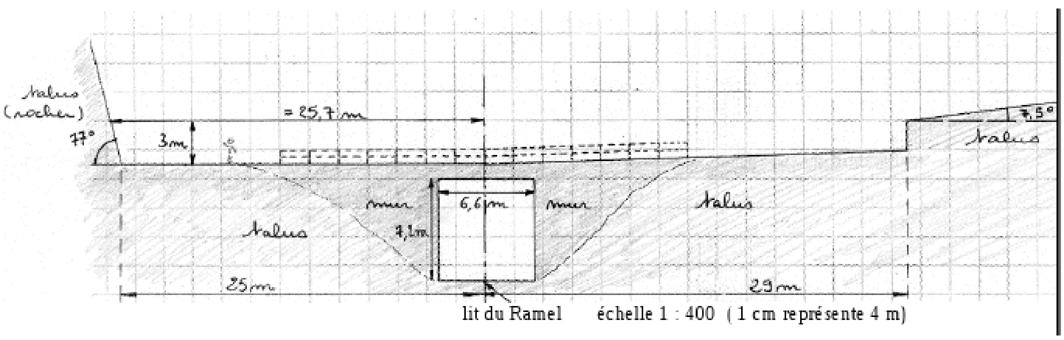
IREM Clermont-Ferrand

Mathématiques et développement durable

Christophe Pêtre

avec la collaboration de

Guy Dugour, Alex Esbelin, Malika More, Bernard Vialaneix



Institut de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques - Complexe scientifique des Cézeaux,
63177 AUBIERE cedex - Tél. : 04.73.40.98, Fax : 04.73.40.70.78 - irem@univ-bpclermont.fr
http ://wwwmaths.univ-bpclermont.fr/irem/

Table des matières

Préambule

L'enseignement des mathématiques concourt à la formation intellectuelle et citoyenne des élèves. Dans cette perspective, il se doit de prendre appui sur des thématiques propres à notre société. C'est dans cet esprit que Christophe Pêtre a conçu ce fascicule : proposer des activités de questionnement et de réflexion en mathématiques à partir de thématiques liées au développement durable. Ces différentes activités prenant appui pour la plupart sur des problèmes de sciences visent à motiver l'acquisition de compétences décrites dans les programmes des classes de collège et de lycées.

"..., pour un élève, acquérir une compétence, ce n'est pas seulement "comprendre", c'est faire du sens à partir d'éléments qui le concernent" (Gérard De Vecchi).

Créer un pont entre les disciplines scientifiques, articuler l'enseignement des mathématiques, des sciences physiques et chimiques et des sciences de la vie et de la terre, proposer des passerelles entre les matières afin d'aider les élèves à mieux appréhender certaines démarches scientifiques, tels sont les objectifs à atteindre et défis à relever par les professeurs de collège et de lycées. Gageons que cette brochure leur permettra de mener à bien ces projets et de garantir une formation mathématique et scientifique des élèves cohérente !

Claire MARLIAS

IEN Mathématiques-Sciences Physiques et Chimiques

Problème 1 : Installation d'éoliennes en Haute-Loire

Classes	Thèmes	Objectif
• Collège • Seconde	• Energie éolienne • Proportionnalité	• Conversions d'unités, échelle • Géométrie dans le plan et dans l'espace

- **Problème :**

  L'installation d'éoliennes de grande taille (avec des pales montant à environ 120 m au dessus du sol) au voisinage du bourg de Fix-Saint-Geneys, entre Clermont-Ferrand et Le-Puy-en-Velay, nécessite de staisfaire des contraintes techniques et environnementales. On veut comparer la production d'énergie d'un parc d'éoliennes satisfaisant ces contraintes par rapport à la consommation régionale.

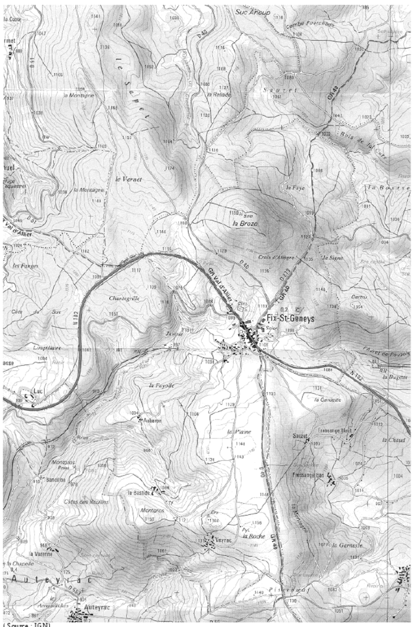
- **Données :**

  ⋆ Pour respecter la réglementation sur le bruit, des éoliennes de grande taille devraient être placées à :
  - ○ au moins 800 m des habitations situées en zone calme *pour ne pas créer de nuisances sonores* ;
  - ○ au moins 200 m des habitations situées près d'un axe routier à fort trafic (la RN 102) *pour éviter les accidents de circulation en cas de rupture d'une pale.*

  ⋆ Elles peuvent être installées dans les bois (elles dépassent largement les plus grands arbres).

  ⋆ Elles sont généralement installées à une distance d'au moins 250 m les unes des autres

  ⋆ Dans le secteur considéré, le vent dominant provient du nord-ouest.



(Source : IGN)

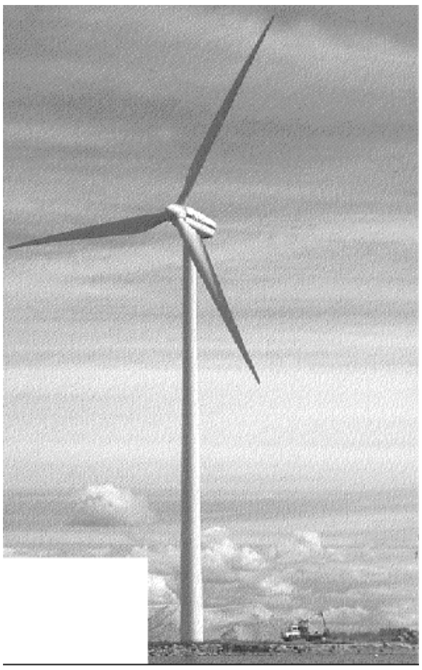
Questions :

1. **Hauteur d'une éolienne par rapport à un bâtiment connu :**

   (a) Le bâtiment des cours du collège Jean Monnet d'Yssingeaux comporte 3 étages et un rez-de-chaussée donc 4 niveaux de 3,5 m chacun. Quelle est la hauteur de ce bâtiment ?

   (b) Combien de fois une éolienne, dont les pales montent à 120 m au dessus du sol, est-elle plus haute que ce bâtiment du collège ? Combien de niveaux devrait avoir ce bâtiment pour être aussi haut qu'une telle éolienne ?

   (c) Représenter, sur la photographie ci-dessous, ce bâtiment (d'environ 38 m de long) et vous, à côté d'une telle éolienne.



   (d) Les pales des éoliennes qui vont être installées en mer atteindront 200 m au dessus de la surface de l'eau. Représenter à côté de la photographie ci-dessus une telle éolienne. Combien de niveaux devrait avoir ce bâtiment pour être aussi haut ?

2. **Distance entre habitations et éoliennes :** L'échelle de la carte jointe est 1 : 25000.

   (a) Compléter les phrases suivantes :

   - 1 cm sur la carte représente .... cm dans la réalité (............ m dans la réalité).
   - 2 cm sur la carte représentent .... m dans la réalité.
   - 4 cm sur la carte représentent .... m dans la réalité (............ km dans la réalité).

   - .... cm (............ mm) sur la carte représentent 100 m dans la réalité.
   - .... cm (............ mm) sur la carte représentent 200 m dans la réalité.
   - .... mm sur la carte représentent 10 m dans la réalité.

   (b) Tracer sur la carte jointe (au crayon à papier et sans appuyer) les zones situées à plus de 1000 m d'altitude sur lesquelles pourraient être installées des éoliennes.

   (c) En respectant les contraintes d'installation énoncées plus haut, implanter une dizaine d'éoliennes sur une ligne perpendiculaire à la direction du vent afin que les éoliennes ne se protègent pas entre elles du vent.

3. **Intérêt énergétique et environnemental :**

   (a) Sachant qu'une éolienne de 120 m de haut a une puissance maximale d'environ 2 MW (ou 2000 kW) et peut fonctionner en Haute Loire à cette puissance pendant l'équivalent de 2400 heures par an (et ne fonctionne pas le reste de l'année), combien de kWh une telle éolienne peut-elle fournir par an ?

   (b) Les 60 millions de français consommant 400 milliards de kWh électriques par an, combien de kWh sont nécessaires par français et par an ?
   Rappel : quantité d'énergie (en kWh) = puissance (en kW) $\times$ durée (en h)

   (c) Le parc éolien que vous avez implanté pourraient produire l'énergie électrique consommée par combien de personnes ?

   (d) Environ 150 éoliennes de grande taille sont actuellement en projet en Haute Loire. Ces 150 éoliennes pourraient produire l'énergie électrique consommée par combien de personnes ?

   (e) La Haute-Loire comprend environ 210 000 habitants. Ces 150 éoliennes pourraient produire l'énergie électrique consommée par quel pourcentage des habitants de ce département ?

4. **Relief au voisinage du site :** Afin de vous rendre compte si le site est suffisamment élevé par rapport aux environs, réaliser une coupe Nord-sud et une coupe Est-Ouest passant par un site où est implantée une éolienne. Y dessiner quelques éoliennes à l'échelle.
   Rappel : .... mm sur la carte représente 10 m dans la réalité. La courbe de niveau marquée 1050 est l'ensemble des points situés à 1050 m d'altitude c'est à dire à 1050 m au dessus du niveau de la mer.

Correction du problème 1 : Installation d'éoliennes en Haute-Loire

1. **Hauteur d'une éolienne par rapport à un bâtiment connu :**
   (a) 14 m

   (b) $\frac{120}{14} \approx 8,57$

   (d) $\frac{200}{3,5} \approx 57,1$ niveaux

2. **Distance entre habitations et éoliennes :**

   L'échelle de la carte jointe est 1 : 25 000, c'est-à-dire que les dimensions sur la carte sont 25 000 fois plus petites que les dimensions dans la réalité.

   (a) Compléter les phrases suivantes :

   - 1 cm sur la carte représente 25 000 cm dans la réalité (= 250 m dans la réalité).
   - 2 cm sur la carte représentent 500 m dans la réalité.
   - 4 cm sur la carte représentent 1 000 m dans la réalité (= 1 km dans la réalité).
   - 0,4 cm (= 4 mm) sur la carte représente 100 m dans la réalité.
   - 0,8 cm (= 8 mm) sur la carte représente 200 m dans la réalité.
   - 0,4 mm sur la carte représente 10 m dans la réalité.

3. **Intérêt énergétique et environnemental :**

   (a) $2400 \times 2000 = 4\ 800\ 000$ kWh.an^{-1}

   (b) $\frac{400.10^9}{60.10^6} \approx 6700 kWh$.hab^{-1}.an^{-1}

   (d) $\frac{150 \times 4\ 800\ 000}{6700} \approx 107\ 500$ habitants

   (e) 51%

Problème 2 : Comparaison de gisements éoliens

Classes	**Thèmes**	**Objectif**
• Troisième • Seconde	• Energie éolienne • Grandeurs produits, fonctions	• Application de formules

- **Problème :** On veut comparer la production énergétique de deux gisements éoliens suivant la vitesse du vent dans chacun des deux sites.

- **Données :**

  Soient les deux gisements éoliens suivants :

  ⋆ site A : le vent souffle durant 2400 heures par an à exactement 10 m.s^{-1}, et ne souffle pas durant le restant de l'année.

  ⋆ site B : le vent souffle durant 1200 heures par an à exactement 20 m.s^{-1}, et ne souffle pas durant le restant de l'année.

- **Notes :**

  ⋆ $$\begin{array}{rcl} \text{Quantité d'énergie (en kWh)} & = & \text{puissance (en kW)} \times \text{durée (en h)} \\ E & = & P \times t \end{array}$$

  ⋆ La puissance cinétique théorique P d'un fluide en mouvement, traversant une section S à la vitesse v, est proportionnelle au cube de la vitesse de ce fluide :

  $$P = \frac{1}{2}\rho_{\text{fluide}}\, S\, v^3$$

  avec la puissance P en W, la masse volumique de l'air ρ_{fluide} en kg.m^{-3}, la section S en m^2 et la vitesse v en m.s^{-1}.

Questions :

1. Dans lequel des deux gisements la vitesse moyenne du vent est elle la plus élevée ?

2. Lequel des deux gisements produit annuellement le plus d'énergie ?

Correction du problème 2 : Comparaison de gisements éoliens

1. Les vitesses moyennes des 2 gisements sont égales.

2. On n'a pas besoin de calculer des valeurs numériques des grandeurs en jeu, il suffit de savoir que si la vitesse du fluide est doublée, alors sa puissance est multipliée par $2^3 = 8$.

   $$\begin{array}{rcl} \text{Quantité d'énergie (en kWh)} & = & \text{puissance (en kW)} \times \text{durée (en h)} \\ E & = & P \times t \end{array}$$

   Pour le gisement 1 : $E_1 = P_1 \times t_1$;
   pour le gisement 2 : $E_2 = P_2 \times t_2$.

   Or $P_2 = 8P_1$ et $t_2 = 0,5t_1$, donc $E_2 = 8P_1 \times 0,5t_1 = 4E_1$.

   Le gisement 2 produit 4 fois plus d'énergie par an que le gisement 1.

   Conclusion : la puissance n'est donc pas croissante avec la valeur moyenne de la vitesse du vent.

Problème 3 : Alimentation des véhicules européens grâce au solaire à concentration

Classes	Thèmes	Objectif
• Quatrième • Troisième • Seconde	• Energie solaire • Pourcentages • Racines carrées	• sens des opérations • relation entre aire et longueur du côté d'un carré

- **Problème :**

  On se propose de calculer les surfaces que devraient occuper des centrales thermosolaires dans le Sahara pour alimenter en électricité les véhicules roulant en France, en Europe, dans le Monde.

- **Données :**

  ⋆ Un véhicule à moteur thermique (à essence ou diesel) a un rendement d'environ 15% (source : Institut Français du Pétrole).
  ⋆ Un véhicule électrique a un rendement d'environ 75%.
  ⋆ La consommation annuelle actuelle (avec des moteurs exclusivement thermiques) pour les transports en France est d'environ 600 TWh.
  ⋆ La consommation annuelle actuelle (avec des moteurs exclusivement thermiques) pour les transports en Europe est d'environ 4800 TWh.
  ⋆ La consommation annuelle actuelle (avec des moteurs exclusivement thermiques) pour les transports dans le Monde est d'environ 24000 TWh.
  ⋆ Les pertes dans les lignes électriques à très haute tension en courant continu (HVDC) sont de l'ordre de 9% pour 3000 km de ligne (entre le Sahara et la zone moyenne de consommation en Europe).
  ⋆ 7 km^2 de surface sur le sol du Sahara permettent avec les technologies actuelles de produire 1 TWh d'énergie électrique.

  Sources : http ://www.electron-economy.org/ et http ://www.trec-france.org.

Questions :

1. **France.**

   Quelle surface de centrales thermosolaires serait nécessaire dans le Sahara pour alimenter en électricité les véhicules roulant en France ? Quelle serait la longueur du côté du carré ayant cette surface ?

2. **Europe**

   Quelle surface de centrales thermosolaires serait nécessaire dans le Sahara pour alimenter en électricité les véhicules roulant en Europe ? Quelle serait la longueur du côté du carré ayant cette surface ? De combien cette longueur est-elle plus grande que celle obtenue à la première question ?

3. **Monde**

   Quelle surface de centrales thermosolaires serait nécessaire dans le Sahara pour alimenter en électricité les véhicules roulant dans le Monde ? Quelle serait la longueur du côté du carré ayant cette surface ? De combien cette longueur est-elle plus grande que celle obtenue à la première question ?

Correction du problème 3 : Alimentation des véhicules européens grâce au solaire à concentration

1. **France**

   Il faudrait produire $\frac{600}{5} = 120$ TWh.an^{-1} livrés en France car le rendement serait quintuplé (75% au lieu de 15%).
   Pour compenser les pertes dans le transport, il faudra donc produire $\frac{120}{0{,}91} \approx 132$ TWh.an^{-1} dans le Sahara ;
   La surface de sol du Sahara utilisée doit mesurer au moins $132 \ \times 7 = 923$ km^2.
   Comme $\sqrt{923} \approx 30,4$ km, un carré d'environ 30 km de côté dans le Sahara permettrait d'alimenter, avec les technologies actuelles, tous les véhicules circulant en France.

2. **Europe**

   Il faut une surface 8 fois plus grande, soit 7384 km^2.
   Comme $30,4 \times \sqrt{8} \approx 86$ km, un carré de 86 km de côté dans le Sahara permettrait d'alimenter, avec les technologies actuelles, tous les véhicules circulant en Europe.

3. **Monde**

   Il faut une surface 40 fois plus grande, soit 36920 km^2.
   Comme $30,4 \times \sqrt{40} \approx 192,3$ km, un carré d'environ 192 km de côté dans le Sahara permettrait d'alimenter, avec les technologies actuelles, tous les véhicules circulant dans le Monde.

Remarques :

- Le véhicule électrique à batteries semble en bonne voie pour remplacer les véhicules à moteurs thermiques d'ici 1 à 2 décennies. Le nombre de modèles proposés croît de façon très forte depuis 2008.
- L'éolien en mer pourrait aussi convenir : le projet « Dubbed Zeekracht », impliquant 7 pays limitrophes de la mer du Nord, propose de créer un gigantesque anneau de parcs éoliens dans cette mer, capable de produire 13 400 TWh.an^{-1} d'énergie électrique. La consommation électrique de l'Union Européenne à 27 membres était de 2700 TWh.an^{-1} en 2009.
  Source : http ://energiesdelamer.blogspot.com
- La consommation électrique mondiale en 2006 a été de 18 000 TWh. Un carré de 370 km de coté en centrales thermosolaires, soit 1,5% de la surface du Sahara (la surface de ce désert est d'environ 9 millions de km^2), permettrait de répondre à cette demande.

Problème 4 : Flux solaire entrant par des baies vitrées

Classes	**Thèmes**	**Objectif**
• Terminale • BTS	• Energie solaire • Calcul intégral	• Pratique du calcul intégral

- **Problème :**

  Une baie vitrée orientée au Sud laisse-t'elle entrer plus d'énergie sous forme de rayonnement solaire qu'elle n'en laisse perdre sous forme de chaleur ?

- **Données :**

  ⋆ On considère une habitation bénéficiant de 21 m^2 de vitrages sur sa façade orientée au Sud.

  ⋆ Si cette habitation est située à la latitude 45° nord (comme au Puy en Velay), chaque m^2 de ces vitrages reçoivent fin décembre lors d'une journée ensoleillée de 7 h 45 à 16 h 15 un flux solaire global donné par la fonction $\varphi(t)$ de $t \in [0\,;30600]$ défini par :

  $$\varphi(t) = 658,4 \sin\left(\frac{\pi}{30\,600}t\right)$$

  où $\varphi(t)$ est exprimé en Watt W (ou en J/s) et où le temps t est mesuré en secondes s à partir de 7h45 pris comme instant initial.

  ⋆ Ce flux solaire est la somme du flux solaire direct, du flux solaire diffus et du flux solaire réfléchi par le sol. (La détermination de $\varphi(t)$ est exposée dans le problème « Eclairement solaire global » de ce fascicule.)

- **Notes :**

  ⋆ Quantité d'énergie (en J) = puissance (en W) × durée (en s)
  ⋆ Une puissance ou un flux est un débit d'énergie.
  ⋆ Des doubles vitrages 4/12/4 mm à isolation renforcée, avec gaz rare, laissent passer environ 65 % du flux solaire incident.
  ⋆ 1 Wh = 3600 J.

Questions :

1. Représenter graphiquement la fonction $\varphi(t)$ pour $t \in [0\,;30600]$ puis déterminer la quantité d'énergie solaire (en J puis en kWh) atteignant, au cours d'une journée de fin décembre ensoleillée, l'intérieur de cette habitation si les vitrages au sud laissent passer 65 % du flux solaire incident.

2. Combien d'heures de chauffage permettra cette quantité de flux solaire, transformée en chaleur si la puissance thermique nécessaire est de 4 kW (avec une maison type « très basse énergie ou passive » et si la température extérieure est de 0 °C) ?

Correction du problème 4 : Flux solaire entrant par des baies vitrées

1. La quantité d'énergie (en J) entrant par 1 m^2 de baies pendant la durée très courte dt est 0,65 $\varphi(t)\mathrm{d}t$ puisque $\varphi(t)$ est en $\mathrm{J.s}^{-1}$.

   La quantité de flux solaire atteignant l'intérieur de cette habitation est alors

$$\begin{aligned} E &= 0,65 \times 21 \int_0^{30600} \varphi(t)\mathrm{d}t \\ &= 0,65 \times 21 \int_0^{30600} 658,4 \sin\left(\tfrac{\pi}{30\,600}t\right) \mathrm{d}t \\ &= 0,65 \times 21 \times 658,4 \times \left[\tfrac{30\,600}{\pi} \cos\left(\tfrac{\pi}{30\,600}t\right)\right]_0^{30600} \\ &= 0,65 \times 21 \times 658,4 \times \tfrac{30\,600}{\pi} \times 2 \\ &\approx 175\,074\,955 \text{ J.jour}^{-1} \end{aligned}$$

   soit environ 48,6 $\mathrm{kWh.jour}^{-1}$.

2. $\frac{48,6}{4} \approx 12$ h.
   48,6 kWh est la quantité de chaleur nécessaire pour combler des pertes thermiques de 4 kW (ou 4 $\mathrm{kJ.s}^{-1}$) pendant environ 12 heures.

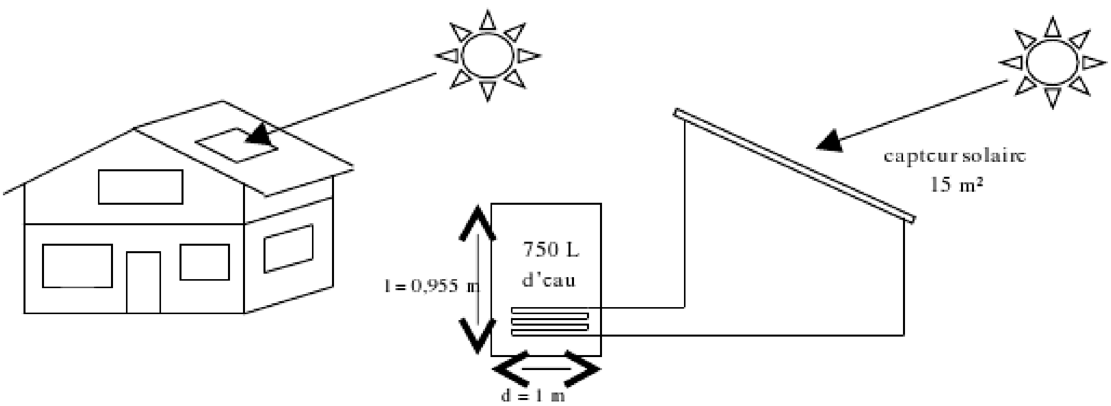
- **Remarques :**
  - ⋆ Un vitrage 4/12/4 mm à isolation renforcée, avec gaz rare, laisse passer environ 1,5 $\mathrm{W.m}^{-2}.°\mathrm{C}^{-1}$; un mur bien isolé seulement 0,15 $\mathrm{W.m}^{-2}.°\mathrm{C}^{-1}$. Le surplus de déperditions thermiques dû à la forte présence de baies vitrées est (1,5 - 0,15) × 21 × (19 - 0) = 539 W ou 539 $\mathrm{J.s}^{-1}$.
  - ⋆ Pendant 24 heures, ce surplus de déperditions entraîne une surconsommation de 0,539 × 24 × 13 kWh, qui est bien inférieure aux 48,6 kWh gagnés. Cette conclusion reste valable même en tenant compte des journées sans soleil. Avec les vitrages isolants actuels, il est établi que l'on a intérêt à vitrer le plus possible les façades sud pour diminuer la consommation énergétique des bâtiments.
  - ⋆ Pour éviter que cette habitation ne subisse une surchauffe durant la journée et un refroidissement rapide en début de nuit, il est conseillé qu'elle dispose d'une isolation par l'extérieur de murs à forte inertie (en brique, béton, pierre . . .) ainsi que d'une dalle lourde.

Problème 5 : Capteur solaire à eau

Classes	**Thèmes**	**Objectif**
• Terminale • BTS	• Energie solaire • Fontion sinus	• Modélisation utilisant une fonction circulaire • Calcul de primitives

- **Problème :**

  Un capteur solaire à eau est situé sur le toit d'une maison. On se propose d'étudier son apport énergétique au chauffage de la maison au cours d'une journée.



- **Méthode :**

  En première approximation, nous pouvons considérer que :
  ⋆ Le rendement de ce capteur reste constant.
  ⋆ Le flux solaire arrivant sur le capteur est sinusoïdal (une justification de ce modèle est donnée dans le problème 7).

- **Données :**

  ⋆ Le capteur a un rendement proche de 45%, une aire de 15 m^2.
  ⋆ La journée se situe à la fin du mois de janvier où la température extérieure est de 0 °C avec toutefois du soleil de 7 h 00 à 17 h 00 dont le flux j atteint la valeur maximale 840 $W.m^{-2}$ à 12 h 00.
  ⋆ Le ballon de stockage de 750 L d'eau est situé dans un local où la température T_e reste égale à 18 °C.
  ⋆ La capacité calorifique de l'eau est $\rho_{\text{eau}} = 4185 J.(^{\circ}C)^{-1}.kg^{-1}$: il faut 4185 J pour élever la température de 1 kg d'eau de 1 °C.

Éléments à étudier :

1. **Le flux solaire.**
L'expression du flux solaire (en W.m^{-2}) sur une demi-période en fonction du temps t (en s) est :
$$\varphi(t) = M \sin(\alpha t)$$

- Donner, à l'aide des valeurs fournies, l'expression de $\varphi(t)$.

2. **Le chauffage du ballon.**
L'eau qui parcourt le capteur réchauffe l'eau du ballon de stockage. On appelle $Q(t)$ la quantité de chaleur fournie par le capteur à l'instant t.

- Donner l'expression de $Q(t)$ en fonction de $\varphi(t)$ et des valeurs fournies.

3. **Le chauffage de la maison.**
L'eau du ballon de stockage va parcourir le circuit des radiateurs ou du plancher chauffant.

On considère que le système de chauffage est arrêté durant la journée (la maison étant inoccupée ou seulement chauffée par le rayonnement solaire direct à travers les vitrages, de 7 h 00 à 17 h 00).

- Comment va évoluer la température T de l'eau du ballon si cette température est de 19 °C à 7 h 00 si on néglige les déperditions de chaleur à travers les parois du ballon ?
Rappel : quantité d'énergie (en J) = puissance (en W) × durée (en s)
- Quelle quantité d'énergie sera apportée par ce capteur durant cette journée (faire le calcul de deux manières différentes) ?
- Combien d'heures de chauffage permettra-t-elle alors si la puissance thermique nécessaire en soirée et durant la nuit est de 8,5 kW (maison moyennement isolée, neuve en 2005 par exemple, et température extérieure de 0 °C) ?

Correction du problème 5 : Capteur solaire à eau

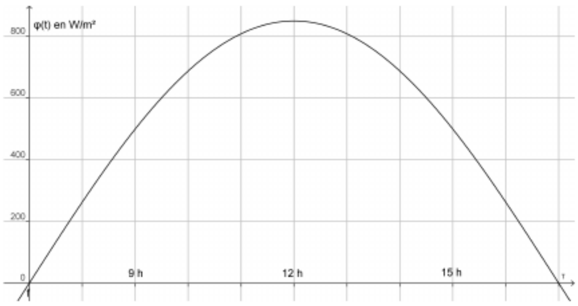
1. **Le flux solaire.**
   Le flux solaire (en W.m^{-2}) arrivant sur le capteur, le temps t étant exprimé en s, est

$$\varphi(t) = 840 \sin\left(\frac{\pi}{36\,000}t\right).$$

2. **Le chauffage du ballon.**
   $Q(t) = 0,45 \times 15 \times \varphi(t) = 5670 \sin\left(\frac{\pi}{36\,000}t\right)$.

3. **Le chauffage de la maison**
   On raisonne sur un intervalle de temps très court dt (en s).

   - $6,75\varphi(t) \times \mathrm{d}t$ = quantité de chaleur (> 0, en J) fournie par le capteur à l'eau du ballon pendant la durée dt.



   - On sait que : $750 \times c_{eau} \times (T(t+\mathrm{d}t) - T(t))$ = quantité de chaleur (> 0, en J) absorbée par les 750 kg d'eau du ballon lorsque leur température (moyenne) passe de $T(t)$ à $T(t + \mathrm{d}t)$ avec $c_{eau} = 4185$ J.°C^{-1}.kg^{-1}.

     Ainsi $750 \times 4185 \times (T(t + \mathrm{d}t) - T(t)) = 5670 \sin\left(\frac{\pi}{36\,000}t\right) \times \mathrm{d}t$

     soit $750 \times 4185 \times \frac{(T(t+\mathrm{d}t)-T(t))}{\mathrm{d}t} = 5670 \sin\left(\frac{\pi}{36\,000}t\right)$.

     D'où, avec dt infiniment petit, l'équation différentielle (E) du 1er ordre à coefficients constants :

$$(E) : 750 \times 4185 \times T'(t) = 5670 \sin\left(\frac{\pi}{36\,000}t\right)$$

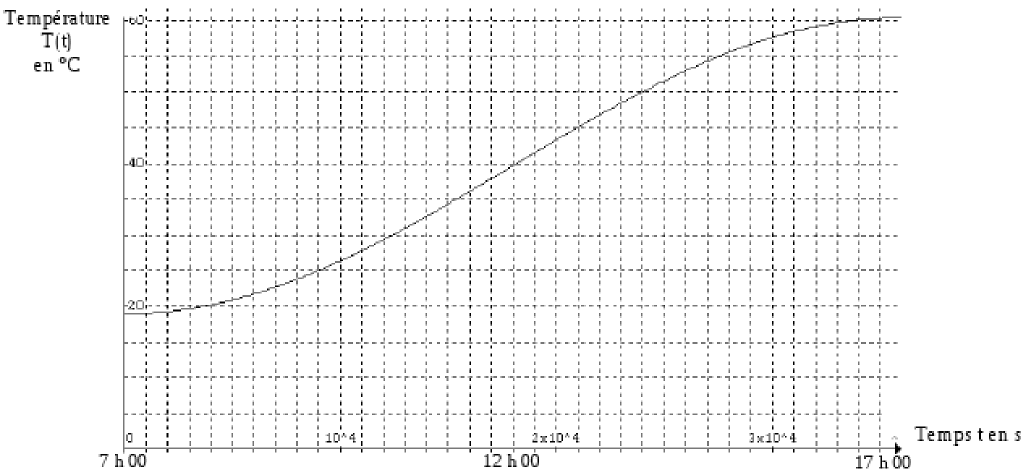
     (la vitesse de montée de T est proportionnelle au flux incident sinusoïdal)

$$(E) : T'(t) \approx 1,81 \times 10^{-3} \times \sin\left(\frac{\pi}{36\,000}t\right)$$

     d'où $T(t) \approx -1,81 \times 10^{-3} \times \frac{36\,000}{\pi} \times \cos\left(\frac{\pi}{36\,000}t\right) + K$

     Or $T(0) = 19 \Longrightarrow -1,81 \times 10^{-3} \times \frac{36\,000}{\pi} \times \cos\left(\frac{\pi}{36\,000} \times 0\right) + K \approx 19 \Longrightarrow K \approx 39,7$

     d'où $T(t) \approx -1,81 \times 10^{-3} \times \frac{36\,000}{\pi} \times \cos\left(\frac{\pi}{36\,000}t\right) + 39,7$ (avec $T(t)$ en °C et t en s)



$T(18000) \approx 39,7°\mathrm{C}$ = température (moyenne) de l'eau du ballon à 12 h 00.

$T(36000) \approx 60,4°\mathrm{C}$ = température (moyenne) de l'eau du ballon à 17 h 00.

- La quantité d'énergie apportée par ce capteur durant cette journée est :

$$\int_0^{36000} Q(t)\mathrm{d}t = \frac{40\,824 \times 10^4}{\pi} \approx 129\,947\,000 \text{ J} \approx 13 \times 10^7 \text{ J}$$

- 129 947 000 J représentent 129 947 000 / 3 600 000 ≈ 36,1 kWh, qui est la quantité d'énergie que fournirait une chaudière fonctionnant à la puissance de 8,5 kW pendant 36,1 / 8,5 ≈ 4,25 h (soit 17,7 % de 24 h).

  En schématisant, pour cette journée ensoleillée de la fin du mois de janvier, on peut dire que l'énergie solaire stockée durant la journée dans le ballon permet de chauffer la maison de 17 h 00 à 21 h 15.

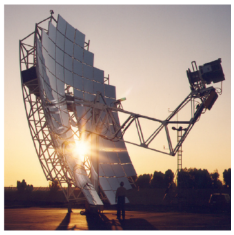
Remarques :

- Une chaudière (à gaz, à granulés de bois, ...) permet d'ajuster la température de l'eau du circuit de chauffage, mais de tels capteurs solaires (de 15 m^2) peuvent permettre de couvrir entre 30 % et 70 % des besoins annuels de chaleur (pour le chauffage et l'eau chaude) d'une maison normalement isolée en France selon sa situation géographique.

- Par ailleurs, et à titre d'exemples remarquables qui devrait se généraliser dans les bâtiments neufs d'ici 2020, des modèles de maisons très bien isolées, dites « maisons passives », de 200 m^2, parviennent à ne consommer que l'équivalent de 300 L de fioul par an. De telles maisons ne nécessitent alors qu'un capteur solaire pour la production d'eau chaude sanitaire (6 m^2 pour 4 personnes), aucun radiateur ou convecteur ou plancher chauffant n'y étant requis (*Source :* www.lamaisonpassive.fr).

Problème 6 : Paraboles solaires

Classes	**Thème**	**Objectif**
• Collège	• Energie solaire • Pourcentages, aires	• Pratique du calcul



- **Problème :**

  On veut comparer la production d'énergie d'un parc de paraboles solaires par rapport à la consommation régionale.

- **Données :**

  ⋆ On considère une centrale héliothermodynamique, constituée de concentrateurs solaires paraboliques, qui serait installée en Haute-Loire.

  ⋆ Un logiciel de calcul d'éclairement solaire direct (www.meteotest.fr) estime pour Yssingeaux, à 900 m d'altitude, un gisement d'ensoleillement direct normal (DNI) de 1206 kWh.m^{-2}.an^{-1} (soit 1206 kWh par an et par m^2 d'une surface plane orientée en permanence face au soleil). A titre de comparaison, le DNI est de 1800 kWh.m^{-2}.an^{-1} à Séville ou à Odeillo près de Font-Romeu dans les Pyrénées.

  ⋆ On considère que cette centrale solaire dispose d'une surface perpendiculaire au soleil de 1 km^2

  ⋆ L'énergie du rayonnement direct reçu par ces paraboles est concentrée vers des moteurs à cycle de Stirling qui en transforme environ 20 % en électricité et 80 % en chaleur.

Questions :

1. Calculer la quantité d'énergie électrique (en kWh.an^{-1}) que produirait annuellement une telle centrale.

2. Une famille de 4 personnes consomme environ 2500 kWh d'énergie électrique par an (sans chauffage électrique) ; cette centrale pourrait fournir l'électricité domestique de combien de personnes ?

   (a) Calculer la quantité d'énergie thermique ou chaleur (en kWh.an^{-1}) que produirait annuellement une telle centrale.

   (b) Une famille française de 4 personnes consomme environ 20 000 kWh de chaleur par an pour son chauffage dans un bâtiment neuf classique ; cette centrale pourrait fournir le chauffage domestique de combien de personnes ?

   (c) Une famille française de 4 personnes consomme en moyenne environ 2000 kWh de chaleur par an pour son chauffage dans un bâtiment « très basse énergie ou passif » ; cette centrale pourrait fournir le chauffage domestique de combien de telles personnes ?

Correction du problème 6 : Paraboles solaires à moteur Stirling

1. (a) $1206 \times 0{,}2 \times 1000^2 = 241\ 200\ 000$ kWh.an^{-1}.

   (b) $\frac{241\ 200\ 000}{2500} \times 4 = 385\ 920$ personnes.

2. (a) $1206 \times 0{,}8 \times 1000^2 = 964\ 800\ 000$ kWh.an^{-1}.

   (b) $\frac{964\ 800\ 000}{20000} \times 4 = 192\ 960$ personnes.

   (c) $\frac{964\ 800\ 000}{2000} \times 4 = 1\ 929\ 600$ personnes. On peut aussi raisonner par proportionnalité à partir du résultat précédent.

Problème 7 : Éclairement solaire global sur un plan au niveau du sol

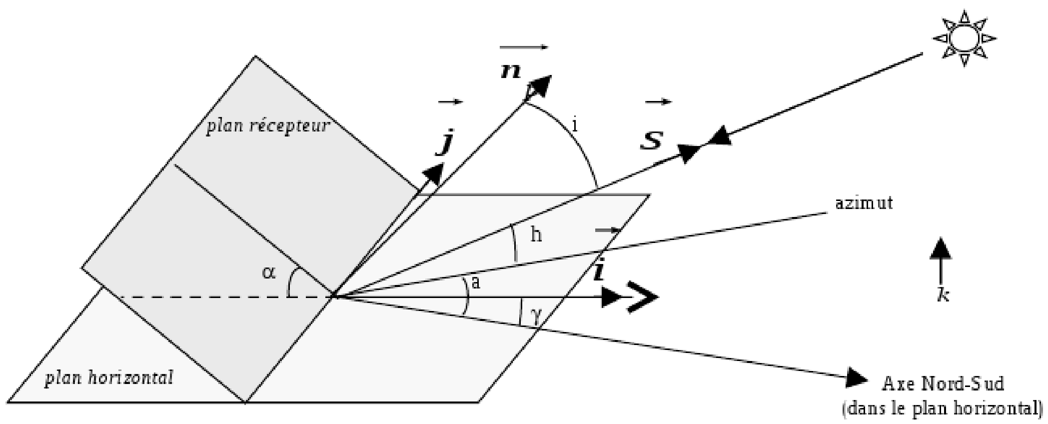
Classes	Thèmes	Objectif
• Terminale • BTS	• Energie solaire • Produit scalaire dans l'espace • Fonctions trigonométriques	• Géométrie dans l'espace • Modélisation par une fonctions trigonométriques

- **Problème :** On se propose de connaître, pour une journée ensoleillée, l'évolution de l'éclairement solaire global (en W.m^{-2}) sur un plan récepteur (baie vitrée, capteur solaire, ...) en fonction de la latitude du lieu, de l'inclinaison de ce plan, du jour de l'année et de l'heure de la journée.

  Cet éclairement global est la somme de l'éclairement direct, de l'éclairement diffus et de l'éclairement réfléchi par le sol.

- **Expression de l'éclairement direct.**

  On considère un plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal défini par le repère orthonormé $(O\ ;\vec{i};\vec{j})$, orienté d'un angle γ par rapport à l'axe Nord-Sud (voir le schéma ci-dessous). Le vecteur $\vec{k}$ est unitaire, vertical.



  ⋆ Les rayons solaires du rayonnement direct sont parallèles entre eux.

  ⋆ L'angle a entre la direction Nord-Sud et la projection orthogonale du rayonnement direct sur le plan horizontal est appelé l'*azimut* du soleil.

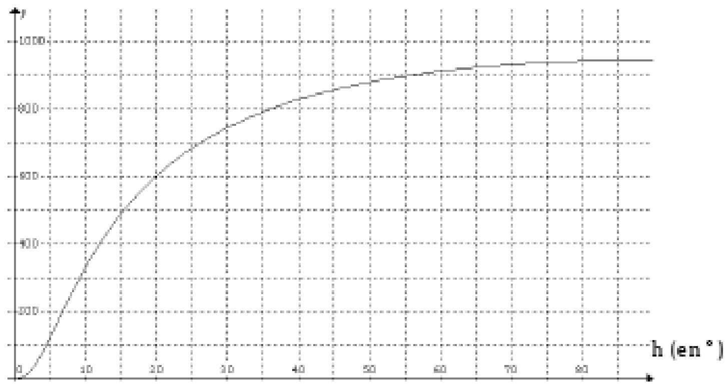
  ⋆ L'angle h, entre le rayonnement direct et cette même projection, est appelé la hauteur du soleil.

  ⋆ $\overrightarrow{n_P}$ est le vecteur unitaire normal au plan récepteur.

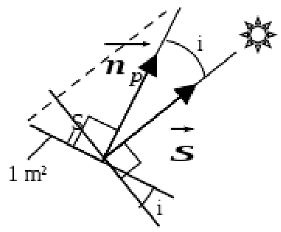
- ⋆ $\vec{s}$ est le vecteur unitaire ayant pour direction celle du rayonnement direct et de sens le sens inverse du rayonnement direct.
- ⋆ L'angle i, entre $\overrightarrow{n_P}$ et $\vec{s}$, est appelé l'angle d'incidence.
- ⋆ Lorsqu'il n'y a pas de nuages, l'éclairement solaire direct sur un plan *normal au rayonnement solaire* est donné par :

$$E_n = 1230\frac{-1}{e^{3,8\sin(h+1,6)}}$$

(en W.m^{-2}, avec h en degrés)



- ⋆ Pour une hauteur h et un azimut a du soleil donnés, connaître l'éclairement direct sur le plan récepteur nécessite la détermination de l'angle d'incidence i :

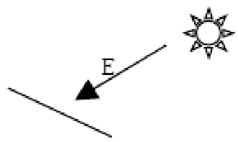


L'éclairement direct sur le plan récepteur (en W.m^{-2}) est $E_n \times \cos i$.

$\boxed{\textbf{Question :}}$ Exprimer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{n_P}$ et $\vec{s}$ dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, puis $\overrightarrow{n_P}\cdot\vec{s}$; En déduire $\cos i$ en fonction de a, h, α et γ .

- **Expression de l'éclairement global :**

L'éclairement solaire global (en W.m^{-2}) du plan récepteur est la somme de l'éclairement direct, de l'éclairement diffus (provenant de la voûte céleste) et de l'éclairement réfléchi par le sol.



⋆ L'éclairement direct est modélisé par $E_n \cos i$ avec $E_n = 1230\frac{-1}{e^{3,8\sin(h+1,6)}}$.

⋆ L'éclairement diffus est modélisé par $E_d\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)$ avec $E_d = 125(\sin h)^{0,4}$ (où h est en degrés).

⋆ Cet éclairement est maximal pour $\alpha = 0$ (le plan récepteur est horizontal).

⋆ L'éclairement réfléchi par le sol est modélisé par $0,2\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)(E_d + E_n \sin h)$.

⋆ Cet éclairement est maximal pour $\alpha = 90°$ (le plan récepteur est vertical) ; le coefficient 0,2 est l'albédo moyenne du sol.

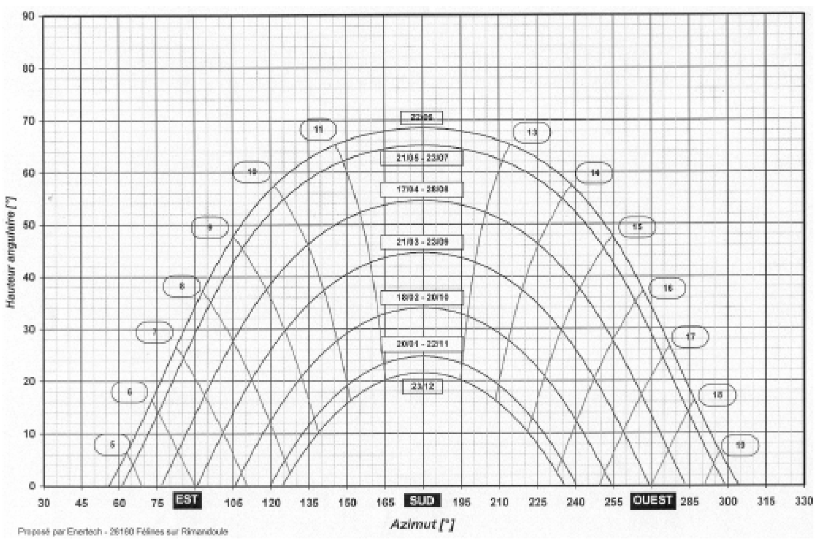
Ainsi l'éclairement solaire global (en W.m^{-2}) du plan récepteur est

$$E = E_n \cos i + E_d\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right) + 0,2\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)(E_d + E_n \sin h)$$

(en W.m^{-2}) avec $E_n = 1230\frac{-1}{e^{3,8\sin(h+1,6)}}$ et $E_d = 125(\sin h)^{0,4}$ (où h est en °).

- **Première application :** Éclairement solaire global de 1 m^2 de baies vitrées verticales ($\alpha = 90°$), orientées plein sud ($\gamma = 0$) lors d'un 23 décembre ensoleillé, à la latitude 45° nord (Le Puy en Velay, Grenoble).

On peut disposer des valeurs de a et h pour une latitude donnée, un jour et une heure donnée, notamment à partir du site de la société Enertech :



Trajectoires du soleil (latitude 45 °N)

Questions :

1. Avec $\alpha = 90°$ et $\gamma = 0$, que devient l'expression de $\cos i$ en fonction de h et a ? Aurait-on pu trouver cette expression simplement ? Si oui, comment ? Que devient l'expression de E ?

2. Remplir le tableau suivant :

t (en h)	t (en s)	h (en °)	a (en °)	E global (en W.m^{-2})	$658,5 \sin\left(\frac{\pi}{30600} t\right)$
7 h 45 min	0				
8 h	900	3	52,5		
8 h 30 min					
9 h					
9 h 30 min					
10 h		16	29		
10 h 30 min					
11 h					
11 h 30 min					
12 h					
12 h 30 min					
13 h					
13 h 30 min					
14 h					
14 h 30 min					
15 h					
15 h 30 min					
16 h					
16 h 15 min	30 600				

3. Représenter graphiquement l'éclairement global reçu E (en W.m^{-2}) en fonction du temps t (en s) pour cette journée.

4. Par quelle fonction assez simple pourrait-on modéliser E en fonction du temps t (en s) au cours de cette journée ?

5. À midi de ce 23 décembre, calculer l'éclairement direct, l'éclairement diffus et l'éclairement réfléchi par le sol (en W/m^2), reçus par les baies verticales au sud.

- **Seconde application :** Éclairement solaire global de 1 m^2 de capteur solaire plan à eau incliné de 30° par rapport à l'horizontale ($\alpha = 30°$), orientées plein sud ($\gamma = 0$) lors d'un 23 décembre ensoleillé, à la latitude 45° nord (Le Puy en Velay, Grenoble).

Questions :

1. Avec $\alpha = 30°$ et $\gamma = 0$, que devient l'expression de $\cos i$ en fonction de h et a ? Que devient l'expression de E ?

2. Remplir le tableau suivant :

t (en h)	t (en s)	h (en °)	a (en °)	E global (en $W.m^{-2}$)	$658,5 \sin\left(\frac{\pi}{30600} t\right)$
7 h 45 min	0				
8 h	900	3	52,5		
8 h 30 min					
9 h					
9 h 30 min					
10 h		16	29		
10 h 30 min					
11 h					
11 h 30 min					
12 h					
12 h 30 min					
13 h					
13 h 30 min					
14 h					
14 h 30 min					
15 h					
15 h 30 min					
16 h					
16 h 15 min	30 600				

3. Représenter graphiquement l'éclairement global reçu E (en $W.m^{-2}$) en fonction du temps t (en s) pour cette journée.

4. Par quelle fonction assez simple pourrait-on modéliser E en fonction du temps t (en s) au cours de cette journée ?

5. À midi de ce 23 décembre, calculer l'éclairement direct, l'éclairement diffus et l'éclairement réfléchi par le sol (en $W.m^{-2}$), reçus par ce capteur solaire.

Correction du problème 7 : Éclairement solaire global sur un plan au niveau du sol

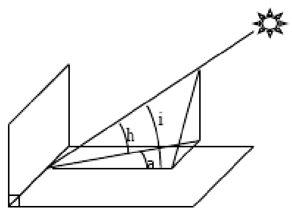
1. (a) Dans le repère orthonormé $(O\ ;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$,

$$\overrightarrow{n_P}\cdot\vec{s} = \begin{bmatrix}\cos(90-\alpha)\\ 0\\ \sin(90-\alpha)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos h\times\cos(a-\gamma)\\ \cos h\times\sin(a-\gamma)\\ \sin h\end{bmatrix} = 1\times 1\times\cos i$$

d'où $\cos i = \cos(90-\alpha)\cos h\cos(a-\gamma)+\sin(90-\alpha)\sin h$

$$\cos i = \sin\alpha\cos h\cos(a-\gamma)+\cos\alpha\sin h$$

2. (a) $\cos i = 1\cos h\cos a + 0 = \cos h\cos a$ que l'on peut trouver avec le schéma ci-dessous et en raisonnant dans les triangles rectangles.



$E = E_n\cos h\cos a + \frac{E_d}{2} + 0,1(E_d + E_n\sin h)$ (en W.m^{-2})

avec $E_n = 1230\frac{-1}{e^{3,8\sin(h+1,6)}}$ et $E_d = 125(\sin h)^{0,4}$

(b)

t (en h)	t (en s)	h (en °)	a (en °)	E global (en W.m^{-2})	$658,5\sin\left(\frac{\pi}{30600}t\right)$
7 h 45 min	0	0	55	0,06	0
8 h	900	3	52,5	51,5	60,5
8 h 30 min	2700	7	47	178	180
9 h	4500	10	41,5	288	293,5
9 h 30 min	6300	13,5	35	409	397
10 h	8100	16	29	492	486,5
10 h 30 min	9900	18,5	22,5	566,5	560
11 h	11700	20	15	615,5	614
11 h 30 min	13500	21	7,5	646	647
12 h	15300	21,5	0	658,5	658,5
12 h 30 min	17100	21	7,5	646	647
13 h	18900	20	15	615,5	614
13 h 30 min	20700	18,5	22,5	566,5	560
14 h	22500	16	29	492	486,5
14 h 30 min	24300	13,5	35	409	397
15 h	26100	10	41,5	288	293,5
15 h 30 min	27900	7	47	178	180
16 h	29700	3	52,5	51,5	60,5
16 h 15 min	30600	0	55	0,06	0

(d) On peut réaliser une très bonne approximation de E avec $E(t) = 658,5\sin\left(\frac{\pi}{30600}t\right)$.

(e) À midi du 23 décembre, chaque m^2 de baie vitrée verticale orientée plein sud à la latitude 45 °N, reçoit : un éclairement direct d'environ 585 W.m^{-2}, un éclairement diffus d'environ 42 W.m^{-2}, un éclairement réfléchi par le sol d'environ 31,5 W.m^{-2}, soit un total de 658,5 W.m^{-2}.

3. (a) $\cos i = \sin 30° \cos h \cos a + \cos 30° \sin h = 0,5 \cos h \cos a + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin h$.

$E = E_n(0,5\cos h\cos a + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin h) + E_d\left(\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right) + 0,2\left(\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right)(E_d + E_n \sin h)$ (en W.m^{-2})

avec $E_n = 1230\frac{-1}{e^{3,8\sin(h+1,6)}}$ et $E_d = 125(\sin h)^{0,4}$ (avec h en degré)

(b)

t (en h)	t (en s)	h (en °)	a (en °)	E global (en W.m^{-2})	$570\sin\left(\frac{\pi}{30600}t\right)$
7 h 45 min	0	0	55	0,03	0
8 h	900	3	52,5	52,5	52,5
8 h 30 min	2700	7	47	145,5	156
9 h	4500	10	41,5	232	254
9 h 30 min	6300	13,5	35	336,5	343,5
10 h	8100	16	29	412	421
10 h 30 min	9900	18,5	22,5	485	484,5
11 h	11700	20	15	531	531,5
11 h 30 min	13500	21	7,5	561	560,5
12 h	15300	21,5	0	574,5	570
12 h 30 min	17100	21	7,5	561	560,5
13 h	18900	20	15	531	531,5
13 h 30 min	20700	18,5	22,5	485	484,5
14 h	22500	16	29	412	421
14 h 30 min	24300	13,5	35	336,5	343,5
15 h	26100	10	41,5	232	254
15 h 30 min	27900	7	47	145,5	156
16 h	29700	3	52,5	52,5	52,5
16 h 15 min	30600	0	55	0,03	0

(d) On peut réaliser une bonne approximation (qui donne $\int_0^{30600} E(t)dt$ très proche) de E avec $E(t) = 570\sin\left(\frac{\pi}{30600}t\right)$.

(e) À midi du 23 décembre, chaque m^2 de baie vitrée verticale orientée plein sud à la latitude 45 °N, reçoit : un éclairement direct d'environ 492 W.m^{-2}, un éclairement diffus d'environ 78 W.m^{-2}, un éclairement réfléchi par le sol d'environ 4,2 W.m^{-2}, soit un total de 574,5 W.m^{-2}.

Sources :

- Institut National de l'Energie Solaire (INES Chambéry)
- Cours de thermique de l'INSA de Lyon

Problème 8 : Stockage de l'énergie consommée en une journée par une famille (version pour le collège)

Classes	Thèmes	Objectif
• collège • seconde	• Stockage de l'énergie • Equations	• Pratique du calcul littéral

Problème :

La consommation électrique moyenne journalière d'une famille de 4 personnes avoisine 8 kWh.jour^{-1} si cette famille n'utilise pas de chauffage électrique, mais utilise un congélateur et des appareils électriques de cuisson.

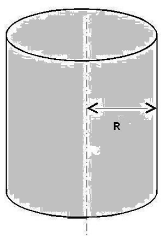
On pourrait envisager de stocker au niveau d'une habitation une partie de l'énergie électrique produite dans les centrales pendant la nuit (les « heures creuses ») pour l'utiliser pour les besoins domestiques pendant la journée. Ce procédé aurait l'avantage de pouvoir lisser la demande en énergie électrique sur 24 heures, optimisant ainsi sa production.

On envisage deux systèmes pour stocker 8 kWh :

- Stockage sous forme d'énergie potentielle de pesanteur :
  Un système de masse m (en kg) pouvant descendre d'une altitude h (en m) stocke et est capable de fournir une quantité d'énergie mécanique (en joules, symbole : J) $E_p = m \times g \times h$ (avec $g \approx 9,81 N$.kg^{-1} au voisinage de la Terre, valable même à 9000 m d'altitude).
- Stockage sous forme d'énergie cinétique de rotation :

  On peut démontrer que l'énergie cinétique E_c (en J) d'un cylindre de révolution plein de masse M (en kg) et de rayon R (en m) animé d'un mouvement de rotation autour de son axe à la vitesse angulaire n (en tour.s^{-1}) est :

$$E_c = \frac{1}{4} M R^2.(2\pi n)^2 = M(\pi n R)^2$$



Questions :

1. **Stockage sous forme d'énergie potentielle de pesanteur**

   a) De quelle hauteur devrait descendre un bloc de béton de 160 tonnes (soit environ 64 m^3) pour fournir 8 kWh d'énergie mécanique ? Rappel : 1 Wh = 3600 J
   b) De quelle hauteur devrait descendre un bloc de béton de 20 tonnes (soit environ 8 m^3) pour fournir 8 kWh d'énergie mécanique ?
   c) Comment varie h si m est triplée ?
   d) Un tel système semble-t-il facile à mettre en place pour une habitation ?

2. **Stockage sous forme d'énergie cinétique de rotation**

   On considère un cylindre de révolution plein en acier de 50 cm de rayon, 2 m de hauteur. La masse volumique ρ de l'acier est d'environ 7800 kg.m^{-3}.

   a) A quelle vitesse (en tours.s^{-1}) doit tourner ce cylindre autour de son axe de révolution afin de posséder une énergie cinétique de 8 kWh ?
   b) Comment varie M si n est multipliée par 10 (à R constant) ?
   c) Un tel système semble-t-il facile à mettre en place pour une habitation ?

Correction du problème 8 : Stockage de l'énergie consommée en une journée par une famille (version pour le collège)

1. **Stockage sous forme d'énergie potentielle de pesanteur**

   (a) $160000 \times 9,81 \times h = 8 \times 3600000$ donc $h \approx 18,35$ m

   (b) $20000 \times 9,81 \times h = 8 \times 3600000$ donc $h \approx$ 146,8 m

   (c) h est divisée par 3.

   (d) non, les masses de matériau et les hauteurs requises sont assez énormes pour une famille de 4 personnes.

2. **Stockage sous forme d'énergie cinétique de rotation**

   (a) $E_c = M(\pi n R)^2 = 8 \times 3\ 600\ 000$ donc $\pi R^2 h \rho \pi^2 n^2 R^2 = 28\ 800\ 000$ donc $h\rho\pi^3 n^2 R^4 = 28\ 800\ 000$

   $$n^2 = \frac{28\ 800\ 000}{h\rho\pi^3 R^4} = \frac{28\ 800\ 000}{2 \times 7800 \times \pi^3 \times 0,5^4}$$

   $n \approx 30,86$ tours.s^{-1} soit $n \approx 1852$ tours.min^{-1}.

   (b) M est divisée par 100.

   (c) Seulement si n est élevée afin d'avoir M faible, mais cela requiert une technologie de pointe, en cours de développement. Des recherches sont actuellement menées sur des volants d'inertie pour installations domestiques tournant à des vitesse très élevées (dépassant 10 000 tr .min^{-1} pour réduire leur encombrement) mais avec des matériaux nécessairement plus résistants que l'acier et des formes optimisées. Ces volants tournent dans le vide et sur des paliers magnétiques pour réduire les pertes par frottements.

Problème 9 : Stockage de l'énergie consommée en une journée par une famille (version pour le lycée)

Classes	Thèmes	Objectif
• Terminale • BTS	• Stockage de l'énergie • Équations, calcul intégral	• Pratique du calcul algébrique et intégral • Modélisation utilisant une fonction circulaire

• **Problème :** La consommation électrique moyenne journalière d'une famille de 4 personnes avoisine 8 kWh.jour^{-1} si cette famille n'utilise pas de chauffage électrique, mais utilise un congélateur et des appareils électriques de cuisson. On pourrait envisager de stocker au niveau d'une habitation une partie de l'énergie électrique produite dans les centrales pendant la nuit (les « heures creuses ») pour l'utiliser pour les besoins domestiques pendant la journée. Ce procédé aurait l'avantage de pouvoir lisser la demande en énergie électrique sur 24 heures, optimisant ainsi sa production. On envisage trois systèmes qui permettrait de stocker 8 kWh.

- Stockage sous forme d'énergie potentielle de pesanteur ;
- Stockage sous forme d'énergie cinétique de rotation ;
- Stockage sous forme d'énergie potentielle élastique (avec un gaz mis sous pression).

1. **Stockage sous forme d'énergie potentielle de pesanteur** Un système de masse m (en kg) pouvant descendre d'une altitude h (en m) stocke et est capable de fournir une quantité d'énergie mécanique (en joules, symbole : J)

$$E_p = m \times g \times h$$

(avec $g \approx 9{,}81$ N.kg^{-1} au voisinage de la Terre, valable même à 9000 m d'altitude).

Questions :

(a) De quelle hauteur devrait descendre un bloc de béton de 160 tonnes (soit environ 64 m^3) pour fournir 8 kWh d'énergie mécanique ? *Rappel :* 1 Wh = 3600 J

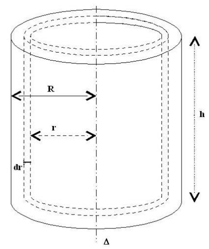
(b) De quelle hauteur devrait descendre un bloc de béton de 20 tonnes (soit environ 8 m^3) pour fournir 8 kWh d'énergie mécanique ?

(c) Comment varie h si m est triplée ?

(d) Un tel système semble-t-il facile à mettre en place pour une habitation ?

2. **Stockage sous forme d'énergie cinétique de rotation** L'énergie cinétique E_c (en J) d'un solide de moment d'inertie J_Δ (en kg.m^2), animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe Δ à la vitesse angulaire Ω (en rad.s^{-1}) est alors :

$$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \Omega^2$$



Le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ est $J_\Delta = \int r^2 dm$.
On rassemble des points ayant la même vitesse pour former, par la pensée, un tube (en pointillé sur le schéma ci-contre) d'épaisseur infiniment fine dr, de rayon r et de masse dm. On a donc $dm = 2\pi.r.h.dr.\rho$ avec ρ la masse volumique du matériau constituant le volant (en « déroulant » par la pensée ce tube pour le rendre rectangulaire).

On considère un cylindre de révolution plein en acier de 50 cm de rayon, 2 m de hauteur. La masse volumique ρ de l'acier est d'environ 7800 kg.m^{-3}.

Questions :

(a) Démontrer que le moment d'inertie d'un cylindre plein de masse M et de rayon R par rapport à son axe de révolution est $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \Omega^2$.

(b) Démontrer que E_c peut alors s'écrire $E_c = M(\pi n R)^2$ si n est la vitesse de rotation en tours.s^{-1}.

(c) On considère un cylindre de révolution plein en acier de 50 cm de rayon, 2 m de hauteur. La masse volumique ρ de l'acier est d'environ 7800 kg.m^{-3}. A quelle vitesse (en tours.s^{-1}) doit tourner ce cylindre autour de son axe de révolution afin de posséder une énergie cinétique de 8 kWh ?

(d) Comment varie M si n est multipliée par 10 (à R constant) ?

(e) Un tel système semble-t-il facile à mettre en place pour une habitation ?

3. **Stockage sous forme d'énergie potentielle élastique (avec un gaz mis sous pression)**

On considère une cuve étanche de 5 m^3 de volume intérieur. Les $8kWh$ servent à comprimer (de façon isotherme : la température de l'air reste en permanence la même) dans cette cuve de l'air pris à l'extérieur pour pouvoir le détendre à la demande à un moment ultérieur.
La quantité d'énergie (en J) nécessaire pour comprimer de l'air à la pression p de façon à diminuer son volume de la quantité dV (infiniment petite) est $\delta W = -pdV$.
La vérification dans le cas d'un cylindre en fin de ce chapitre.
De plus, si la température de l'air reste constante (c'est le cas si la compression se fait assez lentement, ce qui serait le cas vraisemblablement ici), on peut considérer que le produit « *pression de l'air* $\times$ *volume d'air* » $= pV$ reste constant au cours de la compression (loi de Mariotte). On peut alors calculer que la quantité d'énergie (en J) que cet air sous pression permet de stocker par :

$$E = -\int pdV$$

avec $pV = Cte = p_0 V_0$ (p_0 et V_0 étant la pression et le volume de l'air pris à l'extérieur)

Questions :

(a) Exprimer E en fonction de V_0 en prenant $p_0 = 101325 Pa$ (pression atmosphérique normale).

(b) Déterminer graphiquement V_0 afin d'avoir E = 8 kWh puis en déduire la pression finale nécessaire de l'air dans la cuve en Pa puis en bar sachant que 1 bar = 105 Pa.

(c) Reprendre la question b) avec V_f = 2,5 m^3.

(d) Reprendre la question b) avec V_f = 1 m^3.

(e) Un tel système semble-t-il facile à mettre en place pour une habitation ?

Correction du problème 9 : Stockage de l'énergie consommée en une journée par une famille (version pour le lycée)

1. **Stockage sous forme d'énergie potentielle de pesanteur**

   - $m \times g \times h = 8 \times 3600000$ donc $160000 \times 9,81 \times h = 8 \times 3600000$ donc $h \approx$ 18,35 m
   - $m \times g \times h = 8 \times 3600000$ donc $20000 \times 9,81 \times h = 8 \times 3600000$ donc $h \approx 146,8$ m
   - h est divisée par 3.
   - non, les masses de matériau et les hauteurs requises sont assez énormes pour une famille de 4 personnes.

2. **Stockage sous forme d'énergie cinétique de rotation**

   - $E_c = \dfrac{1}{2}J_\Delta \Omega^2$ avec pour un cylindre plein de masse M par rapport à son axe de révolution :
     $J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2 = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 2\pi dr\rho h = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho h \left[\dfrac{r^4}{4}\right]_0^R$
     $J_\Delta = 2\pi\rho h \dfrac{R^4}{4} = \dfrac{1}{2}\pi\rho h R^4$
     avec dm la masse du cylindre creux d'épaisseur très petite dr et de rayon r
     $dm = 2\pi r dr\rho h$ or $M = \pi R^2 h\rho$ d'où $J_\Delta = MR^2$.
   - $E_c = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}MR^2(2\pi n)^2 = M(\pi n R)^2$
   - $E_c = M(\pi n R)^2 = 8 \times 3\ 600\ 000$ donc $\pi R^2 h\rho\pi^2 n^2 R^2 = 28\ 800\ 000$ donc $h\rho\pi^3 n^2 R^4 = 28\ 800\ 000$

     $$n^2 = \frac{28\ 800\ 000}{h\pi^3\rho R^4} = \frac{28\ 800\ 000}{2 \times 7800 \times \pi^3 \times 0,5^4}$$

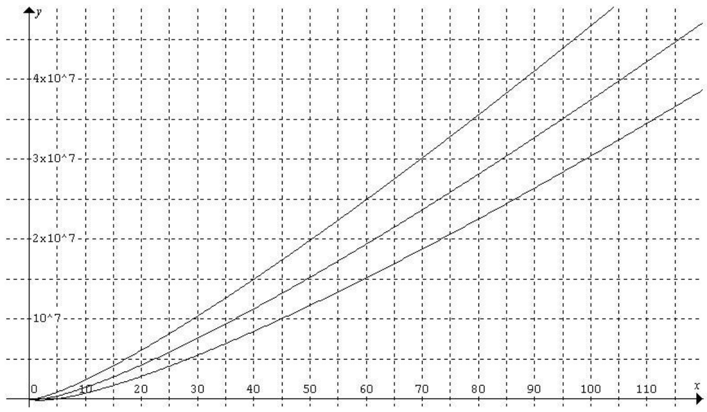
     $n \approx 30,86$ tours.s^{-1} soit $n \approx 1852$ tours.min^{-1}.
   - M est divisée par 100.
   - Seulement si n est élevée afin d'avoir M faible, mais cela requiert une technologie de pointe, en cours de développement. Des recherches sont actuellement menées sur des volants d'inertie pour installations domestiques tournant à des vitesse très élevées (dépassant 10 000 tr.min^{-1} pour réduire leur encombrement) mais avec des matériaux nécessairement plus résistants que l'acier et des formes optimisées. Ces volants tournent dans le vide et sur des paliers magnétiques pour réduire les pertes par frottements.

3. **Stockage sous forme d'énergie potentielle élastique (avec un gaz mis sous pression)**

   - $E = -\int pdV = -\int_{V_0}^{5} \dfrac{p_0 V_0}{V} dV$ car $pV = p_0 V_0$ qui est constant.
   - $101325 V_0 ln\left(\frac{V_0}{5}\right) = 8 \times 3600\ 000$ pour $V_0 \approx$ 96,142 m^3
     Ainsi $p_0 V_0 = p_f V_f$ (p_f et V_f étant la pression et le volume de l'air stocké dans la cuve)
     $p_f = p_0 V_0 / V_f = 101325 \times (96,142/5) \approx 101325 \times 19,2 \approx 1\ 948\ 318$ Pa soit environ 19, 5 bars (car 1 bar = 105 Pa)

$E = -p_0V_0(ln5 - lnV_0) = p_0V_0(lnV_0 - ln5) = 101325V_0ln(V_0 : 5)$
avec V_0 le volume d'air, pris à la pression atmosphérique à l'extérieur de la cuve, à comprimer.

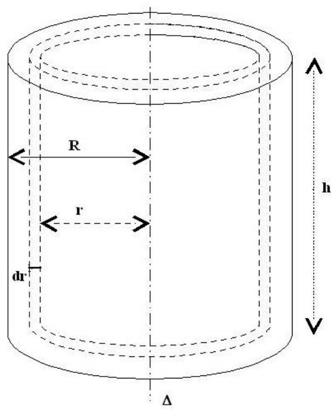
- $101325V_0ln\left(\frac{V_0}{2,5}\right) = 8 \times 3600\ 000$ pour $V_0 \approx 81,558$ m^3
  Ainsi $p_0V_0 = p_fV_f$ (p_f et V_f étant la pression et le volume de l'air stocké dans la cuve)
  $p_f = p_0V_0/V_f = 101325 \times (81,558/2,5) \approx 101325 \times 32,62 \approx 3\ 305545$ Pa soit environ 33 bars.
- $101325V_0ln(V_0) = 8 \times 3600\ 000$ pour $V_0 \approx 67,484$ m^3
  Ainsi $p_0V_0 = p_fV_f$ (p_f et V_f étant la pression et le volume de l'air stocké dans la cuve)
  $p_f = p_0V_0/V_f = 101325 \times (67,484/1) \approx 101325 \times 67,484 \approx 6\ 837816$ Pa soit environ 68,4 bars



- Les volumes sont modérés, les pressions nécessaires de l'ordre des pressions industrielles courantes. Néanmoins, le système pour comprimer puis détendre l'air (pour reproduire une tension alternative sinusoïdale de fréquence 50 Hz et de valeur efficace fixe égale à 230 V) ne semble pas évident à concevoir, surtout de façon à minimiser les pertes d'énergie.

Vérification dans le cas d'un cylindre :

$\delta W = -Fdh = -p_{exterieure}Sdh = -p_{exterieure}dV$ avec $\delta W > 0$ et $dh < 0$.
Or $p_{exterieure}$ est égale à la pression de l'air dans la cuve) à chaque instant (si la compression est suffisamment lente)
d'où $\delta W = -pdV$ avec $dV < 0$



Problème 10 : Stockage de l'énergie à grande échelle

Classes	**Thème**	**Objectif**
• Terminale • BTS	• Stockage de l'énergie • Équations • Calcul intégral	• Pratique du calcul intégral simple

- **Problème :**

  Les projets d'utilisation à grande échelle des énergies renouvelables pour l'approvisionnement en électricité des pays développés sont freinés par le caractère intermittent de ces dernières et la difficulté actuelle de les stocker à un coût compétitif. En effet, comment connecter sans problèmes au réseau électrique européen des parcs éoliens capables de fournir toute l'électricité consommée en Europe sachant que le vent ne souffle pas continûment.

  Remarques :

  ⋆ Le potentiel éolien off-shore européen est estimé à 2800 milliards de kWh électriques par an, en se limitant aux zones situées à moins de 30 km des côtes et où la profondeur des océans n'excède pas 40 m.
  ⋆ La consommation électrique européenne est actuellement de 1846 milliards de kWh électriques par an, celle de la France est de 400 milliards de kWh électriques par an.
  (*Source* : www.ewea.org).

  Nous allons étudier plusieurs techniques envisageables pour le stockage d'énergie, en vue de les comparer. Cette étude va s'appuyer sur le cas d'un parc éolien off-shore de puissance nominale 1000 MW (soit la puissance d'un réacteur nucléaire moyen ou d'un barrage débitant environ 1300 m^3 d'eau par seconde sur une hauteur de 100 m). Plusieurs parcs éoliens de cette puissance, voire plus, sont en projet actuellement en mer du Nord (www.vestas.dk ; www.gepower.com). Un tel parc sera constitué de 167 éoliennes de 6 MW chacune (avec un mât dépassant de 120 m le niveau de la mer, et des pales de 70 m de longueur). Les vents en mer du Nord permettent à de tels parcs de fonctionner à leur puissance nominale (maximale) pendant l'équivalent de 3900 heures/an. Un parc de 1000 MW fournira ainsi $1000000 \times 3900 =$ 3 900 millions de kWh électriques par an, soit en moyenne 10,7 millions de kWh électriques par jour soit approximativement
  3,85 $\times 10^{13}$ J par jour (1 Wh = 3600 J).

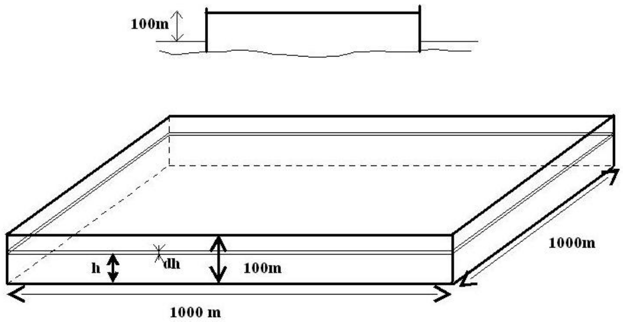
  Nous prendrons comme quantité d'énergie à stocker celle d'une journée moyenne, soit $3,85 \times 10^{13}$ J.

  On envisage quatre systèmes :

  1. Stockage sous forme d'énergie potentielle de pesanteur dans une retenue d'eau ;
  2. Stockage sous forme d'énergie potentielle élastique (avec un gaz mis sous pression) ;
  3. Stockage sous forme d'énergie cinétique de rotation ;
  4. Stockage sous forme d'énergie chimique.

- **Stockage sous forme d'énergie potentielle de pesanteur**

On considère une retenue d'eau de section carrée de 1 km de côté et de 100 m de haut (au dessus du niveau de la mer) et on se propose de calculer quelle quantité d'énergie cette retenue permet de stocker.



On peut démontrer qu'un objet de masse m pouvant tomber d'une altitude h possède l'énergie potentielle de pesanteur mgh (avec $g = 9,8$ N.m^{-1}). On considère un élément ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de base carrée de 1 km de côté, de hauteur (infiniment faible) dh (voir la figure ci-dessus) et situé à la hauteur h au dessus de la surface de la mer. Cet élément possède donc la masse $dm = 1000 \times 1000 \times dh \times 1000$ (puisque 1 m^3 d'eau a une masse de 1000 kg) et l'énergie potentielle de pesanteur $dE = 1000\times1000\times dh\times1000\times9,8\times h$. L'énergie que possède toute l'eau de la retenue pleine est donc la somme des énergies potentielles des éléments de hauteur dh. L'énergie totale (en joules J) stockée dans la retenue pleine est donc :

$$E = \int_0^{100} 1000 \times 1000 \times dh \times 1000 \times 9,8 \times h.$$

Questions :

1. Calculer l'intégrale E puis la comparer à la quantité d'énergie produite par le parc éolien considéré pendant une journée moyenne, soit $3,85 \times 10^{13}$ J.

   Remarque : L'énergie E est une énergie mécanique. En la transformant en électricité grâce à des turbines, il se produit évidemment des pertes.

2. a) De façon générale, quelle énergie potentielle E (en J) est stockée dans une retenue pleine d'eau, de surface de base S (en m^2), où l'eau peut chuter de la hauteur H (en m) ?

   b) Exprimer E en fonction de H et de la masse M d'eau stockée (et de $g = 9,8$ S.I.).

- **Stockage sous forme d'énergie potentielle élastique (avec un gaz mis sous pression)**

On considère une cuve étanche de 2 millions de m^3 de volume intérieur (soit le volume d'une sphère de 78 m de rayon).
L'énergie du parc éolien sert à comprimer (de façon isotherme : la température de l'air reste en permanence la même) dans cette cuve de l'air à la pression de 50 bars (soit environ 50 fois la pression atmosphérique) pour pouvoir le returbiner à la demande à un moment ultérieur. On se propose de calculer quelle quantité d'énergie cet air sous pression permet de stocker.

La quantité d'énergie nécessaire pour comprimer de l'air à la pression p de façon à diminuer son volume de la quantité dV (infiniment petite) est $\delta W = pdV$
De plus, on peut considérer que le produit *pression de l'air* $\times$ *volume d'air* $= pV$ reste constant au cours de la compression (si la pression p est multipliée par un nombre k, le volume V est divisé par ce même nombre k). Ici, il faut donc comprimer 50×2 millions

de m^3 d'air à 1 bar (soit 100 000 Pa) pour obtenir 2 millions de m^3 d'air à 50 bars. D'où $pV = constante = 100\ 000 \times 50 \times 2\ 000\ 000 = 10^{13}$ et la relation $p = \dfrac{10^{13}}{V}$
La quantité d'énergie (en J) nécessaire pour comprimer 50×2 millions de m^3 d'air à 1 bar pour obtenir 2 millions de m^3 d'air à 50 $bars$ est donc l'intégrale :

$$E = \int_{50\times 2000000}^{2000000} \frac{10^{13}}{V} dV$$

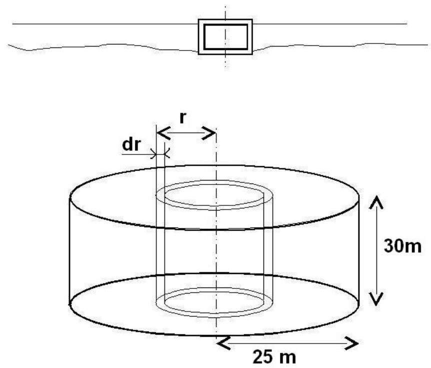
Questions :

1. Calculer l'intégrale E puis la comparer à la quantité d'énergie produite par le parc éolien considéré pendant une journée moyenne, soit $3,85 \times 10^{13}$ J.
   Remarque : L'énergie E est une énergie mécanique. En la transformant en électricité grâce à des turbines, il se produit évidemment aussi des pertes.

2. Reprendre le calcul de E avec cette fois une pression finale de seulement 25 bars (et non plus 50 bars). La quantité d'énergie stockée est-elle aussi diminuée de moitié ?

- **Stockage sous forme d'énergie cinétique de rotation (avec un volant d'inertie)**

On considère un volant d'inertie ayant la forme d'un cylindre de révolution plein, en acier à haute résistance, de 25 m de rayon et de 30 m de haut, tournant à la fréquence de 210 tours par minute autour de son axe.
On peut démontrer que l'énergie cinétique (due à la vitesse) d'un solide de masse m (en kg) se déplaçant à la vitesse v (en m/s) est $\frac{1}{2}mv^2$ (en joules J)



Dans le volant d'inertie, les points situés près de l'extérieur du cylindre ont donc une énergie plus importante que les points proches de l'axe (dont la vitesse est faible).
On rassemble des points ayant la même vitesse pour former, par la pensée, un tube d'épaisseur infiniment fine dr, de rayon r. Ce tube possède donc la masse $dm = 2\pi \times 30 \times dr \times 7800$ (on « déroule » le tube pour calculer son volume, et 1 m^3 d'acier a une masse de 7800 kg). Ce tube fait 210 tours par minute donc 3,5 tours.s^{-1} donc $3,5 \times 2\pi r$ m.s^{-1}.

Ce tube possède donc l'énergie cinétique

$$\frac{1}{2}dm.v^2 = \frac{1}{2} \times 2\pi r \times 30 \times dr \times 7800(3,5 \times 2\pi r)^2.$$

L'énergie que possède le cylindre (en totalité) est donc la somme des énergies des tubes d'épaisseur dr et de rayon r, pour r allant de 0 à 25m. L'énergie totale (en J) stockée dans cylindre en rotation $E = \int \frac{1}{2}dm.v^2$ est donc :

$$E = \int_0^{25} \frac{1}{2} \times 2\pi r \times 30 \times dr \times 7800(3,5 \times 2\pi r)^2 = \frac{1}{2} \times 2\pi \times 30 \times 7800 \times 3,5^2 \times 4\pi^2 \int_0^{25} r^3 dr$$

Questions :

1. Calculer l'intégrale E puis la comparer à la quantité d'énergie produite par le parc éolien considéré pendant une journée moyenne, soit $3,85 \times 10^{13}$ J.

   Remarque : L'énergie E est une énergie mécanique. En la transformant en électricité grâce à un alternateur, il se produit quelques pertes. Par ailleurs, ce volant doit tourner dans une enceinte sous vide et sur des paliers magnétiques afin de réduire au maximum les pertes par frottement. Une lubrification dans le vide serait de plus problématique car l'huile s'y vaporiserait. (En France, les volants d'inertie ont été étudiés à l'ENS de Cachan et à l'INPG de Grenoble : www.satie.ens-cachan.fr)

2. Pour augmenter l'énergie stockée dans un volant d'inertie, on peut soit augmenter sa masse, soit augmenter sa fréquence de rotation. Cependant, des contraintes mécaniques élevées apparaissent dans le volant en raison des forces centrifuges. On peut démontrer que la contrainte maximale se trouve au diamètre extérieur du volant et a pour valeur $\rho = \frac{3}{8}pv^2$, avec ρ la masse volumique du matériau (ici $\rho = \rho_{acier} = 7800$ kg.m^{-3}) et v la vitesse tangentielle (en m.s^{-1}) au diamètre extérieur du cylindre.
   Sachant que l'acier considéré ici (à haute résistance) peut résister au maximum à 3000 MPa, le volant étudié ci-avant va-t-il résister à ces contraintes ?

3. Exprimer l'énergie cinétique E (en J) d'un cylindre plein en fonction de sa masse M (en kg), son rayon extérieur R (en m) et sa vitesse angulaire ω (en rad/s).

- **Stockage sous forme d'énergie chimique (avec production de gaz dihydrogène)**

Dans une quinzaine d'années devraient être construits en grande série des véhicules dont le moteur (électrique) sera alimenté par une pile à combustible. Ces piles fournissent un courant électrique à partir de gaz dihydrogène (appelé couramment hydrogène). Ce gaz devrait être stocké sous forme gazeuse, à la température ambiante, sous une pression d'environ 700$bars$.
Un réservoir contenant 4 kg de dihydrogène pur (c'est à dire 2000 moles de molécules puisque $M_{H_2} = 2$ g) devrait permettre une autonomie de 500 km à une voiture.
La réaction chimique réalisée au coeur de la pile à combustible

$$H_2 + 0,5O_2 \rightarrow H_2O$$

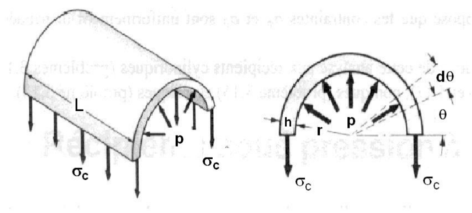
libère 285 $kJ.mole^{-1}$ de molécules.

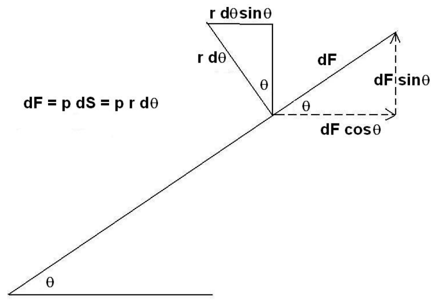
Référence : des informations sur les piles à combustibles et l'hydrogène peuvent être obtenues sur le site de l'association française de l'hydrogène (www.afh2.org).

Pour stocker $3,85 \times 10^{13}$ J d'énergie, il faut donc synthétiser par électrolyse de l'eau (présente sur place en mer) $3,85 \times 10^{13}$: 285 000 $\approx$ 135 000 000 moles de gaz dihydrogène, soit environ $135 \times 10^6 \times 0,0232$ m^3 de dihydrogène à la pression atmosphérique et à la température de 10 ˚C (le volume d'une mole de gaz étant d'environ 23,2 L dans ces conditions). Pour stocker $3,85 \times 10^{13}$ J d'énergie, il faut donc synthétiser et stocker $135 \times 106 \times 0,0232$: 50 $\approx$ 62 640 m^3 de dihydrogène à 50 bars et 10 ˚C.
On envisage alors une cuve cylindrique de 15 m de rayon et de 90 m de long (soit de volume 63 617, 3 m^3).

Remarque : on ne prendra pas en considération ici l'énergie mécanique élastique de l'hydrogène sous pression (comme dans la partie II). Sa prise en compte conduirait à réduire le volume de dihydrogène à stocker.

On veut déterminer des contraintes dans un réservoir cylindrique à paroi mince fermé aux deux extrémités par des fonds plats, soumis à une pression intérieure uniforme p.
Soit h l'épaisseur de la paroi et r le rayon intérieur.
Pour déterminer la contrainte circonférentielle σ_C, on considère dans le récipient un élément de longueur L, isolé du reste du cylindre.





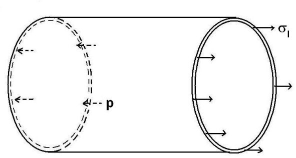
Les composantes horizontales des pressions radiales s'équilibrent deux à deux en raison de la symétrie par rapport à l'axe vertical central.
Par définition du radian, un angle de mesure 1 radian intercepte un arc de longueur r sur un cercle de rayon r. Un angle de mesure $d\theta$ radians intercepte donc un arc de longueur $r \times d\theta$ sur un cercle de rayon r ($d\theta$ est un angle infiniment petit.)
Dans la direction verticale, l'équation d'équilibre est donc :

$$2\sigma_C hL = \int_0^{\pi} prd\theta sin(\theta)L$$

$\boxed{\textbf{Questions :}}$

1. En calculant la somme intégrale ci-dessus, exprimer la contrainte circonférentielle σ_C en fonction de p, r et h.

   Pour trouver la contrainte longitudinale σ_L, on considère une section transversale du cylindre perpendiculaire à son axe.

   L'équilibre des forces donne : $p\pi r^2 = 2\pi rh\sigma_L$.

2. En déduire la contrainte longitudinale σ_L en fonction de p, r et h. Quelle relation simple existe-t-il entre σ_L et σ_C ?

   Remarque : Ces expressions simples des contraintes ne sont plus valables au voisinage immédiat des fonds plats.

3. Si p = 50 bars = 5 000 000 Pa et r = 15 m, quelle doit être l'épaisseur h de la cuve pour que les contraintes σ_C et σ_L ne dépassent pas 200 MPa (soit la moitié de la contrainte maximale pour un acier doux) ?

Correction du problème 10 : Stockage de l'énergie à grande échelle

1. **Stockage sous forme d'énergie potentielle de pesanteur**

   (a) $E \approx 4,9 \times 10^{13}$

   (b) a) Par intégration, $E = 4900 S.H^2$
   b) $E = MgH/2 = 4,9M.H$

2. **Stockage sous forme d'énergie potentielle élastique (avec un gaz mis sous pression)**

   (a) $E = -10^{13} ln 50 \approx -3.9.10^{13}$ J.

   (b) $PV = 0,5.10^{13}$ d'où par intégration, $E = -0,5 \times 10^{13} ln 25 \approx -1,6.10^{13}$ J (moins de la moitié de $-3.9.10^{13}$ J)

3. **Stockage sous forme d'énergie cinétique de rotation (avec un volant d'inertie)**

   (a) $E \approx 3,47 \times 10^{13}$ J

   (b) $\sigma \approx 884\ 100\ 000$ Pa soit environ 885 MPa : la contrainte limite n'est pas atteinte..

   (c) Par intégration, $E = \pi R^2 H \rho \omega^2 R^2/4 = 0,5 J\omega^2$ avec $J = 0,5MR^2$
   J est le moment d'inertie d'un cylindre plein.

4. **Stockage sous forme d'énergie chimique (avec production de gaz dihydrogène)**

   (a) $\sigma_C = \dfrac{pr}{h}$

   (b) $\sigma_L = \frac{pr}{2h} = 0,5\sigma_C$.

   (c) Il faut $h > 0,375$ m.

- **Conclusion :**
  ⋆ Le stockage sous forme potentielle dans des retenues d'eau est le plus simple et le moins coûteux : il est envisagé de stocker de grosses quantité d'énergie éolienne dans des barrages de Norvège ; le Québec développe aussi actuellement cette voie.
  ⋆ Des volants d'inertie sont à l'étude mais ils se heurtent à des problèmes de sécurité (explosion du volant) et de coût.
  ⋆ Des essais de stockage sous forme d'énergie de pression ont été réalisés dans des cavités géologiques.
  ⋆ L'alimentation des véhicules particuliers par hydrogène via des piles à combustibles semblent être de plus en plus en concurrence avec les nouvelles batteries, pour des autonomie d'environ 200 km. Plusieurs pays se sont engagés dans cette voie, où un véhicule pourrait être régulateur de la demande d'électricité, fournissant de l'énergie au réseau électrique à certains moments de la journée si il est à l'arrêt et la demande en énergie forte (www.electron-economy.org).

Problème 11 : Stockage thermique de l'énergie

Classes	Thèmes	Objectif
• Première • Terminale • BTS	• Stockage de l'énergie • Equations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants	• Modélisation par une équation différentielle • Résolution d'équations différentielles

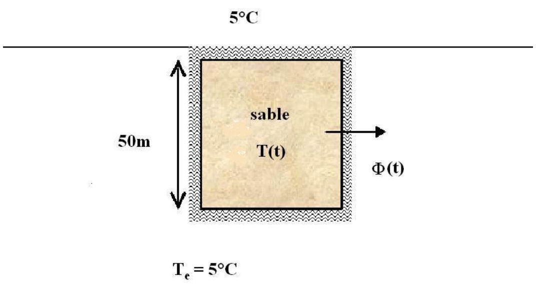
- **Problème :**

Si les quantités d'énergie solaire disponibles sont énormes, même sur d'assez petites surfaces, au regard de nos besoins, le caractère intermittent de cette énergie (comme également de l'énergie éolienne) oblige à chercher des systèmes pour la stocker afin de pouvoir l'utiliser lorsque les consommateurs en ont besoin. Des recherches font apparaître comme simple et à la fois compétitif le stockage sous forme thermique.

Cette solution consiste à stocker les surplus d'énergie électrique sous forme de chaleur, en chauffant par effet joule des résistances noyées dans un massif de forte capacité calorifique, comme un gros volume de sable par exemple. La chaleur ainsi stockée, qu'il convient de pouvoir garder avec le moins de pertes possible, permet de produire à la demande de la vapeur d'eau à haute température susceptible d'actionner des turbines comme dans une centrale thermique classique.

On peut alors produire à la demande de l'énergie électrique, mais inévitablement aussi perdre de l'énergie sous forme de chaleur.

L'objet de ce problème est l'évaluation des pertes de chaleur vers l'extérieur d'un grand volume de sable au cours de quelques jours. On considère un réservoir de sable de forme cubique, d'arête 50 m, contenant ainsi 125 000 m^3 de sable, de masse 212 500 000 kg. Ce réservoir est entouré d'une épaisseur de 3,5 m de pouzzolane (roche volcanique très poreuse) ayant le rôle d'isolant thermique.



Le volume de sable est chauffé par la chaleur recueillie par un champ d'1 km^2 de capteurs solaires (à tour, comme sur la photographie ci-dessus, ou cylindro-parabolique).

On fera l'hypothèse que la température du sable est uniforme dans le réservoir (grâce à une répartition judicieuse des conduites caloriportrices). On peut montrer que l'énergie solaire recueillie un 21 mars ensoleillé par 1 m^2 de capteur, situé à la latitude 45 °N et orienté en permanence face au Soleil, est d'environ 7,5 kWh.

On souhaite estimer l'influence des déperditions de chaleur $\Phi(t)$ à travers les parois du réservoir de sable sur la baisse de température du sable qu'il contient.
Pour évaluer ces seules pertes thermiques, on se place donc dans la situation où il n'y a aucun apport solaire susceptible de réchauffer le sable du réservoir (brouillard épais pendant

plusieurs jours consécutifs) ainsi qu'aucune utilisation de la chaleur du sable de ce réservoir (la centrale thermique est alors supposée arrêtée).

- **Données :**

On peut montrer que l'énergie électrique produite en une journée ensoleillée vers le 21 mars par 1 km^2 de capteurs paraboliques solaires, situé à la latitude 45 $^\circ N$, augmente la température de ces 125 000 m^3 de sable d'environ 107 $^\circ C$.

⋆ La température initiale du sable sera prise égale à 500 $^\circ C$.

⋆ Le réservoir est placé dans le sol où la température T_e sera considérée comme constante et égale à 5 $^\circ C$.

⋆ La température de l'air extérieur sera aussi considérée comme constante et égale à 5 $^\circ C$.

⋆ La chaleur massique du sable, c'est-à-dire la quantité de chaleur en J qu'il faut enlever à 1 kg de sable pour faire baisser sa température de 1 $^\circ C$, est $c_{sable} = 1010$ J.kg^{-1}.$^\circ$C^{-1}.

Questions

1. **Calcul préalable : expression de $\Phi(t)$**

Le coefficient de conductivité thermique de la pouzzolane est $\lambda = 0,35$ W.m^{-1}.$^\circ$C^{-1}. La résistance thermique de la paroi du réservoir peut être donnée, avec une bonne approximation, par : $r = \frac{e_{isolant}}{\lambda_{isolant}}$(en m^2.$^\circ$C.W^{-1}) avec e l'épaisseur de pouzzolane exprimée en m.

(a) Calculer r ainsi que le coefficient de transmission surfacique U (en W.m^{-2}.$^\circ$C^{-1}) de la paroi, donné par $U = \frac{1}{r}$.
Chaque m^2 de paroi laisse fuir U watt (ou joule.seconde^{-1}) de chaleur si il y a 1$^\circ C$ d'écart entre l'intérieur et l'extérieur de cette paroi. Chaque m^2 de cette paroi laisse fuir $U \times \Delta T$ watt de chaleur si il y a un écart de température ΔT (en $^\circ C$) entre l'intérieur et l'extérieur de cette paroi.
On a donc l'expression du flux de chaleur (en watt ou J.s^{-1}) perdu par les parois :

$$\Phi(t) \ = S \times U \times \Delta T = S \times U \times (T_e - T(t))$$

avec $T_e = 5$ $^\circ C$ et $T(t)$, en $^\circ C$, la température du sable du réservoir en fonction du temps t, en secondes.

(b) Calculer l'aire S de la surface extérieure du réservoir (en contact avec le sable). En déduire l'expression de $\Phi(t)$, en watt (ou J.s^{-1}), en fonction de $\Delta T = 5 - T(t)$.

2. **Equation différentielle**

On raisonne sur un intervalle de temps infiniment court dt (en s). Alors que la température du sable du réservoir passe de $T(t)$ à $T(t+dt)$ pendant dt , la quantité de chaleur qu'il perd est :

$$m_{sable} \times c_{sable} \times [T(t+dt) - T(t)] = 212\ 500\ 000 \times 1010 \times [T(t+dt) - T(t)]$$

et la quantité de chaleur traversant pendant dt la paroi du réservoir est :

$$1500 \times (5 - T(t)) \times dt$$

Ainsi, 214 625000$\frac{T(t+dt)-T(t)}{dt} = 1,5(5 - T(t))$
D'où, lorsque dt tend vers 0 et en faisant l'hypothèse que $t \to T(t)$ est dérivable sur $[0, +\infty[$, l'équation différentielle : 214 625 000$T'(t) = 1,5(5 - T(t))$ ou encore :

$$214\ 625\ 000T'(t) + 1,5T(t) = 7,5 \qquad (E)$$

(E) est une équation différentielle du premier ordre, avec un second membre qui est 7,5, d'inconnue la température $T(t)$, en $^\circ C$, du sable du réservoir en fonction du temps t, en secondes.

(a) Déterminer la solution générale T_1 de l'équation différentielle sans second membre (E') : $214\ 625\ 000T'(t) + 1,5T(t) = 0$

(b) Déterminer une fonction constante T_2 solution de l'équation différentielle avec second membre (E).

(c) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle avec second membre (E) étant défini par $T(t) = T_1(t)+T_2(t)$, donner l'expression de la température du sable $T(t)$, qui dépend encore d'une constante.

(d) Déterminer la valeur de cette constante pour que la solution de (E) cherchée vérifie la condition initiale $T(0) = 500$, à savoir que la température du sable à l'instant où l'on débute l'expérience vaut 500 $^\circ C$.
En déduire alors l'expression de la température du sable $T(t)$.

3. **Etude de la solution**

On considère la fonction $T :\ t \mapsto T(t) = 495e^{-7.10^{-9}t} + 5$.

(a) Déterminer la limite de la fonction T en $+\infty$.

(b) Déterminer l'expression $T'(t)$ de la dérivée de T puis en déduire le tableau de variation de la fonction T.

(c) Tracer la courbe représentative C_T de la fonction T pour $t \in [0\ ; 7,2 \times 106]$ avec pour unités graphiques :
⋆ en abscisses : 1 cm pour 500 000 s
⋆ en ordonnées : 1 cm pour 50 $^\circ C$

(d) Déterminer l'équation de la tangente T_T à la courbe C_T en $t = 0$.
Représenter T_T dans le même repère que C_T. Sur quelle durée l'équation de la tangente fournirait une bonne approximation de $T(t)$?

(e) Quelle serait la température des 125 000 m^3 de sable, sans apport ni retrait d'énergie, au bout de t = 1 jour, soit 86400 s, puis au bout de 60 jours, soit 5 184 000 s.
Les pertes d'énergie à travers les parois du réservoir de sable vous paraissent-elles importantes ?

4. **Application**

(a) Calculer l'aire de la surface extérieure (en m^2) d'un cylindre de volume 125000 m^3, de hauteur égale au diamètre.

(b) Calculer l'aire de la surface extérieure (en m^2) d'une sphère de volume 125000 m^3.

(c) Quelle forme pourrait-on donner aux 125 000 m^3 de sable pour que la surface en contact avec l'extérieur soit minimale, ce qui réduirait encore les pertes de chaleur ?

Sites intéressants : www.nrel.gov et www.sbp.de

Correction du problème 11 : Stockage thermique de l'énergie

1. **Calcul préalable : Expression de $\Phi(t)$**

   (a) $r = 3,5/0,35 = 10$ d'où $U = 1/10 = 0,1\ W/m^2.^{\circ}C$.

   (b) $S = 6 \times 50^2 = 15\ 000\ m^2$

   (c) $\Phi(t) \ = 15000 \times 0,1 \times (5 - T(t)) = 1500 \times (5 - T(t))$

2. **Equation différentielle**

   $214\ 625\ 000 T'(t) + 1,5T(t) = 7,5 \qquad (E)$

   (a) $214\ 625\ 000 T'(t) + 1,5T(t) = 0 \qquad (E')$
   (E') a pour solution générale $T_1(t) = ke^{-7\times10^{-9}t}$

   (b) $T_2(t) = 5$ est une solution particulière de (E) car $T_2'(t) = 0$ et $214\ 625\ 000 \times 0 + 1,5 \times 5 = 7,5$

   (c) $T(t) = ke^{-7\times10^{-9}t} + 5$ est la solution générale de (E)

   (d) $T(0) = 500$ et $T(0) = ke^{-7\times10^{-9}\times0} + 5 = k + 5$ d'où $k = 495$ et $T(t) = 495ke^{-7\times10^{-9}t} + 5$.

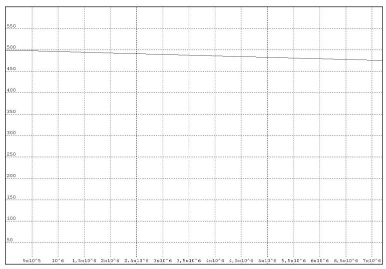
3. **Etude de la solution**

   (a) La limite de la fonction T en $+\infty$ est 5

   (b) $T'(t) = -3,465 \times 10^{-6} e^{-7\times10^{-9}\times t} < 0$ pour tout t réel car > 0 pour tout t réel
   donc T est strictement décroissante sur l'ensemble des réels.

   (a) $T_T \ : y = -3,465 \times 10^{-6} t + 500$

   (b) $T(86400) \approx 499,7^{\circ}C$ au bout d'un jour. $T(5184000) \approx 482,36^{\circ}C$ au bout de 60 jours. Les pertes à travers les parois du réservoir apparaissent très faibles.



4. **Application**

   (a) Rayon R d'un cylindre de hauteur $2R$ et de volume $125\ 000 m^3$:

   $$\pi R^2 h = \pi R^2 \times (2R) = 2\pi R^3 = 125000$$

   d'où $R \approx 27,1m$ et $S = 4\pi R^2 \approx 13840m^2 < 15\ 000m^2$

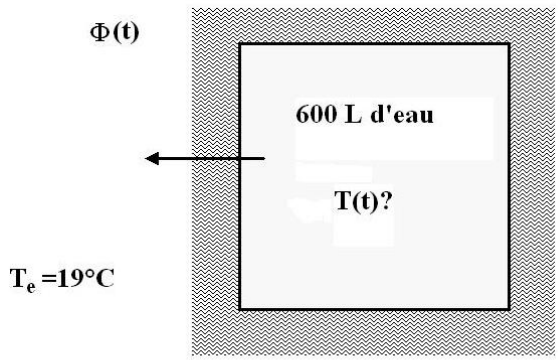
   (b) Rayon R d'une sphère de volume $125\ 000m^3$:
   $\frac{4}{3}\pi R^3 = 125\ 000$ d'où $R \approx 31,0m$ et $S = \approx 12\ 090m^2 < 13840m^2 < 15\ 000m^2$.
   La sphère serait d'aire extérieure minimale.

Problème 12 : Stockage de chaleur dans un réservoir d'eau

Classes	**Thèmes**	**Objectif**
• Première • Terminale • BTS	• Stockage de l'énergie • Equations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants	• Modéliser une situation de flux • Résolution d'équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants

- **Problème :**

On considère un réservoir d'eau de forme cubique entouré d'une épaisseur d'isolant de type « laine de bois ». Cette eau est réchauffée par un capteur solaire thermique placé sur le toit d'une habitation.
On veut estimer l'influence des déperditions de chaleur à travers les parois du ballon sur la baisse de température de l'eau qu'il contient.



On se place donc dans la situation où il n'y a aucun apport solaire susceptible de réchauffer l'eau du réservoir (brouillard épais pendant plusieurs jours consécutifs) ainsi qu'aucune utilisation de l'eau chaude de ce réservoir.
On fera l'hypothèse que la température de l'eau est uniforme dans le réservoir (il apparaît en fait une stratification des températures, l'eau étant plus chaude en haut).

- **Données :**

  ⋆ Le réservoir contient 600 L d'eau ;
  ⋆ L'épaisseur d'isolant est $e_{isolant} = 20$ cm ;
  ⋆ L'épaisseur du réservoir en acier est $e_{acier} = 3$ mm ;
  ⋆ La température initiale de l'eau sera prise égale à $T_0 = 60\ ^\circ C$;
  ⋆ Le réservoir est placé dans un local où la température reste constamment égale à $T_e = 19\ ^\circ C$;
  ⋆ La chaleur massique de l'eau liquide est $c_{eau} = 4185$ J.kg^{-1}.°C^{-1}.

Questions

1. **Expression de $\Phi(t)$**

   (a) Résistance thermique.

   La résistance thermique de la paroi du réservoir est donnée (en m^2.°C.W^{-1}) par :

   $$r = \frac{1}{h_e} + \frac{e_{isolant}}{\lambda_{isolant}} + \frac{e_{acier}}{\lambda_{acier}} + \frac{1}{h_i}$$

   où
   * $h_e = 10\ W.m^{-2}$ et $h_i = 30$ W.m^{-2} sont les coefficients d'échange superficiels respectivement à l'extérieur et à l'intérieur du réservoir.
   Ces coefficients modélisent le transfert de chaleur par convection entre l'air et la paroi extérieure du réservoir d'une part et entre l'eau et la paroi intérieure du réservoir d'autre part.
   * $\lambda_{isolant} = 0,04$ W.m^{-1}°C^{-1} et $\lambda_{acier} = 52$ W.m^{-1}°C^{-1} sont les coefficients de conductivité thermique des isolants type laine (laine de bois, de roche ...) et de l'acier.
   Calculer r (à 10^{-2} près).

   (b) Coefficient de transmission surfacique.
   Chaque m^2 de paroi laisse fuir $U watt$ (ou joule/seconde) de chaleur s'il y a $1°C$ d'écart entre l'intérieur et l'extérieur de cette paroi.
   U (en W.m^{-2}.°C^{-1}) est le coefficient de transmission surfacique de la paroi. Il est donné par $U = \frac{1}{r}$.
   Calculer U (à 10^{-2} près).

   (c) Aire intérieure du réservoir.
   Calculer l'arête a du réservoir puis l'aire S de sa surface intérieure en contact avec l'eau. (à 10^{-2} près)

   (d) Déperditions de chaleur.
   On néglige les fuites de chaleur au niveau des jonctions entre le réservoir et les tuyaux d'arrivée et de sortie.
   On a une déperdition de chaleur de $\Phi = U \times \Delta T$ watts par m^2 s'il y a un écart de température (en $°C$) entre la température extérieure T_e et la température $T(t)$ de l'eau du réservoir au temps t.
   Par définition, 1 W = 1 J.s^{-1}, c'est-à-dire 1 watt = 1 joule par seconde : une puissance est un débit d'énergie. En déduire l'expression de $\Phi(t)$, en watt (ou J.s^{-1}), en fonction de T_e, $T(t)$, U et de S puis avec les valeurs numériques connues.

2. **Fonction T(t)**
Quantité de chaleur perdue.
A l'instant t, en un intervalle de temps très court dt (en s) :
$\star$ la quantité q de chaleur perdue par une masse d'eau M dont la température passe de $T(t)$ à $T(t+dt)$ est $q = M \times c_{eau} \times (T(t+dt) - T(t))$, où $q < 0$;
$\star$ la déperdition de chaleur est $q = \Phi(t) \times dt$, alors $q = M \times c_{eau} \times (T(t+dt) - T(t))\Phi(t) \times dt$ d'où
$$M \times c_{eau} \times \frac{T(t+dt) - T(t)}{dt} = \Phi(t)$$
Si la fonction $t \mapsto T(t)$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ lorsque dt tend vers 0 et si on note T' la dérivée de T alors $M \times c_{eau} \times T'(t) = \Phi(t)$.

   (a) On pose $T(t) = y$ et $T'(t) = y'$. Écrire l'équation ci-dessus sous la forme $y' + \alpha y = K$.

   (b) Résoudre l'équation différentielle obtenue et donner la solution vérifiant $T(0) = T_0 = 60^\circ C$.

   (c) Calculer la température de l'eau du réservoir au bout de 1 heure, 3 h, 12 h, 24 h, 48 h, 7 jours, 30 jours.

3. **Pour aller plus loin**

   (a) Reprendre le problème précédent pour un réservoir cubique :
   $\star$ contenant 1 000 m^3 d'eau
   $\star$ même isolation thermique
   $\star$ $T_e = 5\ ^\circ C$.

   (b) Que peut-on dire du rapport $\frac{volume}{surface}$ lorsque l'arête a, donc le volume, du réservoir cubique augmente ?
   Qu'en conclure pour le stockage thermique dans un réservoir d'eau ?

Correction du problème 12 : Stockage de chaleur dans un réservoir d'eau

1. **Expression de $\Phi(t)$**

   (a) On a donc $r = \dfrac{1}{10} + \dfrac{0,2}{0,04} + \dfrac{0,003}{52} + \dfrac{1}{30} \approx 5,13$ m^3.°C.W^{-1}(on peut négliger la résistance thermique de l'acier)

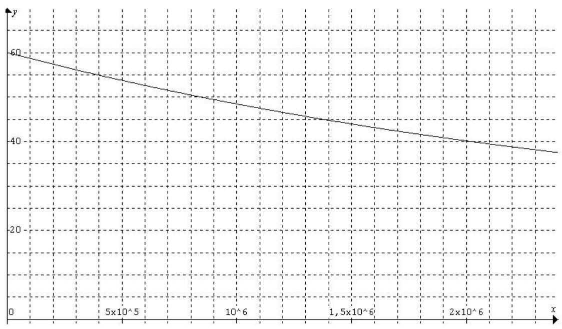
   (b) Le coefficient de transmission surfacique de la paroi du réservoir est $U = \frac{1}{r} \approx 0,1948$ W.m^{-1}.°C^{-1}.
   Cela signifie que chaque m^2 de paroi laisserait fuir 0,1948 W (ou J.s^{-1}) de chaleur si il y avait 1 °C d'écart entre l'intérieur et l'extérieur de cette paroi. Et chaque m^2 de cette paroi laisseraient fuir $0,1948 \times \Delta T$ watts de chaleur si il y avait un écart de température ΔT (en °C) entre l'intérieur et l'extérieur de cette paroi.

   (c) $a = 0,6^{1/3} \approx 0,843\ m$ et $S = 6a^2 \approx 4,27\ m^2$.

   (d) On a donc $\Pi(t) = S.U.(T_e - T(t)) \approx 0,831(T_e - T(t))$(en W).

2. **Fonction $T(t)$**

   (a) On a $M \times c_{eau} \times T'(t) = \Phi(t)$ soit $600 \times 4185 \times T'(t) = 0,831(9 - T(t))$ alors :



$$(E): \quad y' + \frac{0,831}{600 \times 4185} y = \frac{0,831 \times 19}{600 \times 4185}$$

   soit $(E): \quad y' + 3,31 \times 10^{-7} y = 6,19 \times 10^{-6}$

   $(E): \quad y' + 3,31 \times 10^{-7} y = 0$ a pour solution générale $y = ke^{-3,31.10^{-7}t}$.
   $y_0 = 19$ est solution particulière de (E) donc sa solution générale $y + y_0$ est de la forme $T(t) = ke^{-3,31.10^{-7}t} + 19$
   On a $T(0) = ke^{-3,31.10^{-7} \times 0} + 19 = k + 19 = 60$ soit $k = 41$.
   La solution cherchée est $T(t) = 41e^{-3,31.10^{-7}t} + 19$.

   (b)

t en h	0	1	3	12	24	48	24×7	24×30
$T(t)$ en °C	60	59,95	59,85	59,42	58,84	57,72	52,56	36,4

   On constate une baisse de température de seulement $1,16$ °C au bout de 24 h.

3. **Pour aller plus loin**
   $a = 1000^{1/3} = 10\ m$ et $S = 6a^2 = 600$ m^2.
   On a donc $\Phi(t)\ = S.U.(T_e - T(t)) \approx 116,88(T_e - T(t))$ (en W)
   $4\ 185\ 000000 \times T'(t) = 116,88 \times (5 - T(t))$
   $(E):\quad y' + 2,79 \times 10^{-8}y = 1,40 \times 10^{-7}$

   $(E):\quad y' + 2,79 \times 10^{-8}y = 0$ a pour solution générale $y = ke^{-2,793.10^{-8}t}$
   $y_0 = 5$ est une solution particulière de (E) et $T(t) = ke^{-2,793.10^{-8}t}+5$ est la solution générale de (E)
   $T(0) = 60$ et $T(0) = k + 5$ d'où $k = 55$ et $T(t) = 55e^{-2,793.10^{-8}t} + 5$.

4.

t en h	0	1	3	24	48	24×7	24×30	24×60
$T(t)$ en $^\circ C$	60	59,99	59,98	59,87	59,74	59,08	56,16	52,59

On constate une baisse de température de seulement $7,5\ ^\circ C$ au bout de 60 jours. Pour un cube, le rapport $V/S = a^3/6a^2 = a/6$ augmente lorsque a (donc V) augmente. V augmente plus vite avec a que S (donc que Φ). Plus V est grand, meilleur est donc le rendement du stockage.
En outre, si l'arête a double, V/S double.

• *Remarque* :De tels réservoirs sont utilisés pour du stockage inter saisonnier de chaleur (stockage de la chaleur solaire d'été jusqu'en hiver dans des lotissements allemands, dans un nouveau lycée de Poitiers ...).

Problème 13 : Sédimentation

Classes	Thèmes	Objectif
• Terminale • BTS	• Gestion des déchets • Équation différentielle du premier ordre avec second membre constant	• Modélisation par une équation différentielle • Résolution d'une équation différentielle

- **Problème :**

  Adaptation de la première partie de la deuxième composition de physique au concours d'entrée 2001 à l'École Polytechnique (filière MP).

  Dans les processus de traitement des eaux, l'étape de décantation permet d'éliminer les particules de taille supérieure à une dizaine de micromètres. Le but de ce problème est l'étude de l'évolution de la vitesse dans l'eau d'une particule minérale.

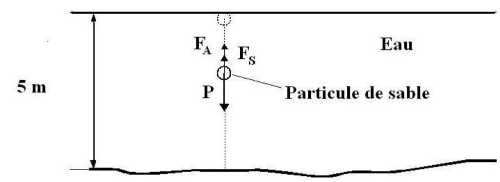
- **Méthode :**

  On considère une sphère de rayon R, de masse volumique ρ, lâchée sans vitesse initiale dans de l'eau. Durant sa chute on considère que cette particule est soumise à trois forces :

  ⋆ son poids P ;

  ⋆ la poussée d'Archimède F_A ;

  ⋆ la force de frottement, ou force de Stokes, de l'eau sur la sphère F_S.



  La relation fondamentale de la dynamique (« La somme vectorielle des forces appliquées à la particule est égale au produit de la masse de la particule par son accélération ») permet d'écrire une équation différentielle du premier ordre où l'inconnue est la vitesse v, fonction de la variable t.

- **Données :**

  ⋆ La masse volumique de la particule est ρ =2 650 kg.m^{-3} et celle de l'eau est ρ_{eau} =1 000 kg.m^{-3}.

  ⋆ La viscosité cinématique de l'eau à 10°C est $v_{eau} = 1,31 \times 10^{-6}$m^2.s^{-1}.

  ⋆ On prendra, pour l'accélération de la pesanteur, g ≈9,8 m.s^{-2}.

- **Formules :**

  ⋆ Le volume d'une sphère est donné par la formule $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ avec V en m^3 et R en m.

  ⋆ Le poids P en N d'un volume V en m^3 de masse volumique ρ en kg.m^{-3} est $P = V\rho\, g$ avec g en m.s^{-2}.

Questions

1. **Bilan des forces**
   Exprimer en fonction de R les forces s'exerçant sur la particule

   (a) le poids P de la particule en fonction de R ;

   (b) F_A la poussée d'Archimède s'exerçant sur la particule, dont l'intensité est égale au poids de l'eau déplacée.

   (c) la force de frottement $F_S = 6\pi \times \rho_{eau} \times v_{eau} \times R \times v$ s'exerçant sur la particule animée d'une vitesse v.

   On notera $v'(t)$ l'accélération de la particule.

2. **Équation différentielle**

   (a) Montrer que le bilan des forces permet d'écrire l'équation différentielle suivante

   $$\frac{10600}{3}R^2v'(t) + 0,00786v(t) = 21560R^2$$

   (b) Cas d'une particule sphérique de sable de rayon $R = 50$ μm $= 50 \times 10^{-6}$ m.

      i. Résoudre cette équation différentielle pour trouver l'évolution de la vitesse de décantation $v(t)$

      ii. Quelle est la vitesse limite (lorsque t tend vers $+\infty$) de la particule ?

      iii. Établir le tableau de variation de la fonction $v(t)$ puis la représenter graphiquement dans un repère orthonormé.

      iv. Calculer le temps nécessaire à une telle particule pour atteindre le fond situé à 5 m sous la surface de l'eau ? On pourra utiliser l'intégrale $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt =$ *distance parcourue entre les instants* t_1 *et* t_2.

   (c) Mêmes questions, sans le tableau de variation ni la représentation graphique pour une particule de rayon :

      i. $R = 5$ μm $= 5$ $\times 10^{-6}$m.

      ii. $R = 1$ mm.

Correction du problème 13 : Sédimentation

1. **Le calcul des forces**

   (a) $P = V\rho g = \frac{4}{3}\pi R^3 \times 2650 \times 9,8 = \frac{103880}{3}\pi R^3$

   (b) $F_A = V\rho_{eau}g = \frac{4}{3}\pi R^3 \times 1000 \times 9,8 = \frac{39200}{3}\pi R^3$

   (c) $F_S = 6\pi \times \rho_{eau} \times v_{eau} \times R \times v = 6\pi \times 1000 \times 1,31 \times 10^{-6} \times R \times v = 0,00786\pi Rv$

2. **Équation différentielle**

   Si la vitesse instantanée de la particule est $v(t)$ alors son accélération est $v'(t)$ et le bilan des forces donne :

   $$\frac{4}{3}\pi R^3 \times v'(t) = P - (F_A + F_S) = \frac{103880}{3}\pi R^3 \left(\frac{39200}{3}\pi R^3 + 0,00786\pi Rv(t)\right)$$

   (a) En simplifiant par $R \neq 0$ et par π cette égalité, on obtient :

   $$\frac{10600}{3}R^2 \times v'(t) + 0,00786v(t) = 21650R^2$$

   soit, en posant $y = v(t)$

   $$y' + \frac{2,2245 \times 10^{-6}}{R^2}y = 6,102$$

   (b) En remplaçant R par sa valeur et en arrondissant il vient $y'(t) + 889,8y = 6,102$

   i. L'équation sans second membre $y'(t) + 889,8y = 0$ a une solution générale de la forme $f(t) = Ce^{-889,8t}$ où C est une constante réelle.
   Si on pose $g(t) = \frac{6,102}{889,8}$ alors g est trivialement une solution particulière de l'équation complète.
   La solution est $v(t) = Ce^{-889,8t} + \frac{6,102}{889,8}$ avec $v(0) = 0$ soit $v(t) = \frac{6,102}{889,8}(1 - e^{-889,8t})$.
   La vitesse de la particule en fonction du temps est donnée, en arrondissant, par

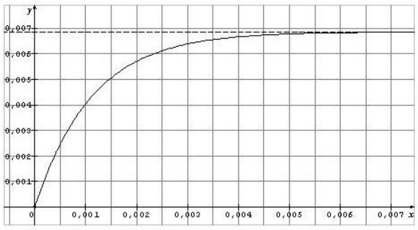
   $$v(t) = 6,86 \times 10^{-3}(1 - e^{-889,8t})$$

   .

   ii. On sait que la limite de e^x quand x tend vers $-\infty$ est 0 donc la limite de $v(t)$ quand x tend vers $-\infty$ est $6,86 \times 10^{-3}$ donc la vitesse de la particule va se stabiliser à environ 7 mm par seconde.

   iii. Soit v' la dérivée de v, on a $v'(t) = 6,86 \times 10^{-3} \times 889,8e^{-889,8t} > 0$ donc v est croissante sur $[0; +\infty[$.

t	0	$+\infty$
$v'(t)$	$+$	
v	0 ↗	$6{,}86\times10^{-3}$



iv. Au bout de 0,006 s la vitesse de 6,86 mm.s^{-1} est pratiquement atteinte. Il n'est pas nécessaire d'utiliser une primitive pour donner avec une assez bonne précision le « temps de chute » τ , en secondes, de la particule : $\tau \approx \frac{h}{v}$ où h est la hauteur en m si v est la vitesse en m.s^{-1}. Ici $\tau \approx \frac{5}{6{,}86\times10^{-3}}$ soit 12 minutes et 9 secondes.

(c) Autres valeurs :

$$y' + \frac{2{,}2245\times10^{-6}}{R^2}y = 6,102 \text{ a pour solution } v(t) = \frac{6{,}102\times R^2}{2{,}2245\times10^{-6}}\left(1 - e^{-\frac{2{,}2245\times10^{-6}}{2R^2}t}\right)$$

i. $R = 5\ \mu m$

A. $v(t) = 0,686 \times 10^{-3}\left(1 - e^{-88980t}\right)$

B. Cette fonction est croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

C. Lorsque t tend vers $+\infty$ la vitesse tend vers 0,686 mm.s^{-1}.

D. Au bout de $0,00006\ s$ la vitesse limite est atteinte, donc le « temps de chute » t est égal à 7289 s soit 2 h1 min 29s.

ii. $R = 1\ mm$

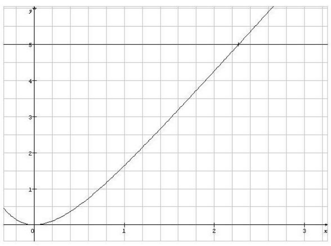
A. $v(t) = 2,743\left(1 - e^{-2{,}2245t}\right)$

B. Cette fonction est croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

C. Lorsque t tend vers $+\infty$ la vitesse tend vers 2,743 mm.s^{-1}.

D. A l'aide d'une intégration numérique on trouve t égal à $2,27\ s$ environ.
En intégrant on trouve $h(t) = 2,743t + 1,233e^{-2{,}2245t} - 1,233$.

Une résolution graphique de l'équation $h(t) = 5$ donne 2,26940 comme valeur approchée de t .

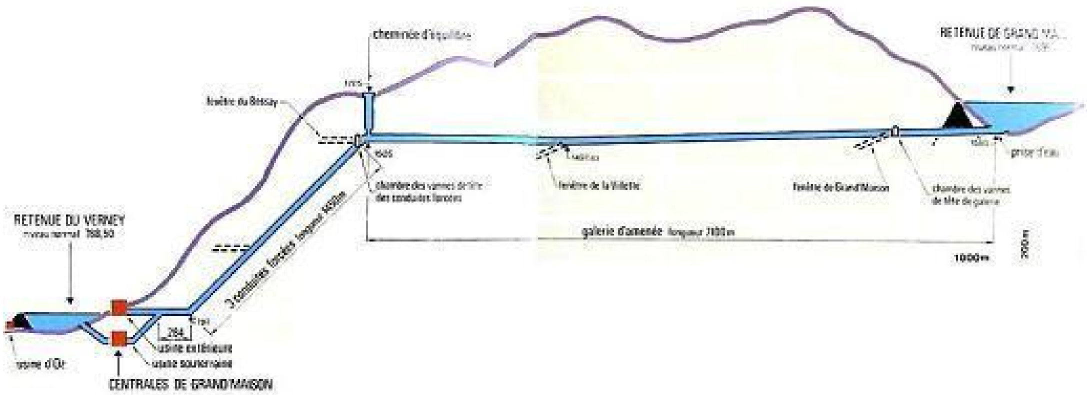


Problème 14 : Station de transfert d'énergie par pompage de Grand'Maison (Isère)

Classes	**Thèmes**	**Objectif**
• Première • Terminales • BTS	• Stockage de l'énergie • Dérivation, primitives • Fonctions du second degré, sinus	• Pratique de la dérivation et du calcul intégral • Modélisation d'évolution de grandeur par des fonctions numériques

Problème :

Le barrage de Grand'Maison est un barrage à enrochements, situé près de Bourg d'Oisans en Isère. Ce barrage mesure 550 m de long et 140 m de haut (160 m sur fondation), il peut contenir jusqu'à 140 millions de m^3 d'eau. Il peut fournir une puissance électrique maximale de 1 700 MW. Les deux retenues de Grand'Maison (en amont) et du Verney (en aval) constituent une STEP (station de transfert d'énergie par pompage). En effet, l'usine, située sur les rives du lac du Verney (qui peut contenir 14 millions de m^3 d'eau, soit 10 fois moins que la retenue amont), peut être utilisée selon la production et la demande sur le réseau électrique soit pour produire de l'électricité (en turbinant l'eau comme une usine hydroélectrique classique), soit pour stocker de l'énergie en inversant le fonctionnement des turbines, l'eau de la retenue inférieure étant alors pompée vers la retenue supérieure. Le débit maximal d'eau entre les 2 retenues est de $216m^3.s^{-1}$ soit 777 $600m^3.h^{-1}$. Ce système de stockage gravitaire de l'énergie présente une bonne efficacité (la pompe comme la turbine présentent chacune un rendement voisin de 90 %) et se développe actuellement dans de nombreuses régions du monde, notamment en vue de pallier au caractère intermittent des sources d'énergie renouvelables. Ces systèmes permettront par exemple de stocker en Suisse ou en Norvège les surplus de l'énergie éolienne produite en mer du Nord, en vue de les utiliser dans toute l'Europe lors des demandes d'électricité.

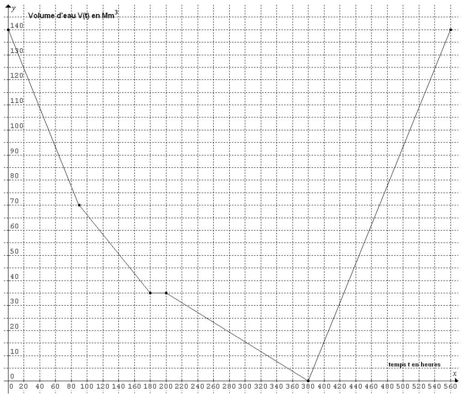


Remarque : A titre de comparaison, la retenue du barrage de Naussac près de Langogne en Lozère peut contenir au maximum 190 Mm^3 d'eau.

Questions :

1. **On suppose connu l'évolution du volume d'eau dans la retenue en amont**

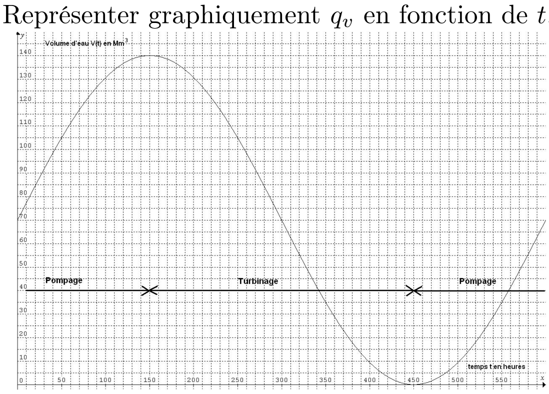
   - Si le volume d'eau $V(t)$ dans la retenue en amont varie selon la ligne brisée indiquée ci-dessous, comment évolue le débit volumique q_v (en $m^3.h^{-1}$) entre les deux retenues d'eau ?



   - Si le volume d'eau $V(t)$ dans la retenue amont varie selon la fonction V_1 définie par

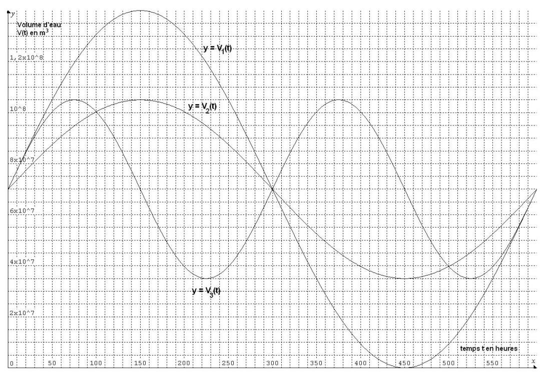
$$V(t) = 70 \times 10^6 + 70 \times 10^6 sin\left(\frac{\pi}{300}t\right)$$

avec $V(t)$ en m^3 et t en heures.
a) Quel est le débit volumique q_v (en $m^3.h^{-1}$) entre les 2 retenues d'eau à la date $t = 60$ heures ?
b) Comment évolue, en fonction du temps t en heures, le débit volumique q_v entre les deux retenues d'eau ? Représenter graphiquement q_v en fonction de t.



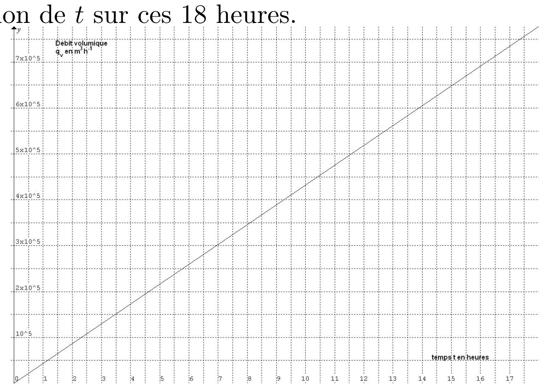
c) Quel est le débit maximal arrivant dans la retenue amont ?
d) Reprendre les deux questions précédente b) et c) avec le volume d'eau $V(t)$ dans la retenue amont qui varie selon les fonctions V_2 et V_3 définies par

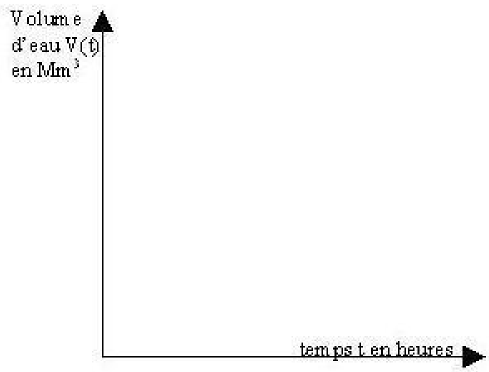
$$V_2(t) = 70 \times 10^6 + 35 \times 10^6 sin\left(\frac{\pi}{300}t\right) \quad \text{et} \quad V_3(t) = 70 \times 10^6 + 35 \times 10^6 sin\left(\frac{\pi}{150}t\right)$$



2. **On suppose connue l'évolution du débit**

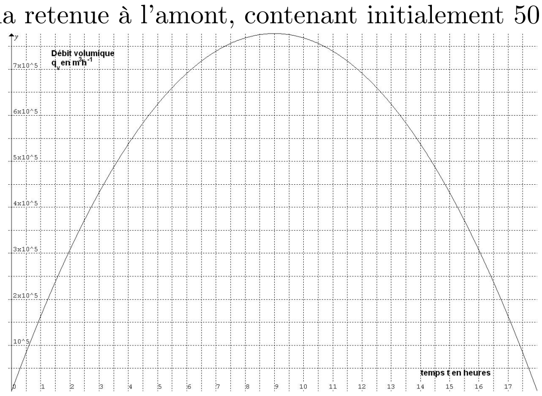
- 1) Si le débit volumique q_v entre les deux retenues d'eau varie selon entre 0 et 777 600 $m^3.h^{-1}$ de façon linéaire entre 0 et 18 heures (suite à une montée régulière de la puissance éolienne à stocker par exemple), comment évolue sur ces 18 heures le volume $V(t)$ d'eau dans la retenue à l'amont, contenant initialement 50 Mm^3 d'eau ? Représenter graphiquement V ne fonction de t sur ces 18 heures.

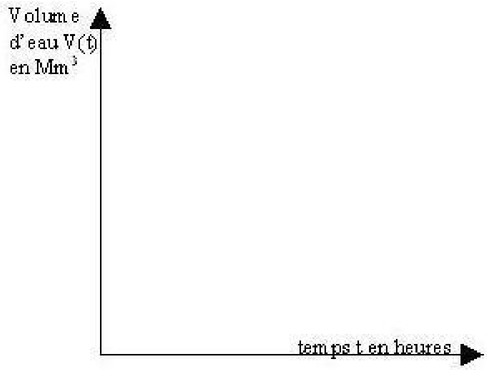




Quel est le volume d'eau dans la retenue amont au bout de ces 18 heures ?

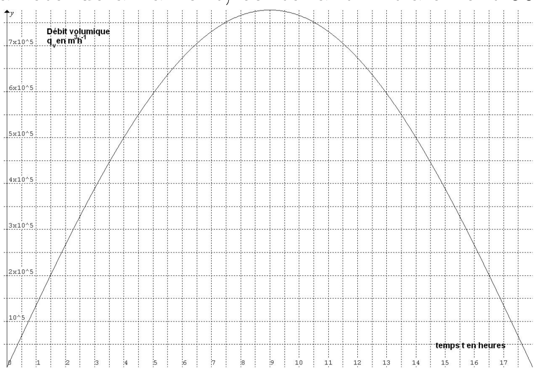
- Si le débit volumique q_v entre les deux retenues d'eau varie selon entre 0 et 777 600 $m^3.h^{-1}$ de façon parabolique entre 0 et 18 heures (suite à une augmentation puis une baisse de la puissance éolienne à stocker par exemple), comment évolue sur ces 18 heures le volume $V(t)$ d'eau dans la retenue à l'amont, contenant initialement 50 Mm^3 d'eau ?

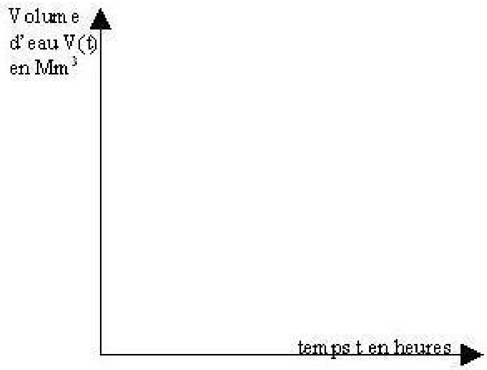




Quel est le volume d'eau dans la retenue amont au bout de ces 18 heures ?

- Si le débit volumique q_v entre les deux retenues d'eau varie selon entre 0 et 777 600 $m^3.h^{-1}$ de façon sinusoïdale entre 0 et 18 heures (suite à une augmentation puis une baisse de la puissance éolienne à stocker par exemple), comment évolue sur ces 18 heures le volume $V(t)$ d'eau dans la retenue à l'amont, contenant initialement 50 Mm^3 d'eau ?





Quel est le volume d'eau dans la retenue amont au bout de ces 18 heures ?

Liens sur les stations de transfert d'énergie par pompage : www.electron-economy.org

Problème 15 : Station de transfert d'énergie par pompage en mer

Classes	Thèmes	Objectif
• Première • Terminales • BTS	• Stockage de l'énergie • Dérivation • Primitives	• Pratique de la dérivation et du calcul intégral • Modélisation par une équation différentielle

Problème :

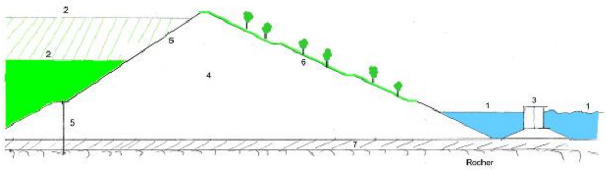
Les stations de transfert d'énergie par pompage (ou STEP), c'est-à-dire les retenues d'eau alimentant une turbine, constituent la technologie capable jusqu'à ce jour des stockages d'énergie les plus importants, et permettant de délivrer la plus grande puissance, avec un rendement total d'environ 80 % sur un cycle de stockage-déstockage. Des besoins de stockage de grande ampleur deviennent de plus en plus nécessaires puisque les principales sources d'énergie renouvelable utilisables sous forme d'électricité, le vent et le soleil, sont fondamentalement intermittentes.

Cependant la construction des STEP suppose la réunion de trois conditions géographiques particulières :

- un récipient géologique étanche, typiquement une cuvette glaciaire ;
- un approvisionnement en eau, entretenant le bassin auquel s'alimente le pompage ;
- un accès au réseau électrique via des lignes à haute tension.

Les STEP actuelles sont ainsi construites en zone de montagne. Mais il existe une autre manière de les construire : en mer. Cette localisation correspond en outre à une zone de développement de l'énergie éolienne en Europe.

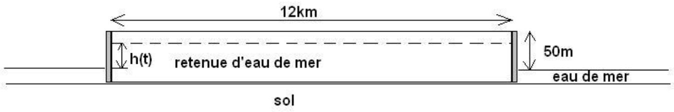
Il s'agirait de construire des atolls artificiels, en fait des réservoirs de plusieurs kilomètres carrés, délimités par une digue se refermant sur elle-même et s'élevant de 50 à 100 mètres au dessus de la surface, protégés par une ligne de brises lames. La hauteur d'eau atteinte à l'intérieur du réservoir permettrait de stocker de 2 à 8 GWh par km^2, pour des puissances de plusieurs GW.



(1) Niveau de la mer ; (2) Niveaux haut et bas du bassin ; (3) Brise lame ; (4) Digue (sable et gravier) ; (5) Barrière d'étanchéité ; (6) Végétation ; (7) Fond naturel (sable et gravier).

La construction, à partir de grandes barges, selon des techniques éprouvées puisque régulièrement utilisées pour l'aménagement des ports, serait dans une certaine mesure moins complexe que celle d'une STEP en zone de montagne, où les reliefs du terrain obligent à des aménagements complémentaires importants, pour les accès en haute montagne et les tunnels de liaison entre les deux bassins.

On considère un atoll artificiel assimilable à un cylindre de révolution de 12 km de diamètre, et de hauteur 50 m au dessus de la surface de la mer.



Soit $V(t)$ le volume (en m^3) et $h(t)$ la hauteur de l'eau stockée dans la retenue artificielle au dessus du niveau de la mer. t représente le temps en heures. $q_v(t)$ est le débit volumique (en $m^3.h^{-1}$) de pompage de l'eau de la mer vers la retenue.

Le but de ce problème est de déterminer comment augmente le volume d'eau stockée $V(t)$ au cours du temps lors d'un pompage sous puissance constante, sachant que la pompe doit élever l'eau à une hauteur de plus en plus élevée. La retenue est considérée vide à $t = 0$.

Questions :

1. Si le pompage est assuré par l'énergie générée par un parc éolien de puissance fixe égale à 50 GW (soit 10 000 éoliennes de 5 MW, soit de 180 m de haut, à puissance maximale, équivalentes à 35 réacteurs nucléaires à pleine puissance de 1400 MW chacun), donner sans calculs l'allure de l'évolution de $V(t)$ au cours du temps t.

2. Le travail W (en J) nécessaire pour élever d'une hauteur h (en m) une masse m (en kg) est donné par $W = m.g.h$ avec $g \approx 9,8SI$.
   1 watt = 1 joule par seconde soit $1W = 1J.s^{-1}$
   La puissance mécanique P (en W) nécessaire pour élever d'une hauteur h (en m) un débit massique q_m (en $kg.s^{-1}$) est donc donnée par $P = q_m.g.h$.
   De plus, $q_m(t) = \rho_{\text{eau}} q_v(t)$ avec $\rho_{\text{eau}} = 1000kg.m^{-3}$.
   A un instant t quelconque, compte tenu d'un rendement de la pompe de 90 %, on a $0,9 \times P_{\text{elec}} = \rho_{\text{eau}} q_v(t).g.h(t)$
   Ainsi $q_v(t)$ diminue lorsque h augmente puisque P_{elec} est ici considérée constante.

   (a) Exprimer $V(t)$ en fonction de $h(t)$.

   (b) Donner la relation entre $V(t)$ et $q_v(t)$.

   (c) En déduire une relation entre $V(t)$ et $V'(t)$.

   (d) En déduire l'expression de $V(t)$ en fonction de t puis représenter graphiquement $V(t)$ en fonction de t jusqu'au remplissage de la retenue.

   (e) Au bout de combien d'heures la retenue est-elle remplie ?

   (f) Déterminer l'expression du débit volumique q_v en $m^3.s^{-1}$ en fonction du temps puis représenter graphiquement q_v en fonction de t jusqu'au remplissage de la retenue.

Correction du problème 15 :

1.
2. (a) $V(t) = S.h(t)$

   (b) $q_v(t) = V'(t)$
   Le débit volumique instantané $q_v(t)$ est représenté par la fonction dérivée du volume $V(t)$ de la retenue par rapprot au temps. $q_v(t)$ est en $m^3.s^{-1}$ et $V(t)$ en m^3 et t en s.

   (c) $0,9 \times P_{elec} = \rho_{eau}.V'(t).g.h(t)$. On obtient l'équation différentielle

   $$\frac{0,9 \times P_{elec}}{\rho_{eau} \cdot g} = V(t).V'(t)$$

   (d) On cherche alors une primitive de chacune des deux fonctions définies par les deux termes, on obtient :

   $$\frac{0,9 \times P_{elec}}{\rho_{eau} \cdot g} t + Cste = \frac{1}{2} V(t)^2$$

   d'où

   $$V(t) = \sqrt{\frac{0,9 \times P_{elec}}{\rho_{eau} \cdot g}} \sqrt{t}$$

   Application numérique : $V(t) \approx 32\ \ 228\,078\sqrt{t}$

   (e) $V(t) = \pi \times 6000^2 \times 50$ soit $\sqrt{t} \approx 175,5$ soit $t \approx 30788s$ soit environ 8,55 heures 33 min.

   (f) $q_v(t) = V'(t) = \sqrt{\dfrac{\pi \times 6000^2 \times 50 \times 10^9}{1000 \times 9,8}} \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

Autres méthodes :
i) Le travail nécessaire pour élever l'eau jusqu'à la hauteur quelconque $h(t)$ (≤ 50 m) est :

$$W = \int_0^{h(t)} S.\rho.g.HdH$$

$S.\rho.g.H.dH$ étant le travail élémentaire pour élever de la hauteur H une « plaque » d'eau d'épaisseur infiniment fine dH d'où $0,9 \times P_{elec} \times t = \displaystyle\int_0^{h(t)} S.\rho.g.HdH$ soit $0,9 \times P_{elec} \times t = S.\rho.g(h^2(t) - 1)$ or $V(t) = S.h(t)$
d'où $V(t) = \sqrt{\dfrac{0,9 \times P_{elec}}{\rho_{eau} \cdot g}} \sqrt{t}$.

ii) Le travail pour élever de $h(t)$ l'eau est le travail pour élever de $\frac{h(t)}{2}$ le centre de gravité du cylindre d'eau de masse $S.h(t).\rho$ d'où $0,9 \times P_{elec} \times t = S.\rho.gh^2(t)$ d'où le même résultat.

Problème 16 : Rendements de quelques appareils de combustion du bois.

Classes	Thème	Objectif
• Collège • Seconde	• Energie de combustion du bois • Fractions • Poucentages	• Pratique du calcul

- **Problème :** on compare l'efficacité d'une cheminée traditionnelle et d'une chaudière à granulés de bois.
- **Données :**

  1. Le rendement thermique d'une cheminée à bûches à foyer ouvert est d'environ 10 %, c'est à dire que seulement 10 % de la chaleur issue de la combustion du bois chauffe l'intérieur de la maison (le reste de la chaleur issue de la combustion partant avec les fumées par la cheminée). La combustion d'1 tonne de hêtre dégage 5200 kWh de chaleur.

  2. Le rendement thermique d'une chaudière à granulés de bois (obtenus par exemple à partir de sciure de pin sylvestre) est d'environ 92 %, c'est à dire que 92 % de la chaleur issue de la combustion des granulés de bois chauffe l'intérieur de la maison (le reste de la chaleur issue de la combustion partant avec les fumées par la cheminée). La combustion d' 1 tonne de pin sylvestre dégage 5700 kWh de chaleur.

Questions :

1. Combien de tonnes de bois devront être brûlées dans une cheminée à bûches à foyer ouvert si 12 000 kWh de chaleur sont nécessaires chaque année pour le chauffage dans cette maison ?

2. Quelle masse de granulés de bois devra être brûlée dans une chaudière à granulés de bois si 12 000 kWh de chaleur sont nécessaires chaque année pour le chauffage dans cette maison ?

3. Comparer le résultat avec celui du 1).

Correction du problème 16 : Rendements de quelques appareils de combustion du bois.

1. $12000 : \left(\frac{1}{10}\right) = 120000$ kWh

   $120000 : 5200 \approx 23{,}1$ tonnes de bûches de hêtre.

2. $12000 : 0{,}92 \approx 13\ 044$ kWh

   $13\ 044 : 5700 = 2{,}3$ tonnes de granulés de bois

3. Il faut 10 fois moins de granulés de bois que de bois brut.

Remarque : plus le bois est sec, meilleur est le rendement de la combustion. Le très bon rendement de la combustion du granulé est dû à son très faible taux d'humidité (< 10 %).

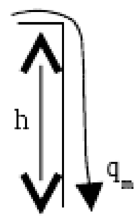
Problème 17 : Énergie de fluides en mouvement

Classes	Thèmes	Objectif
• Collège • Seconde	• Énergie hydroélectrique et éolienne • Calcul numérique et littéral • Pourcentages	• Pratique du calcul

- **Notions préalables de mécanique des fluides :**

  ⋆ **Écoulement vertical :**

  Un cours d'eau de débit q_m (en kg.s^{-1}) chute (avec une vitesse initiale négligeable) d'une hauteur h. La masse d'eau fournit alors la puissance mécanique

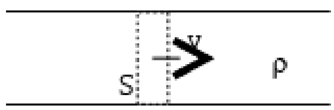
  

  $$P = q_m g h$$

  avec P en W, q_m le débit massique (en kg.s^{-1}) de la chute, h en m et $g \approx 9,8$ SI.

  ⋆ **Écoulement horizontal :**

  Soit un fluide de masse volumique ρ traversant une section de surface S avec une vitesse v.

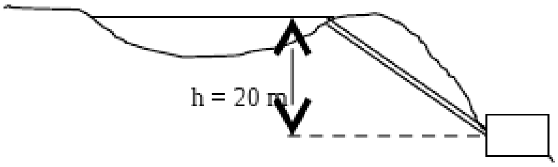
  La masse de fluide peut alors fournir au maximum la puissance mécanique

  $$P = \frac{1}{2}\rho S v^3$$

  avec P en W, ρ en kg.m^{-3}, S en m^2 et v en m.s^{-1}.

Questions :

1. Un cours d'eau débitant en moyenne annuelle 4 m^3.s^{-1} chute d'une retenue dont la surface est située 20 m au dessus de la turbine.



(a) En considérant que la vitesse de l'eau est nulle au début de la chute, calculer la puissance mécanique théorique de cette chute.

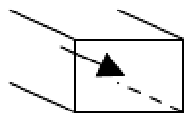
Comment évolue cette puissance : si le débit est doublé ? si la hauteur de chute est doublée ?

(b) Si le rendement de la turbine Francis qui recueille l'eau est de 91 % et si le rendement de l'alternateur est de 98 %, calculer la puissance électrique fournie alors par l'alternateur au réseau électrique.

(c) Calculer la production électrique annuelle de cette centrale ainsi que la somme d'argent qu'elle rapporte à son propriétaire si ce dernier vend cette production à 6 c€.kWh^{-1}.

Rappel : quantité d'énergie (en kWh) = puissance (en kW) × durée (en h) $(E = P \times t)$

2. (a) Calculer la puissance théorique d'un écoulement horizontal d'eau avec une vitesse de 5 m/s à travers une surface (perpendiculaire à la vitesse de l'écoulement) de 150 m^2.



(b) i. Calculer la puissance théorique d'un écoulement horizontal d'air (de masse volumique 1,29 kg.m^{-3}) avec une vitesse de 12 m.s^{-1} à travers une surface (perpendiculaire à la vitesse de l'écoulement) circulaire de 63 m de rayon.

ii. Comment évolue cette puissance : si la vitesse du vent est doublée ? si l'aire de la surface balayée est doublée ?

iii. Représenter graphiquement cette puissance théorique en fonction de la vitesse v du vent, pour $v \in [0\,;20 \text{ m.s}^{-1}]$, pour un rayon fixé à 63 m, avec de l'air de masse volumique 1,29 kg.m^{-3}.

Note : Cette surface correspond à la surface balayée par les pales d'une éolienne terrestre de puissance nominale 5 MW.

iv. La loi de Betz détermine qu'une éolienne ne pourra jamais convertir en énergie mécanique plus de 16/27 (soit environ 59 %) de l'énergie cinétique contenue dans le vent.

Si l'alternateur a un rendement de 98 %, calculer la puissance électrique maximale d'une éolienne dont les pales mesurent 63 m avec une vitesse de vent de 12 m.s^{-1}.

v. Calculer la production électrique annuelle de cette éolienne si elle fonctionne à la puissance de 5 MW en mer pendant l'équivalent de 3800 heures par an. Déterminer la somme d'argent qu'elle rapporte à son propriétaire si ce dernier vend cette production à 13 c€.kWh^{-1}.

3. L'énergie cinétique (en joules, symbole J) d'un solide de masse m en translation à la vitesse v se calcule par la relation $E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2$ avec m en kg et v en m.s^{-1}.
En outre, 1 watt = 1 joule par seconde (1 W = 1 J.s^{-1}).

Calculer la puissance théorique d'un flux de camions, de masse 38 tonnes chacun, circulant avec un débit de un camion toutes les 3 secondes, sur une chaussée horizontale avec une vitesse de 100 km.h^{-1}.

Correction du problème 17 : Énergie de fluides en mouvement

1. (a) 784 kw

   P double si q_m double ou si h double.

   (b) $P_{méca} \approx 713,5$ kW
   $P_{élec} \approx 700$ kW

   (c) 6 124 740 kWh.an^{-1}
   367 484 €.an^{-1}

2. (a) 9,375 MW

   (b) i. $P_{théorique} \approx 13,9$ MW

   ii. P est multipliée par 8 si v double ; par 2 si S double.

   iii.

   iv. 8,07 MW qui est bien supérieur à 5 MW : le rendement mécanique des éoliennes peut encore être nettement amélioré.

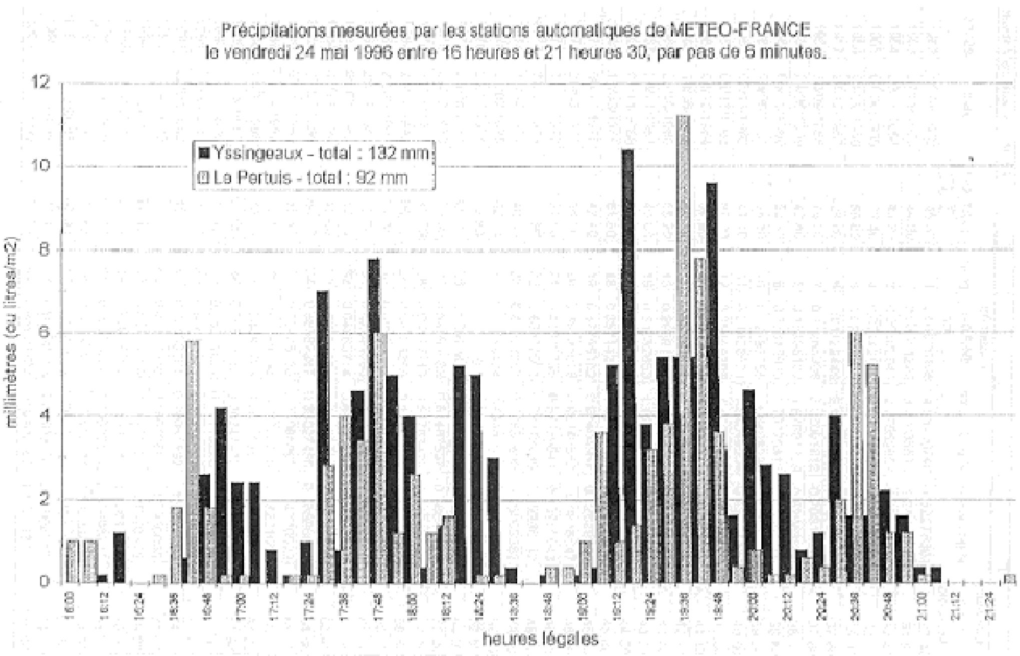
   v. 19 × 106 kWh.an^{-1} soit 2 470 000 €.an^{-1}

3. P = 0,5 × 38000 × (100 000 : 3600)^2 : 3 ≈ 4 886 830 J/s^{-1} soit ≈ 4,9 MW.

Problème 18 : Une situation de crue

Classes	Thème	Objectif
• Troisième • Seconde	• Gestion des risques • Équations • Aires	• Pratique du calcul • Résolution numérique d'équations du second degré

- **Problème :** on veut étudier les risques de crue d'une rivière en fonction des précipitation.



- **Données :** On imagine la situation extrême suivante :
- Le vendredi 24 mai 1996, entre 19 h 33 min et 19 h 39 min, 11,2 mm d'eau de pluie (soit 11,2 L.m^{-2}) sont tombés sur la station météorologique du Pertuis (bourg situé en Haute Loire, entre Yssingeaux et le Puy en Velay).
  - ⋆ Une telle pluie (11,2 L.m^{-2} en 6 minutes) s'abat sur la totalité de la partie du bassin versant du Ramel située à l'amont du pont de la Terrasse (entre Yssingeaux et Messinhac), soit sur environ 26,5 km^2.
  - ⋆ La durée d'une telle pluie est suffisamment longue pour que de l'eau tombée vers la source du Ramel ait le temps d'arriver au pont de la Terrasse.
  - ⋆ Le sol est saturé d'eau : toute l'eau tombant du ciel s'écoule dans le lit du Ramel sans pouvoir s'infiltrer dans le sol.

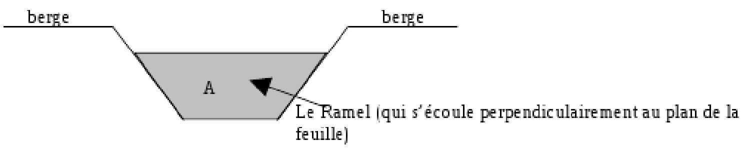
Questions :

On se propose de calculer quelle hauteur atteindrait le niveau du Ramel au pont de la Terrasse.

1. (a) Au cours d'un tel orage, combien de m^3 d'eau tomberaient du ciel durant chaque seconde sur la partie du bassin versant du Ramel située en amont du pont de la Terrasse ?

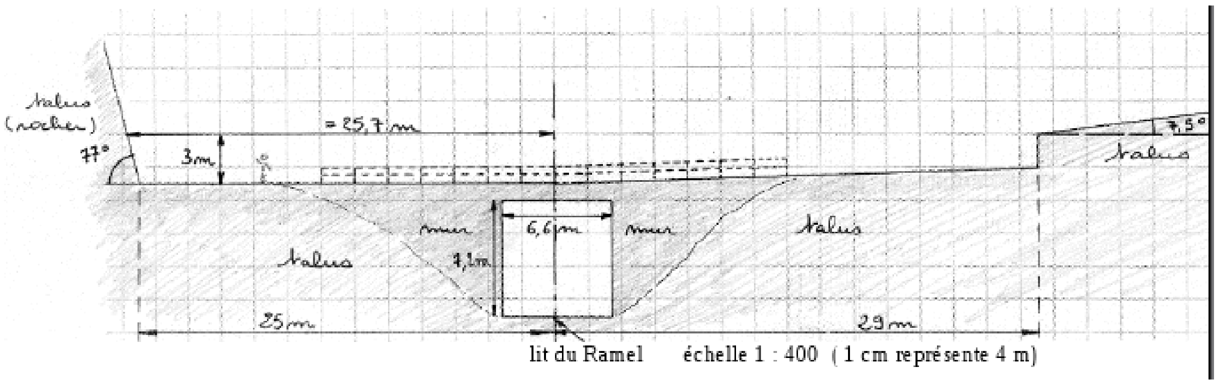
   (b) Quel serait alors le débit maximum du Ramel au pont de la Terrasse ?

2. Dans une telle situation, on peut évaluer la vitesse moyenne du courant du Ramel au pont de la Terrasse à 4,0 $m.s^{-1}$.



   Quelle aire A aurait alors la surface occupée par le Ramel dans un plan perpendiculaire à son sens d'écoulement ?

3. Le schéma suivant représente le pont de la Terrasse (vue de l'amont) dans un plan perpendiculaire au sens d'écoulement du Ramel :



   - **Remarques**
     - ⋆ L'axe du pont représente la verticale.
     - ⋆ La barrière du pont, du côté de l'aval, est faite de barres d'acier : on pourra considérer qu'elle ne fait pas obstacle à l'eau.
     - ⋆ La barrière du pont, coté amont, est assez basse et pourra être négligée.

   Au pont de la Terrasse,

   (a) le Ramel submergerait-il la route ?

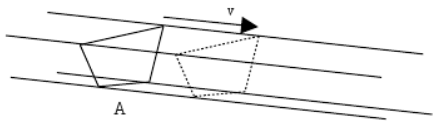
   (b) le Ramel dépasserait-il la route de plus de 3 m ?

4. Calculer la hauteur maximale (approchée au cm) de l'eau au dessus de la route. On pourra prendre comme valeur inconnue la hauteur h de l'eau au dessus de la route et on calculera sa valeur au cm près.

Correction du problème 18 : Une situation de crue

1. D'après les hypothèses de modélisation, le débit maximum Q au niveau du pont de la Terrasse devient égal au débit de pluie, soit $(0{,}112 \times 26{,}5 \times 10^6) : (6 \times 60) \approx 825$ m^3.s^{-1}

2. En exprimant le volume Q du prisme droit d'eau qui passe sous le pont en 1 seconde, on obtient : $Q = v \times A$ avec v la vitesse moyenne du courant (en m/s) et A l'aire de la surface qu'occupe l'eau (en m^2) :



Avec $v = 4$ m.s^{-1}, on obtient $A \approx 206,25$ m^2.

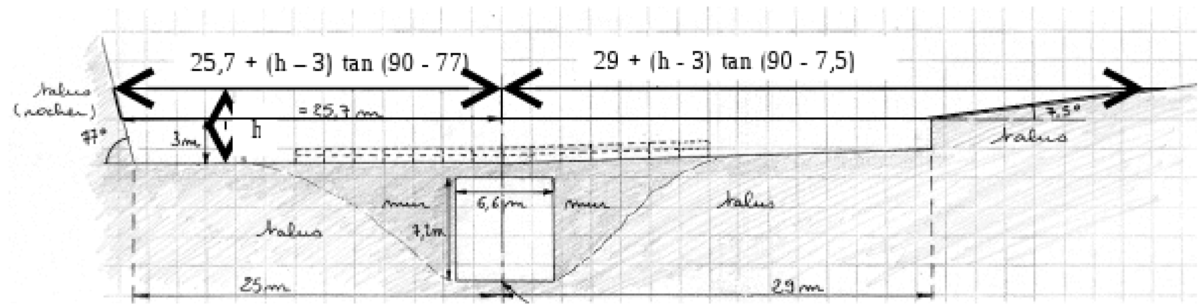
3. (a) Soit h la hauteur (en m) atteinte au maximum par l'eau au dessus du niveau du pont (ou de la route).

   Aire de la surface sous le pont $= 6,6 \times 7,2 = 47,52$ m^2 $<$ 206,225 m^2 (nécessaire pour faire passer le débit) donc la rivière déborderait au dessus de la route.

   (b) La somme de l'aire de la surface sous le pont et de l'aire de la surface disponible entre la route et une ligne horizontale située à 3 m au dessus de la route (décomposée en 2 trapèzes) est égal à $6,6 \times 7,2 + 0,5 \times (25 + 25,7) \ \times 3 + 0,5 \times (2 + 3) \ \times 29 = 196,07$ m^2 $<$ 206,25 m^2 donc l'eau monterait à plus de 3 m au dessus de la route.

   206,25 $-$ 196,07 $=$ 10,18 m^2 sont nécessaires en plus pour que tout le débit passe.

$$10,18 = 0,5 \times [25,7 + 25,7 + (h-3)\tan(90-77)] \times (h-3)$$
$$+0,5 \times [29 + 29 + (h-3)\tan(90-7,5)] \times (h-3)$$



d'où, après développement : $3,9133h^2 + 31,2202h - 139,2103 \approx 0$

La résolution (au tableur) de cette équation du 2nd degré donne la racine utile approchée $h \approx 3,19$ m.

- **Remarques :**
  - ⋆ Avec un peu moins de précision, on obtient l'équation $3,91h^2 + 31,22h - 139,21 \approx 0$. La racine utile a aussi pour valeur approchée au cm $h \approx 3,19$ m.

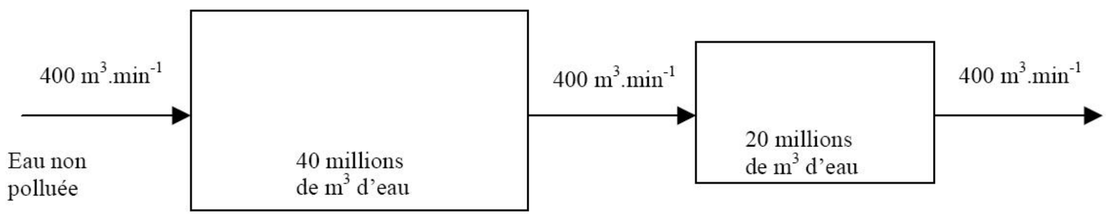
    L'eau atteindrait une hauteur d'environ 3,2 m au dessus de la route.
  - ⋆ À titre de comparaison, lors de la crue du 24 mai 1996, l'eau a atteint une hauteur de 0,5 m au dessus de la route.

Problème 19 : Dilution de polluants dans deux retenues sur le même cours d'eau

Classes	Thème	Objectif
• Terminale • BTS	• Pollution • Suites. • Equations différentielles. • Résolution d'équations comprenant la fonction exponentielle. • Maximum d'une fonction.	• Modéliser une situation concrète par un modèle discret (suite). • Modéliser une situation concrète par un modèle continu (équation différentielle). • Comparer les résultats obtenus par les deux modèles. • Sensibiliser le lecteur au problème de la pollution de l'eau à travers le temps nécessaire à la dépollution et l'influence du débit de l'eau sur celui-ci.

Situation étudiée :

On imagine deux retenues sur le même cours d'eau dont le débit est de 400 $m^3.min^{-1}$, l'une étant située juste après l'autre. La retenue en amont contient 40 millions de m^3 d'eau et celle placée à l'aval contient 20 millions de m^3 d'eau.



On imagine que la retenue située en amont reçoit une pollution accidentelle de 800 kg de pesticides et on souhaite connaître l'évolution de la masse de pesticides dans chacune des retenues au cours du temps. La retenue située à l'amont est alimentée par de l'eau qui ne contient pas de pesticides. Initialement, la retenue située à l'aval ne contient pas de pesticides.

On se propose, sous certaines conditions (hypothèses de modélisation), d'apporter une réponse aux questions suivantes :

1. Au bout de combien de temps l'eau de la retenue située en amont pourra-t-elle être à nouveau considérée comme eau potable ?

2. L'eau de la retenue située en aval dépassera-t-elle la norme autorisée en pesticide ?

3. Quelle sera la masse maximale de pesticides présente dans la retenue située en aval ?

4. Dans le cas d'une réponse affirmative à la question 2, au bout de combien de temps l'eau de la retenue en aval pourra-t-elle à nouveau considérée comme eau potable ?

5. De quelle retenue, l'eau pourra-t-elle être réutilisée en premier comme eau potable ?

   Si on suppose que le débit du cours d'eau est divisé par 2 alors :

6. Quelle sera la quantité maximale de pesticides présente dans la retenue située en aval ?

7. Au bout de combien de temps obtiendra-t-on cette quantité maximale ?

8. Au bout de combien de temps l'eau de chaque retenue redeviendra-t-elle potable ?

Questions

1. **Modélisation par une suite**
   Dans cette partie, on souhaite étudier l'évolution de la masse de pesticides présente dans chaque retenue, minute par minute. On note $m_1(t)$ la masse de pesticides, exprimé en kg, présente dans la totalité de la retenue en amont en fonction du temps t, exprimé en minutes et $m_2(t)$ celle de la retenue située en aval.
   - **Norme officielle :** actuellement, l'eau utilisée pour la production d'eau potable, doit contenir moins de 0,000005 g par litre de pesticides.
   - **Hypothèses de modélisation :**
     - ⋆ La retenue située en aval étant juste après la retenue située en amont, on peut supposer que la quantité d'eau polluée qui sort de la première retenue passe intégralement dans la deuxième.
     - ⋆ L'eau entrant dans chaque retenue en de multiples points, on considère que la quantité de pesticides se mélange parfaitement et en permanence (c'est-à-dire pendant un intervalle de temps « petit ») dans la totalité de l'eau de chacune des retenues. Ce qui simplifie la modélisation.
   - Remarque :
     Ne sachant pas exprimer $m_2(n)$ en fonction de n, l'utilisation du tableur permet d'arriver facilement aux résultats. On pourrait aussi procéder par tâtonnements avec une calculatrice.

   (a) Calculer $m_1(1)$ et $m_1(1)$.

   (b) n désigne un entier naturel quelconque.

      i. Exprimer $m_1(n+1)$ en fonction de $m_1(n)$.

      ii. Quelle est la nature de la suite $m_1(n)$?

      iii. Pour tout entier naturel n, exprimer $m_1(n)$ en fonction de n.

      iv. Répondre à la question 1.

   (c) n désigne un entier naturel quelconque.

      i. Exprimer $m_2(n+1)$ en fonction de $m_2(n)$.

      ii. A l'aide d'un tableur, répondre aux questions 2, 3, 4 et 5.

2. **Modélisation par une fonction**
   Dans cette partie, on souhaite étudier l'évolution de la masse de pesticides présente dans chaque retenue, pendant un intervalle de temps "petit" Δt. $m_1(t)$ et $m_2(t)$ ont la même signification qu'à la partie 1.
   On suppose que les fonctions m_1 et m_2 sont dérivables sur $[0;+\infty[$.

(a) i. Exprimer en fonction de $m_1(t)$, le taux de variation $\Delta m_1(t)\Delta t$ de la fonction m_1 entre les instants t et $t + \Delta t$.

ii. Le taux de variation $\Delta m_1(t)\Delta t$ admet-il une limite quand Δt tend vers 0 ? Dans l'affirmative que représente cette limite pour la fonction m_1 ? (justifier vos reponses)

iii. Justifier que la fonction m_1 est solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad y'(t) = -10^{-5}y(t)$$

avec $t \in [0; +\infty[$

iv. Résoudre l'équation differentielle (E), puis déterminer la fonction m_1.

v. Répondre à la question 1.

(b) En reprenant les différentes étapes de la question 1. et en les appliquant à la fonction m_2, démontrer que la fonction est solution de l'équation différentielle

$$(E') \quad y'(t) + 2 \times 10^{-5}y(t) = 0,008e^{-10^{-5}t}$$

avec $t \in [0; +\infty[$

(c) Résolution de l'équation différentielle (E')

i. Soit la fonction g definie sur R par $g(t) = ke^{-10^{-5}t}$ où k désigne un réel quelconque. Déterminer le réel k pour que la fonction g soit solution de (E').

ii. Soit l'équation différentielle

$$(E") \quad y'(t) + 2 \times 10^{-5}y(t) = 0$$

avec $t \in [0; +\infty[$ et soit ϕ une fonction dérivable sur R. Demontrer que $\phi - g$ est solution de (E') si, et seulement si ϕ est solution de (E').

iii. Résoudre l'équation différentielle $(E")$. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E').

iv. Déterminer la fonction m_2.

(d) Répondre aux questions 2, 3, 4 et 5.

(e) Comparer les résultats obtenues par les méthodes des parties 2.

3. **Influence du débit du cours d'eau sur la masse maximale de pesticides contenue dans la retenue située en aval et sur le temps de dépollution des deux retenues.**
On suppose dans cette partie que le débit du cours d'eau est divisé par 2.

(a) En reprenant la méthode décrite à la partie B, mais avec un cours d'eau dont le débit est de 200 $\text{m}^3.\text{min}^{-1}$, déterminer les fonctions m_1 et m_2.

(b) Répondre aux questions 6, 7 et 8.

Pour en savoir plus sur les pesticides.
A signaler quelques sites intéressants sur les pesticides :
• le site de l'union des industries de la protection des plantes http ://www.info-pesticides.org
• le site eau et rivières de Bretagne http ://www.eau-et-rivieres.asso.fr/index.php

Pour aller plus loin
Il serait intéressant de chercher s'il existe une relation générale entre les volumes des retenues et la masse initiale des pesticides.

Bibliographie

CREM, *L'enseignement des mathématiques en relation avec les autres disciplines*, Bulletin de l'APMEP (2005), 458, pp. 354-374

DE VECCHI Gérard et PELLEGRINO Julien, *Un projet pour... éduquer au développement durable*, Delagrave, coll. : Guides de poche de l'enseignant, (2008), 119 p

HAYMA Eric et DUGOUR Guy, *Le wagonnet, côté physique et côté mathématique*, Repères-IREM (2006), 64, pp. 5-21

LOMBARD Philippe, *A propos de modélisation*, Bulletin de l'APMEP (2005), 456, pp. 81-111

NEY Muriel, *Modélisation formelle en sciences expérimentales : Problématiques de la transmission*, Habilitation à Diriger des Recherches (2007),
http ://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/19/00/46/PDF/HDRmney2007.pdf

RAOULT Jean-Pierre, *Pour introduire le débat sur la modélisation*, in Raoult Jean-Pierre ed., La modélisation., IREM de Paris7, Paris, (2004) pp. 3-7

RAOULT Jean-Pierre, *La place de la modélisation dans l'enseignement des mathématiques : obstacles, perspectives et rôle des IREM*, Bulletin de l'APMEP (2005), 458, pp. 375-380

RAOULT Jean-Pierre, *Autour de la modélisation dans l'enseignement des mathématiques*, in P. Radelet-de Grave, *Liber amicorum Jean Dhombres*, Editeur : Brepols (2008), Collection : Réminisciences vol. 8,
http ://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/Raoult_VolumeDhombres_3.pdf

RUMELHARD Guy, *Le rôle créateur des mathématiques en sciences de la vie*, Actes de l'université d'été *La pluridisciplinarité dans les études scientifiques*, Poitiers, (2001),
http ://media.education.gouv.fr/file/Formation_continue_enseignants/52/0/uescience_rumelhard_111520.pdf

.

.

AUTEUR : Christophe PETRE

TITRE : Mathématiques et développement durable

DATE : Janvier 2010

NIVEAUX : collèges, lycées

RESUME : Cette brochure propose des problèmes de physique mettant en oeuvre des outils mathématiques dans des situations liées aux questions contemporaines posées par le développement.

MOTS CLES : liaoson mathématiques-physique, modélisation, développement durable.

FORMAT A4 - Nombre de pages : 76