signe d'une expression $P(x)$.

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
Signe de $P(x)$	-	0	+	0	-

Pour chacune des phrases suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

1. Si $x \geq 4$ alors $P(x) \geq 0$.
2. Si $x \geq 1$ alors $P(x) \geq 0$.
3. Si $x \in [1; 4]$ alors $P(x) \geq 0$.
4. Si $x > 5$ alors $P(x) < 0$.
5. Si $x < 1$ ou $x > 4$ alors $P(x) < 0$.

Exercice 3

Voici trois tableaux incomplets dont les expressions perdues sont pêle-mêle dans la liste suivante :
 $-5 - x$; $-x + 1$; $3x$; $3 - x$; $5 - x$; $2x - 2$; $-3 + x$.

Retrouver pour chaque tableau l'expression qui convient.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
signe de ...	-	0	+

x	$-\infty$	-5	$+\infty$
signe de ...	+	0	-

x	$-\infty$	3	$+\infty$
signe de ...	+	0	-

Exercice 4

1. Etudier, dans un tableau, le signe de $P(x) = (2x + 3)(-3x + 4)$.

En déduire la résolution de l'inéquation $P(x) < 0$.

2. Etudier, dans un tableau, le signe de $Q(x) = \frac{-x+5}{7x+3}$.

En déduire la résolution de l'inéquation $Q(x) \geq 0$.

INDICATIONS (Chapitre 6)

Exercice 1

Utiliser les propriétés 1 et 2 du cours (paragraphe I) pour isoler x .
En particulier, ne pas oublier de changer l'ordre quand on multiplie ou divise par un réel négatif.

Exercice 2

- On rappelle que $P(x) \geq 0$ signifie « $P(x)$ est positif ou nul » et se note par les signes + et 0 dans un tableau de signe.
De même, $P(x) < 0$ signifie « $P(x)$ est strictement négatif » et se note par le symbole $-$.
 - On rappelle également qu'**une phrase est vraie si elle est vérifiée pour tout nombre x** .
Au contraire, une phrase est fausse si on peut trouver **une valeur** de x pour laquelle la phrase n'est pas vérifiée (cette valeur particulière s'appelle un **contre-exemple**).
2. $x \geq 1$ signifie que x peut prendre toutes les valeurs dans l'intervalle $[1; +\infty[$.
Prendre, par exemple, la valeur $x = 5$ et regarder si la phrase est vraie pour cette valeur.
5. $x < 1$ ou $x > 4 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 1[\cup]4; +\infty[$

Exercice 3

Dans le premier tableau, on remarque que 1 est racine de l'expression cherchée ; parmi les 7 expressions proposées, seules $(-x + 1)$ et $(2x - 2)$ ont 1 pour racine.
Il suffit ensuite de départager les deux réponses précédentes en examinant le signe du coefficient de a .
Ce coefficient vaut -1 dans $(-x + 1)$ et 2 dans $(2x - 2)$.
Conclure en utilisant le cours (paragraphe II).

Exercice 4

Pour le tableau de signes, suivre les consignes données dans le paragraphe III du cours.

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) < 0$ correspond aux valeurs de x telles que $P(x)$ soit de signe $-$ dans la dernière ligne du tableau.
2. Penser à ranger les racines de $(-x + 5)$ et $(7x + 3)$ dans l'ordre croissant sur la « ligne de x ».

CORRIGES (Chapitre 6)

Exercice 1

1. $3x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq -5 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{3}$ $S = \left[-\frac{5}{3}; +\infty\right[$
2. $-3x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -5 \Leftrightarrow x \leq \frac{-5}{-3} \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{3}$ $S = \left]-\infty; \frac{5}{3}\right]$
3. $-5 + x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$ $S = \left]-\infty; 5\right]$
4. $-5x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{0}{-5} \Leftrightarrow x \geq 0$ $S = [0; +\infty[$

Exercice 2

1. Faux : $5 \geq 4$ et, d'après le tableau, $P(5)$ est négatif.
2. Faux : $5 \geq 1$ et $P(5)$ est négatif.
3. Vrai.
4. Vrai.
5. Vrai.

Exercice 3

Tableau 1 : signe de $2x - 2$ ($r = 1$ et $a = 2$ positif : $2x - 2$ est positif à droite de r).

Tableau 2 : signe de $-5 - x$ ($r = -5$ et $a = -1$ négatif : $-5 - x$ est négatif à droite de r).

Tableau 3 : signe de $3 - x$ ($r = 3$ et $a = -1$ négatif : $3 - x$ est négatif à droite de r).

Exercice 4

1.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$	
signe de $(2x + 3)$	-	0	+	+	
signe de $(-3x + 4)$	+	+	0	-	
signe de $P(x)$	-	0	+	0	-

$r = -\frac{3}{2}$ et a est positif
 $r = \frac{4}{3}$ et a est négatif

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{2} \text{ ou } x > \frac{4}{3} \text{ donc } S = \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{4}{3}; +\infty\right[$$

2.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{7}$	5	$+\infty$	
signe de $(-x + 5)$	+	+	0	-	
signe de $(7x + 3)$	-	0	+	+	
signe de $Q(x)$	-	0	+	0	-

$r = 5$ et a est négatif
 $r = -\frac{3}{7}$ et a est positif

$$Q(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{7} < x \leq 5 \text{ donc } S = \left]-\frac{3}{7}; 5\right]$$

Chapitre 7 : POLYNÔMES DU SECOND DEGRE

I Equations du second degré

Pour chercher les solutions éventuelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (où a, b et c sont des constantes réelles avec $a \neq 0$), on procède en deux étapes ([à connaître par cœur](#)) :

- On calcule le **discriminant** Δ avec la formule : $\Delta = (b)^2 - 4 \times a \times c$
- On examine le signe du discriminant :

Si $\Delta > 0$ alors l'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta = 0$ alors l'équation a une solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solution réelle.

Exemples :

$$\begin{aligned} &\underline{2x^2 + 5x - 3 = 0} \\ &a = 2, b = 5, c = -3 \\ &\Delta = 25 - 4 \times 2 \times (-3) = 49 \\ &\Delta > 0 \\ &\text{l'équation a deux solutions :} \\ &x_1 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{1}{2} \\ &\text{et } x_2 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{-5 - 7}{4} = -3. \\ &S = \left\{ -3; \frac{1}{2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\underline{-9x^2 + 6x - 1 = 0} \\ &a = -9, b = 6, c = -1 \\ &\Delta = 36 - 4 \times (-9) \times (-1) = 0 \\ &\Delta = 0 \\ &\text{l'équation a une solution :} \\ &x_0 = \frac{-6}{2 \times (-9)} = \frac{1}{3} \\ &S = \left\{ \frac{1}{3} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\underline{x^2 + 5x + 7 = 0} \\ &a = 1, b = 5, c = 7 \\ &\Delta = 25 - 4 \times 1 \times 7 = -3 \\ &\Delta < 0 \\ &\text{l'équation n'a pas de solution} \\ &\text{réelle.} \\ &S = \emptyset \end{aligned}$$

II Signe de $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Pour étudier le signe de l'expression $ax^2 + bx + c$, on procède en deux étapes :

- On détermine les racines éventuelles de l'expression (les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$) en calculant le discriminant.
- On dresse un tableau de signes en utilisant la règle :

l'expression $ax^2 + bx + c$ est du signe de a partout, sauf entre ses racines éventuelles.

Exemples :

Signe de $\underline{P(x) = 2x^2 + 5x - 3}$
 $P(x)$ a deux racines : -3 et $\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
signe $P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Signe de $\underline{Q(x) = -9x^2 + 6x - 1}$
 $Q(x)$ a une seule racine $\frac{1}{3}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
signe $Q(x)$	$-$	0	$-$

Signe de $\underline{R(x) = x^2 + 5x + 7}$
 $R(x)$ n'a pas de racine réelle

x	$-\infty$	$+\infty$
signe $R(x)$	$+$	

EXERCICES (Chapitre 7)

Exercice 1

Résoudre, en calculant le discriminant,

- | | |
|--------------------------|----------------------------------|
| 1. $x^2 - 7x + 6 = 0$ | 3. $2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$ |
| 2. $-2x^2 + 5x - 13 = 0$ | 4. $8x^2 + 1 - 6x = 0$ |

Exercice 2

Dans certains cas, le calcul du discriminant est une perte de temps :

- si l'équation se transforme facilement en un produit nul ($A \times B = 0 \Leftrightarrow \dots$ à revoir dans le chapitre 5).

Exemple : $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ ou $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.

- si l'équation n'a manifestement pas de solution réelle.

Exemple : $x^2 + 4$ est un réel strictement positif car x^2 est un carré.

Par conséquent, $x^2 + 4$ ne peut pas être nul; l'équation $x^2 + 4 = 0$ n'a donc pas de solution réelle.

Résoudre les équations suivantes, sans calculer le discriminant.

- | | |
|-------------------|------------------|
| 1. $9x^2 - 1 = 0$ | 3. $x^2 + 2 = 0$ |
| 2. $x^2 - 3x = 0$ | 4. $x^2 - 2 = 0$ |

Exercice 3

Dresser le tableau de signe des expressions suivantes (on pourra utiliser les résultats de l'exercice 1).

1. $P(x) = x^2 - 7x + 6$
2. $Q(x) = -2x^2 + 5x - 13$
3. $R(x) = 2x^2 - 2x + \frac{1}{2}$

INDICATIONS (Chapitre 7)

Exercice 1

1. $a = 1$; $b = -7$ et $c = 6$.

Montrer que $\Delta = 25$ puis déterminer les deux solutions de l'équation avec les formules du cours.

2. $\Delta < 0$.
3. $\Delta = 0$.
4. Attention à bien repérer les valeurs de a , b et c .

Exercice 2

1. et 2. Factoriser les membres de gauche.
3. Examiner les valeurs que peut prendre l'expression $x^2 + 2$.
4. $2 = (\sqrt{2})^2$.

Exercice 3

Utiliser les étapes indiquées dans le paragraphe II du cours, sachant que les racines éventuelles des expressions ont été déterminées dans l'exercice 1.

CORRIGES (Chapitre 7)

Exercice 1

1. $a = 1$; $b = -7$ et $c = 6$.

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 49 - 24 = 25. \Delta > 0 ; \text{l'équation a deux solutions :}$$

$$x_1 = \frac{-(-7) + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-7) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{7-5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad S = \{1; 6\}$$

2. $a = -2$; $b = 5$ et $c = -13$.

$$\Delta = (5)^2 - 4 \times (-2) \times (-13) = 25 - 104 = -79. \Delta < 0 ; \text{l'équation n'a pas de solution réelle.} \quad S = \emptyset$$

3. $a = 2$; $b = -2$ et $c = \frac{1}{2}$.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 4 - 4 = 0. \Delta = 0 ; \text{l'équation a une seule solution : } x_0 = \frac{-(-2)}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

4. $a = 8$; $b = -6$ et $c = 1$.

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 8 \times 1 = 36 - 32 = 4. \Delta > 0 ; \text{l'équation a deux solutions :}$$

$$x_1 = \frac{-(-6) + \sqrt{4}}{2 \times 8} = \frac{6+2}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-6) - \sqrt{4}}{2 \times 8} = \frac{6-2}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \quad S = \left\{ \frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right\}$$

Exercice 2

1. $9x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (3x)^2 - (1)^2 = 0 \Leftrightarrow (3x-1)(3x+1) = 0 \Leftrightarrow 3x-1=0 \text{ ou } 3x+1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = -\frac{1}{3}$

$$S = \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right\}$$

2. $x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x-3=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=3 \quad S = \{0; 3\}$

3. $x^2 + 2 > 0$ donc l'équation $x^2 + 2 = 0$ n'a pas de solution. $S = \emptyset$

4. $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{2})^2 = 0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow x-\sqrt{2}=0 \text{ ou } x+\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{2} \text{ ou } x=-\sqrt{2}$

$$S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$$

Exercice 3

1. $\Delta > 0$
L'expression est du signe de $a = 1$ sauf entre les racines 1 et 6.

x	$-\infty$	1	6	$+\infty$	
signe de $(x^2 - 7x + 6)$	+	0	-	0	+

2. $\Delta < 0$
L'expression est partout du signe de $a = -2$.

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $(-2x^2 + 5x - 13)$	-	-

3. $\Delta = 0$
L'expression est partout du signe de $a = 2$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
signe de $\left(2x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right)$	+	0	+

Chapitre 8 : FONCTIONS

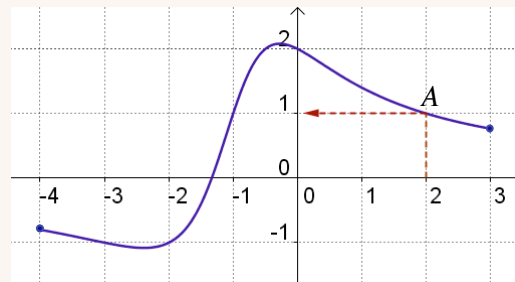
I Exemple de fonction définie par une courbe

f est la fonction définie par la courbe ci-contre.

Tout point de cette courbe a pour coordonnées x et $y = f(x)$.

Ici, $A(2; 1)$ est un point de la courbe.

- Les valeurs de x se lisent sur l'axe des abscisses.
L'ensemble des abscisses des points de la courbe s'appelle **ensemble de définition** de la fonction f ;
ici, l'ensemble de définition est $D = [-4; 3]$.
- Les valeurs de $f(x)$ se lisent sur l'axe des ordonnées ;
ici, $f(2) = 1$. On dit que « 2 a pour **image** 1 » ou que « l'image de 2 est 1 ».

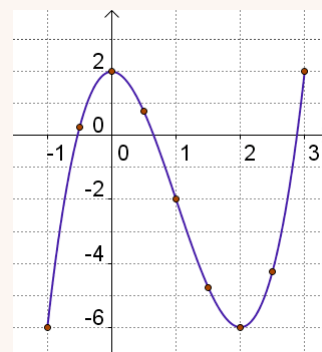


II Exemple de fonction définie par une expression algébrique

f est la fonction définie sur $[-1; 3]$ par $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2$

- Pour toute valeur de x comprise entre -1 et 3 , on peut calculer son image « à la main ».
Par exemple : $f(1) = 2 \times (1)^3 - 6 \times (1)^2 + 2 = 2 - 6 + 2 = -2$
- Après avoir calculé ainsi plusieurs images, « à la main » ou avec un tableur de calculatrice, on peut présenter ces résultats dans un **tableau de valeurs**.
- Dans un repère, on place les points de coordonnées $(x, f(x))$ pour différentes valeurs de x , et on trace la courbe en reliant ces points de façon « régulière ». On obtient ainsi la **courbe représentative** de f .

x	$f(x)$
-1	-6
-0,5	0,25
0	2
0,5	0,75
1	-2
1,5	-4,75
2	-6
2,5	-4,25
3	2



III Sens de variation d'une fonction

Une fonction peut être croissante sur un intervalle et décroissante sur un autre.

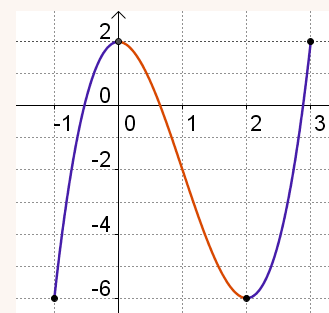
En lisant le graphique de gauche à droite,

- si la courbe « monte », on dit que f est **croissante**
- si la courbe « descend », on dit que f est **décroissante**

On résume les variations de f dans un **tableau de variation**.

Exemple : voici le tableau de variation de la fonction f définie par la courbe ci-contre :

x	-1	0	2	3
Variations de f	-6	2	-6	2



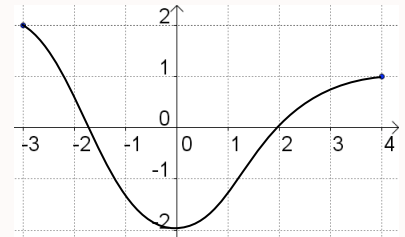
EXERCICES (Chapitre 8)

Exercice 1

La courbe ci-contre représente une fonction f sur l'intervalle $[-3; 4]$.

Décrire le comportement de f en utilisant :

- « f est croissante sur ... ».
- « f est décroissante sur ... ».
- « f admet un maximum pour $x = \dots$ et ce maximum vaut ... ».
- « f admet un minimum pour $x = \dots$ et ce minimum vaut ... ».



Exercice 2

La courbe ci-contre représente une fonction f sur l'intervalle $[0; 8]$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $f(7) = 4$.
2. $f(4) = 2$.
3. $f(3) > f(5)$.
4. L'équation $f(x) = 3$ a deux solutions dans $[0; 8]$.
5. f est croissante sur l'intervalle $[0; 8]$.
6. f est décroissante sur l'intervalle $[2; 4]$.



Exercice 3

Associer chaque courbe à son tableau de variation :

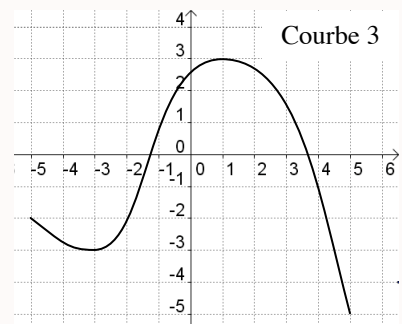
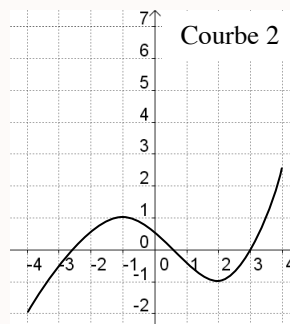
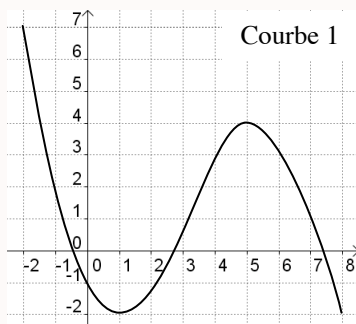


Tableau A

x	-2	-1	2	2,5
Variations de f		1	-1	4

Tableau B

x	-5	-3	1	5
Variations de f	-2	-3	3	-5

Tableau C

x	-4	-1	2	4
Variations de f	-2	1	-1	2,5

Tableau D

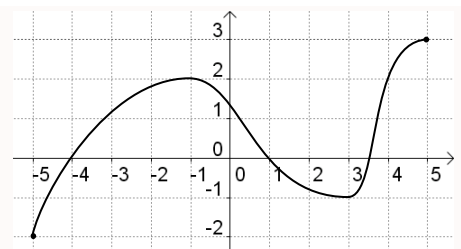
x	-2	1	5	8
Variations de f	7	-2	4	-2

Exercice 4

La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur $[-5; 5]$.

On précise de plus que $f(3,5) = 0$.

1. Dresser le tableau de variation de f .
2. Résoudre graphiquement $f(x) = 0$ et $f(x) > 2$.
3. Sur quels intervalles f est-elle négative ? positive ?



INDICATIONS (Chapitre 8)

Exercice 1

« f est **croissante** » signifie que, graphiquement, « la courbe **monte** ». La courbe « monte » pour x allant de 0 à 4, donc f est croissante sur $[0; 4]$.

« f est **décroissante** » signifie que, graphiquement, « la courbe **descend** ».

Le **maximum** d'une fonction est la valeur **la plus grande** de $f(x)$, c'est donc l'ordonnée du point « **le plus haut** » de la courbe de f . Le point « le plus haut » de la courbe est le point de coordonnées $(-3; 2)$.

Donc f admet un maximum pour $x = -3$ et ce maximum vaut 2.

Le **minimum** d'une fonction est la valeur **la plus petite** de $f(x)$, c'est donc l'ordonnée du point « **le plus bas** » de la courbe de f .

Exercice 2

- Repérer les points de la courbe d'ordonnée 3 et lire leurs abscisses.

Exercice 4

- Résoudre graphiquement $f(x) = 0$ revient à déterminer les abscisses des **points d'intersection** de la courbe et de l'axe des abscisses. La courbe coupe trois fois l'axe des abscisses, il y a donc 3 solutions à l'équation $f(x) = 0$.

Pour résoudre graphiquement $f(x) > 2$, on trace la droite d'équation $y = 2$ et l'on détermine les abscisses de tous les points de la courbe qui sont **situés strictement au-dessus** de cette droite.

- Pour déterminer les intervalles où f est négative, on cherche les « morceaux » de courbe qui sont situés **en dessous de l'axe des abscisses** et on lit les abscisses de tous ces points.

Pour déterminer les intervalles où f est positive, on cherche les « morceaux » de courbe qui sont situés **au-dessus de l'axe des abscisses** et on lit les abscisses de tous ces points.

CORRIGES (CHAPITRE 8)

Exercice 1

f est croissante sur $[0; 4]$.

f est décroissante sur $[-3; 0]$.

f admet un maximum pour $x = -3$ et ce maximum vaut 2.

f admet un minimum pour $x = 0$ et ce minimum vaut -2 .

Exercice 2

1. $f(7) = 4$	Vrai
2. $f(4) = 2$	Faux : $f(4) \approx 1,5$.
3. $f(3) > f(5)$	Vrai : $f(3) = 3$ et $f(5) = 1$.
4. L'équation $f(x) = 3$ a deux solutions dans $[0; 8]$.	Faux : il y a 3 solutions : 1 ; 3 et 6,5 (environ).
5. f est croissante sur $[0; 8]$.	Faux : f est croissante, décroissante puis croissante.
6. f est décroissante sur $[2; 4]$.	Vrai

Exercice 3

La courbe 1 est associée au tableau D.

La courbe 2 est associée au tableau C.

La courbe 3 est associée au tableau B.

Exercice 4

1. Tableau de variation de f :

x	-5	-1	3	5
f	-2	2	-1	3

$\nearrow$ (entre -5 et -1) $\searrow$ (entre -1 et 3) $\nearrow$ (entre 3 et 5)

2. L'équation $f(x) = 0$ a pour ensemble de solutions $S = \{-4; 1; 3,5\}$.

L'inéquation $f(x) > 2$ a pour ensemble de solutions $S =]4; 5]$.

3. f est négative sur $[-5; -4]$ et sur $[1; 3,5]$;

f est positive sur $[-4; 1]$ et sur $[3,5; 5]$.

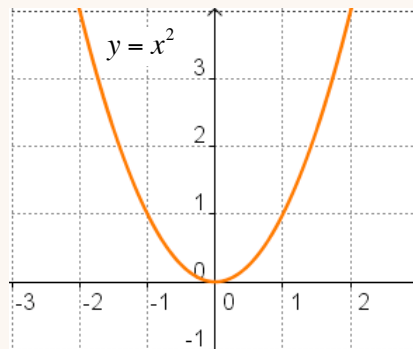
Chapitre 9 : FONCTIONS DE REFERENCE

I Fonction carré $x \mapsto x^2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$	0	$+\infty$

Si $a < b < 0$ alors $a^2 > b^2 > 0$
Deux réels strictement négatifs
sont rangés dans l'ordre contraire
de leurs carrés.

Si $0 < a < b$ alors $0 < a^2 < b^2$
Deux réels strictement positifs
sont rangés dans le même ordre
que leurs carrés.

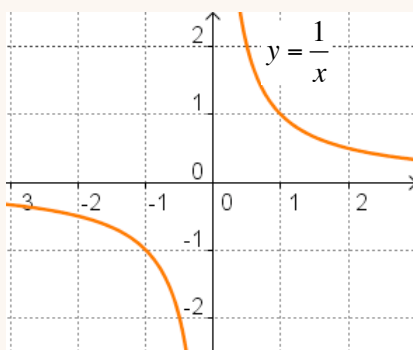


II Fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	$+\infty$	0

Si $a < b < 0$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
Deux réels strictement négatifs
sont rangés dans l'ordre contraire
de leurs inverses.

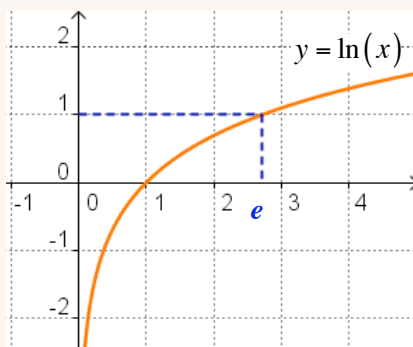
Si $0 < a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
Deux réels strictement positifs
sont rangés dans l'ordre contraire
de leurs inverses.



III Fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln(x)$

x	0	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	$+\infty$

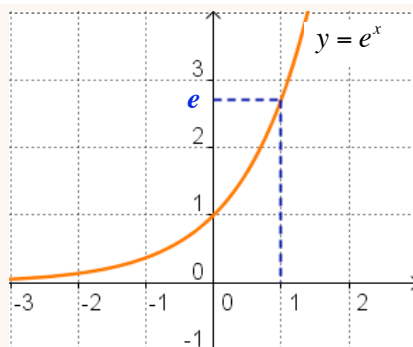
Si $0 < a < b$ alors $\ln(a) < \ln(b)$
Deux réels strictement positifs sont rangés dans le même ordre que
leurs logarithmes.



IV Fonction exponentielle $x \mapsto \exp(x) = e^x$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp(x)$	0	$+\infty$

Si $a < b$ alors $\exp(a) < \exp(b)$
Deux réels sont rangés dans le même ordre que leurs exponentielles.



EXERCICES (Chapitre 9)

Exercice 1

1. Dans un repère orthonormal, tracer la courbe de la fonction carré : $x \mapsto x^2$.
2. Tracer, dans le même repère, la droite d'équation $y = 4$.
En déduire, par lecture graphique, les solutions de l'équation $x^2 = 4$ puis de l'inéquation $x^2 \leq 4$.
3. Tracer, dans le même repère, la droite d'équation $y = 2x + 3$.
En déduire, par lecture graphique, les solutions de l'équation : $x^2 = 2x + 3$.
4. Résoudre, par le calcul, l'équation : $x^2 = 2x + 3$.

Exercice 2

Calculer les inverses des nombres réels suivants : 1 ; 2 ; 0,5 ; 0,25 et -4 .
(Il est vivement conseillé de faire appel au calcul mental plutôt qu'à la calculatrice).

Exercice 3

Dans un même repère orthonormal, tracer les courbes des fonctions $\ln$ et $\exp$.
Le graphique obtenu possède un axe de symétrie. Le tracer et en donner une équation.

Exercice 4

A l'aide de la calculatrice, trouver les valeurs des réels suivants :

$$a = e^{\ln(3)} \quad b = \ln(e^2) \quad c = \ln(2 \times 3) \quad d = \ln(2) + \ln(3).$$

Que constate-t-on ?

Fait-on le même constat si on remplace 2 et 3 par d'autres réels ?

INDICATIONS (Chapitre 9)

Exercice 1

3. Pour trouver les solutions d'une équation de la forme $x^2 = ax + b$, on considère les points d'intersection entre la courbe de la fonction carré et la droite d'équation $y = ax + b$.
Les abscisses de ces points sont les solutions de l'équation.
4. Etudier le chapitre 7 : Polynômes du second degré.

Exercice 2

L'inverse du nombre réel a est le nombre $\frac{1}{a}$.

Penser à : $0,5 = \frac{1}{2}$ donc l'inverse de 0,5 est 2.

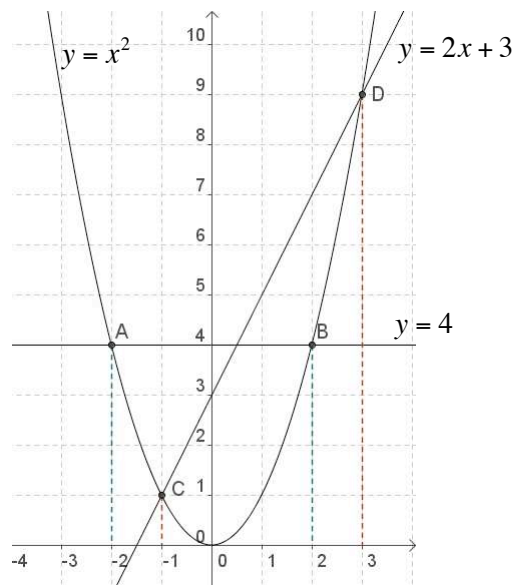
Exercice 4

Penser à toutes les parenthèses : $e^{\ln(3)} = e^{\ln(3)}$.

CORRIGES (Chapitre 9)

Exercice 1

2. La droite d'équation $y = 4$ coupe la courbe en deux points A et B qui ont pour abscisses -2 et 2 .
Les solutions de l'équation $x^2 = 4$ sont -2 et 2 .
L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \leq 4$ est $[-2; 2]$.
3. La droite d'équation $y = 2x + 3$ coupe la courbe en deux points C et D d'abscisses -1 et 3 .
Les solutions de l'équation : $x^2 = 2x + 3$ sont -1 et 3 .
4. $x^2 = 2x + 3$ est équivalente à $x^2 - 2x - 3 = 0$.
C'est une équation du second degré.
Son discriminant est : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$.
Il est strictement positif ; $\frac{2 - \sqrt{16}}{2} = -1$ et $\frac{2 + \sqrt{16}}{2} = 3$.
L'équation a deux solutions : -1 et 3 .

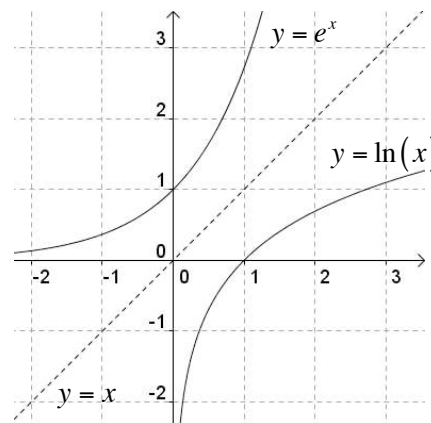


Exercice 2

nombre	1	2	0,5	0,25	-4
inverse	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{0,5} = 2$	$\frac{1}{0,25} = 4$	$\frac{1}{-4} = -0,25$

Exercice 3

Les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (la première bissectrice du repère).



Exercice 4

$$a = e^{\ln(3)} = 3$$

$$b = \ln(e^2) = 2$$

$$c = \ln(2 \times 3) \approx 1,7918$$

$$d = \ln(2) + \ln(3) \approx 1,7918$$

Après plusieurs essais, on peut supposer que :

$$e^{\ln(x)} = x, \quad \ln(e^x) = x, \quad \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y).$$

(Ces propriétés seront établies ultérieurement).

Chapitre 10 : TRIGONOMETRIE

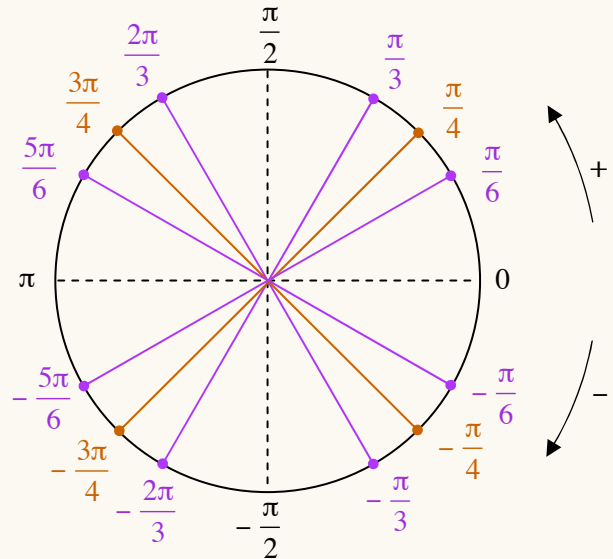
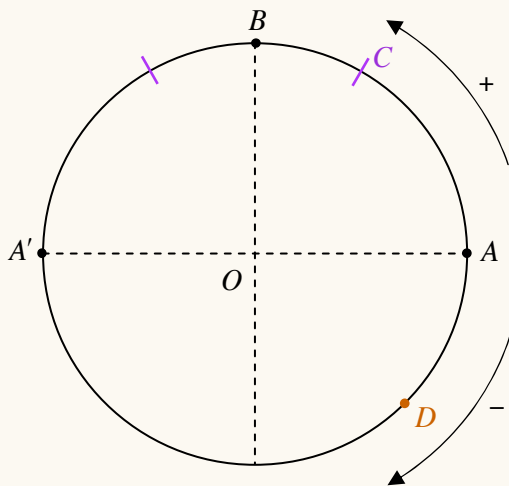
I Placer des points sur le cercle trigonométrique

On appelle cercle trigonométrique un cercle orienté de rayon 1. Son périmètre est $2\pi \times 1 = 2\pi$.

Le point A est appelé origine sur ce cercle ; il est associé au réel 0.

En partant de A, on arrive à A' en parcourant un demi-cercle : le point A' est associé au réel π .

De même : le point B est associé à $\frac{\pi}{2}$, le point C est associé à $\frac{\pi}{3}$, le point D est associé à $-\frac{\pi}{4}$.



II Cosinus et sinus d'un nombre réel

Le plan est muni d'un repère orthonormal d'origine O.

x est un nombre réel.

M est le point associé à x sur le cercle trigonométrique de centre O.

Le **cosinus du réel x** est l'**abscisse du point M** dans le repère.

On le note $\cos(x)$.

Le **sinus du réel x** est l'**ordonnée du point M** dans le repère.

On le note $\sin(x)$.

Le point M de coordonnées $(\cos(x); \sin(x))$ étant sur le cercle de rayon 1 :

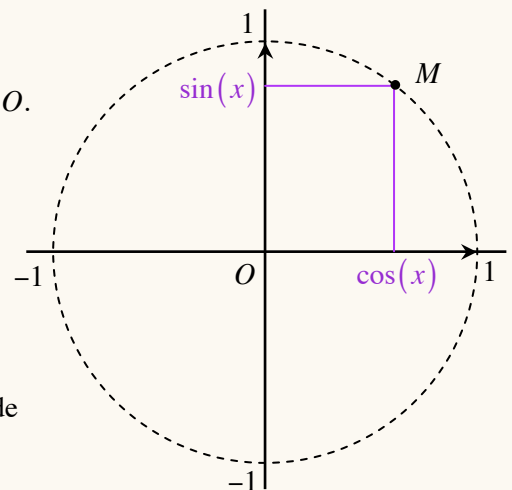
$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

Valeurs remarquables à retenir :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Pour les autres valeurs remarquables de x , on utilise les symétries par rapport aux axes de coordonnées ou par rapport au point O.

Exemple : $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



EXERCICES (Chapitre 10)

Exercice 1

A l'aide du graphique ci-contre, compléter les tableaux suivants :

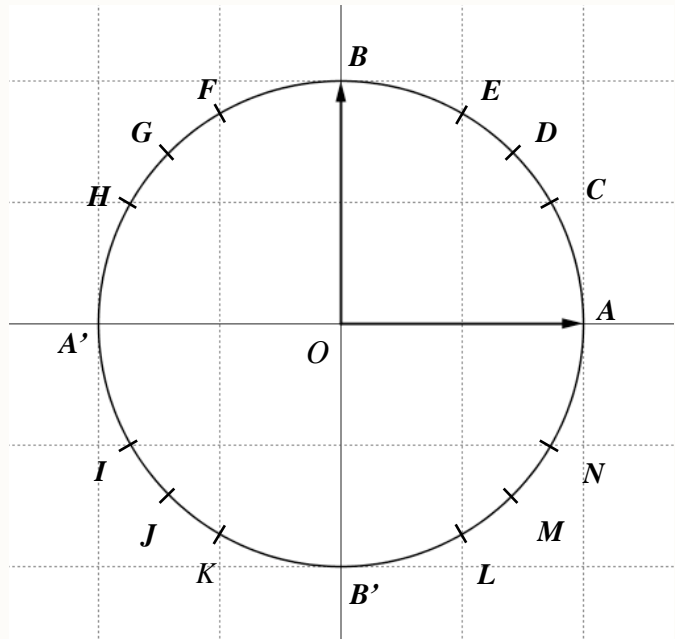


Tableau 1

Réel x	0	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	π	$-\frac{5\pi}{6}$
Point associé	A									

Tableau 2

Point	N	E	K	J	B	D	M	F
Réel x	$-\frac{\pi}{6}$							
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$							
$\sin(x)$	$-\frac{1}{2}$							

Exercice 2

A l'aide d'un cercle trigonométrique, compléter le tableau suivant :

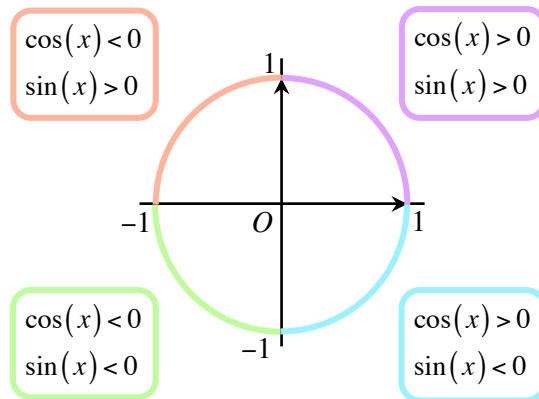
Réel x	π	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{4}$			$\frac{5\pi}{6}$	
$\cos(x)$			$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		0	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
$\sin(x)$			$-\frac{1}{2}$		-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

INDICATIONS (Chapitre 10)

Exercice 1

Tableau 2 :

- $\cos(x)$ se lit en abscisse.
 $\sin(x)$ se lit en ordonnée.
- Attention aux signes.



Exemple : N et C sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Ces deux points ont donc même abscisse et des ordonnées opposées.

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

CORRIGES (Chapitre 10)

Exercice 1

Tableau 1

Réel x	0	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	π	$-\frac{5\pi}{6}$
Point	A	C	B'	G	K	M	H	L	A'	I

Tableau 2

Point	N	E	K	J	B	D	M	F
Réel x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\sin(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 2

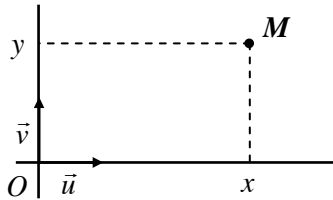
Réel x	π	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$
$\cos(x)$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Chapitre 11 : LES NOMBRES COMPLEXES

I Du repérage dans le plan aux nombres complexes

Tout point M du plan peut être repéré par ses coordonnées **cartésiennes** $(x; y)$ ou **polaires** $[r; \theta]$.

On décide de faciliter ce repérage en utilisant un nombre unique z , appelé **nombre complexe**, s'écrivant sous deux formes possibles, à l'aide d'un nouveau nombre **non réel** noté i .



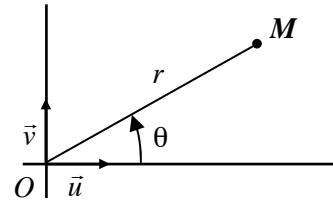
M est connu par ses coordonnées cartésiennes

z est défini par son écriture **algébrique**

$$z = x + i y$$

L'abscisse x est la **partie réelle** de z

L'ordonnée y est la **partie imaginaire** de z



M est connu par ses coordonnées polaires

z est défini par son écriture **exponentielle**

$$z = r e^{i\theta}$$

r est le **module** de z (r est la distance OM)

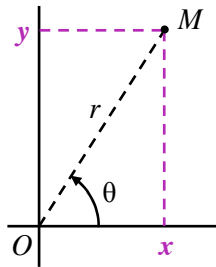
θ est un **argument** de z (θ est une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}, \vec{OM})$)

M est l'**image** de z et z s'appelle l'**affixe** de M

II Passage d'une écriture à l'autre

On connaît r et θ .
On cherche x et y .

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$



Exemple : $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ($r = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$)

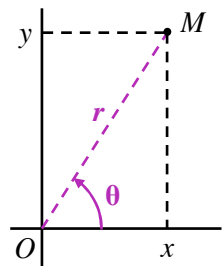
$$x = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$y = 2 \sin \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\text{d'où : } z = 1 + i\sqrt{3}$$

On connaît x et y .
On cherche r et θ .

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \theta &= \frac{x}{r} \text{ et } \sin \theta = \frac{y}{r} \end{aligned}$$



Exemple : $z = 1 + i$ ($x = 1$ et $y = 1$)

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{d'où : } z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

III Calculs avec les nombres complexes

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

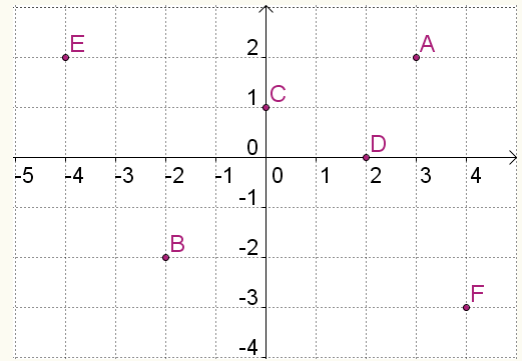
Les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ (addition, soustraction, multiplication) sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$ avec la condition $i^2 = -1$

EXERCICES (Chapitre 11)

Exercice 1

Déterminer graphiquement les coordonnées cartésiennes des points A, B, C, D, E et F représentés ci-contre.

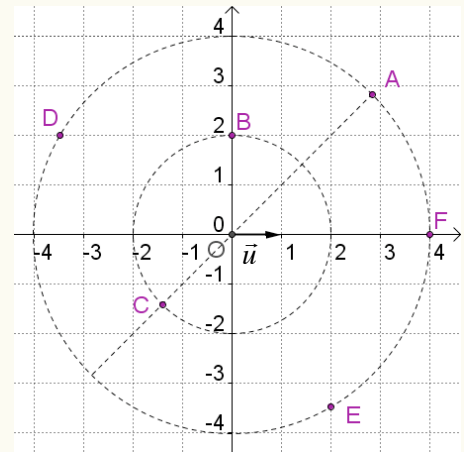
En déduire les affixes de ces points sous forme algébrique.



Exercice 2

Déterminer graphiquement les coordonnées polaires des points A, B, C, D, E et F représentés ci-contre.

En déduire les affixes de ces points sous forme exponentielle.



Exercice 3

1. Placer dans le plan complexe les points A, B, C, D et E dont les affixes respectives sont :

$$z_1 = 2 + 3i ; z_2 = -3i ; z_3 = 1 - i ; z_4 = -4 + 2i ; z_5 = 2$$

2. Placer dans le plan complexe les points F, G, H, I et J dont les affixes respectives sont

$$z_6 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} ; z_7 = e^{i\frac{\pi}{3}} ; z_8 = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} ; z_9 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} ; z_{10} = \frac{1}{2}e^{i\pi}$$

Exercice 4

1. Déterminer la partie réelle x et la partie imaginaire y des nombres suivants, puis leur écriture algébrique :

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} ; z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{6}} ; z_3 = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} ; z_4 = e^{i\pi}.$$

2. Déterminer le module r et un argument θ des nombres suivants, puis leur écriture exponentielle :

$$z_1 = 1 - i ; z_2 = -1 + i\sqrt{3} ; z_3 = -2i$$

Exercice 5

Soit $z = 2 + 3i$ et $z' = 1 - i$. Calculer : $3z$; $-z'$; $z + z'$; $z - z'$; $2z - 5z'$; zz' ; z^2 .

INDICATIONS (Chapitre 11)

Exercice 1

Par lecture graphique, le point A a pour coordonnées $(3; 2)$.

Donc l'affixe de A est le nombre complexe de partie réelle $x = 3$ et de partie imaginaire $y = 2$: $z_A = 3 + 2i$

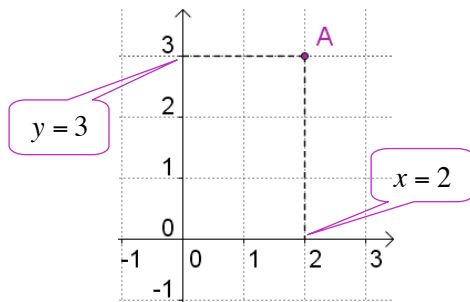
Exercice 2

Le point A est sur le cercle de centre O et de rayon 4 donc $OA = 4$ et une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$ est $\frac{\pi}{4}$.

Le point A a donc pour coordonnées polaires : $r = 4$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$: l'affixe de A est $z_A = 4 \times e^{i\frac{\pi}{4}}$

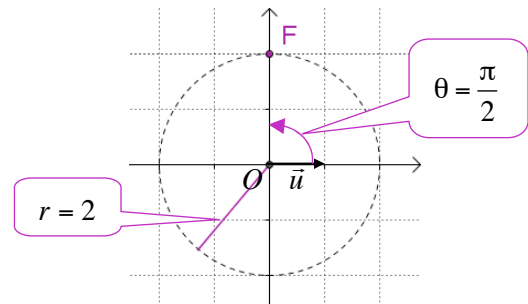
Exercice 3

1. L'image de $z_1 = 2 + 3i$ est le point A de coordonnées $(2; 3)$.



2. L'image de $z_6 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ est le point F de coordonnées polaires $r = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.

F est sur le cercle de centre O et de rayon 2, et une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OF})$ est $\frac{\pi}{2}$.



Exercice 4

1. $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$: on calcule x et y .

$$r = 2 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ d'où } \begin{cases} x = r \cos \theta = 2 \times \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ y = r \sin \theta = 2 \times \sin \frac{\pi}{2} = 2 \end{cases} \text{ donc } z_1 = 0 + 2i \text{ soit } z_1 = 2i$$

2. $z_1 = 1 - i$: $x = 1$ et $y = -1$. On calcule r et θ :

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ et } \left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \text{ donc } \theta = -\frac{\pi}{4} \text{ d'où } z = \sqrt{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

Exercice 5

$$3z = 3 \times (2 + 3i) = 6 + 9i$$

$$z + z' = (2 + 3i) + (1 - i) = 2 + 3i + 1 - i = 3 + 2i$$

$$z^2 = (2 + 3i)^2 = 2^2 + 2 \times 6i + (3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$$

CORRIGES (Chapitre 11)

Exercice 1

$$A(3; 2), B(-2; -2), C(0; 1), D(2; 0), E(-4; 2), F(4; -3)$$

$$z_A = 3 + 2i, z_B = -2 - 2i, z_C = i, z_D = 2, z_E = -4 + 2i, z_F = 4 - 3i$$

Exercice 2

Pour A : $r = 4$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$ donc $z_A = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

Pour B : $r = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ donc $z_B = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

Pour C : $r = 2$ et $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ donc $z_C = 2e^{i(-\frac{3\pi}{4})}$

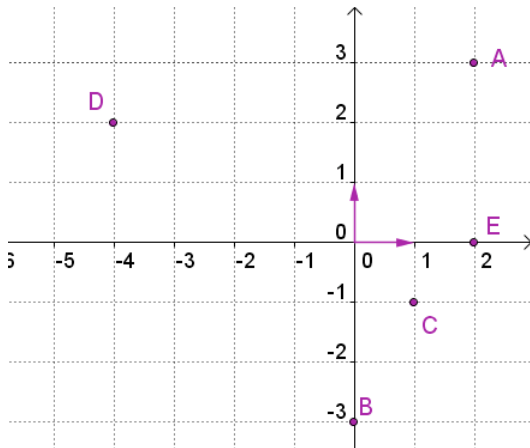
Pour D : $r = 4$ et $\theta = \frac{5\pi}{6}$ donc $z_D = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Pour E : $r = 4$ et $\theta = -\frac{\pi}{3}$ donc $z_E = 4e^{i(-\frac{\pi}{3})}$

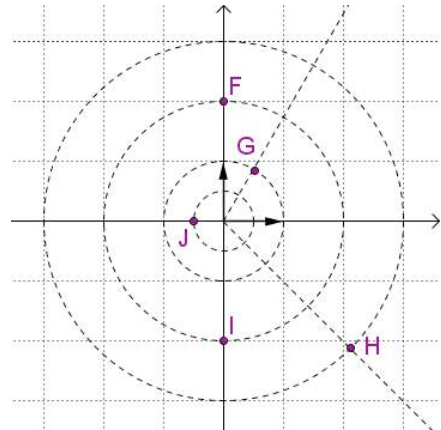
Pour F : $r = 4$ et $\theta = 0$ donc $z_F = 4e^{i0}$

Exercice 3

1. A, B, C, D et E sont les images respectives des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4 et z_5 .



2. F, G, H, I et J sont les images respectives des nombres complexes z_6, z_7, z_8, z_9 et z_{10}



Exercice 4

1. $z_1 = 2i, z_2 = 2\sqrt{3} + 2i, z_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{3\sqrt{2}}{2}, z_4 = -1$.

2. $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}, z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}, z_3 = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 5

$$3z = 6 + 9i, -z' = -1 + i, z + z' = 3 + 2i, z - z' = 1 + 4i, 2z - 5z' = -1 + 11i$$

$$zz' = 5 + i, z^2 = -5 + 12i$$

Chapitre 12 : FONCTION DERIVEE

A toute fonction f définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, on associe une **nouvelle fonction** appelée **fonction dérivée** de f et notée f' .

Toutes les formules encadrées sont à savoir par coeur.

I Dérivées des fonctions usuelles

si $f(x) =$	alors $f'(x) =$
k (k nombre réel)	0
$ax + b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

II Opérations

u et v sont des fonctions de dérivées u' et v' .

Formules	Exemples
$(u + v)' = u' + v'$	Si $f(x) = x^2 + 5x$ alors $f'(x) = 2x + 5$
$(u - v)' = u' - v'$	Si $f(x) = \sin x - x$ alors $f'(x) = \cos x - 1$
$(ku)' = ku'$ (k réel)	Si $f(x) = 2\cos x$ alors $f'(x) = 2 \times (-\sin x) = -2\sin x$
$(uv)' = u'v + uv'$	Si $f(x) = xe^x$ alors $f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (1 + x)e^x$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{2x+5}{x-3}$ alors $f'(x) = \frac{2 \times (x-3) - (2x+5) \times 1}{(x-3)^2} = \frac{-11}{(x-3)^2}$

EXERCICES (Chapitre 12)

Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes, reconnaître la ou les formule(s) de dérivation à utiliser pour calculer sa dérivée en se ramenant aux fonctions usuelles.

Cocher la bonne case et, dans le cas où plusieurs formules sont nécessaires, mettre un numéro d'ordre dans les bonnes cases. On ne demande pas de calculer la dérivée.

La première ligne constitue un exemple.

<i>Fonction</i> \ <i>Formules</i>	$(u+v)'$	$(u-v)'$	$(ku)'$	$(uv)'$	$\left(\frac{u}{v}\right)'$
$f(x) = \frac{x}{2x+1} - 3$		(1)			(2)
$g(x) = x^2 + \sin x$					
$h(x) = 2x^3 - e^x$					
$i(x) = \frac{3x+2}{x^2+1}$					
$j(x) = 3\ln(x)$					
$k(x) = xe^x$					
$l(x) = \frac{1}{3x-4}$					

Exercice 2

Q.C.M. Pour chaque fonction, trois dérivées sont proposées.

Donner la ou les bonne(s) réponse(s).

	A	B	C
1. $f(x) = 2x + 1$	$f'(x) = 2x$	$f'(x) = 3$	$f'(x) = 2$
2. $g(x) = 2x^3 - x^2 + 1$	$g'(x) = 4x^2 - 2x + 1$	$g'(x) = 6x^2 - 2x$	$g'(x) = 6x^2 - 2x + 1$
3. $h(x) = 3x - \cos x$	$h'(x) = 3 - \sin x$	$h'(x) = 3 + \sin x$	$h'(x) = 3 + \cos x$
4. $i(x) = e^x + 2x^2$	$i'(x) = e^x + 4x$	$i'(x) = e + 4x$	$i'(x) = xe^x + 4x$
5. $j(x) = \frac{2x+3}{x-1}$	$j'(x) = \frac{4x+1}{(x-1)^2}$	$j'(x) = \frac{2(x-1) - (2x+3)}{(x-1)^2}$	$j'(x) = \frac{-5}{(x-1)^2}$
6. $k(x) = xe^x$	$k'(x) = 1 \times e^x$	$k'(x) = (x+1)e^x$	$k'(x) = 1 \times e^x + xe^x$
7. $l(x) = 2\ln(x) + 5$	$l'(x) = \frac{2}{x} + 5$	$l'(x) = \frac{2}{x}$	$l'(x) = -\frac{2}{x}$

Exercice 3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes (donner le résultat sous une forme simplifiée) :

$$f(x) = 0,3x^2 - 1,2x + 0,32$$

$$g(x) = (2x-3)e^x$$

$$h(x) = \frac{2x-7}{x^2+1}$$

INDICATIONS (Chapitre 12)

Exercice 1

Pour reconnaître la nature d'une expression (somme, produit...) se rapporter au chapitre 3.

$$f(x) = \frac{x}{2x+1} - 3.$$

$f(x)$ est une différence donc on utilise la formule $(u - v)'$.

Le premier terme $\frac{x}{2x+1}$ est un quotient donc on utilise la formule $\left(\frac{u}{v}\right)'$.

Réponse : on utilise successivement les formules $(u - v)'$ puis $\left(\frac{u}{v}\right)'$.

Remarque : si on effectue les calculs, on obtient : $f'(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$.

$$g(x) = x^2 + \sin x.$$

$g(x)$ est une somme donc on utilise la formule $(u + v)'$.

Réponse : on utilise la formule $(u + v)'$.

Exercice 2

1. $f(x) = 2x + 1$ donc $f(x) = ax + b$ avec $a = 2$ et $b = 1$.

2. $g(x)$ est une somme de trois termes : on dérive donc « terme à terme » : $(u + v + w)' = u' + v' + w'$.

3. Attention aux signes !

5. $j(x) = \frac{2x+3}{x-1} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 2x+3$ et $v(x) = x-1$. D'où : $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 1$.

Ici, deux réponses sont exactes, l'une n'est pas simplifiée, l'autre l'est (la forme simplifiée est préférable).

Remarque : il est souvent inutile de développer le dénominateur.

Exercice 3

$$g(x) = (2x - 3)e^x = u(x) \times v(x) \text{ où } u(x) = 2x - 3 \text{ et } v(x) = e^x.$$

Penser à factoriser le résultat.

$$h \text{ est un quotient : utiliser } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

CORRIGES (Chapitre 12)

Exercice 1

<i>Fonction</i> \ <i>Formules</i>	$(u+v)'$	$(u-v)'$	$(ku)'$	$(uv)'$	$\left(\frac{u}{v}\right)'$
$g(x) = x^2 + \sin x$	(1)				
$h(x) = 2x^3 - e^x$		(1)	(2)		
$i(x) = \frac{3x+2}{x^2+1}$	(2)				(1)
$j(x) = 3\ln(x)$			(1)		
$k(x) = xe^x$				(1)	
$l(x) = \frac{1}{3x-4}$					(1)

Exercice 2

- 1 Réponse C
- 2 Réponse B
- 3 Réponse B
- 4 Réponse A
- 5 Réponses B et C
- 6 Réponses B et C
- 7 Réponse B

Exercice 3

$$f'(x) = 0,3 \times 2x - 1,2 \times 1 = 0,6x - 1,2$$

$$g'(x) = 2 \times e^x + e^x \times (2x-3) = 2e^x + (2x-3)e^x = (2+2x-3)e^x = (2x-1)e^x$$

$$h'(x) = \frac{2 \times (x^2+1) - (2x-7) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2+14x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+14x+2}{(x^2+1)^2}$$

Chapitre 13 : NOMBRE DERIVE ET TANGENTE

I Tangente à une courbe

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3.$$

On donne sa représentation graphique.

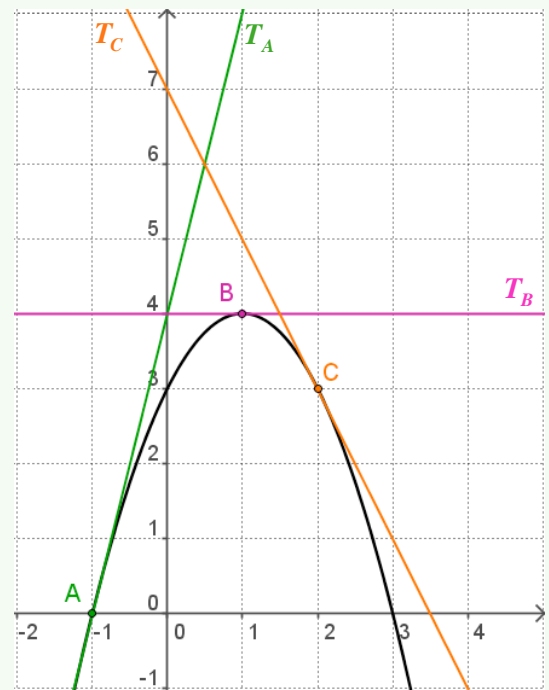
On a tracé les **tangentes** T_A , T_B et T_C à la courbe aux points A d'abscisse -1 , B d'abscisse 1 et C d'abscisse 2 .

Par lecture graphique (voir chapitre 4),

T_A a pour coefficient directeur 4 ,

T_B a pour coefficient directeur 0 ,

T_C a pour coefficient directeur -2 .



II Nombre dérivé

Dans l'exemple précédent, $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

On peut calculer sa fonction dérivée f' (voir chapitre 12) : $f'(x) = -2x + 2$.

Le nombre dérivé de f en -1 est $f'(-1) = -2 \times (-1) + 2 = 4$.

Le nombre dérivé de f en 1 est $f'(1) = -2 \times 1 + 2 = 0$.

Le nombre dérivé de f en 2 est $f'(2) = -2 \times 2 + 2 = -2$.

III Lien entre nombre dérivé et tangente

Dans l'exemple, on constate que :

Le nombre dérivé de f en -1 est égal au coefficient directeur de la tangente au point A d'abscisse -1 ,

Le nombre dérivé de f en 1 est égal au coefficient directeur de la tangente au point B d'abscisse 1 ,

Le nombre dérivé de f en 2 est égal au coefficient directeur de la tangente au point C d'abscisse 2 .

Dans le cas général, on retiendra :

Si f est une fonction définie sur un intervalle I , f' sa fonction dérivée et x_A un réel de I , alors
le nombre dérivé de f en x_A est $f'(x_A)$.

Le nombre dérivé $f'(x_A)$ est le coefficient directeur de la tangente
à la courbe de f au point d'abscisse x_A .

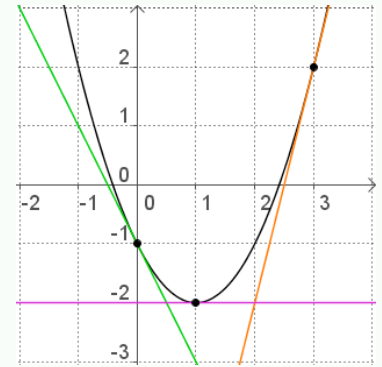
EXERCICES (Chapitre 13)

Exercice 1

On donne la courbe représentant une fonction f et les tangentes à cette courbe aux points d'abscisses 0, 1 et 3.

Indiquer si les égalités et inégalités suivantes sont vraies ou fausses.

	A	B	C	D
1	$f(1) = 0$	$f(0) = -1$	$f(3) = 4$	$f(2) > 0$
2	$f'(1) = -2$	$f'(0) = 1$	$f'(3) = 4$	$f'(2) > 0$

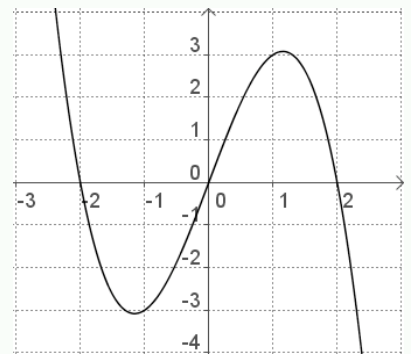


Exercice 2

On donne la courbe représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x^3 + 4x.$$

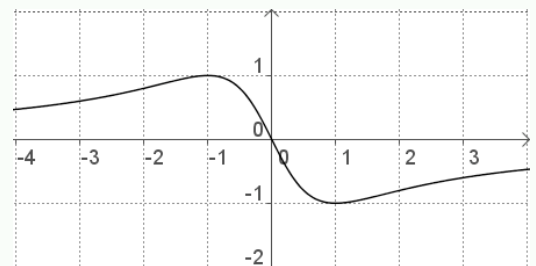
1. Calculer $f'(x)$, puis le nombre dérivé $f'(1)$.
2. Tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.
3. Donner une équation de cette tangente.



Exercice 3

On donne la courbe représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-2x}{x^2 + 1}$

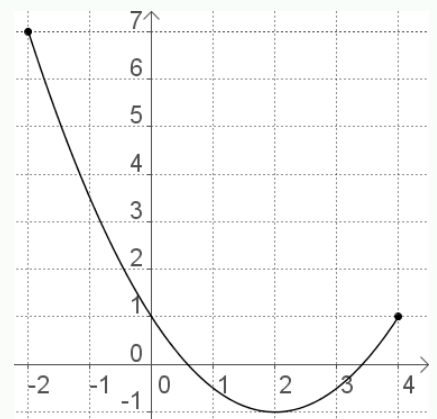
1. Calculer $f'(x)$, puis le nombre dérivé $f'(1)$.
2. Tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.
3. Donner une équation de cette tangente.



Exercice 4

La courbe ci-contre représente la fonction f définie sur l'intervalle $[-2; 4]$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

1. A partir du graphique, dresser le tableau de variation de f .
2. a) Calculer $f'(x)$.
b) Etablir le tableau de signe de $f'(x)$ sur $[-2; 4]$.
3. Quel lien peut-on faire entre les deux tableaux ?



INDICATIONS (Chapitre 13)

Exercice 1

- Ne pas confondre $f(1)$ et $f'(1)$.
 $f(1)$ est l'ordonnée du point d'abscisse 1.
 $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1.
- Le coefficient directeur d'une droite est positif si cette droite « monte ».
Le coefficient directeur d'une droite est négatif si cette droite « descend ».

Exercice 2

3. On peut déterminer l'équation de la tangente par lecture graphique.
On peut aussi déterminer l'équation de cette tangente par calcul :
le point A d'abscisse $x_A = 1$ a pour ordonnée $y_A = f(1)$,
la tangente en A a une équation de la forme $y = ax + b$ où le coefficient directeur est $a = f'(1)$,
on calcule b en écrivant que cette tangente passe par le point A : $y_A = ax_A + b$.

Exercice 3

1. Pour calculer $f'(x)$, on utilisera la formule donnant la dérivée d'un quotient : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
(voir chapitre 12).

Exercice 4

2. Pour établir le tableau de signe revoir le chapitre 6 : $f'(x)$ est de la forme $ax + b$.

CORRIGES (Chapitre 13)

Exercice 1

1 A est **fausse** : la courbe passe par le point de coordonnées $(1; -2)$ donc $f(1) = -2$.

1 B est **vraie** car la courbe passe par le point de coordonnées $(0; -1)$.

1 C est **fausse** : $f(3) = 2$.

1 D est **fausse** : $f(2) = -1$.

2 A est **fausse** : la tangente au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(1) = 0$.

2 B est **fausse** : la tangente au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur -2 donc $f'(0) = -2$.

2 C est **vraie**.

2 D est **vraie** : la tangente au point d'abscisse 2 a un coefficient directeur positif.

Exercice 2

1. $f'(x) = -3x^2 + 4$, d'où $f'(1) = -3 \times 1^2 + 4 = 1$.

2. Le point de la courbe d'abscisse 1 a pour ordonnée $f(1) = 3$.

La tangente cherchée est la droite passant par $A(1; 3)$ de coefficient directeur $f'(1) = 1$.

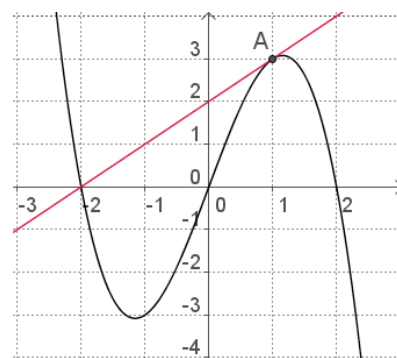
3. Par lecture graphique, cette tangente a pour équation $y = x + 2$.

Par le calcul :

La tangente ayant pour coefficient directeur $f'(1) = 1$, son équation est de la forme $y = 1x + b$ soit $y = x + b$.

Elle passe par le point $A(1; 3)$ donc $3 = 1 + b$, d'où $b = 2$.

La tangente a donc pour équation $y = x + 2$.



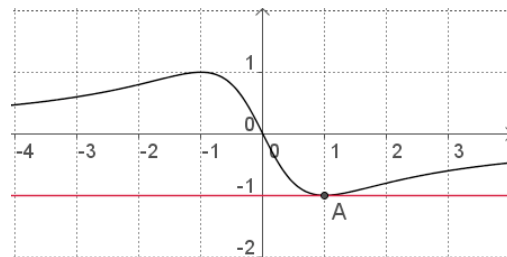
Exercice 3

1. $f'(x) = \frac{-2(x^2 + 1) - (-2x) \times (2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2 + 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2}$, d'où $f'(1) = \frac{2 \times 1^2 - 2}{(1^2 + 1)^2} = 0$.

2. Le point de la courbe d'abscisse 1 a pour ordonnée $f(1) = -1$.

La tangente cherchée est la droite passant par $A(1; -1)$ de coefficient directeur $f'(1) = 0$; elle est parallèle à l'axe des abscisses.

3. Cette tangente a pour équation $y = -1$.



Exercice 4

1.

x	-2	2	4
variations de f	7	↘ -1	↗ 1

2. $f'(x) = x - 2$.

x	-2	2	4
signe de $f'(x)$	-	0	+

3. On constate que : Sur l'intervalle $[-2; 2]$, la fonction f est décroissante et sa dérivée f' est négative.
Sur l'intervalle $[2; 4]$, la fonction f est croissante et sa dérivée f' est positive.

Chapitre 14 : ETUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION

I Lien entre signe de la dérivée et variation d'une fonction

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, f' sa fonction dérivée :

f' est positive sur I si et seulement si f est croissante sur I .

f' est négative sur I si et seulement si f est décroissante sur I .

II Etude des variations d'une fonction

Exemple : étude des variations de la fonction f définie sur $[-1; 2]$ par $f(x) = 2x^3 + x^2 - 8x$.

L'étude des variations d'une fonction s'effectue en trois étapes :

- **Calcul de la dérivée** : $f'(x) = 6x^2 + 2x - 8$.
- **Etude du signe de la dérivée** : $6x^2 + 2x - 8$ est un polynôme du second degré.
On cherche ses racines et on dresse son tableau de signe (voir chapitre 7).

Le discriminant est $\Delta = 196$. Les racines sont $-\frac{4}{3}$ et 1

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	-1	1	2	$+\infty$
signe de $6x^2 + 2x - 8$	+	0	-	0	+	

- **Tableau de variation** :

Le signe de la dérivée donne le sens de variation de f sur $[-1; 2]$.

On calcule les valeurs exactes de $f(-1)$, $f(1)$ et $f(2)$.

x	-1	1	2
signe de $f'(x)$	-	0	+
variation de f	7 ↘	-5	↗ 4

III Tracé de la courbe représentative

Exemple : Tracé de la courbe représentant la fonction f définie sur $[-1; 2]$ par $f(x) = 2x^3 + x^2 - 8x$ dans un repère orthogonal.

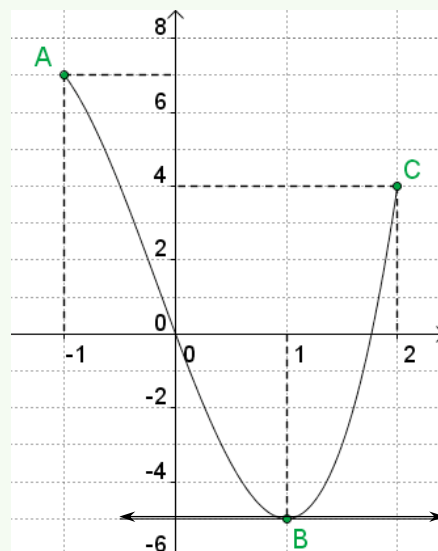
On place les éléments qui apparaissent dans le tableau de variation :

- les points $A(-1; 7)$, $B(1; -5)$ et $C(2; 4)$,
- la tangente à la courbe en B d'abscisse 1 qui est horizontale.

On complète en calculant les coordonnées d'autres points de la courbe avec la calculatrice

x	$f(x)$
-1	7
-0.5	4
0	0
0.5	-3.5
1	-5
1.5	-3
2	4

On peut ensuite tracer la courbe en concordance avec le tableau de variation.

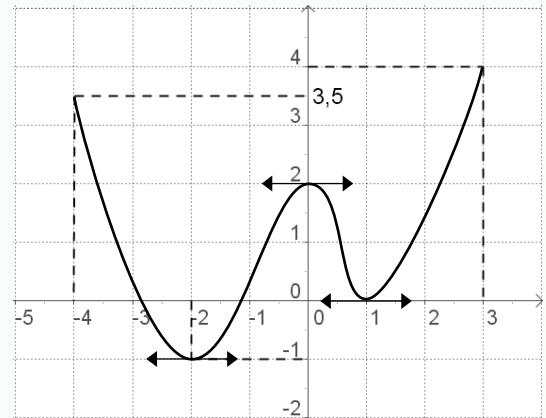


EXERCICES (CHAPITRE 14)

Exercice 1

La fonction f est donnée par sa courbe.

1. Préciser sur quel(s) intervalle(s), $f'(x)$ est positif.
2. Préciser sur quel(s) intervalle(s), $f'(x)$ est négatif.



Exercice 2

Associer chaque courbe à son tableau de variation puis compléter ce tableau de variation par lecture graphique.

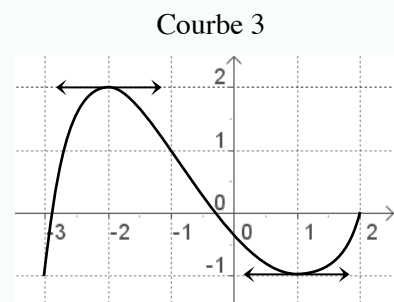
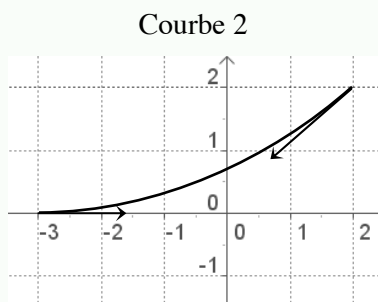
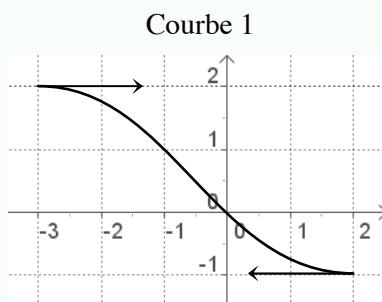


Tableau A

x	-3	-2	1	2
signe de $f'(x)$				
$f(x)$				

Tableau B

x	-3	2
signe de $f'(x)$	0	+
$f(x)$		

Tableau C

x	-3	2
signe de $f'(x)$	0	- 0
$f(x)$		

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[-2 ; 2,5]$ par $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[-2 ; 2,5]$.
3. En déduire le tableau de variation de f sur $[-2 ; 2,5]$.
4. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

INDICATIONS (CHAPITRE 14)

Exercice 1

Sur l'intervalle $[-2; 0]$, la fonction f est croissante donc $f'(x)$ est positive sur $[-2; 0]$.

Exercice 2

- Compléter la ligne « signe de $f'(x)$ » avec $+$, $-$ ou 0 .
Compléter la ligne « $f(x)$ » avec des flèches et des valeurs.
- La courbe 1 est associée au tableau C car elle représente la seule fonction décroissante sur tout l'intervalle $[-3; 2]$.

Exercice 3

- Montrer que $f'(x) = 3x^2 - 3$.
- $f'(x)$ est un polynôme du second degré dont on déterminera les racines.
Pour étudier le signe de $f'(x)$, on pourra se rapporter au chapitre 7 (polynôme du second degré).
- Il faudra compléter le tableau suivant :

x	-2	-1	1	2,5
$f'(x)$				
$f(x)$				

- Placer les éléments qui apparaissent dans le tableau de variation.
Compléter en calculant avec la calculatrice les coordonnées d'autres points de la courbe, par exemple les points d'abscisses $-1,5$; 0 ; 2 .
Tracer ensuite la courbe.

CORRIGES (CHAPITRE 14)

Exercice 1

$f'(x)$ est positif sur $[-2; 0]$ et sur $[1; 3]$.

$f'(x)$ est négatif sur $[-4; -2]$ et sur $[0; 1]$.

Exercice 2

Courbe 1 : tableau C

x	-3	2
signe de $f'(x)$	0	- 0
$f(x)$	$2 \searrow -1$	

Courbe 2 : tableau B

x	-3	2
signe de $f'(x)$	0	+
$f(x)$	$0 \nearrow 2$	

Courbe 3 : tableau A

x	-3	-2	1	2
signe de $f'(x)$	+	0	- 0	+
$f(x)$	$-1 \nearrow 2 \searrow -1 \nearrow 0$			

Exercice 3

1. Calcul de la fonction dérivée de f

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

2. Etude du signe de f'

$f'(x)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont -1 et 1 .

Signe de ce polynôme selon les valeurs de x :

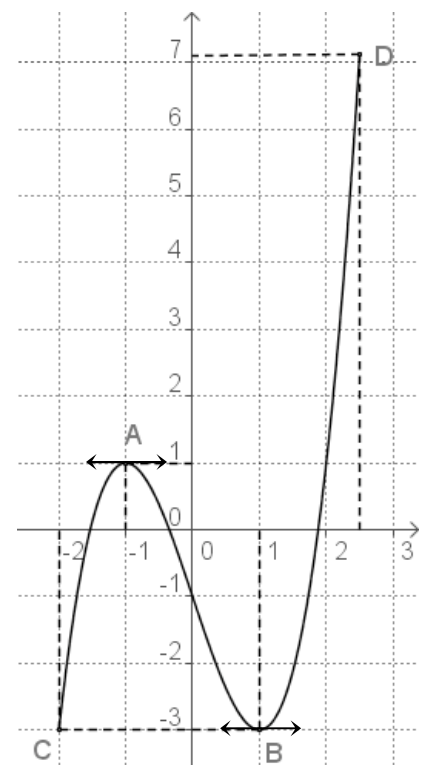
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$(x-1)(x+1)$	+	0	- 0	+

On en déduit que f' est positive sur $[-2; -1]$, négative sur $[-1; 1]$ et positive sur $[1; 2,5]$.

3. Tableau de variation de f

x	-2	-1	1	2,5
$f'(x)$	+	0	- 0	+
$f(x)$	$-3 \nearrow 1 \searrow -3 \nearrow 7,125$			

4. Tracé de la courbe de f



AUTEURS : Jacques CHAZAL, Annette CORPART,
Thierry DURAND, Clara LAMARTINE,
Nelly LASSALLE, Nadine PIALOUX,
Gisèle PROVOST.

TITRE : Le B.A. BA des maths avant une STS.

EDITEUR : IREM de Clermont-Ferrand.

DATE : Juin 2010.

PUBLIC CONCERNE : Futurs étudiants en section de technicien supérieur du
secteur industriel.
Enseignants des lycées technologiques et professionnels.

RESUME : L'objectif est de permettre une révision, avant la rentrée, des
notions essentielles de Mathématiques, pour appréhender les
différents savoirs mis en place pendant les deux années de
préparation au BTS.

MOTS CLES : Pré requis STS - Fonctions – Dérivées - Calcul numérique -
Calcul algébrique - Nombres Complexes - Outils lycée.

FORMAT A4 : 60 pages.