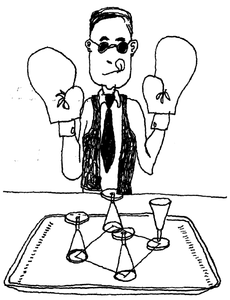
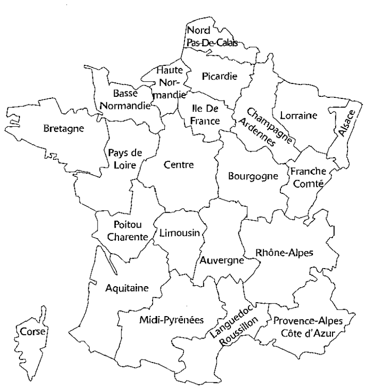
Université Blaise Pascal

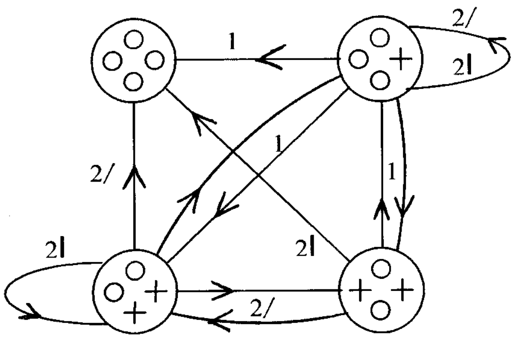
IREM de CLERMONT-FERRAND

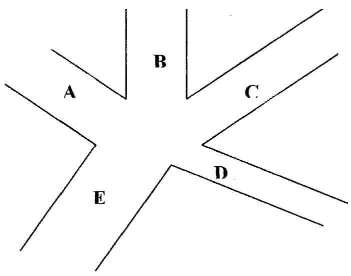
Académie de Clermont-Ferrand
Groupe IREM – IUFM
Juin 2004

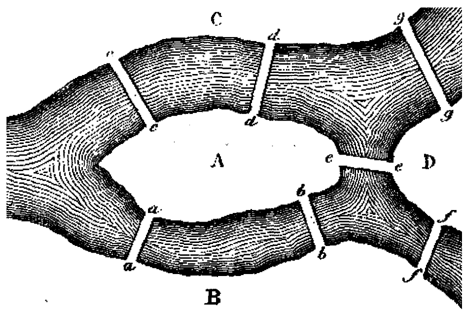
GRAPHES AU LYCEE











Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Complexe Scientifique des Cézeaux
63177 Aubière cedex – Tél : 04.73.40.70.78 – irem@univ-bpclermont.fr

GRAPHES AU LYCEE

Sommaire

1- Introduction	2
2- Le programme officiel de la spécialité math en TES	3
3- « Le barman aveugle avec des gants de boxe »	5
4- Problèmes de coloration	9
5- Un problème de dénombrement	16
6- Recherche d'une plus courte chaîne (Algorithme de Moore-Dijskra)	19
7- Graphes probabilistes et matrices de transition	23
8- Annexe historique : le jeu des 7 ponts et le mémoire d'Euler	32

Groupe d'étude 2002-2003

Gérard Fleury ; Martine Chabanat ; Véronique Juillac ; Daniel Thiriet.

1- INTRODUCTION

La théorie des graphes illustre une démarche mathématique de résolution de problèmes qui connaît aujourd'hui de nombreux développements grâce à l'informatique. On distingue dans cette démarche trois étapes :

- montrer qu'il y a une ou plusieurs solutions possibles à un problème posé ;
- montrer que cette solution est calculable à l'aide d'un algorithme que l'on pourra programmer ;
- s'assurer que cet algorithme est efficace : qu'il conduit à la solution dans un temps de calcul raisonnable, qui n'augmente pas de façon exponentielle en fonction du nombre de paramètres.

Cette dernière étape est un domaine de recherches mathématiques qui s'est développé depuis 1935, à partir des travaux de K. Gôdel, A. Church et A. Turing.

Parmi la variété de problèmes abordés et résolus par l'étude des graphes, on trouve en particulier les problèmes de dénombrement, de coloriage, les problèmes de cheminement sur un graphe et les problèmes de graphes probabilistes et markoviens.
C'est sur ces problèmes que notre groupe s'est efforcé de rechercher des réponses argumentées au cours de cette année d'introduction de ce nouvel enseignement, au Lycée, dans la série économique et sociale.

2- LE PROGRAMME OFFICIEL EN TERMINALE ES ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Introduction

L'introduction d'éléments de la théorie des graphes dans l'enseignement de spécialité de la classe terminale de la série ES constitue une grande nouveauté

- pour la première fois, cette branche des mathématiques discrètes fait son entrée dans l'enseignement secondaire français ;
- le travail proposé est axé sur la seule résolution de problèmes et aucunement sur un exposé magistral.

Pourquoi introduire des éléments sur les graphes ?

Ce choix est cohérent tant avec le programme de la classe antérieure qu'avec les exigences de formation ultérieure. On trouve en effet ici quelques applications intéressantes du calcul matriciel développé dans l'option de première ES. Par ailleurs, les problèmes résolus constituent une première approche — volontairement modeste — de situations diverses (gestion de stocks, transports à coûts minimaux, recherche de fichiers dans des ordinateurs, reconnaissance de mots...) auxquelles les élèves pourront être par la suite confrontés.
Pour de nombreux lycéens, le champ mathématique se limite au calcul, à l'étude des fonctions et à la géométrie élémentaire. S'ouvrir sur la théorie des graphes, c'est s'ouvrir à de nouveaux raisonnements, c'est s'entraîner à avoir un autre regard mathématique et finalement, progresser. Enfin le travail fait sur les graphes pourra être investi dans des travaux personnels encadrés.

Pourquoi axer le travail sur la seule résolution de problèmes ?

La théorie des graphes ouvre un grand champ de modélisation conduisant à des solutions efficaces pour de nombreux problèmes ; toute présentation théorique magistrale du sujet est contraire au choix fait ici. De plus, la résolution de problèmes laisse place à l'initiative des élèves, avec un temps nécessaire de tâtonnements et d'essais. L'objectif, ici, est d'apprendre à représenter une situation à l'aide d'un graphe en se posant d'abord les questions suivantes : « Quels objets vont tenir le rôle de sommets, lesquels deviennent les arêtes ? ».
Un exemple illustrant le type de travail à faire est donné sous la forme d'une liste de 25 exercices permettant de faire le tour de toutes les notions au programme. Bien entendu, cette liste ne revêt aucun caractère officiel. L'optique étant la résolution de problèmes, c'est le bon usage des notions relatives aux graphes, et non la mémorisation de définitions formelles, qui est ici recherchée.
Un lexique a été fourni ; sa fonction est de définir clairement les limites de cet enseignement neuf ; toute notion relative à la théorie des graphes, qui ne correspondrait pas à l'un des termes du lexique, est hors programme.

Le programme

A titre indicatif, le temps consacré, durant l'année scolaire, à l'étude de ces notions, pourrait représenter 40 % du temps total, soit environ 24 heures.

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
Résolution de problèmes à l'aide de graphes		
Résolution de problèmes conduisant à la modélisation d'une situation par un graphe orienté ou non, éventuellement étiqueté ou pondéré et dont la solution est associée : - au coloriage d'un graphe, - à la recherche du nombre chromatique, - à l'existence d'une chaîne ou d'un cycle eulérien, - à la recherche d'une plus courte chaîne d'un graphe pondéré ou non, - à la caractérisation des mots reconnus par un graphe étiqueté et, réciproquement, à la construction d'un graphe étiqueté reconnaissant une famille de mots. - à la recherche d'un état stable d'un graphe probabiliste à 2 ou 3 sommets.	Les problèmes proposés mettront en jeu des graphes simples, la résolution pouvant le plus souvent être faite sans recours à des algorithmes. On indiquera que pour des graphes complexes, des algorithmes de résolutions de certains problèmes sont absolument nécessaires. On présentera un algorithme simple de coloriage des graphes et un algorithme de recherche de plus courte chaîne.	Il s'agit d'un enseignement entièrement fondé sur la résolution de problèmes. L'objectif est de savoir modéliser des situations par des graphes et d'identifier en terme de propriétés de graphes la question à résoudre. Ces algorithmes seront présentés dans les documents d'accompagnement et on restera très modeste quant à leurs conditions de mise en œuvre.
Vocabulaire élémentaire des graphes : sommets, sommets adjacents, arêtes, degré d'un sommet, ordre d'un graphe, chaîne, longueur d'une chaîne, graphe complet, distance entre deux sommets, diamètre, sous-graphe stable, graphe connexe, nombre chromatique, chaîne eulérienne, matrice associée à un graphe, matrice de transition pour un graphe pondéré par des probabilités.	Les termes seront introduits à l'occasion de résolution de problèmes et ne feront pas l'objet d'une définition formelle, sauf lorsque cette définition est simple et courte (degré d'un sommet, ordre d'un graphe par exemple).	Les élèves devront savoir utiliser à bon escient le vocabulaire élémentaire des graphes, vocabulaire qui sera réduit au minimum nécessaire à la résolution des problèmes constituant l'enseignement de cette partie.
Résultats élémentaires sur les graphes : - lien entre la somme des degrés des sommets et le nombre d'arêtes d'un graphe ; - conditions d'existence de chaînes et cycles eulériens ; - exemples de convergence pour des graphes probabilistes à deux sommets, pondérés par des probabilités.	On pourra, dans des cas élémentaires, interpréter les termes de la puissance $n^{ème}$ de la matrice associée à un graphe.	

3- « LE BARMAN AVEUGLE AVEC DES GANTS DE BOXE »

Introduction aux graphes

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au XVIII^{e} siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg (Les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ), le problème de coloriage de cartes, celui du voyageur de commerce, … .

La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales, les mathématiques …
De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques …
Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs.

L'enseignement des graphes en terminale ES est entièrement fondé sur la résolution de problèmes. L'objectif est de savoir modéliser des situations par des graphes et d'identifier, en terme de propriétés des graphes, la question à résoudre.

L'activité qui suit, peut permettre d'introduire aux élèves la notion de graphes. Elle ne représente en aucun cas ce qui peut être attendu des élèves mais elle permet de mettre en évidence l'intérêt et la puissance des graphes dans la résolution de problèmes.
Elle est tirée de celle présentée par Nathalie Revol (professeur à l'Ecole Normale Supérieure de Lyon) lors de sa conférence sur les graphes au Colloque Inter-IREM « Lyon-Confluence » (2002).

« Le barman aveugle avec des gants de boxe »

1°) Règle du jeu

- Quatre verres sont sur un plateau. Ils sont disposés aux sommets d'un carré, tantôt à l'endroit, tantôt à l'envers.
- Un barman aveugle et avec des gants de boxe essaie de mettre tous les verres dans le même sens (peu importe le sens).
- A chaque fois qu'il va faire un essai, une personne farceuse mais honnête tourne le plateau à sa guise (rotation de 0°, 90°, 180° ou 270° pour que les verres restent aux 4 sommets du carré), le laisse effectuer sa manipulation (retourner un verre ou deux : le barman n'a que deux mains !) puis lui dit s'il a réussi.

Remarque expérimentale : on ne peut pas partir d'une situation où tous les verres sont dans le même sens !

2°) Le problème posé

Le barman peut-il arriver à mettre tous les verres dans le même sens ?

3°) Expérimentation

Réaliser plusieurs fois le jeu en observant les différentes situations obtenues.

Mise en œuvre du jeu :

1°) Un premier élève fera le barman. Celui-ci étant aveugle avec des gants de boxe, il ne peut pas voir et sentir la position des verres. Par conséquent, l'élève qui fera le barman, tournera le dos à la scène et ne manipulera pas les verres. Il ne fera que donner des instructions de manipulations (tourner un ou deux verres et le ou lesquels). Pour faciliter la communication, les manipulations voulues seront énoncées sous forme de directions (Nord-Sud, Nord-Est…)

2°) Un deuxième élève effectuera les ordres de manipulations du barman d'une part, et jouera la personne farceuse (il pourra donc tourner ou non le plateau à sa guise entre deux manipulations) et honnête (il devra donc signaler si la partie est gagnée).

On laisse manipuler les élèves de manière à ce qu'ils s'approprient la situation.

Les élèves s'orientent ensuite naturellement vers un arbre de choix pour tenter de trouver une solution au problème posé. Mais ils se heurtent rapidement à une difficulté : le nombre de choix possibles étant important, l'arbre est de trop grande dimension pour espérer en tirer une solution.

On leur propose alors une simplification du problème en effectuant des regroupements de manière à limiter le nombre de choix possibles.

4°) Simplification du problème

a) Enumérer toutes les configurations du plateau que l'on peut rencontrer. On représentera par un cercle un verre à l'endroit et par une croix un verre à l'envers.

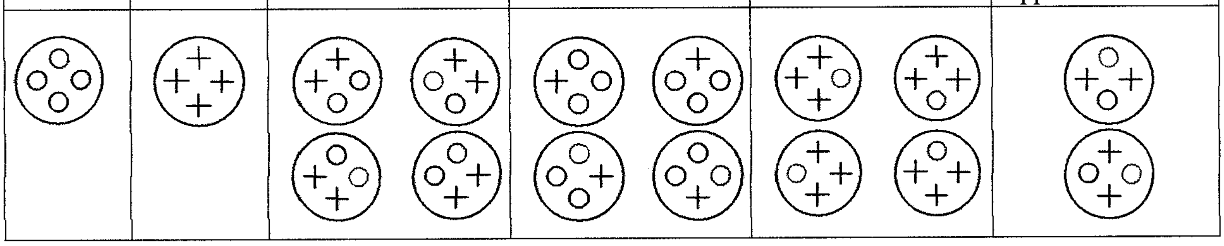
b) Choisir une des configurations obtenues en a (sauf celles qui sont des configurations gagnantes) et énumérer à l'aide d'un arbre toutes les issues possibles après une seule manipulation effectuée sur cette configuration. Recommencer avec d'autres configurations. Que constate-t-on ?

On dira que deux configurations obtenues par rotation de 0°, 90°, 180° ou 270° sont « équivalentes ». Regrouper les configurations qui sont « équivalentes ».

c) Finalement, à combien de configurations peut-on limiter le problème ?

Dans un premier temps, les élèves regroupent les configurations suivant les 6 catégories ci-dessous :

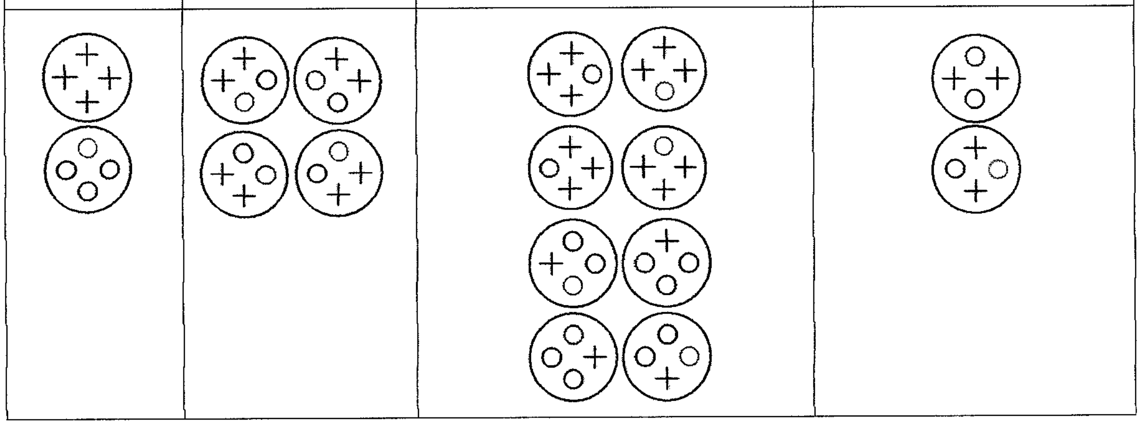
4 verres à l'endroit	4 verres à l'envers	2 verres côte à côte à l'envers	1 verre à l'envers	3 verres à l'envers	2 verres diagonalement opposés à l'envers



On fait alors remarquer aux élèves que le but du jeu est de mettre tous les verres dans le même sens (peu importe le sens). Par conséquent, on peut effectuer des regroupements supplémentaires.

On obtient alors 4 catégories.

4 verres dans le même sens	2 verres côte à côte dans le même sens	1 verre dans le même sens (ou 3 verres dans le même sens)	2 verres diagonalement opposés dans le même sens



Finalement, 4 configurations (une prise dans chaque catégorie) suffisent pour représenter la situation.

A ce stade, si on demande de nouveau aux élèves d'essayer de répondre au problème posé, l'utilisation d'un arbre paraît être plus facile. Cependant, la solution n'apparaît pas de façon évidente.

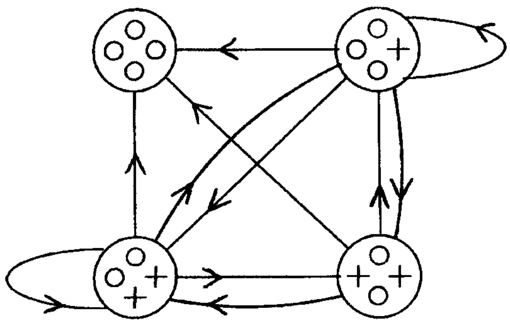
C'est donc à ce moment que l'on introduit un nouvel outil : le graphe.

5°) Représentation de la situation à l'aide d'un graphe

On schématise la situation de la façon suivante :

<u>Vocabulaire</u> :

Le schéma ci-contre s'appelle un **graphe**.
Les configurations du plateau sont les **sommets** de ce graphe.
Les manipulations permettant de passer d'une configuration à une autre sont les **arêtes** de ce graphe.
Le nombre total de sommet s'appelle l'**ordre du graphe**.
Un **graphe orienté** est un graphe dont les arêtes sont orientées.



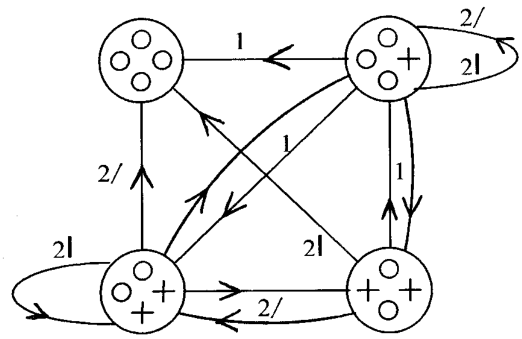
Indiquer sur chacune des arêtes, la manipulation effectuée pour passer d'une configuration à une autre.

<u>On représentera</u> :

- par « 2 / » la manipulation « deux verres côte à côte retournés » ;
- par « 2I » la manipulation « deux verres diagonalement opposés retournés » ;
- par « 1 » la manipulation « un verre retourné ».

On fait remarquer aux élèves que dans ce graphe, un sommet représente plusieurs configurations équivalentes et il n'y en a pas d'autres que ceux du graphe donné.

Après avoir indiqué sur chacune des arêtes, la manipulation effectuée, les élèves obtiennent le graphe étiqueté ci-contre.



On demande aux élèves d'essayer de résoudre le problème. Ils ont du mal à trouver une solution. On leur en propose donc une solution qu'ils vont devoir justifier.

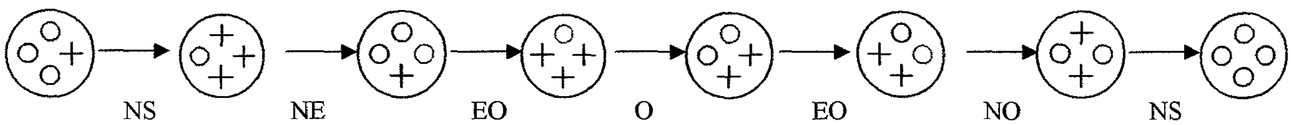
6°) Une solution au problème

On considère la stratégie suivante : **2 I ; 2 / ; 2 I ; 1 ; 2 I ; 2 / ; 2 I** (dans cet ordre).

1°) Appliquer cette stratégie à une situation de départ quelconque. Que constate ton ?

2°) Expliquer pourquoi ces sept manipulations dans cet ordre constituent une stratégie gagnante.

Les élèves appliquent la stratégie donnée sur un exemple :

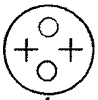


Ils constatent que cette stratégie fonctionne sur un exemple.

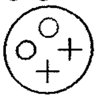
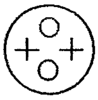
On leur demande ensuite de justifier cette stratégie quelque soit la configuration de départ.

Ils doivent donc raisonner à l'aide du graphe :

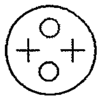
1°) On effectue pour commencer la manipulation suivante **2 |** alors :

- Si on était en  , on a gagné ;
- sinon on n'a rien changé ;

2°) Si on n'a pas encore gagné, on effectue les deux manipulations suivantes **2 / ; 2 |** alors :

- Si on était en  , on est passé en  puis on a gagné ;
- sinon on n'a rien changé ;

3°) Si on n'a pas encore gagné, on effectue la manipulation suivante **1** alors :

- On était en  , on en sort pour aller en  ou en  ;

4°) On recommence les trois premières étapes : **2 | ; 2 / ; 2 |** et on gagne.

On justifie ainsi que ces 7 manipulations, dans cet ordre, constituent une stratégie gagnante.

4- PROBLEMES DE COLORATION

1°) Un problème

Pour terminer l'organisation d'un bac blanc d'un lycée, on doit tenir compte du fait que certaines épreuves doivent se dérouler simultanément étant donné qu'elles sont communes aux différentes classes.

Ces contraintes sont données dans le tableau ci-dessous :

TES1	Economie, anglais, mathématiques.
TES2	Philosophie, histoire et géographie, mathématiques.
TES3	Philosophie, allemand.
TS2	Anglais, allemand.
TL	Philosophie, histoire et géographie.

Chaque épreuve est organisée sur une demi-journée.

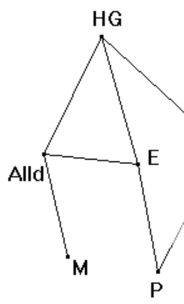
Quel est le nombre minimal de demi-journées nécessaires à l'organisation de toutes les épreuves ?

Dans ce problème, on peut trouver une solution empirique. En effet, on peut faire passer dans une première demi-journée : économie, philosophie. Puis dans une deuxième demi-journée : anglais, histoire et géographie. Et enfin dans une troisième demi-journée : mathématiques et allemand.

Mais, comment s'assurer que cette solution est la plus économique ? Et comment prouver que trois demi-journées au moins sont absolument nécessaires ? Un raisonnement du type : « Economie, anglais, mathématiques sont deux à deux incompatibles donc trois demi-journées sont nécessaires » permet de répondre. Mais il n'est pas généralisable à d'autres situations plus complexes. On va donc avoir recours aux graphes.

Quel type de graphes envisager ?

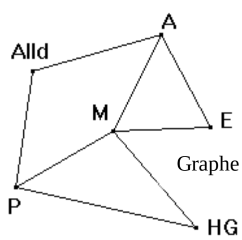
On est tenté de relier par des arêtes des sommets compatibles c'est à dire des sommets représentant des matières qui peuvent être passées en même temps.
On obtient le graphe ci-contre :
Il semble alors difficile de traduire la question initiale « Quel est le nombre minimal de demi-journées nécessaires à l'organisation de toutes les épreuves ? » en terme de propriétés de ce graphe.



Graphe 1

On voit donc à travers cet exemple, que le choix du « modèle » est très important. La résolution de problèmes à l'aide des graphes, contribue ainsi à développer chez les élèves des compétences essentielles dans le domaine mathématique telle que : choisir un modèle, choisir un outil, reconnaître ses erreurs …

En fait, l'idée ici est de relier par une arête les sommets incompatibles c'est à dire des sommets représentant des matières qui ne peuvent pas être passées en même temps.
On obtient le graphe d'incompatibilités ci-contre :
On peut alors traduire la question initiale « Quel est le nombre minimal de demi-journées nécessaires à l'organisation de toutes les épreuves ? » en terme de propriétés de ce graphe de la manière suivante :



Graphe 2

« Combien de familles de sommets doit-on au minimum former si l'on veut que deux sommets liés par une arête n'appartiennent jamais à la même famille. »
On va considérer par la suite que chaque famille est caractérisée par une couleur et introduire quelques éléments de théorie à ce sujet.

2°) Coloration d'un graphe - Résolution du problème

Quelques définitions

La **coloration** d'un graphe consiste en une affectation d'une couleur à chacun des sommets d'un graphe de sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

(Soit X l'ensemble des sommets d'un graphe G. Un sous-ensemble S de X est stable s'il ne comprend que des sommets non adjacents deux à deux. La coloration de G avec k couleurs est donc une partition de X en k parties stables.)

Le **nombre chromatique** d'un graphe est le plus petit nombre de couleurs permettant sa coloration. *(C'est aussi le cardinal d'une partition de X en un nombre minimum de stables.)*

Résolution du problème

On peut maintenant reformuler la question du problème précédent de la manière suivante : « Quel est le nombre chromatique du graphe 2 ? »

Il n'existe pas de formule donnant le nombre chromatique d'un graphe. Le plus souvent, on déterminera ce nombre par double encadrement, et en exhibant une coloration utilisant un nombre de couleurs égal au minorant de cet encadrement.

Pour le graphe 2, par exemple, on peut prouver que son nombre chromatique est au moins égal à trois, et trouver une coloration utilisant ces trois couleurs (elle n'est pas unique).

Pour cela, considérons le sous graphe du graphe 2 ci-contre (Figure 1) :

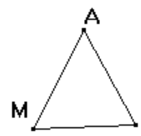
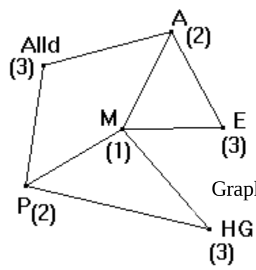


Figure 1

On constate que trois couleurs sont nécessaires à sa coloration, puisque chaque sommet est adjacents aux deux autres. Le nombre chromatique du graphe 2 est donc au moins égal à trois.

On se donne trois couleurs : bleu (1), rouge (2), vert (3). Le graphe 2 peut être colorié avec ces trois couleurs comme le montre le schéma ci-contre :



Graphe 3

Trois demi-journées sont donc nécessaires à l'organisation de toutes les épreuves.

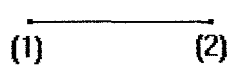
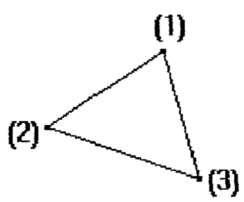
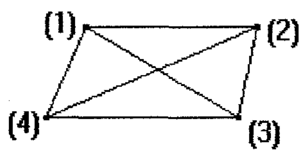
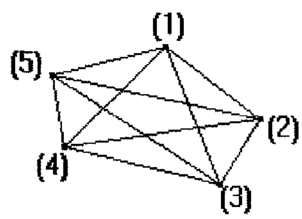
Cet exemple montre l'utilité, dans les problèmes de coloration, de reconnaître certains types de sous graphes dans le graphe donné.

3°) Nombre chromatique de quelques graphes particuliers

Dans la suite, on notera Δ le nombre chromatique d'un graphe. Et pour la coloration des graphes, on se donne les couleurs : bleu (1), rouge (2), vert (3), noir (4) et gris (5).

a) Les graphes complets

Ce sont des graphes dont chaque sommet est adjacents à tous les autres.

Avec 2 sommets	Avec 3 sommets	Avec 4 sommets	Avec 5 sommets
			
$\Delta = 2$	$\Delta = 3$	$\Delta = 4$	$\Delta = 5$

Le nombre chromatique Δ est égal au nombre de sommets.

En effet, si le graphe contient n sommets, alors $\Delta \leq n$. Or, chaque fois qu'une nouvelle couleur est utilisée pour un sommet, elle ne peut plus l'être pour aucun autre, puisque ce sommet est adjacent à tous les autres. Donc $\Delta \geq n$.

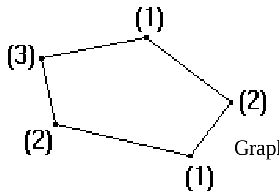
b) Autres graphes remarquables

On considère les graphes formés d'une chaîne fermée passant une seule fois par les sommets et dont les arêtes sont toutes distinctes.

Un exercice

Tout graphe contenant un sous graphe complet d'ordre 3 ne peut être colorié en moins de trois couleurs.

1- Construire un graphe, ne contenant pas de sous graphe complet d'ordre 3, qui nécessite également trois couleurs.

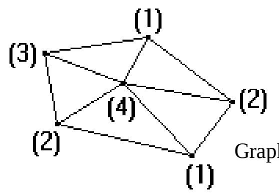


Graphe 4

Les élèves trouvent sans difficulté le graphe ci-contre. Son nombre chromatique est 3.

On peut donc à cette occasion, demander aux élèves quel est le nombre chromatique d'un tel graphe d'ordre 3 et d'ordre 4 puis généraliser de la façon suivante : le nombre chromatique d'un tel graphe est 2 si son ordre est pair, et 3 sinon.

2- Comment, à partir du graphe précédent, construire un graphe, ne contenant pas de sous graphe complet d'ordre 4, nécessitant 4 couleurs ?



Graphe 5

Les élèves rajoutent un sommet au centre du graphe et le relient à tous les autres sommets. On peut leur faire remarquer qu'en fait il aurait suffit de relier le nouveau sommet à trois sommets ayant chacun une couleur différente. Le nombre chromatique de ce nouveau graphe est 4.

3- Même question pour un graphe, ne contenant pas de sous graphe complet d'ordre 5, nécessitant 5 couleurs ?

On peut itérer cette construction de façon à obtenir, pour tout k, un graphe de nombre chromatique k ne contenant pas de sous graphe complet d'ordre k.

Cet exercice permet de mettre en évidence des graphes qu'il pourra être intéressant de reconnaître comme sous graphes de graphes plus complexes. En effet, ils seront importants dans la détermination du nombre chromatique des graphes dont ils font partie.

4°) Propriété du nombre chromatique

Soient G un graphe et G' le sous graphe complet de G dont l'ordre est le plus élevé des sous graphes complets de G.

Si m est l'ordre de G', r le degré maximum des sommets de G et Δ le nombre chromatique de G alors $m \leq \Delta \leq r+1$.

Preuve :

D'une part, G' est un sous graphe complet d'ordre *m.* Il faut donc au moins *m* couleurs pour le colorier. Il en est donc de même pour G : $m \leq \Delta$.

D'autre part, on se donne une palette de $(r+1)$ couleurs.

Pour chaque sommet du graphe on peut tenir le raisonnement suivant : ce sommet est adjacent à *r* sommets au plus donc le nombre de couleurs déjà utilisées pour colorer ces sommets est inférieure ou égal à *r*. Il reste donc au moins une couleur non utilisée dans la palette avec laquelle nous pouvons colorier notre sommet. D'où $\Delta \leq r+1$.

5°) Recherche du nombre chromatique Δ d'un graphe G - Algorithme de coloration

D'après la propriété précédente, on a : $m \leq \Delta \leq r+1$. Mais cet encadrement ne permet pas, en général, de déterminer Δ car le majorant qu'il donne n'est pas satisfaisant. C'est le cas du graphe 5 pour lequel on obtient : $3 \leq \Delta \leq 6$.

On cherche donc un autre majorant en exhibant une coloration du graphe.

Jusqu'à présent, on a rencontré uniquement des graphes dont la coloration était simple. Pour des graphes plus complexes, il est intéressant de mettre en œuvre un algorithme de coloration.

Pour effectuer la coloration d'un graphe, on peut utiliser l'algorithme suivant :

Etape 1 :

Classer les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré, et attribuer à chacun des sommets son numéro d'ordre dans la liste obtenue.

On obtient une liste de sommets $x_1, x_2, \ldots, x_n$ telle que degré(x_1) $\geq$ degré(x_2) $\geq \ldots \geq$ degré(x_n).

On choisit une couleur pour le premier sommet.

Etape 2 :

En parcourant la liste dans l'ordre, attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet non encore coloré, et attribuer cette même couleur à chaque sommet non encore coloré et non adjacent à un sommet de cette couleur.

Etape 3 :

S'il reste des sommets non coloré dans le graphe, revenir à l'étape 2.

Sinon, la coloration est terminée.

Cet algorithme permet d'obtenir une assez bonne coloration d'un graphe, c'est à dire une coloration n'utilisant pas un trop grand nombre de couleurs. Cependant, il n'assure pas que le nombre de couleurs utilisé soit minimum (et donc égal au nombre chromatique du graphe).

Cet algorithme a des limites. En effet, si le graphe comporte plusieurs sommets de même degré, on doit faire des choix arbitraires pour leur classement. Si tous les sommets du graphe ont le même degré, cet algorithme n'est pas intéressant.

Suite à la coloration du graphe :

Si on réussit à exhiber une coloration du graphe en *m* couleurs, on en déduit qu'il faut au maximum *m* couleurs pour colorier ce graphe. Autrement dit, $\Delta \leq m$. On en conclut que $\Delta = m$.

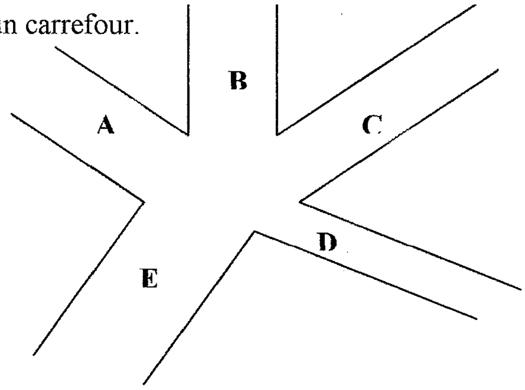
La grande majorité des exercices proposés aux élèves de terminale ES utilisent ce raisonnement. L'exercice 1, présenté dans la suite, en est un exemple.

Si on ne réussit pas à exhiber une coloration du graphe en *m* couleurs, on peut essayer de déterminer un meilleur minorant de Δ. Pour cela on cherche un sous graphe particulier qui nécessite $m+1$ couleurs pour le colorer.

L'exercice 2, présenté dans la suite, en est un exemple.

Exercice 1

Le schéma ci-contre représente un carrefour.



Le tableau suivant précise les « franchissements » possibles de ce carrefour. (La circulation de A vers E est considérée comme un « franchissement » même si on ne traverse pas le carrefour.)

En arrivant par …	A	B	C	D	E
Il est possible d'aller en …	C, E	A, E, D	A, D	C, A	C, D

Les franchissements AC et BE ne peuvent naturellement pas être autorisés simultanément sous peine de collision.

Le but de cet exercice est de déterminer le nombre minimum de phases des feux de signalisation nécessaire au bon fonctionnement de ce carrefour.

1°) Modéliser cette situation à l'aide d'un graphe dont :

- les sommets représentent les franchissements possibles (AC, CA, AE, BA, BE, …) ;
- les arêtes relient des sommets représentant des franchissements ne pouvant pas être simultanés sous peine de collision.

2°) Montrer que (AC, BD, CD, DA) est un sous graphe complet d'ordre 4.

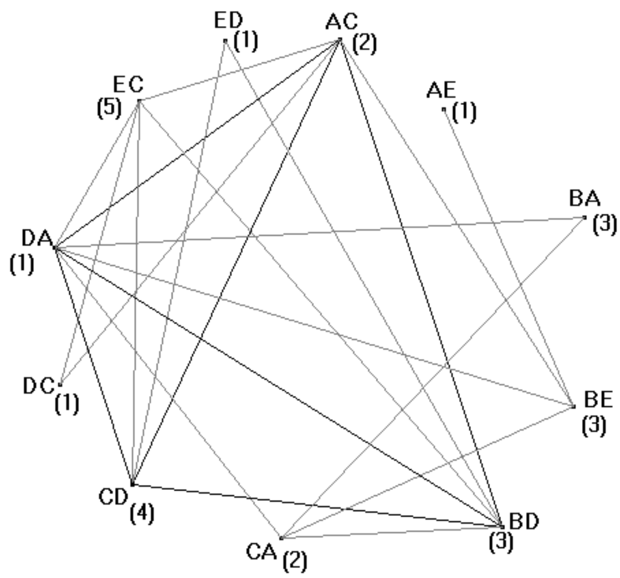
3°) Que peut-on dire du sommet EC ? En déduire un encadrement du nombre chromatique du graphe.

4°) Proposer une coloration du graphe. En déduire son nombre chromatique.

5°) Que peut-on dire d'un ensemble de sommets ayant même couleur ?

6°) A quoi peut correspondre le nombre chromatique de ce graphe ?

On obtient le graphe d'ordre 11 ci-contre :



Le sommet EC est relié à tous les sommets du sous graphe complet d'ordre 4 (AC, BD, CD, DA). Donc le sous graphe (AC, BD, CD, DA, EC) est un sous graphe complet d'ordre 5.

On en déduit que $5 \leq \Delta \leq 8$.

On exhibe une coloration de ce graphe, avec 5 couleurs, à l'aide de l'algorithme précédent.

Donc $\Delta \leq 5$.

Finalement, $\Delta = 5$.

Un ensemble de sommets ayant même couleur, par exemple BA, BE et BD donne des franchissements qui peuvent avoir lieu simultanément. Cela correspond à une phase des feux de signalisation de ce carrefour.

Le nombre chromatique correspond alors au nombre minimum de phases que doivent respecter les feux de signalisation de ce carrefour.
Il faut donc au moins 5 phases pour les feux de signalisation de ce carrefour.

Par exemple : la phase 1 pour AE, DC, DA, ED ; la phase 2 pour BA, BE, BD ; la phase 3 pour AC, CA ; la phase 4 pour CD et la phase 5 pour EC.

Les deux dernières questions de cet exercice, posent des problèmes aux élèves. En effet, ils ont beaucoup de mal à passer de la solution obtenue en termes de graphes à la solution du problème posé.

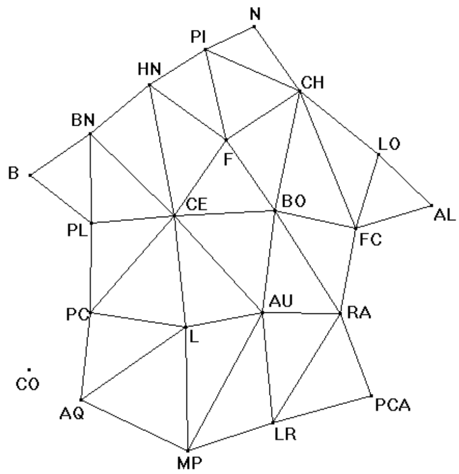
Exercice 2

On veut colorier chaque région administrative française de telle sorte que deux régions voisines ne soient pas de la même couleur.

1°) Montrer qu'il faut au minimum 4 couleurs pour colorier cette carte.

2°) Proposer une coloration du graphe. En déduire son nombre chromatique.

3°) En déduire le coloriage de la carte.



Le graphe possède des sous graphes complets d'ordre 3 mais aucun d'ordre 4.
Par contre on reconnaît un sous graphe particulier (Figure 2) pour lequel on a montré que le nombre chromatique était 4.
Donc $\Delta \geq 4$.
En utilisant l'algorithme précédent, on exhibe une coloration en 4 couleurs. On en déduit que $\Delta \leq 4$. Et finalement, $\Delta = 4$.

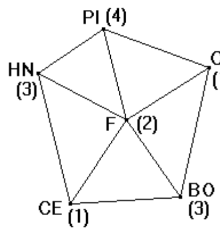
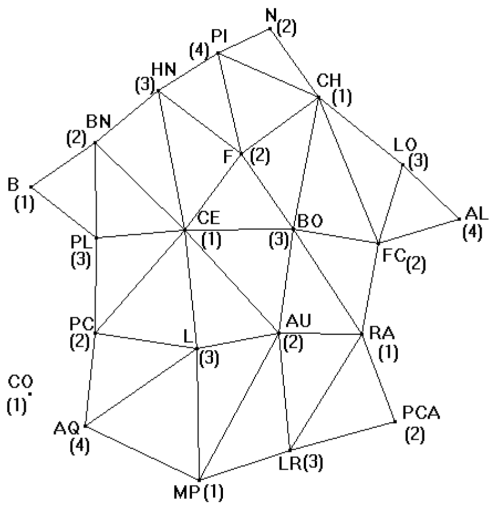


Figure 2



En fait, toute carte de géographie peut être coloriée avec 4 couleurs.

Mais il faut un peu préciser. On suppose, d'une part, que la carte est dessinée sur un plan (ou sur une sphère, cela revient au même), que deux régions ayant une frontière commune sont de couleurs distinctes. D'autre part, on suppose que les régions sont « raisonnables » (pas d'enclave comme celle de Llivia, espagnole, en France). Et enfin, on n'exige pas que des régions qui ont seulement « un coin » en commun (c'est le cas des 4 états suivants : Utah, Arizona, Nouveau-Mexique et Colorado aux Etats Unis) aient des couleurs distinctes, sinon on trouverait immédiatement un contre-exemple en divisant un disque en au moins cinq secteurs se touchant au centre.

Pour montrer ce résultat, on remplace une carte par son graphe. Par construction, on obtient un graphe planaire (lorsqu'on peut le dessiner sur un plan sans que ses arêtes ne se croisent ; par exemple un sous graphe complet d'ordre 5 n'est pas planaire) pour lequel on veut montrer que le nombre chromatique est au plus égal à 4.

C'est le théorème des 4 couleurs qui permet alors de conclure : « Pour tout graphe planaire, on a $\Delta \leq 4$. »

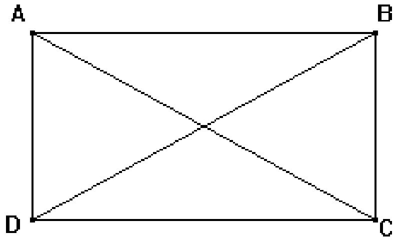
Ce théorème est resté un problème ouvert pendant plus d'un siècle, et a nécessiter l'usage d'un ordinateur pour venir à bout de la très grande quantité de cas particuliers à traiter.

5- UN PROBLEME DE DENOMBREMENT

<u>Problème</u>

1) Une ligue de football comporte **4 équipes**, A, B, C, D : elle organise un week-end d'entraînement.

Un graphe peut représenter les matchs joués. Un segment qui relie 2 points représente un match joué entre les 2 équipes nommées par les sommets.



a) Combien de matchs a disputé chaque équipe ?
b) Combien de matchs ont été disputés au cours de ce week-end ?
c) Organiser un calendrier pour qu'au cours d'un prochain week-end d'entraînement de ces 4 équipes, chacune d'elle ne joue que 2 matchs.

2) Une autre ligue de football comporte **5 équipes**.

a) Organiser le calendrier pour que chaque équipe joue 4 matchs.
b) Peut-on organiser le calendrier pour que chaque équipe ne joue que 3 matchs ?

3) Avec **7 équipes**, est-il possible d'organiser un calendrier pour que chaque équipe joue 4 matchs. Même question avec 5 matchs, avec 3 matchs.

4) Enoncer une condition de non faisabilité avec n équipes et p matchs.

Le graphe est suggéré et les termes « sommets » et « arêtes » sont introduits pour une modélisation de la situation proposée.

Les premières questions sont des problèmes de dénombrement reliant le nombre de matchs joués et le nombre d'arêtes du graphe.

L'objectif de la question 2 est de trouver un procédé efficace pour la réalisation d'un graphe possédant des propriétés répondant à la question pour un graphe à n sommets et p arêtes partant de chacun d'eux ($p<n$). Un procédé qui pourrait être nommé « par tâtonnement » est sans doute toujours utilisé au début pour des petites valeurs des variables n et p.

Pour la suite (question 3) il devient difficile de procéder ainsi par tâtonnement. Il est peut être judicieux de partir d'un calendrier déjà réalisé avec 5 équipes et 4 matchs et d'ajouter une équipe puis deux...
Il convient alors de remplacer une arête reliant 2 sommets par deux arêtes reliant chacun d'eux au sommet ajouté, puis 2 arêtes par 2x2 autres arêtes.
Il est alors facile d'énoncer une condition nécessaire de faisabilité avec n équipes et p matchs ($p<n$), c'est dire np doit être pair. (Une arête étant comptée pour 2 sommets**)**

Cette condition est l'occasion d'énoncer une propriété importante des graphes :

La somme des degrés des sommets d'un graphe non orienté est égale à 2 fois le nombre d'arêtes du graphe.

Autre problème que l'on doit se poser : la condition énoncée précédemment est-elle suffisante ?

La réponse à cette question paraît évidente, mais la démonstration qui peut être simplement suggérée aux élèves de cette classe n'est pas exigible à ce niveau d'enseignement (Terminale ES). Toutefois, son principe est intéressant pour faire découvrir les procédés algorithmiques tels qu'on les trouve fréquemment dans la théorie des graphes. D'autre part, elle peut également être une utilisation efficace du raisonnement par récurrence.

<u>Exemples de démonstrations</u>

I) <u>Classique, par récurrence sur n en distinguant les deux cas où p est pair et p est impair np étant un nombre pair</u>.

a) **Si p est pair** (et non nul)

Pour p = 2 et n = 3 : c'est faisable, il suffit d'observer un triangle.

Supposons que ce soit faisable au rang n pour un nombre p inférieur à n.
Soit G le graphe correspondant associé à cette situation. On ajoute un sommet à G, on supprime p/2 arêtes reliant 2 points Mi et Ni et on les remplace par 2 p/2 arêtes reliant chacun des deux points Mi et Ni au nouveau sommet obtenu. On a alors un nouveau graphe G' d'ordre n+l dont le degré de chaque sommet est p.

La faisabilité est donc assurée dans ce cas où p est pair dès que n>2

b) **Si p est impair** : n doit être pair car np est pair

Pour n = 2 et p =1 : c'est le cas du segment d'extrémités les sommets A et B.

Supposons que ce soit faisable au rang n (n pair) pour p matchs.
Soit G le graphe associé.
On ajoute 2 sommets au graphe G ; le nombre de sommets n+2 reste pair. On relie ces deux nouveaux sommets entre eux. Il reste à associer à chacun d'eux p-1 arêtes les reliant à des couples de sommets (Mi,Ni) reliés par une arête qui sera supprimée et remplacée par 2 arêtes partant de chacun des sommets ajoutés et arrivant aux sommets Mi et Ni; ce qui est possible car p-1 est pair lorsque p est impair. De chacun des sommets du graphe il part p arêtes.

La faisabilité du calendrier est donc assurée pour n+2 sommets de degré p pour tout n >1.

En conclusion des deux parties de la démonstration, on peut affirmer que pour tout n>1, si np est pair et si p<n alors on peut faire jouer p matchs par chacune des n équipes.

II) **Autre démonstration**

1. Soit p fixé et pair non nul.

a) La propriété est vraie pour n = p+1, puisque le graphe complet répond à la question.

b) Supposons qu'un tel graphe existe pour n donné. Soit S_n l'ensemble de ses sommets. Considérons un sommet S n'appartenant pas à S_n. Montrons que l'algorithme suivant construit un nouveau graphe à n+1 sommets tous d'ordre p (il utilise 2 ensembles de sommets A et B) :

```
Début
|       A:={}
|       B:=Sn
|       Répéter
|       |       Choisir un sommet X de B
|       |       Choisir un sommet Y de B Relié à X par une arête
|       |       Supprimer l'arête XY
|       |       Ajouter les arêtes SX et SY
|       |       A:=AU{X,Y}
|       |       B:=B/{X,Y}
|       jusqu'à card(A) = p
```

Notons que l'ordre des sommets de S_n n'est pas modifié, et vaut p. A l'issue de l'algorithme, l'ordre de S vaut également p.
Considérons une étape intermédiaire. A contient 2k sommets, avec 2k positif ou nul et strictement inférieur à p, et B en contient n-2k qui est strictement supérieur à 1. Tout sommet X de B est d'ordre p et non relié à S. Comme il y a au plus p-2 sommets dans A, il existe au moins un autre sommet Y de B qui soit relié à X. Ainsi l'algorithme peut se dérouler jusqu'à ce que 2k = p.

2. Soit p fixé et impair.

Dans ce cas n est pair. Si n = p+1, le graphe complet convient.
Supposons qu'un tel graphe existe pour n donné. Soit S_n l'ensemble de ses sommets. Considérons deux sommets S et n'appartenant pas à S_n. Montrons que l'algorithme suivant construit un nouveau graphe à n+2 sommets tous d'ordre p (il utilise 2 ensembles de sommets A et B) :

```
Début
|       A:={}
|       B:=Sn
|       ajouter l'arête ST
|       Tant que Card(A) <p-l faire
|       |   Choisir un sommet X de B
|       |   Choisir un sommet Y de B relié à X par une arête
|       |   Supprimer l'arête XY
|       |   Ajouter les arêtes SX et TY
|       |   A:=AU{X,Y}
|       |   B:=B/{X,Y}
|       fin tant que
fin
```

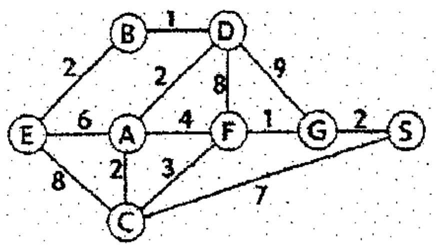
La justification de l »algorithme est la même que dans le 1.
L'ordre des sommets de S_n n'est pas modifié et vaut p. A l'issue de l'algorithme, l'ordre de S et celui de T valent également p.

6- RECHERCHE D'UNE PLUS COURTE CHAINE PAR UN ALGORITHME

Sur un exemple nous proposons de traiter un problème faisant partie des grands types de problèmes de recherche de chemins optimaux. Nous travaillerons sur des graphes pondérés pour lesquels les valeurs des arêtes (qu'on appellera « coûts ») sont des distances, des coûts de transport ou des temps de parcours. Ainsi, pour la fonction économique la plus courante, le **coût d'un chemin** entre deux sommets est la somme des coûts de ses arêtes. On ne travaillera qu'avec des « coûts » positifs, sinon on pourrait diminuer indéfiniment le coût d'un chemin s'il existait dans le graphe un circuit de coût négatif.

Exemple de problème

Un voyageur de commerce prépare sa tournée. II doit visiter un certain nombre de clients A, B, C, D, F et G en partant de E pour arriver en S. Les liaisons possibles sont représentes ci-contre avec la durée des trajets qui sont les poids des arêtes du graphe.



Ce voyageur de commerce souhaiterait savoir si un ordre de visite qui minimise la durée totale du trajet de E à S lui permettrait de rencontrer tous ses clients. Est-ce possible ?

Le problème posé fait référence au célèbre problème du voyageur de commerce. Il en diffère par la question posée. Il ne s'agit pas de trouver le chemin le plus court qui permettrait au voyageur de commerce de rencontrer tous ses clients, mais de savoir si le chemin le plus court entre l'entrée et la sortie lui permettrait de rencontrer tous ses clients.

Le graphe donné n'est pas très complexe et il serait possible de trouver la solution en « balayant » tous les cas. Mais l'objectif est de montrer qu'un algorithme qui peut être automatisé et informatisé peut être efficace. Il s'agit de donner un exemple de démarche algorithmique. Le choix s'est porté sur l'algorithme de Moore-Dijskra.

Il ne faut pas croire que cet algorithme donne toujours le chemin le plus court en passant par tous les sommets.

Utilisation de l'algorithme de Moore-Dijskra

A chaque étape, 1'ensemble des sommets du graphe est la réunion d'un sous-ensemble P de sommets atteints et d'un sous-ensemble des sommets restants.

Tant que P ne contient pas 1'ensemble des sommets et, tant que le sommet S qu'on veut atteindre n'est pas affecte du plus petit poids, exécuter les actions suivantes :

Etape 1 : on choisit le poids 0 pour E et on attribue aux sommets adjacents à E les distances qui les séparent de E, et $+\infty$ aux autres sommets ; on a alors P = {E} ;

Etape 2 : fixer la distance minimum du point le plus proche de E, c'est-à-dire 2 pour B. P devient {E, B}. Pour les sommets adjacents à B et n'appartenant pas à P, calculer la distance parcourue depuis E en passant par B. Si cette distance est inférieure au poids du point, elle le remplace, sinon on conserve ce poids. Ici seul D est adjacent à B. La distance à E est 2+1=3. Le poids de D devient 3. P devient {E, B, D}.

Continuer ainsi jusqu'à ce que P contienne tous les sommets et que S soit affecté du plus petit poids possible qui sera la distance minimale ou la longueur de la chaîne la plus courte.

Pour aider à l'application de cet algorithme, on pourra remplir au fur et à mesure le tableau suivant :

$\mathcal{P}$	E	A	B	C	D	F	G	S
{E}	0_E	6_E	2_E	8_E	∞	∞	∞	∞
{E ; B}		6_E	2_E	8_E	3_B	∞	∞	∞
{E ; B ; D}		5_D		8_E	3_B	11_D	12_D	∞
{E ; B ; D ; A}		5_D		7_A		9_A	12_D	∞
{E ; B ; D ; A ; C}				7_A		9_A	12_D	14_C
{E ; B ; D ; A ; C ; F}						9_A	10_F	14_C
							10_F	12_G

Si on lit à l'envers la chaîne qui a conduit à la longueur la plus petite (12), on obtient :
S en provenance de G ; G en provenance de F ; F en provenance de D ; D en provenance de B ; B en provenance de E.
Donc la chaîne la plus courte est E-B-D-A-F-G-S.
On notera que cette chaîne ne comporte pas tous les sommets.

On retiendra qu'un tel problème peut avoir plusieurs solutions et que si l'on peut trouver une plus courte chaîne, elle ne contient pas nécessairement tous les sommets.

Les problèmes de plus court chemin d'un sommet d'un graphe à un autre

Une première remarque s'impose quant au vocabulaire utilisé. Il s'agit de la recherche du chemin de poids minimum entre 2 sommets s et t d'un graphe pondéré.

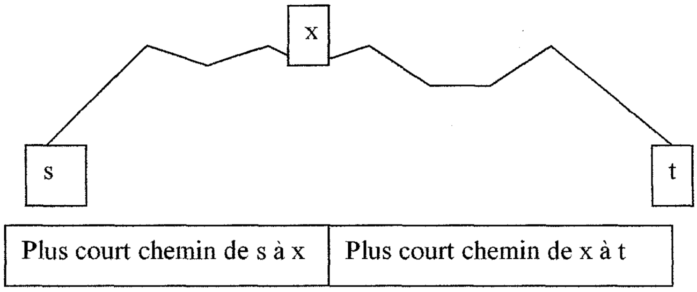
Définition : Le plus court chemin entre 2 sommets s et t d'un graphe est le chemin constitué des arêtes dont la somme des « poids » est la plus petite.
Pour la commodité, on appellera plus court chemin, celui de poids minimum.

Dans certains problèmes, le plus court chemin peut être trouvé facilement en énumérant tous les chemins et en calculant leurs poids. Il s'agit d'un algorithme simple, mais dont le temps d'exécution augmente très vite lorsque le nombre de sommets augmente. Si on suppose que le nombre de chemins élémentaires d'un graphe à n sommets est de l'ordre de n !, alors pour un graphe d'ordre 20, en supposant que pour trouver un chemin élémentaire et calculer son poids puisse se faire en une seule opération sur un ordinateur pouvant effectuer 1 milliard d'opérations par seconde, il faudrait attendre 77 ans pour obtenir le résultat….et si le graphe a 25 sommets, il faudrait attendre 490 millions d'années.

Aussi, pour éviter d'avoir à explorer ainsi tous les chemins du graphe, nous faisons appel à des algorithmes qui permettent d'obtenir le plus court chemin assez rapidement à la main et très rapidement à l'ordinateur qui n'explore pas toutes les possibilités.
Nous allons nous intéresser à l'un d'eux qui est l'algorithme de Dijskra dont nous proposons une preuve et une présentation en langage algorithmique codé.

Cet algorithme s'appuie sur une propriété fondamentale d'un plus court chemin qui est la sous-optimalité :

Si p est un plus court chemin entre 2 sommets, s et t, c'est également un plus court chemin entre tous les sommets qui sont sur ce chemin..



Si p = (s, ……t) est un plus court chemin entre s et t alors, pour tout sommet x sur le chemin p, (s,….x) est un plus court chemin de s à x et (x,……t) est un plus court chemin de x à t, sinon il existerait un chemin p' plus court de s à t obtenu en remplaçant l'un des deux par un chemin plus court , ce qui contredit l'hypothèse que p est un plus court chemin de s à t.

Conséquence : Ce principe montre que pour calculer un plus court chemin entre s et t, nous sommes amenés à calculer tous les plus courts chemins entre s et un sommet x sur le chemin. Comme on ne peut pas savoir à priori quels sommets x seront sur le plus court chemin, on va chercher les plus courts chemins entre s et tout sommet du graphe.
On notera ppcc(u,v) le poids d'un plus court chemin entre u et v et c(u,v) le poids de l'arête u-v si u et v sont adjacents.
Si y est un sommet du graphe , un plus court chemin p de s à y passe nécessairement juste avant d'arriver à y par l' un de ses sommets adjacents z : et si p = (s…z,y) alors le poids de p est la somme des poids de s à z et de z à y.
On a donc ppcc(s,y) = ppcc(s,z) +c(z,y)
Nous ne savons pas à priori quel sommet x adjacent à y joue le rôle de z.
Cependant, pour tout sommet x adjacent à y , on a ppcc(s,x) + c(x,y) $\geq$ ppcc(s,y)

L'algorithme de Dijskra s'appuie sur la propriété suivante :

Si x et y sont deux sommets d'un graphe G ppcc(s,y)= min{ppcc(s,x) + c(x,y)} pour tout sommet x tel que x-y soit une arête du graphe

Algorithme de Dijskra pour un graphe d'ordre n

C'est une suite de n étapes. Au début de la première étape, S = {s} et T = {autres sommets} $y_s = 0$ et $y_i = +\infty$ si i non adjacent à s et y_i = le poids de l'arête s à i si i adjacent à s.

Pour chaque étape, l'ensemble des sommets du graphe peut être considéré comme une partition entre un ensemble S de sommets i pour lesquels la valeur d'un plus court chemin a été trouvée et notée y_i et l'ensemble T des sommets restants.

Une étape consiste à sélectionner un des sommets j pour lequel y_j est minimal et le faire passer dans S puis mettre à jour la valeur des variables y_k pour les sommets k de T de la façon suivante :

$y_k = \min\{ppcc(s,i) + c(i,k)\}$ pour tous les $i \in S$ et adjacent à k.

Il n'est pas utile de recalculer à chaque étape la valeur de toutes les variables y_k ; lors de la sélection d'un sommet j de T, seules les valeurs y_k des sommets k de T adjacents à j peuvent avoir été modifiées. Leurs nouvelles valeurs sont données par la formule

$$y_k = \min\{ y_k , ppcc(s,j)+c(j,k)\}$$

Algorithme :

Initialiser S := {s} et T := E|\{s} E est l'ensemble des sommets du graphe

Initialiser $y_i := +\infty$ pour tous les sommets i dans T si (s-i) n'existe pas et c(s,i) si s-i existe et $y_s :=$ 0

Tant que T n'est pas vide faire

1. sélectionner un sommet j de T de plus petite valeur y_j ;
2. faire T := T\{j} et S := S $\cup$ {j} ;
3. pour tous les sommets k de T adjacents à j, mettre à jour $y_k = \min\{ y_k , y_j + c(j,k)\}$;

Fin Tant que.

Ce type d'algorithme ou un autre, car ce n'est pas le seul, est utilisé pour traiter un certain nombre de problèmes de recherche de chemins optimaux dont on trouvera ci-dessous quelques exemples.

Problèmes de transports

Les logiciels d'optimisation de tournées de véhicules doivent répondre un très grand nombre de fois à la question « quelle est la distance à parcourir pour aller d'une ville x à une ville y ». L'ensemble des réponses a au préalable été cherché et il est disponible en général sous la forme d'une base de données géographiques. Il peut toutefois être utile pour un utilisateur de calculer lui-même les distances en tenant compte d'impératifs conjoncturels (routes barrées, travaux,…).

Jeux ou récréations mathématiques

Les jeux ou récréations mathématiques ont été les premières applications de la théorie des graphes. (Exemple : le taquin célèbre de l'âne rouge).

Chemin de fiabilité maximale

Dans une région, un convoi doit être acheminé de la ville s à la ville t. Le réseau routier est donné par un graphe pondéré. Cette région n'est pas sûre ; le convoi peut être endommagé à tout moment au cours du trajet. La valeur de chaque arête est la probabilité de parcourir sans dommage la route reliant les villes représentées par les sommets des arêtes. On souhaite déterminer un itinéraire maximisant la probabilité pour le convoi d'arriver sans dommage en t. On peut remarquer que la valeur d'un chemin est le produit des valeurs de ses arêtes et le logarithme de la fiabilité d'un chemin est la somme des logarithmes des fiabilités de ses arêtes.

Problème du caboteur

Une compagnie maritime veut définir une ligne côtière desservant n ports. On connaît pour chaque voyage d'un port à un autre le bénéfice réalisé et la durée du trajet. La compagnie souhaite maximiser le bénéfice par unité de temps, égal pour un parcours au quotient du bénéfice cumulé en suivant ce parcours par sa durée. Le problème consiste à trouver un cycle maximisant ce quotient. Ce problème appartient à une classe de problèmes dans lesquels c'est la valeur moyenne ou moyenne pondérée des chemins qu'il faut optimiser.

7- GRAPHES PROBABILISTES - MATRICE DE TRANSITION

<u>Problème 1</u>

Exemple 24 du document d'accompagnement des programmes.

Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable mais la ville Y offre de meilleurs salaires. 20 % des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un cadre de vie meilleur, et 5 % des habitants de X partent chaque année habiter Y pour augmenter leur niveau de vie.

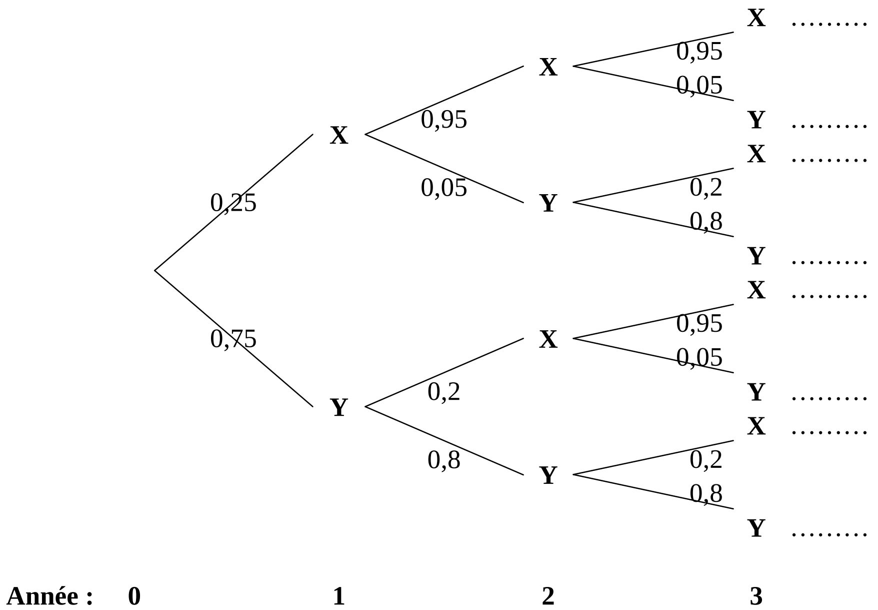
1) Sachant qu'en l'année 0, un quart des habitants sont en X, calculer la population de X et de Y au bout de 1, 2, 5, 10 ans.

2) Que se passe-t-il si on suppose que 99% des habitants sont initialement en Y ou en X ? Que la population est également répartie entre les deux villes (500 000 dans chaque ville en l'année 0) ? Que constate-t-on ?

<u>Comment traiter cet exercice avec les élèves</u> ?

<u>Remarque</u> : on suppose que l'échange décrit est constant pendant un certain nombre d'années, et que dans chaque ville, le solde naissances – décès est nul.

Avec un arbre, on obtient :



Quand on répète des évènements indépendants, un arbre permet de calculer immédiatement certaines probabilités.

Au bout d'un an les proportions sont donc :

- en X : $0{,}25 \times 0{,}95 + 0{,}75 \times 0{,}2 = 0{,}3875$ soit 38,745 % ;
- en Y : $0{,}25 \times 0{,}05 + 0{,}75 \times 0{,}8 = 0{,}6125$ soit 61,25 %.

Au bout de deux ans, cinq ans et dix ans la représentation par un arbre et les calculs deviennent rapidement très lourds.
Il est donc intéressant pour la résolution d'un tel problème d'avoir recours à un graphe probabiliste.

Un graphe probabiliste est un graphe orienté pondéré tel que :

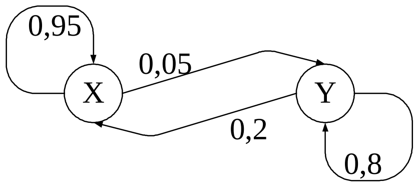
- d'un sommet à un autre, il y a au plus un arc (arête orientée) ;
- tous les poids des arcs sont compris entre 0 et 1 ;
- la somme des poids des arcs partant de chaque sommet est égale à 1.

Les sommets du graphe représentent les différents états d'un système et le poids des arcs représente la probabilité de passer d'un état à un autre.

Ici, le problème présente deux situations que l'on appellera X pour la situation « habiter dans la ville X » et Y pour la situation « habiter dans la ville Y ». On peut passer d'une situation à une autre et on se place dans le cas où la probabilité de passer d'une situation à une autre est constante, et indépendante des changements de situations précédentes. On a donc :

Situation initiale	**Situation finale**	**Probabilité de changer situation**
X	X	0,95
X	Y	0,05
Y	X	0,2
Y	Y	0,8

On modélise ces différents passages d'une situation à une autre à l'aide du graphe pondéré suivant :



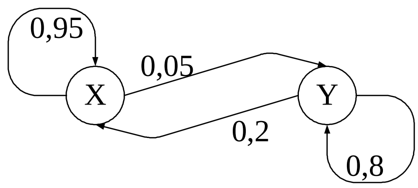
On associe à ce graphe sa **matrice de transition** où chaque terme indique la probabilité de passage d'une situation à une autre.

$$M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

I) <u>Résolution du problème avec des graphes</u>

On note x_n la part de la population de la ville X dans la population totale, et y_n celle de la ville Y. P_n est la matrice ligne $(x_n\ y_n)$ avec $x_n + y_n = 1$.

La matrice P_n désigne l'état de cette répartition au bout de n années. On a $P_0 = (0,25\ \ 0,75)$.



Le graphe de modélisation associé au problème est le graphe probabiliste ci-dessus.

La matrice de transition associée au graphe est $M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

A l'aide du graphe, on trouve l'expression de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n :

$$x_{n+1} = 0,95\, x_n + 0,2\, y_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = 0,05\, x_n + 0,8\, y_n.$$

On montre que $P_{n+1} = P_n \,.\, M$ et, par récurrence sur n, que $P_n = P_0 \,.\, M^n$.

Avec la calculatrice, on peut calculer M^2, M^5, M^{10}, et en déduire P_1, P_2, P_5, et P_{10}. On trouve ensuite la population de X et Y au bout de 1, 2, 5, 10 ans.

<u>Remarque</u> : avec la calculatrice, il semble plus judicieux de calculer M^2, M^4, M^8, et en déduire P_1, P_2, P_4, P_8.

On obtient les résultats suivants, lorsque 25 % des habitants sont initialement en X :
$P_0 = (0{,}25\ \ 0{,}75)$ $P_2 = (0{,}4906\ \ 0{,}5094)$ $P_{10} = (0{,}7690\ \ 0{,}2310)$
$P_1 = (0{,}3875\ \ 0{,}6125)$ $P_5 = (0{,}6695\ \ 0{,}3305)$

Si 99 % des habitants sont initialement en Y, on obtient :
$P_0 = (0{,}01\ \ 0{,}99)$ $P_2 = (0{,}3556\ \ 0{,}6444)$ $P_{10} = (0{,}7555\ \ 0{,}2445)$
$P_1 = (0{,}2075\ \ 0{,}7925)$ $P_5 = (0{,}6125\ \ 0{,}3875)$

Si 99 % de la population est initialement en X :
$P_0 = (0{,}99\ \ 0{,}01)$ $P_2 = (0{,}9069\ \ 0{,}0931)$ $P_{10} = (0{,}8107\ \ 0{,}1893)$
$P_1 = (0{,}9425\ \ 0{,}0575)$ $P_5 = (0{,}8451\ \ 0{,}1549)$

Si la population est équitablement répartie entre les deux villes:
$P_0 = (0{,}5\ \ 0{,}5)$ $P_2 = (0{,}6312\ \ 0{,}3688)$ $P_{10} = (0{,}7831\ \ 0{,}2169)$
$P_1 = (0{,}5750\ \ 0{,}4250)$ $P_5 = (0{,}7288\ \ 0{,}2712)$

Il semble que quel que soit l'état initial P_0 considéré, la répartition de la population, au bout de 10 ans, est proche d'une même valeur.

Si, pour n'importe quel P_0, l'état P_n converge vers un même état P indépendant de P_0, cherchons la valeur de P. De l'égalité $P_{n+1} = P_n.M$, on déduit $P = P.M$, d'où :

$(x\ \ y) = (x\ \ y)\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$, donc $\begin{cases} x = 0{,}95x + 0{,}2y \\ y = 0{,}05x + 0{,}8y \end{cases}$, ainsi, $x = 4y$.

Or, $x+y=1$, donc $x = 0{,}8$ et $y = 0{,}2$, donc $P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.
Ainsi, quel que soit l'état initial, au bout d'un nombre d'années suffisamment grand, la population de la ville X se stabiliserait vers 800000 habitants, tandis que celle de la ville Y se stabiliserait vers 200000 habitants.

II) <u>Résolution du problème avec une suite arithmético - géométrique</u>

On a : $x_{n+1} = 0{,}95\, x_n + 0{,}2\,(1 - x_n)$, donc $x_{n+1} = 0.75\, x_n + 0{,}2$.
En utilisant la suite V, définie par $V_n = x_n - 0{,}8$, qui est une suite géométrique de raison 0,75, on montre que (x_n) converge vers 0,8.
Puisque $y_n = 1 - x_n$, la suite (y_n) converge vers 0,2. On retrouve ainsi les résultats obtenus précédemment.

III) <u>Résolution du problème avec l'écriture de M^n</u>

Certains exercices proposent de démontrer par récurrence sur n, avec $n \geq 1$, que

$$M^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 + 0{,}75^n & 1 - 0{,}75^n \\ 4 - 4\times 0{,}75^n & 1 + 4\times 0{,}75^n \end{pmatrix}$$

Cette écriture permet de trouver l'état P vers lequel converge P_n (et de montrer cette convergence), en utilisant le fait que la suite de terme général $0{,}75^n$ converge vers 0.
Cherchons d'où vient cette formule :

- <u>Première remarque</u>

Si $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, alors $D^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}$

Soient $V(1\ \ 0)$ et $V'(0\ \ 1)$.
$V(1\ \ 0)$ vérifie : $(1\ \ 0).D = \lambda(1\ \ 0)$, et $V'(0\ \ 1)$ vérifie : $(0\ \ 1).D = \mu(0\ \ 1)$.
D'où l'idée de chercher un vecteur <u>non nul</u> $(a\ \ b)$ tel que $(a\ \ b).M = \lambda(a\ \ b)$. S'il existe, ce vecteur est appelé vecteur propre, et λ est la valeur propre correspondante.

- Recherche de (a b) et de λ

L'égalité (a b).M = λ(a b) équivaut successivement à :

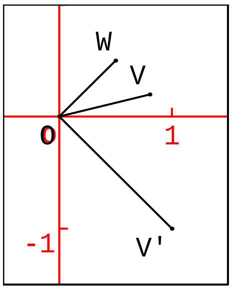
$(a\ \ b)\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = (\lambda\ a\ \ \lambda\ b)$; $\begin{cases} 0{,}95a+0{,}2b=a\lambda \\ 0{,}05a+0{,}8b=b\lambda \end{cases}$ et $\begin{cases} (0{,}95-\lambda)a+0{,}2b=0 \\ 0{,}05a+(0{,}8-\lambda)b=0 \end{cases}$.

Ce système n'admet de couples non nuls (a b) de solutions que si le déterminant du système est nul.

Le déterminant du système est : $\begin{vmatrix} 0{,}95-\lambda & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}8-\lambda \end{vmatrix}$.

Le déterminant est nul si et seulement si $(0{,}95-\lambda)(0{,}8-\lambda) - 0{,}2\times0{,}05 = 0$.Les solutions de cette équation du second degré sont: $\lambda = 1$ et $\lambda = 0{,}75$.
Avec $\lambda = 1$, on trouve $a = 4b$, on choisit, par exemple, $a = 0{,}8$ et $b = 0{,}2$.
Ainsi, le vecteur V(0,8 0,2) est associé à λ =1.
Avec $\lambda = 0{,}75$, on trouve $a = -b$. On choisit, par exemple, a =1 et b = -1. Le vecteur V'(1 -1) est associé à $\lambda = 0{,}75$.
On a donc : (0,8 0,2).M = (0,8 0,2)   **(1)** et (1 -1).M = 0,75 (1 -1)   **(2)**.

- Ecriture de M^n



Soit W(x y) dans la base { i(1 0), j(0 1) } tel que $x + y = 1$.
Trouvons les coordonnées α et β de W dans la base {V, V'}.
On a : (x y) = α(0,8 0,2) + β(1 -1).

D'où : $\begin{cases} x=0{,}8\alpha+\beta \\ y=0{,}2\alpha-\beta \end{cases}$, donc $x + y = \alpha$,ainsi α =1 et β = x-0,8.

On en déduit, puisque x+y=1, que (x y) = (0,8 0,2) + (x-0,8)(1 -1).
Donc (x y).M^n = (0,8 0,2).M^n +(x-0,8)(1 -1).M^n
Or, d'après **(1)** et **(2)** , on obtient: (0,8 0,2).M^n =(0,8 0,2) et (1 -1).M^n = 0,75^n (1 -1).
D'où : (x y).M^n = (0,8 0,2) +(x-0,8)(0,75)^n (1 -1).

Posons (x y).M^n = (x_n y_n), alors $\begin{cases} x_n=0{,}8+0{,}75^n(x-0{,}8) \\ y_n=0{,}2-0{,}75^n(x-0{,}8) \end{cases}$.

Remarque : $(1\ \ 0).\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a\ \ \ b)\ \ et\ \ (0\ \ 1).\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (c\ \ \ d)$.

Utilisons la remarque précédente, d'une part avec (x y) = (1 0) :
La première ligne de la matrice M^n est : ($0{,}8 + 0{,}2\times0{,}75^n$ $0{,}2 - 0{,}2\times0{,}75^n$),

c'est-à-dire : ($\frac{1}{5}(4 + 0{,}75^n)$ $\frac{1}{5}(1 - 0{,}75^n)$);

D'autre part, avec (x y) = (0 1) :
La seconde ligne de la matrice M^n est : ($0{,}8 - 0{,}8\times0{,}75^n$ $0{,}2 + 0{,}8\times0{,}75^n$),

c'est-à-dire : ($\frac{1}{5}(4 - 4\times0{,}75^n)$ $\frac{1}{5}(1 + 4\times0{,}75^n)$).

On retrouve ainsi l'expression de M^n. On peut ensuite trouver l'état P vers lequel converge P_n, en utilisant le fait que la suite de terme général $0{,}75^n$ converge vers 0.

IV) Résolution du problème avec la diagonalisation de M

λ est valeur propre de M s'il existe $V = (a \;\; b)$, $V \neq 0$, tel que $V.M = \lambda V$ donc tel que $(M - \lambda I)$.

$\lambda V = 0$, c'est- à- dire $det\,(M - \lambda I) = 0$. V est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Or, $M - \lambda I = \begin{pmatrix} 0{,}95-\lambda & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}8-\lambda \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de M sont les solutions de l'équation : $(0{,}95-\lambda)(0{,}8-\lambda) - 0{,}2\times 0{,}05 = 0$, donc $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0{,}75$.

Trouvons un vecteur propre associé à la valeur propre 1 :

Calculons a et b tels que $V = (a \;\; b)$ vérifie : $V.M = V$.

On trouve : $0{,}95\,a + 0{,}2\,b = a$ et $0{,}05\,a + 0{,}8\,b = b$, d'où $a = 4\,b$.

On peut choisir $a = 4$ et $b = 1$.

On procède de façon analogue pour trouver un vecteur propre associé à la valeur propre 0,75.

On trouve : $0{,}95a + 0{,}2b = 0{,}75a$ et $0{,}05a + 0{,}2\,b = 0{,}75b$, ainsi, $a = -b$.

On peut choisir $a = 1$ et $b = -1$.

Des vecteurs propres respectivement associés à 1 et 0,75 sont : $(4 \;\; 1)$ et $(1 \;\; -1)$.

D'où : $M = Q^{-1}.D.Q$, avec $Q = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{pmatrix}$ et $Q^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$: pour trouver l'expression de Q^{-1}, il suffit de résoudre $Q.Q^{-1} = I$ avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On montre par récurrence sur n ($n > 0$) que $M^n = Q^{-1}.\,D^n.\,Q$, en utilisant l'associativité du produit de matrices.

Ainsi, $M^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4+0.75^n & 1-0{,}75^n \\ 4-4\times 0.75^n & 1+4\times 0.75^n \end{pmatrix}$.

Cette expression peut être donnée aux élèves en leur demandant de la démontrer par récurrence sur n, avec $n \geq 1$. On peut ensuite trouver l'état P vers lequel converge P_n, en utilisant le fait que la suite de terme général $0{,}75^n$ est convergente vers 0.

Le problème 1 peut être traité avec ou sans graphe, ce dernier permettant de mettre en place plus facilement la matrice de transition M.

Le problème 2, qui suit, propose une modélisation par des graphes. Des règles de réduction des graphes (non exigibles en TES) facilitent la résolution du problème.

Problème 2

Abel et Caïn jouent à pile ou face (Gérard Fleury)

Le jeu

Ils lancent une pièce de monnaie (montrant "face" ou "pile" avec la même probabilité $\frac{1}{2}$) jusqu'à obtenir pour la première fois soit deux fois de suite "face" ce qui fait gagner Abel, soit successivement et dans cet ordre "pile" puis "face", ce qui fait gagner Caïn.

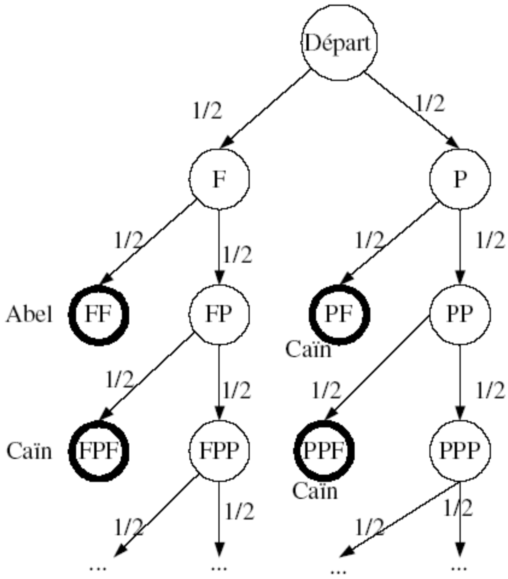
La question

Les deux joueurs ont-ils la même probabilité de gagner ?

Une modélisation par un graphe infini

Remarquons qu'une partie peut durer indéfiniment et adoptons le codage suivant :
F lorsqu'on obtient "face" et P lorsqu'on obtient "pile".

Le graphe probabiliste infini est le suivant :



Caïn gagne avec la probabilité :

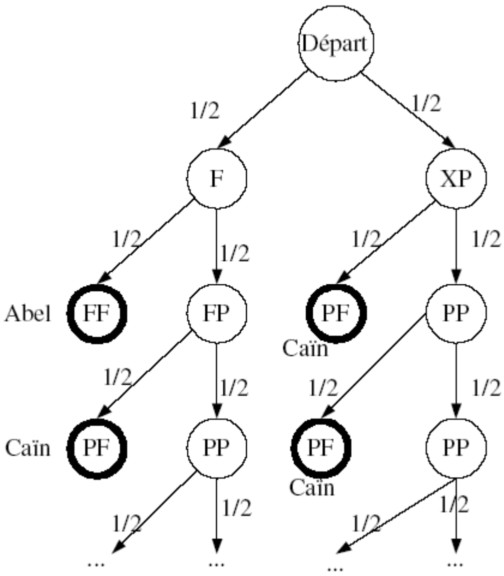
$$\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]+\ldots\frac{1}{4}\times\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots\right].$$

Or $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1$ ce qui donne $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

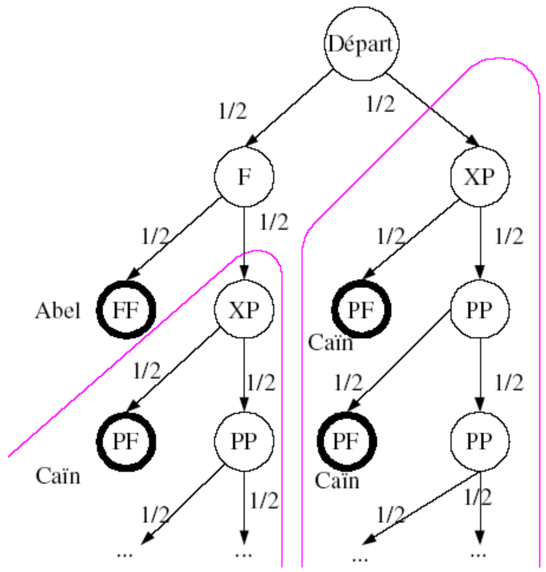
Abel gagne avec la probabilité $\frac{1}{4}$: en effet, si Abel gagne, c'est au deuxième lancer car il lui est impossible de gagner ensuite.

Réduction du graphe infini à un graphe fini

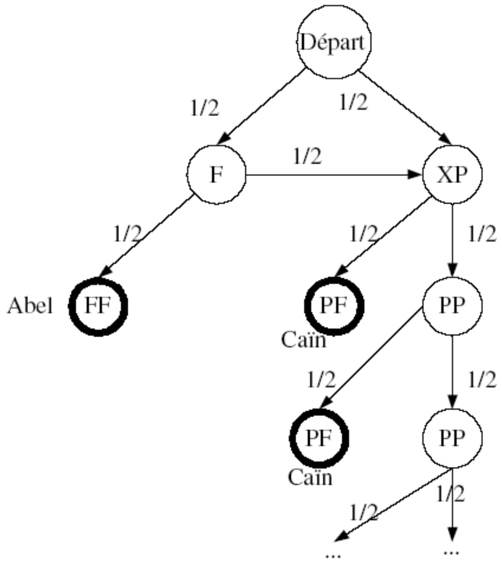
On simplifie le graphe précédent, en n'écrivant que les derniers résultats obtenus (sauf au premier lancer). Les résultats entourés en gras sont gagnants.



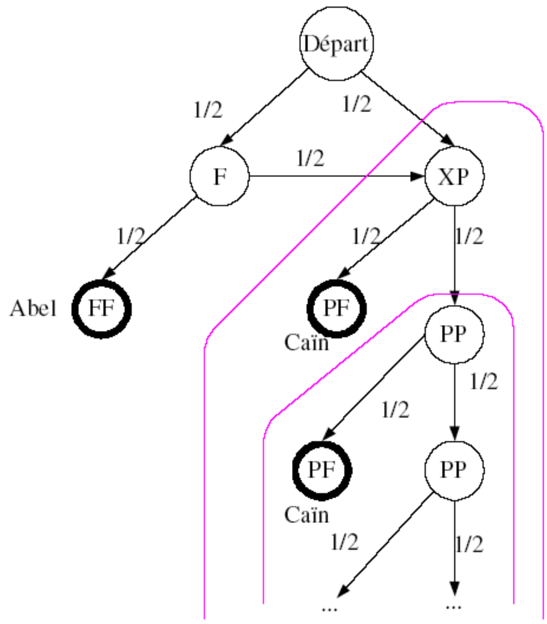
Dans le graphe précédent, remarquons que les 2 sous- graphes entourés sont identiques.



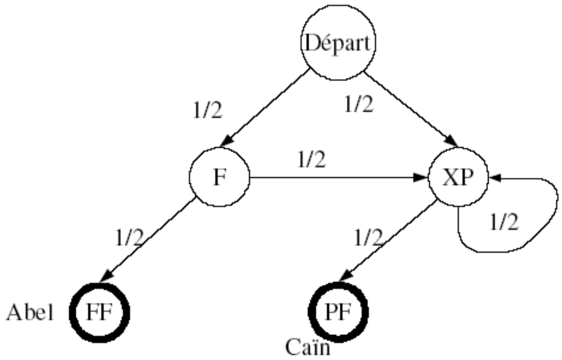
On simplifie alors le graphe, en supprimant le sous- graphe "de gauche", et en reliant F $\longrightarrow$ P



Remarquons alors que, dans le graphe obtenu, les 2 sous- graphes entourés sont identiques.

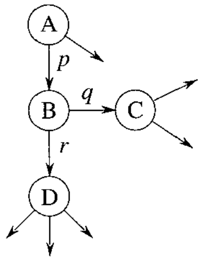


On simplifie alors le graphe infini, en supprimant l'un des 2 sous-graphes identiques ,et en reliant à P par une "boucle" avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

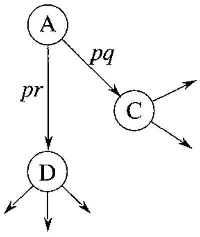


Utilisons les règles suivantes : (Brochure APMEP n°149 – Octobre 2002 « Graphes à deux voix »)

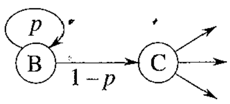
La probabilité d'un chemin formé d'une succession de deux arêtes est le produit des probabilités des deux arêtes. Considérons le graphe suivant :



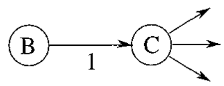
Le sommet B n'a qu'une arête orientée entrant et deux sortant. La probabilité du chemin ABC est $p \times q$, celui de ABD est $p \times r$. On peut alors supprimer B :



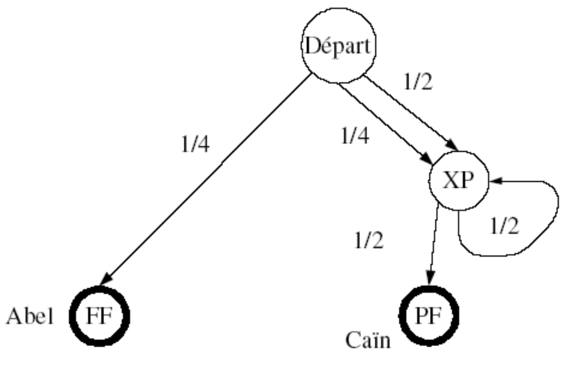
D'autre part, on peut supprimer la boucle en B, sur le graphe suivant :

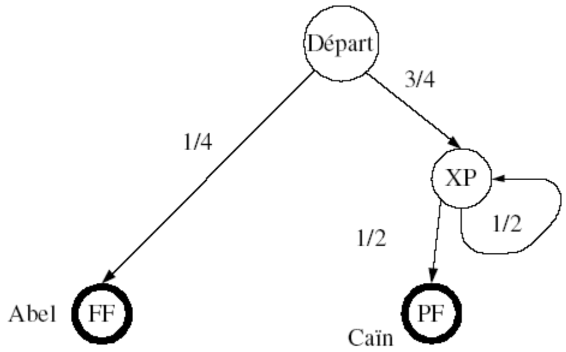


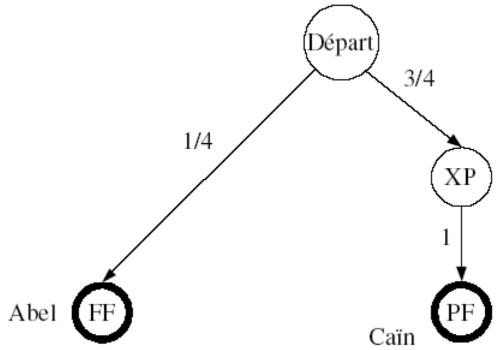
qui devient

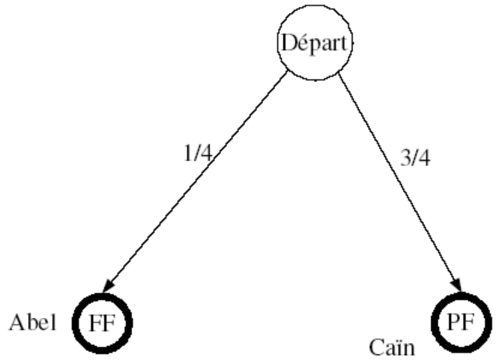


Le graphe précédent devient successivement :









<u>Remarque</u>

Lorsqu'on effectue le passage d'un graphe infini à un graphe fini, on utilise le raisonnement arithmétique suivant :

On appelle S la probabilité correspondant à un sous-graphe infini : $S = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^4 + \ldots + (\frac{1}{2})^n + \ldots$

et l'on remarque que Caïn gagne avec la probabilité $\frac{1}{2}S + \frac{1}{4}S$ (les deux portions infinies des graphes sont identiques, c'est la première réduction des deux parties infinies du graphes en une seule).

Mais, le sous-graphe infini restant peut se réduire à un sous-graphe fini : $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}S$, ce qui correspond, algébriquement, à :

$\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^4 + \ldots + (\frac{1}{2})^n + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times [\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^4 + \ldots + (\frac{1}{2})^n + \ldots]$,

d'où S=1 et Caïn gagne avec la probabilité $\frac{3}{4}$.

8- ANNEXE HISTORIQUE : LE JEU DES 7 PONTS ET LE MEMOIRE D'EULER

LE JEU DES PONTS ET DES ILES

Parmi les divers travaux des mathématiciens sur cette branche de la science de l'étendue que l'on nomme *Géométrie de situation*, on rencontre, dès l'origine, un fameux Mémoire d'Euler, connu sous le nom de Problème des Ponts de Kœnigsberg ; nous donnons, d'après les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, un commentaire de cet opuscule, qui a paru en latin dans les Mémoires de l'*Académie des sciences de Berlin* pour l'année 1759, et qui a pour titre : *Solutio problematis ad Geometriam situs pertinentis.*

LE MÉMOIRE D'EULER

1) Outre cette partie de la Géométrie qui s'occupe de la grandeur et de la mesure, et qui a été cultivée dés les temps les plus reculés, avec une grande application, Leibniz a fait mention, pour la première fois, d'une autre partie encore très inconnue actuellement, qu'il a appelée *Geometria situs*. D'après lui, cette branche de la science s'occupe uniquement de l'ordre et de la situation, indépendamment des rapports de grandeur. Mais quels sont les problèmes qui appartiennent à cette géométrie; quelles sont les méthodes qu'il faut employer à leur résolution ? C'est ce qui n'a pas encore été nettement défini. Récemment j'ai entendu parler d'un problème qui paraît se rapporter à la Géométrie de situation, puisqu'il ne contient, dans son énoncé, que des considérations d'ordre et non de mesure; aussi ai-je résolu d'exposer ici,comme un spécimen, la méthode que j'ai trouvée pour résoudre ce problème.

2) A Kœnigsberg, en Poméranie, il y a une île appelée Kneiphof ; le fleuve qui l'entoure se divise en deux bras sur les quels sont jetés les sept ponts a, b, c, d, e, f, g.

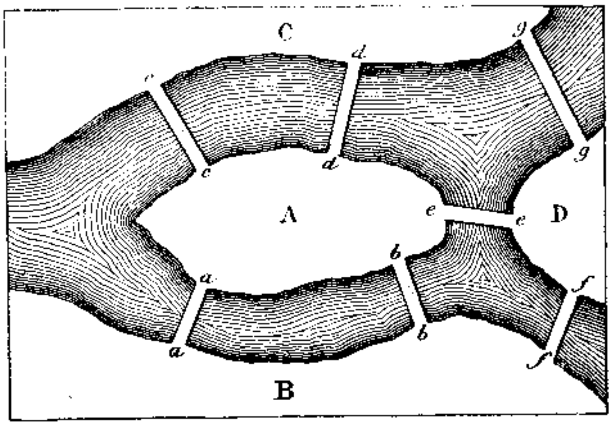


Fig I. Les ponts de Koenigsberg en 1759.

Cela posé, peut-on arranger son parcours de telle sorte que l'on passe sur chaque pont, et que l'on ne puisse y passer qu'une seule fois ? Cela semble possible, disent les uns ; impossible, disent les autres; cependant personne n'a la certitude de son sentiment. Je me suis donc proposé le problème suivant, qui est très général:

Quelle que soit la forme d'un fleuve, sa distribution en bras, par des îles en nombre quelconque, et quel que soit le nombre des ponts jetés sur le fleuve, trouver si l'on peut franchir celui-ci en passant une fois, et une seule, sur chacun des ponts

3) Quant au problème particulier des sept ponts de Kœnigsberg, on pourrait évidemment le résoudre en faisant l'énumération complète de tous les parcours possibles ; on reconnaîtrait ainsi s'il existe ou non un chemin qui réponde à là question. Mais, par suite du grand nombre de permutations, cette méthode déjà difficile et laborieuse dans le cas particulier, serait impraticable pour un plus grand nombre de ponts ; d'autre part, parmi ces permutations, beaucoup d'entre elles sont inutiles, de telle sorte qu'après avoir terminé l'opération on aurait rencontré un grand nombre de choses qui ne sont pas en question ; c'est en cela, sans aucun doute, que réside la cause d'une aussi grande difficulté.

Donc, en laissant de côté ces considérations, j'ai recherché s'il n'était pas préférable d'imaginer une méthode qui permît de juger, au premier abord, de la possibilité ou de l'impossibilité du problème ; je pensais, en effet, qu'une telle méthode devait être beaucoup plus simple.

4) Or, toute la méthode repose sur une manière convenable de représenter les divers chemins ; pour cela, je me sers des lettres majuscules A, B, C, D, ... pour désigner les diverses régions séparées par les bras du fleuve; alors, si l'on passe de la région A dans la région B, soit par le pont a, soit par le pont b, je désigne ce chemin par AB; la première lettre indique la région de départ, et la seconde la région d'arrivée. Maintenant, si le voyageur passe de la région B dans la région D, par le pont f par exemple, je désigne la seconde traversée par BD, et l'ensemble des deux passages successifs par ABD ; ainsi, la lettre intermédiaire B désigne en même temps la région d'arrivée après la première traversée, et la région de départ pour la seconde.

5) Si le voyageur passe ensuite de D en C par le pont g, je désigne l'ensemble des trois passages successifs par les quatre lettres ABDC. Ainsi, la notation ABDC signifie que le voyageur, situé primitivement dans la région A, est parvenu dans la région C, après avoir occupé successivement les régions B et D, mais, puisque ces quatre régions sont séparées les unes des autres par le bras du fleuve, le voyageur a dû franchir trois ponts; de même, tout parcours dans lequel on traverse quatre ponts sera désigné par cinq lettres En général, si le voyageur traverse n ponts, la notation de son parcours contiendra n+1 lettres. Ainsi dans le problème des sept ponts de Kœnigsberg, tout chemin possible doit être désigné par huit lettres.

6) On observera que, dans cette notation, il n'est pas tenu compte de la désignation des ponts par lesquels le passage s'effectue ; il est évident, en effet, que les ponts qui réunissent les mêmes régions peuvent être, dans chaque parcours, remplacés les uns par les autres. Par conséquent, dans le problème des sept ponts, tout parcours est représenté par huit lettres; mais, de plus, ces huit lettres doivent être disposées de telle sorte que la succession immédiate des lettres A et B, dans l'ordre AB ou BA, se présente deux fois, puisqu'il y a deux ponts qui réunissent les rives des régions A et B ; de même, le voisinage des lettres A et C doit aussi apparaître deux fois ; pour la même raison, il est nécessaire que les lettres B et D, ou C et D soient voisines une seule fois.

7) Le problème particulier se réduit donc à former avec les quatre lettres A, B, C, D une série de huit lettres, dans laquelle tous ces voisinages apparaissent autant de fois qu'il a été indiqué ; mais, avant de chercher à effectuer une telle disposition, il est bon de se demander si celle-ci est réalisable. En effet, si l'on démontrait, et c'est ce qui a lieu ici, qu'un tel assemblage de lettres est impossible, il serait inutile de continuer. Aussi ai-je trouvé une règle qui donne, pour tous les cas, la condition indispensable pour que le problème des ponts et des îles ne soit pas impossible.

8) Pour cela, je considère uniquement la région A, dont la rive est réunie à celle des autres régions par un nombre quelconque de ponts a, b, c, d, e, ... En commençant par le pont a, j'observe que si le voyageur traverse ce pont, ou bien le voyageur se trouvait en A avant le passage, ou s'y trouvera après; par conséquent, en franchissant le pont a dans un sens ou dans I'autre, la lettre A paraîtra une seule fois dans la notation. Supposons maintenant que trois ponts a, b, c conduisent dans la région A ; si le voyageur traverse les trois ponts, la lettre A apparaîtra deux fois dans la notation, soit qu'au début le voyageur parte de cette région ou d'une autre quelconque. De même, si cinq ponts conduisent en A, la lettre A sera comprise trois fois dans la notation du passage à travers tous ces ponts. En général, si le nombre des ponts qui aboutissent à la rive de la région A est impair (une telle région sera appelée région impaire), la lettre A apparaîtra, dans la notation du passage complet, un nombre de fois égal à la moitié du nombre des ponts augmenté d'une unité. En d'autres termes, si le nombre des ponts est 2n+1, le nombre d'apparitions de A sera la moitié de 2n+2 ou n+1.

9) Dans le cas du problème de Kœnigsberg, cinq ponts aboutissent à la région A, et trois ponts à chacune des régions B, C, D; donc, dans la notation du parcours complet, la lettre A doit apparaître trois fois, et chacune des lettres B, C, D doit être écrite deux fois ; par conséquent cette notation devrait renfermer neuf lettres, et non huit, ainsi que nous l'avions trouvé par d'autres considérations. Ainsi le problème de franchir une seule fois tous les ponts de Kœnigsberg n'est pas possible. ~

10) On appliquera exactement le même raisonnement pour tous les cas dans lesquels le nombre des ponts qui aboutissent aux différentes régions est toujours impair, on pourra déterminer des cas d'impossibilité du parcours. En effet, s'il arrive que le nombre total des apparitions de toutes les lettres n'égale pas le nombre de tous les ponts augmenté de l'unité, le problème est alors impossible. On observera que la règle donnée pour obtenir le nombre des répétitions de la lettre A par le nombre impair des ponts de la région s'applique toujours, soit que tous les ponts issus de la rive A aboutissent à une seule région B, soit qu'ils aboutissent à un nombre quelconque de régions.

11) Mais, lorsque le nombre des ponts issus de A est pair, on doit considérer deux cas, suivant que le voyageur est parti de A ou d'une autre région. En effet, si deux ponts conduisent en A, et si le voyageur est parti de A, alors la lettre A doit être répétée deux fois : une première fois pour le départ par l'un des ponts, et une deuxième fois pour le retour par l'autre pont; mais si le voyageur a commencé ses pérégrinations par une autre région, la lettre A ne se trouvera écrite qu'une seule fois et désignera tout aussi bien, ainsi qu'il est convenu, l'arrivée en A par l'un des ponts et le départ par l'autre.

12) Supposons que quatre ponts conduisent dans la région A, et que le voyageur parte de celle-ci ; alors la notation du parcours contiendra trois fois la lettre A s'il passe une fois, et une seule, sur chacun de ces ponts; mais s'il est parti d'une autre région, la lettre A ne sera répétée que deux fois. De même, lorsque six ponts aboutissent à la région A, la notation du parcours renfermera quatre fois ou trois fois la lettre A, suivant que le départ s'est effectué de la région A ou d'une autre. En général, lorsque le nombre des ponts d'une rive est pair (région paire), la notation correspondante renferme la lettre de cette région un nombre de fois égal à la moitié du nombre des ponts, si le départ s'est établi d'une autre région, et à ce nombre augmenté de l'unité, si le commencement du voyage a eu lieu dans cette région.

13) Mais il est évident que, dans le parcours complet, on ne peut partir que d'une seule région; par conséquent je prendrai toujours pour le nombre des répétitions d'une lettre la moitié du nombre des ponts pour une région paire, et la moitié du nombre des ponts augmenté d'une unité, si la région est impaire. Nous aurons alors deux cas à considérer, suivant que le départ s'effectue d'une région impaire ou d'une région paire.
Dans le premier cas, le problème sera impossible si le nombre total des répétitions des lettres ne surpasse pas d'une unité le nombre total des ponts. Dans le cas de départ d'une région paire, le problème sera impossible, si le nombre total des répétitions des lettres n'égale pas le nombre des ponts; car, en commençant par une région paire, on devra augmenter d'une unité pour cette région, et pour celle-là seulement, le nombre des répétitions de la lettre correspondante.

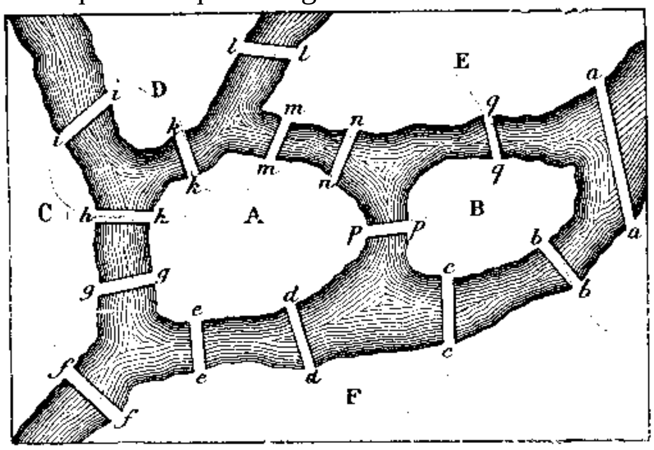
14) Considérons donc une disposition quelconque des ponts et des îles d'un fleuve. Pour savoir si le parcours complet de tous les ponts n'est pas impossible à priori, on opère de la manière suivante :
l°) On désigne chacune des régions séparées les unes des autres par les lettres A, B, C, D ;
2°) On prend le nombre de tous les ponts, et on le place en tête du tableau de calcul que nous allons indiquer ;
3°) On écrit dans une colonne verticale chacune des lettres A, B, C, D, et dans une seconde colonne, le nombre des ponts qui aboutissent à ces différentes régions ;
4°) On marque d'un astérisque les régions paires, c'est-à-dire celles auxquelles aboutissent des ponts en nombre pair ;
5°) On écrit dans une troisième colonne verticale les moitiés des nombres pairs, et les moitiés des nombres impairs, augmentés d'une unité, de la colonne précédente ;
6°) On fait la somme de tous les nombres de cette dernière colonne. Lorsque cette somme est égale au nombre de tous les ponts ou lui est supérieure d'une unité, le passage complet peut être effectué, sinon le problème est impossible. Mais il faut observer que, dans le premier cas, le départ doit commencer par une région paire, marquée d'un astérisque ; dans le second cas, le départ doit s'effectuer d'une région non marquée d'astérisque, ou impaire. Ainsi l'on a pour le problème de Kœnigsberg :

Nombre des ponts : 7

A ………..	5	3
B ………..	3	2
C ………..	3	2
D ………..	3	2
TOTAL		9

Comme le total est plus grand que 8 ou 7 + 1, le problème est impossible.

l5) Considérons la disposition formée par deux îles A et B, réunies entre elles et aux rives d'un fleuve par quinze ponts, ainsi que l'indique la fig.2.



On demande si l'on peut voyager de manière à passer sur tous les ponts, sans jamais repasser sur l'un d'eux. D'abord je désigne les six régions par les lettres A,B,C,D,E,F ; puis je construis le tableau d'après les explications données ci-dessus :

Nombre des ponts : 15.

A* ………..	8	4
B* ……….	4	2
C* ……….	4	2
D ………..	3	2
E ………..	4	3
F* ………..	6	3
TOTAL		16

Dans cet exemple, le problème est possible, pourvu que l'on parte de la région D, et alors on arrive à la région E, ou inversement; le parcours pourra s'effectuer ainsi :

EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBqEID,

ou dans l'ordre inverse ; dans cette notation, nous avons intercalé entre les lettres majuscules, qui indiquent les régions, les lettres minuscules qui désignent les quinze ponts.

16) En dehors de la méthode précédente, pour juger de l'impossibilité, nous indiquerons un moyen plus simple et plus expéditif. Nous observerons d'abord que la somme des nombres de la seconde colonne verticale du tableau est exactement égale au double du nombre des ponts ; cela tient à ce que nous avons compté chaque pont deux fois, puisque par chacune de ses extrémités il aboutit à deux régions distinctes.

17) Il résulte évidemment de cette remarque, que la somme des nombres renfermés dans la seconde colonne verticale est un nombre pair, puisque sa moitié représente le nombre des ponts.
Par conséquent, il n'est pas possible que le nombre des régions impaires soit un, trois, cinq, etc… ; ainsi dans tous les tableaux de calcul, la seconde colonne renferme toujours un nombre pair de nombres impairs ; en d'autres termes, le nombre des régions impaires est nécessairement zéro ou un nombre pair. C'est, en particulier, ce que nous avons trouvé pour le problème de Kœnigsberg, et aussi pour le problème du n° 15•.

18) Il ressort de ces considérations que le problème n'est pas impossible si toutes les régions sont paires. Alors tous les nombres de la seconde colonne verticale sont pairs, et le total des nombres de

la troisième colonne est égal au nombre des ponts ; et l'on verra que le problème est toujours possible en prenant pour point de départ une région quelconque.
Ainsi, dans l'exemple de Kœnigsberg, on pourrait franchir tous les ponts par deux fois; par exemple :

ababcdcdeffgge.

En effet, chaque pont est dédoublé, et toutes les régions deviennent paires.

19) Supposons encore qu'il y ait deux régions impaires, toutes les autres étant paires ; dans ce cas, la somme des nombres de la troisième colonne surpasse d'une unité le nombre des ponts ; on s'assurera encore que le problème est possible, à la condition de prendre pour point de départ ou d'arrivée l'une ou l'autre des deux régions impaires. On voit encore que si le nombre des régions impaires était de quatre, six, huit, la somme des nombres de la troisième colonne surpasserait de deux, trois, quatre unités le nombre total des ponts ; par conséquent le problème serait impossible.

20) En résumé, étant donnée une disposition quelconque, il sera facile de savoir s'il est possible de franchir, une seule fois, tous les ponts. Le problème est impossible, lorsqu'il y a plus de deux régions impaires; il est possible:
1°) lorsque toutes les régions sont paires, et alors le point de départ peut se faire arbitrairement d'une région quelconque ;
2°) lorsqu'il n'y a que deux régions impaires, et alors le parcours commence par l'une de celles-ci et finit par l'autre, ou inversement.

21) Lorsque l'on a conclu à la possibilité du problème, il reste à résoudre la question de savoir comment on doit diriger sa course ; à cet effet, je me sers de la règle suivante: «On supprime par la pensée, autant de fois qu'on le peut, les couples de ponts qui conduisent d'une région dans une autre ; de cette manière, le nombre des ponts est considérablement diminué ; on cherche ensuite la course à effectuer avec le reste des ponts. Cela fait, on rétablit les ponts supprimés, ce qui devient très facile avec un peu d'attention. Aussi je ne crois pas qu'il soit nécessaire d'en dire davantage sur la loi de formation des parcours.»

Ici se termine le Mémoire d'Euler. Cet illustre géomètre n'a traité pour ainsi dire que la question d'impossibilité. On trouvera dans la Note II, la théorie de la possibilité, que l'on doit considérer comme la suite du Mémoire qui précède.

Nous avons vu que le jeu des ponts se ramène à la description par un ou plusieurs traits continus, sans répétition, de toutes les figures formées de lignes droites ou courbes, dans le plan ou dans l'espace. Cette étude se résume dans les deux théorèmes suivants :

THEOREME I. *Dans tout réseau géométrique formé de lignes droites ou courbes, le nombre des points impairs est toujours zéro ou un nombre pair.*

Ce théorème se trouve complètement démontré dans le mémoire d'Euler.
On peut encore donnera la démonstration la forme suivante : Désignons par A, B, C, D, ..., les diverses stations du réseau, les divers points d'embranchement, les têtes de ligne; soient P et Q deux stations voisines, c'est-à-dire telles que l'on puisse aller de P en Q par un ou plusieurs chemins, sans rencontrer d'autres stations du réseau. Si l'on supprime l'un de ces chemins PQ, le nombre des chemins qui aboutissent en P et en Q diminue d'une unité et change de parité. Par conséquent, si P et Q sont des points impairs, ils deviennent pairs par cette suppression ; si P et Q sont pairs, ils deviennent impairs; enfin si P et Q sont de parité différente, ils demeurent de parité différente. Donc la parité du nombre des points impairs ne change pas par cette suppression. Par suite, en supprimant successivement tous les chemins qui unissent deux stations voisines, jusqu'à ce qu'il n'en reste aucun, le nombre des points impairs est nul ; ce nombre était donc zéro ou un nombre pair, avant la suppression.

Remarque : Ce théorème s'applique aux canevas géodésiques. Dans une chaîne de triangles, il y a toujours un nombre pair de sommets où aboutissent, en nombre impair, des angles réduits à l'horizon, tandis que le nombre des sommets où aboutissent des triangles en nombre pair peut être pair ou impair.

THEOREME II. *Tout réseau géométrique qui contient 2n points impairs peut être décrit par un nombre minimum de n traits sans répétition. Tout réseau géométrique, qui ne contient que des points pairs, peut être décrit par un seul trait sans répétition.*

On suppose que le réseau est continu, c'est-à-dire que l'on peut aller d'un point quelconque du réseau à un autre par un chemin continu D'ailleurs, dans le cas de plusieurs réseaux séparés, il suffit d'appliquer à chacun d'eux les théorèmes précédents. Cela posé, si l'on part d'un point impair A et si l'on chemine au hasard, sans repasser sur la même voie, on sera forcé de s'arrêter à un certain moment ; en observant que dans cette marche on ne change point la parité des stations que l'on traverse, on en conclura que le point d'arrêt est un point impair B. En supprimant le parcours AB, on obtient ainsi une figure qui ne possède plus que (2n - 2) points impairs.
Après n parcours analogues, il ne restera donc qu'un réseau dont les stations sont d'ordre pair.
Maintenant, si l'on part d'un point quelconque M du réseau restreint, et si l'on chemine au hasard, on ne se trouvera arrêté qu'en revenant au point de départ M, après avoir décrit une courbe fermée. Après avoir décrit un certain nombre de boucles semblables, on aura parcouru tout le réseau. Mais, puisque le réseau est continu, ces boucles peuvent venir se souder soit les unes sur les autres, puis sur les n chemins qui ont été décrits primitivement. Par suite, le réseau peut être décrit en n traits continus au plus.

Remarque : Une figure dont tous les points sont pairs peut être considérée, de plusieurs façons, comme une seule courbe fermée. Cette observation trouve son emploi dans la théorie des courbes unicursales.

<u>Bibliographie</u> :

Graphes à deux voix (Gérard Fleury/Olivier Cogis) – Brochure APMEP n°149

Activité de Nathalie Revol (Colloque Inter-IREM « Lyon-Confluence » 2002)

Introduction à la théorie des graphes d’Eric Sigward (Site académique de Nancy-Metz)

Théorie élémentaire des graphes : une approche par les problèmes (Site académique de Créteil)

Mathématiques spécialité TES – Hyperbole (Nathan)

Graphes et algorithmes des graphes (Brice Goglin)

AUTEURS :	Groupe d'étude : Introduction des graphes en terminale ES de l'IREM de Clermont-Ferrand
TITRE :	Graphes au lycée
EDITEUR :	IREM de Clermont-Ferrand
DATE :	Juin 2004
RESUME :	Ce document propose des activités pour la classe de terminale ES dans le cadre du nouveau programme de spécialité. Il a également pour but de résoudre certains problèmes mathématiques liés à l'utilisation des graphes.
MOTS CLES :	- Arête, sommet, poids ; - Coloration ; - Chaîne, cycle ; - Algorithme, Moore-Dijskra ; - Euler ; - Matrice de transition, graphe probabiliste ; - Modélisation.
FORMAT A4 :	Nombre de pages : 38.