

Créer et animer un atelier de mathématiques

- Actes de l'université d'été -

26 août – 31 août 2001

Saint-Flour - Cantal

* * *

*Edition coordonnée par : Paul-Louis Hennequin
Université Blaise Pascal - IREM de Clermont-Ferrand*

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques - Complexe scientifique des Cézeaux,
63177 AUBIERE cedex - Tél : 04.73.40.70.98 - Fax : 04.73.40.70.78 - irem@univ-bpclermont.fr

REMERCIEMENTS

L'association ANIMATH et tous les participants tiennent à adresser leurs remerciements aux institutions et aux personnes qui, par leur soutien actif ont permis le bon fonctionnement de cette université d'été :

- le Rectorat de Clermont-Ferrand pour son soutien dans l'élaboration du projet, son financement et son exécution,
- le Ministère de l'Education Nationale de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, ainsi que les quinze académies qui ont pris en charge le voyage et le séjour des participants,
- l'Inspection Générale de Mathématiques pour son engagement fort et sa participation active à l'U.E.,
- l'IREM de Clermont-Ferrand pour son aide à la préparation de l'U.E., et à la publication des actes,
- le Lycée de Haute-Auvergne à Saint-Flour pour la mise à disposition de ses salles et de son matériel informatique,
- la Maison des Planchettes pour la qualité de son accueil,
- La Municipalité de Saint-Flour pour sa cordialité et l'accès aux collections ancienne de sa bibliothèque.

SOMMAIRE

- Présentation de l'Université d'Été, par Paul-Louis Hennequin	p. 1
- Liste des animateurs.....	p. 3
- Liste des participants.....	p. 4

Les ateliers :

- Atelier n° 1 « Géométries finies » <i>François Gaudel</i>	p. 7
- Atelier n° 2 « MATH en JEANS : recherche et démarche scientifique » <i>Pierre Audin et Pierre Duchet</i>	p. 27
- Atelier n° 3 « Jeux et mathématiques au collège », <i>Nicole Toussaint et Jean Fromentin</i>	p. 47
- Atelier n° 4 « Pliages mathématiques » <i>Valérie Larose et François Bouyer</i>	p. 73
- Atelier n° 5 « Histoire et N.T.I.C » <i>Didier Missenard et Jean-Alain Roddier</i>	p. 81

« Le débat scientifique » :

- La démarche scientifique en maths, l'éclairage du débat scientifique, <i>Marc Legrand</i>	p. 93
--	-------

Les tables rondes :

- « Une bibliographie pour les ateliers » <i>Véronique Chauveau et Paul-Louis Hennequin</i>	p. 125
- « Mise en réseau des clubs » <i>Véronique Chauveau et Paul-Louis Hennequin</i>	p. 127
- « Comment créer et animer un club » <i>Martin Andler et Claudine Ruget</i>	p. 129

Les conférences :

- « Classification des noeuds diagonaux dans les polygones réguliers » <i>Claude Morin et Dominique Roux</i>	p. 133
- « Les premières olympiades académiques de mathématiques » <i>Dominique Roux et Aude Sainfort</i>	p. 151
- « Mathématiques et codes correcteurs » <i>Josèphe Badrikian</i>	p. 173

Expositions :

- « Si les nombres m'étaient contés... » <i>Robert Charbonnier</i>	p. 191
- Autres expositions	p. 211

Références bibliographiques :

- Ouvrage disponibles pendant l'Université d'Été, <i>Paul-Louis Hennequin</i>	p. 213
- Une sélection d'adresses Internet où trouver de la documentation pour un club, <i>Didier Missenard</i>	p. 223

- Evaluation	p. 225
--------------------	--------

PRESENTATION DE L'UNIVERSITE D'ETE

Paul-Louis HENNEQUIN

1) Préparation.

L'association ANIMATH créée il y a cinq ans, s'est fixé comme objectif le développement des clubs et ateliers de mathématiques dans les collèges et les lycées. En complément du travail effectué en classe, ceux-ci permettent aux élèves d'aborder les mathématiques de manière créative et de les ressentir comme source de plaisir et de passion ; l'initiation à des problématiques de recherche et à des questions actuelles est un moyen puissant pour développer la motivation et la créativité des élèves. Consciente de l'isolement des clubs existants, l'association décidait en novembre 1998 d'organiser une première Université d'Eté permettant l'échange des expériences, la mise en commun des réussites, la réflexion sur les contenus et la conduite des ateliers périscolaires et leur articulation avec l'enseignement ainsi qu'une meilleure connaissance des ressources d'internet. Cette première U.E. a rassemblé pour cinq jours une soixantaine de collègues – les actes (220 pages) ont été édités en octobre 2000 et sont disponibles à l'IREM de Clermont-Ferrand.

Devant le succès de cette expérience pour laquelle nous avons dû refuser la moitié des candidats, ANIMATH décidait l'organisation d'une seconde U.E. en août 2001. Le ministère ayant refusé de l'inscrire dans le plan national de formation mais en suggérant une initiative académique, le Recteur de l'académie de Clermont-Fd, Alain Bouvier, acceptait de prendre l'initiative à son compte, la charge étant répartie à peu près également entre l'académie, la DESCO du Ministère de l'Education Nationale et les académies des stagiaires pour leurs frais de déplacement et de séjour.

L'U.E. a été annoncée à la fois aux participants de 1999, à ceux dont l'inscription avait alors été refusée ainsi qu'aux membres d'ANIMATH et aux deux cents animateurs de clubs recensés par l'association. Compte tenu d'une dizaine de défection, il a été possible de retenir les quarante-huit stagiaires-candidats soutenus par leur quinze académies.

L'U.E. s'est déroulée une nouvelle fois à Saint-Flour, compte tenu à la fois des capacités d'accueil, des équipements disponibles et de la qualité de l'hospitalité offerte.

2) Programme :

Le travail s'est articulé autour de :

- cinq ateliers permettant aux stagiaires de travailler pendant quinze heures en groupes réduits (dix stagiaires et deux animateurs) et de réaliser la diversité des approches, des stratégies et des contenus possibles,
- une journée entière consacrée au débat scientifique et à sa pratique en mathématiques,
- trois tables rondes facilitant le débat public entre tous les participants et avec l'Inspection Générale,
- trois conférences présentant sur des exemples accessibles l'activité mathématique,

En outre, les participants étaient invités à visiter des expositions, en particulier celles de Robert Charbonnier et de Jean-Alain Roddier et à prendre connaissance d'environ deux cents ouvrages et périodiques, ainsi que d'une cinquantaine de volumes anciens de la bibliothèque municipale.

ANIMATEURS ET CONFERENCIERS

AUDIN Pierre, Math. en Jeans et Palais de la découverte, Paris,
Mail : pierre.audin@noos.fr
BADRIDIAN Josèphe, IUT, Université d'Auvergne, Clermont-Ferrand,
Mail : badrikian@llaic3.u-clermont1.fr
CHARBONNIER Robert, Collège de Maringues,
Mail : Robert.Charbonnier@wanadoo.fr
CHAUVEAU Véronique, Femmes et Maths, ANIMATH et lycée C. Sée, Paris,
Mail : vchauvea@noos.fr
DUCHET Pierre, Math. en Jeans et CNRS Paris,
Mail : duchet@ccr.jussieu.fr
FROMENTIN Jean, APMEP et collège, Niort,
Mail : jean.fromentin@libertysurf.fr
GAUDEL François, Lycée, Bobigny,
Mail : f.gaudel@wanadoo.fr
HENNEQUIN Paul-Louis, ANIMATH et Université Blaise Pascal, Clermont-Fd,
Mail : Paul-Louis.Hennequin@math.univ-bpclermont.fr
LAROSE Valérie, collège, Les Ullis,
Mail : vlarose@club-internet.fr
LEGRAND Marc, ADIREM et Université Joseph Fourier, Grenoble,
Mail : Marc.Legrand@ujf-grenoble.fr
MISSENARD Didier, lycée Orsay,
Mail : Didier.Missenard@gauss.math.jussieu.fr
MORIN Claude, lycée, Limoges
Mail : claudemorin@libertysurf.fr
RODDIER Jean-Alain, lycée de Haute-Auvergne, Saint-Flour,
Mail : j-a.rodier@wanadoo.fr
ROUX Dominique, Inspection Générale, Paris,
Mail : dominique.roux@education.gouv.fr
RUGET Claudine, doyenne de l'Inspection Générale, Paris,
Mail : claudine.ruget@education.gouv.fr
SAINFORT Aude, collège de Gerzat,
Mail : sainfort.pajal@wanadoo.fr
TOUSSAINT Nicole, APMEP, collège, Aix en Othe,
Mail : ntoussaint.apmep@wanadoo.fr

ARNAUD	Brigitte	brnaud@wanadoo.fr	Collège B. Bascoulergue	Rue J. Ferry	63390 ST GERVAIS D'AUV.	CLERMONT-FD
AVINZAC	M. Thérèse	mailé.avinzac@wanadoo.fr	Lycée Ozenve	9 rue Merly	31070 TOULOUSE cedex	TOULOUSE
BAROFFIO	Jacqueline	jacqueline.baroffio@la poste.net	Lycée Maréchal Lannes		32700 LECTOURE	TOULOUSE
BECKEL	Sabine		Ens. Scolaire Jean XXIII	10 rue Mgr Heintz	57000 MONTIGNY-LES-METZ	NANCY-METZ
CALLIES	Dominique	DOMINIQUE.CALLIES@wanadoo.fr	Collège Beauregard	39 av. Beauregard	74960 CRAN-GEVRIER	GRENOBLE
CAMPREDON						
CASTELLA	Isabelle		Collège	75 avenue Cavaignac	46300 GOURDON	TOULOUSE
CLEMENT	Stéphane	s.clement3@libertysurf.fr	Collège Miramaris (ZEP)	Avenue du Levant	13140 MIRAMAS	AIX-MARSEILLE
COMBES	Marie-Claire	profs.villon@wanadoo.fr	Collège F. Villon	Rue de la Rampude	34980 SAINT GELY-DU-FESE	MONTPELLIER
CREPE	Pierre	pierre.crepe@wanadoo.fr	CES le Bastion	Bld de Varsovie	11000 CARCASSONNE	MONTPELLIER
DELARUE	Rose		Institut de la Providence	2 rue de l'Abbaye	57320 BOUZONVILLE	NANCY-METZ
DRUCKE	Fabrice	Fabrice.Drucke@mail.ac-Lille.fr	Collège A. Rimbaud		59650 VILLENEUVE D'ASCQ	LILLE
EYMERY	Eliane	ipeymery@nordnd.fr	Collège H. Matisse	Route de Hautevalle	59126 LINSELLES	LILLE
FOURNIER	Frédérique	Frederique.Fournier@ac-toulouse.fr	Collège		31170 TOURNEFEUILLE	TOULOUSE
GAZAGNES	Arnaud	a.gazagnes@voila.fr	Collège A. Camus	46 av. Jean Jaurès	10600 LA CHAPELLE ST LUC	REIMS
GERMA	Laurent	laurent-germa@voila.fr	Lycée Blaise Pascal	36 avenue Carnot	63000 CLERMONT-FD	CLERMONT-FD
HENNE	Valérie		Collège la Providence	2 rue de l'Abbaye	57320 Bouzonville	NANCY-METZ
ISAMBERT	Catherine	bc.isambert@waika9.com	Lycée Léonce Vieljeux	Rue des Gontheries	17026 LA ROCHELLE cedex	POITIERS
JULIEN	Philippe	pm.julien@wanadoo.fr	lycée International		78100 ST GERMAIN-EN-LAYE	VERSAILLES
LAW	Bernard		Collège Sainte Thérèse	La Croix Buisée	37210 VOUVRAY	ORLEAN-TOURS
LEBOT	Bertrand	lebotber@club-internet.fr	Collège Victor Hugo		63530 VOLVIC	CLERMONT-FD
LECEUREUX	Marie-Hélène	mn.leceureux@free.fr	lycée Ozennes	9 rue Merly	TOULOUSE	TOULOUSE
LEFEUVRE	Philippe	philippe.lefeuvre@ac-poitiers.fr	Lycée M. de Valois	rue Leriget	16017 ANGOULEME	POITIERS
LEFEVERE	Marc	cmlefevere@yahoo.fr	Lycée Lyautey	260 Bld Teraoui	CASABLANCA	MAROC
LE FOLL	Laurence	Laurence.LeFoll@mail.ac-Lille.fr	Collège Gambetta	rue Gambetta	LYS-LEZ-LANNOY	LILLE
LEROUX	Philippe		Lycée Galilée	109 rue P. Vaillant Couturier	92230 GENNEVILLIERS	VERSAILLES
de LIGT	Frédéric	C.Javiotte.Guitres@ac-bordeaux.fr	Collège J. Aviotte (ZEP)	6 Grand' Rue	33230 GUITRES	BORDEAUX
LOCATELLI	Fabrice	Fabrice.Locatelli@univ-lille1.fr	Univ. Sciences - IREM	Lille 1 - Bât. M1	59655 VILLENEUVE D'ASCQ	LILLE
LOUKILI	Abderrahman		Collège Paul Valéry	5 rue Paul Varéry	57070 METZ	NANCY-METZ
MARTIN	Christine	chrismar@fr.packardbell.org	Collège le Nain		02000 LAON	AMIENS
MICHEL	Renée	jimichel@nordnet.fr	collège SAGEBIEN		80000 AMIENS	AMIENS
MIMEAU	Olivier	Olivier.mimeau@wanadoo.fr	Collège les Petits Sentiers	rue du 11 novembre	28110 LUCE cedex	ORLEANS-TOURS
NOVEL	Marc		Collège Dolto	354 rue des Pyrénées	75020 PARIS	PARIS
ODOR	Florian	Florian.odor@netcourrier.com	Collège Jean Jaurès	rue de la Paix	59146 LOMME	LILLE
PICHOT	Dominique		Collège Missy	rue du Bois l'Epine	17028 MISSY	POITIERS
POGODALLA	Simone	Pogodala@FranceNet.fr	Collège M. Servet (ZEP)	2 av. Jules Ferry	74100 ANNEMASSE	GRENOBLE
POLLET	Michèle	jean-francois.pollet@wanadoo.fr	Lycée Marie Curie	Av. du 8 Mai 45	38000 ECHIROLLES	GRENOBLE
RABOIN	Christine		Collège Jean Moulin	rue Maurice Bellonte	02100 SAINT QUENTIN	AMIENS
RASMUS	Eric	e.rasmus@ac-Metz.fr	Collège J. Mermoz	17 rue Bellonte	57155 METZ	METZ
RENOULT	Jean-Claude	JCRENOULT@VOILA.fr	Lycée Maine de Biran	108 rue Sévigné	24108 BERGERAC	BORDEAUX
ROUQUETTE	Yves		Lycée F. Fabre	rue du Moulin	34600 BEDARIEUX	MONTPELLIER
ROZAND	Françoise	grozand@ac-grenoble.fr	Lycée Jean Prévoost		38000 VILLARD DE LANS	GRENOBLE
SCHALK	Jean-Michel	klasch.jean-michel@estelfree.net	Collège Fustel de Coulanges	13 rue Jacques Peirotes	STRASBOURG	STRASBOURG
SERRE	Françoise		Lycée F. Truffaut	rue de Pontoise	60000 BEAUVAIS	AMIENS
SPAGNOL	Jean-Pierre	ips0123@cub-internet.fr	Lycée Felix Faure		60000 BEAUVAIS	AMIENS
STEINMETZ	Pierre		Ly. Col. Saint Augustin	56 rue J.J. Dieller	57230 BITCHE	NANCY-METZ
TIXIER	Michel	tixier@dyadel.net	Lycée M. Michellis	43 rue des Otages	80000 AMIENS	AMIENS
YAHIAOUI	Abdelhalim	Halimtaire@yahoo.fr	Lycée C. Braque	21 rue Victor Puisseux	95100 ARGENTEUIL	VERSAILLES

LES ATELIERS

ATELIER N°1

Géométries finies

François GAUDEL

Le but de cet atelier était de présenter les contenus et les développements possibles d'une activité sur les géométries finies expérimentée au cours de l'année scolaire 1999-2000 dans deux ateliers : l'un en lycée avec essentiellement des élèves de seconde, l'autre sur une Maison des Jeunes et de la Culture avec cette fois des collégiens, et une élève de première année de DEUG.

Principe des ateliers "Exploration mathématique"

Ce principe, assez souple, consiste à faire découvrir, explorer, réaliser ou construire par divers moyens des formes mathématiques. La construction implique dès le départ une certaine compréhension de ce qu'on fait, et est l'occasion de poser de nouvelles questions. L'enseignant apporte des éléments de base et des références historiques. Les élèves exposent aussi bien leurs œuvres que leur contenu mathématique, voire le résultat de leurs recherches lors du Congrès MATH.en.JEANS.

La partie réalisation impose ses propres contraintes de soin, de méthode et de durée. J'ai pu constater que le temps qu'on y consacre n'est pas un obstacle à l'approfondissement des questions mathématiques sous-jacentes. Plus cette partie de l'activité est réussie, plus les élèves sont motivés pour expliquer ce qu'ils ont construit, et parfois créé ou conçu. D'autre part, les thèmes proposés doivent permettre à la fois de réaliser des formes étonnantes, difficiles à imaginer ou construire de prime abord (c'est l'apport spécifique des maths) et n'exiger qu'un bagage mathématique accessible aux élèves présents à l'atelier, avec une entrée pas trop compliquée et des développements éventuels dont la justification apparaisse clairement.

Avantages des géométries finies

Bien qu'elle ait été menée en lycée avec des effectifs plus réduits qu'à l'ordinaire (bas étiage du club), l'activité sur les géométries finies m'a paru très réussie, sans doute pour plusieurs raisons :

- La représentation de ces géométries présentait des possibilités variées dans lesquelles les élèves ont fait preuve de créativité.
- Tous les niveaux ont pu s'exprimer, du collège à la première année de DEUG, au sein d'un même exposé.
- Il y a une grande richesse de problèmes dans ce domaine avec des niveaux de complexité qui croissent assez vite, même avec des énoncés simples.

- On travaille à partir d'axiomes à partir desquels on construit des modèles. Il y a un passage constant de l'abstrait au concret et réciproquement.

Lors de l'Université d'été ...

J'ai présenté un certain nombre de concepts de base sur le sujet, ainsi que les objets créés et leur signification. Il n'est pas question ici de présenter un cours sur les géométries finies. Aussi je partirai à nouveau des objets créés par les élèves. Ceux qui voudraient approfondir la question trouveront l'essentiel de ce qui m'a servi dans deux ouvrages :

- Burkard POLSTER : A geometrical picture book, chez SPRINGER
- Emil ARTIN : Algèbre géométrique, GAUTHIER-VILLARS, rééd chez Jacques GABAY (surtout le chapitre 2)

Géométrie ?

Une "géométrie" sera pour nous constituée d'un ensemble non vide de "points" et un ensemble non vide de "droites". Les droites sont des ensembles de points contenant au moins deux points, et chaque point appartient à au moins deux droites. La définition est parfaitement symétrique en termes de points et droites : on pourrait tout aussi bien dire que les points sont des ensembles de droites, que chaque droite appartient à au moins deux points etc..

Deux droites parallèles sont des droites disjointes ou confondues.

Deux points sont parallèles s'ils n'appartiennent pas à la même droite ou si ils sont confondus.

Il est immédiat que les deux relations de parallélisme sont des relations d'équivalence.

Les droites ne seront pas obligatoirement représentées, dans le plan ou l'espace, par des droites au sens usuel : tout d'abord parce qu'elles ne posséderont qu'un nombre fini de points, et ensuite parce que la plupart du temps, ces points ne seront même pas alignés au sens usuel.

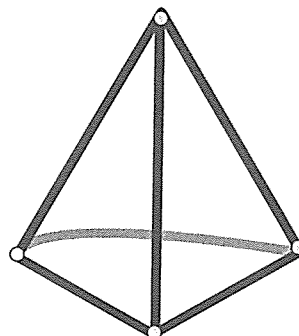
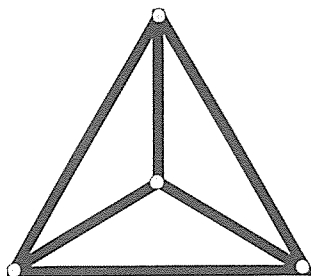
Images et représentations spatiales de plans affines finis :

Les axiomes d'un plan affine sont les suivants :

C'est une géométrie pour laquelle

1. Deux points distincts appartiennent à une droite et une seule
2. Une droite et un point étant donnés, il existe une droite et une seule passant par ce point et parallèle à cette droite
3. Il existe trois points non alignés (c'est à dire n'appartenant pas à la même droite).

Si l'on demande aux élèves de fabriquer le plan affine ayant le moins possible de points, ils trouveront rapidement une bonne réponse, et peuvent même prouver qu'en terme d'ensembles de droites et de points, toutes les solutions sont équivalentes :



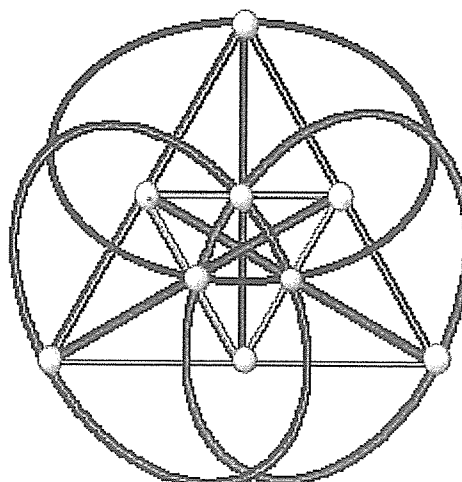
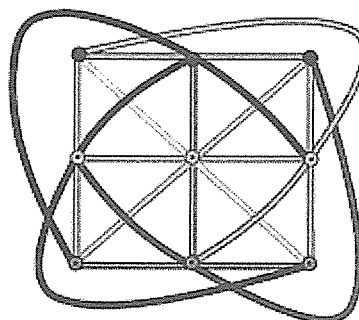
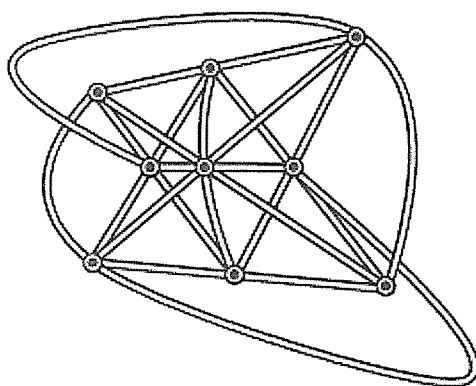
La deuxième représentation donne l'idée d'un tétraèdre, ce qui est effectivement une intéressant par les symétries que cela fait apparaître. Sur les dessins les droites apparaissent comme des segments reliant les points. Cependant elles ne sont constituées que des extrémités de ces segments.

Nous sommes ici devant le plan affine d'ordre deux. Ce plan comporte six droite, quatre points, trois faisceaux de droites parallèles, comportant chacun deux droites.

La démonstration de la propriété suivante s'appuie par exemple sur les faisceaux de droites parallèles ; elle est accessible à des élèves de seconde :

Prop : Dans un plan affine fini, toutes les droites comportent le même nombre de points, n . On parle alors du plan affine d'ordre n et il comporte n^2+n droites, n^2 points, $n+1$ faisceaux de n droites parallèle ; enfin chaque point appartient à $n+1$ droites distinctes.

La démonstration peut être approchée dans la recherche d'un plan affine comportant au moins cinq points, menée d'abord de façon empirique, puis en réfléchissant à ce qu'on fait. Voici quelques représentations "du" plan affine d'ordre 3 dues aux élèves. Que ce plan affine soit unique, et en quel sens, est un problème intéressant à soulever.



On peut remarquer que cette fois des droites ont été représentées par des arcs de courbe. Aurait-il pu en être autrement ? Non sous peine d'aligner tous les points. C'est une conséquence du théorème de Sylvester : soient n points du plan réel tels que toute droite qui joint deux points distincts en contient un troisième. Alors les n points sont tous alignés. On trouve une démonstration particulièrement élégante (10 lignes, et accessible en lycée) de ce théorème dans le livre publié en hommage à ERDÖS, intitulé "Proofs from the book" de Martin AIGNER et Günter M. ZIEGLER chez SPRINGER.

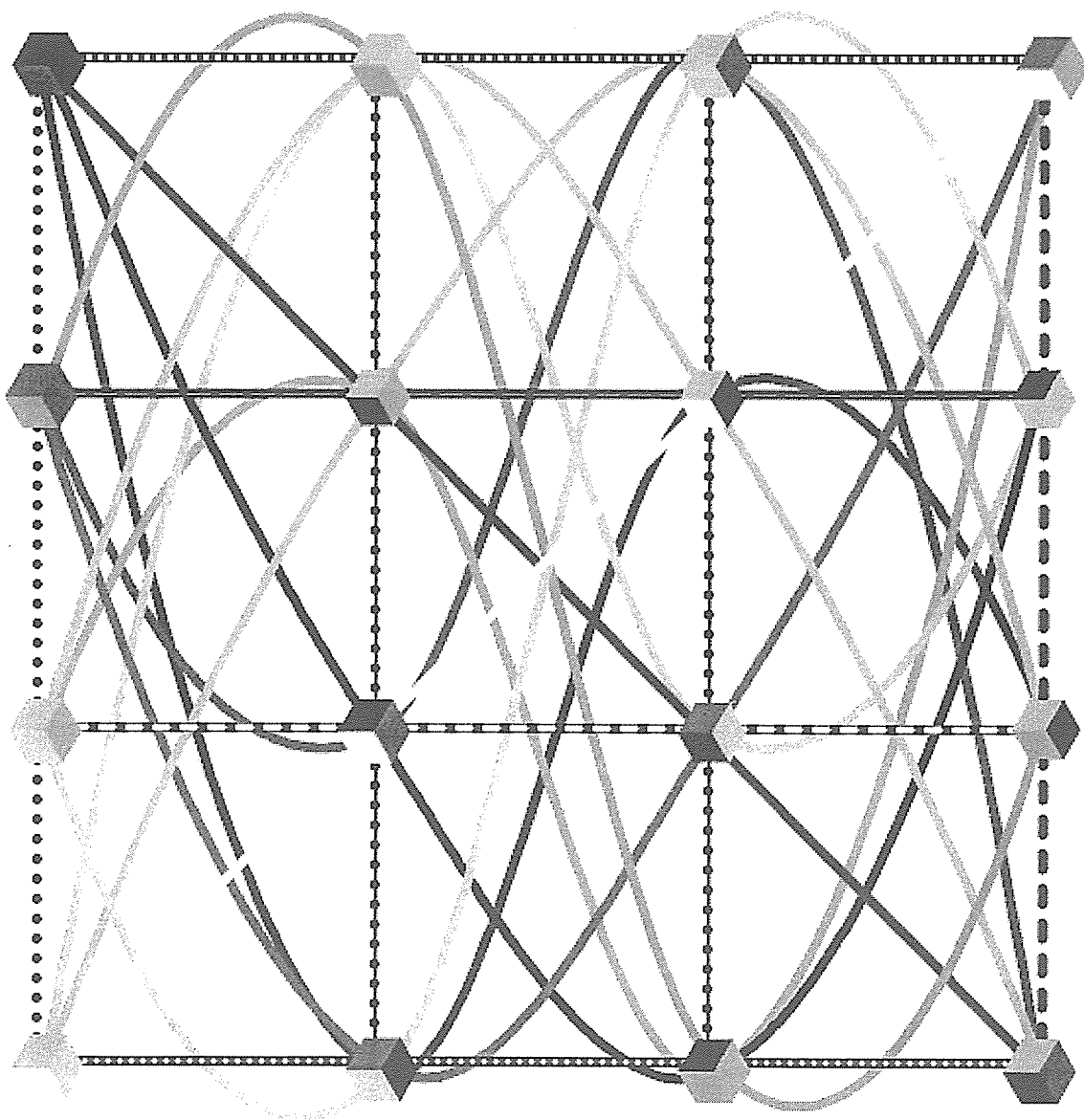
Si arrivés là les élèves tentent directement de trouver un plan affine d'ordre 4, ils vont avoir beaucoup de mal. D'ailleurs, en existe-t-il un ?



C'est la question que semble se poser Bertrand Denis, prof de philo au lycée Louise Michel lors du Congrès MATH.en.JEANS 2000. Il est en train d'essayer de matérialiser des droites à l'aide de fils de laines de couleurs différentes pour créer un plan affine d'ordre 4 sur un réseau de 4 fois 4 points.

Voici une réponse possible (voir page suivante) :

Les quatre droites horizontales et les quatre droites verticales forment respectivement deux faisceaux de droites parallèles qui se coupent en les seize points de notre plan. Chaque point se trouve en outre sur trois autres droites, ce qui a été matérialisé par trois couleurs disposées sur trois faces visibles d'un cube vu en perspective. On remarquera que la même couleur ne peut pas se trouver sur la même ligne horizontale ou colonne verticale, sinon deux droites passeraient par deux points distincts. D'autre part, et bien que cela n'apparaisse pas sur une version "papier" en noir et blanc, chacun des trois faisceaux de quatre droites parallèles restants a été originellement coloré dans la même teinte (jaune, vert ou bleu) avec des nuances pour différencier les quatre droites.



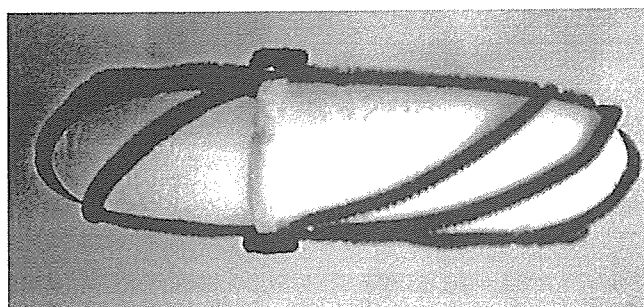
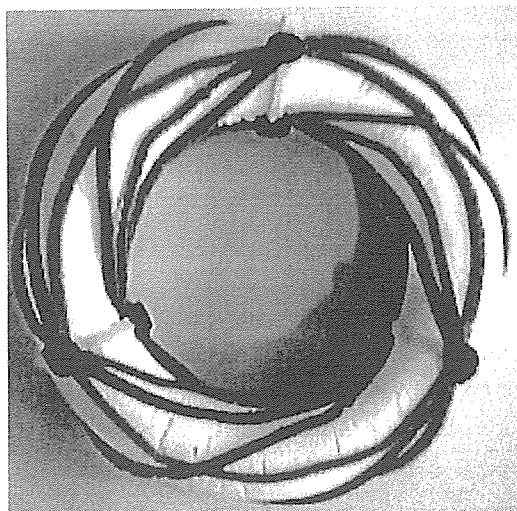
Cette représentation nous fait penser à un problème classique, celui du carré gréco-latin, sur lequel on reviendra plus tard.

L'idée de privilégier deux faisceaux de droites parallèles est d'autre part tout à fait féconde, car elle nous permet d'introduire très naturellement des coordonnées pour les points. La question qui se pose alors est la suivante : peut-on écrire l'équation de nos droites ?

Pour répondre à cette question, on est amené à introduire des opérations ayant les propriétés usuelles, mais telles que les résultats ne dépassent pas 2 (cas du plan affine d'ordre 3) ou 3 (cas du plan affine d'ordre 4). En d'autres termes, il faut travailler avec les corps finis d'ordre 3 et 4. A condition de bien poser les règles du jeu, le travail de recherche de ces corps est faisable avec des collégiens de quatrième (compter une bonne séance de deux heures pour que certains arrivent à la solution).

Dans le cas du corps d'ordre 3, on obtient une représentation géométrique particulièrement intéressante en utilisant un tore puisque les opérations se font simplement modulo 3, c'est à dire sur un cercle.

Voici donc une nouvelle représentation spatiale de l'espace affine d'ordre 3 :

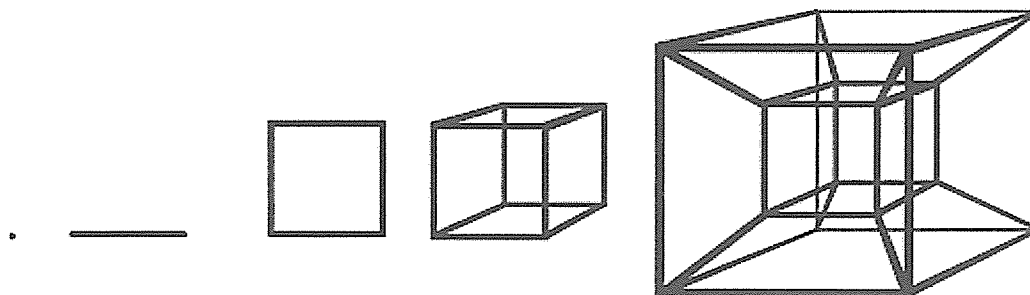


Le tore étant posé sur un plan horizontal, le maillage permettant d'établir les coordonnées des points est matérialisé par trois cercles horizontaux concentriques d'une part, et trois cercles "verticaux" d'autre part, dont les plans font entre eux des angles dièdres de 120° et se coupent le long de l'axe vertical du tore. Cela détermine 9 points, 3 par cercle. Par chacun de ces points passe un cercle vertical (grand cercle), un cercle horizontal (petit cercle), et deux courbes hélicoïdales qui se décalent d'un ou deux points selon le sens choisi sur les petits cercles lorsqu'elles passent de l'un à l'autre.

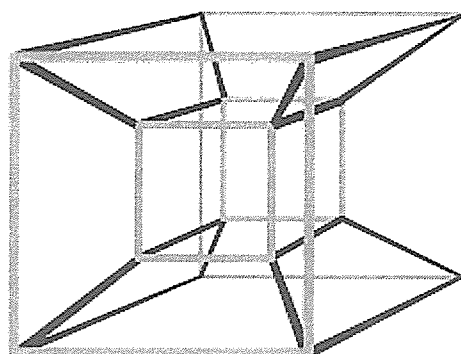
Cette représentation est assez élégante parce que $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ a une structure particulièrement simple (3 est un nombre premier). Pour le corps d'ordre 4, comme 4 n'est pas premier mais est une puissance entière positive d'un nombre premier, le corps certes existe mais ne se trouve pas aussi facilement. On pourrait encore utiliser un tore. Mais nous avons préféré utiliser un squelette d'hypercube "vu en perspective". Pour une présentation très simple et accessible de ce qu'est un hypercube (je l'ai testé), je conseille le livre de Thomas BANCHOFF intitulé "La quatrième dimension", chez BELIN.

Le principe consiste à itérer le procédé de construction qui permet de passer d'un point à un segment en le déplaçant par translation dans une direction quelconque et en gardant la trace de son déplacement. On obtient ainsi un "cube de dimension 1" ; puis on passe au carré (cube de dimension 2) en déplaçant le segment obtenu par une translation de vecteur orthogonal à la direction précédente, et de même norme. Une translation dans une direction orthogonale aux

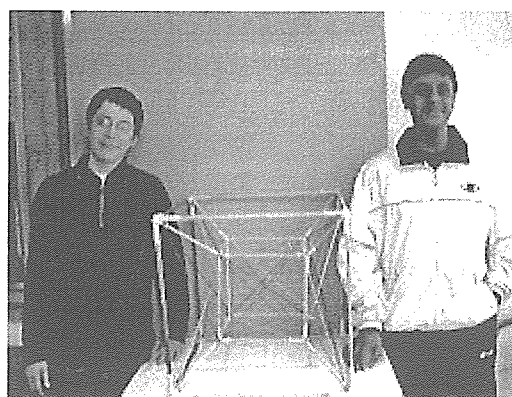
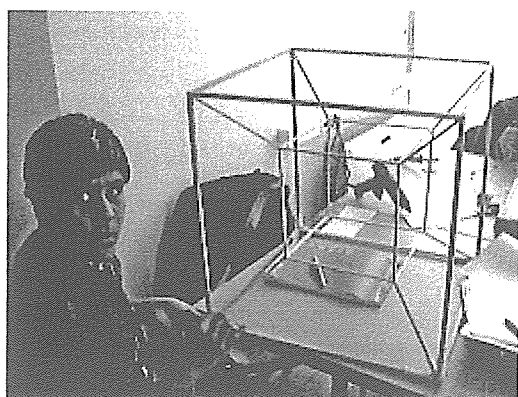
deux précédentes donne le cube usuel, de dimension trois. Et pour obtenir l'hypercube il suffit de recommencer dans une direction orthogonale aux trois premières. Dans la figure ci-dessous, cette quatrième direction est vue en perspective, avec un point de fuite situé au centre du cube initial.

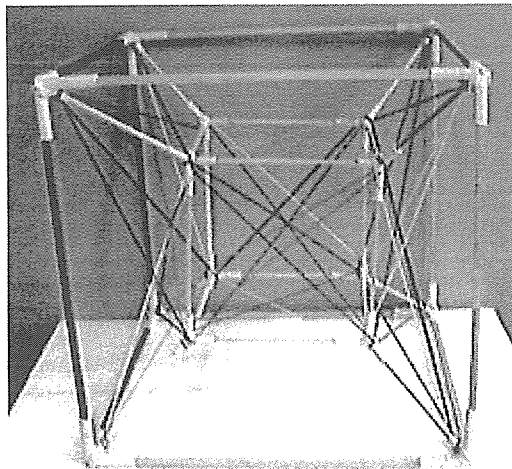


Sur la figure ci-dessous, on voit clairement les seize sommets de l'hypercube qui sont en même temps les seize points du plan affine d'ordre 4, et en gris et noir respectivement les huit droites d'équations respectives $x=0, \dots, x=3$ et $y=0 \dots y=3$. Elles sont représentées par des quadrilatères plans. Elles jouent exactement le même rôle que les cercles horizontaux et verticaux sur le tore.



Et voici maintenant nos artistes au travail et devant leur résultat :





Des fils de laine de trois teintes avec quatre nuances pour chaque teinte matérialisent les trois réseaux de quatre droites parallèles, non parallèles aux axes.

Comment ont-ils fait ?

Il était très difficile de trouver une représentation du plan affine de ce type par tâtonnement alors que cela restait possible sur une grille, avec un peu de patience. Les élèves ont donc écrit les équations des droites de diverses pentes dans le corps fini d'ordre 4 qu'ils avaient préalablement construit (du moins pour certains d'entre eux), puis il a fallu se repérer à l'aide des coordonnées.

Il est temps d'apporter quelques précisions, qui ont été (brièvement) développées durant le stage. Etant donné un plan affine fini, il n'y a pas forcément un corps sous-jacent. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un tel corps existe est que le théorème de Desargues soit vérifié. Dans ce cas, le corps étant fini est forcément commutatif et *donc* un autre théorème intéressant est vérifié, celui de Pappus. Ces questions sont exposées et démontrées dans l'ouvrage d'ARTIN, Algèbre géométrique, déjà cité.

Etant donné p^n , où p est un nombre premier et n un entier positif, il existe un unique corps fini d'ordre p^n . On sait d'ailleurs le construire. Ceci nous garantit l'existence de plans affines d'ordres 3, 4, 5, 7 et 8. Ces derniers sont uniques à un isomorphisme près, et il n'en existe pas d'autres pour ces ordres. Par contre à partir de 9, il existe des plans affines "non classiques", c'est à dire sans corps sous-jacent. Je n'ai aucun renseignement sur ces plans, si ce n'est que le plan classique d'ordre 4 est déjà relativement compliqué !

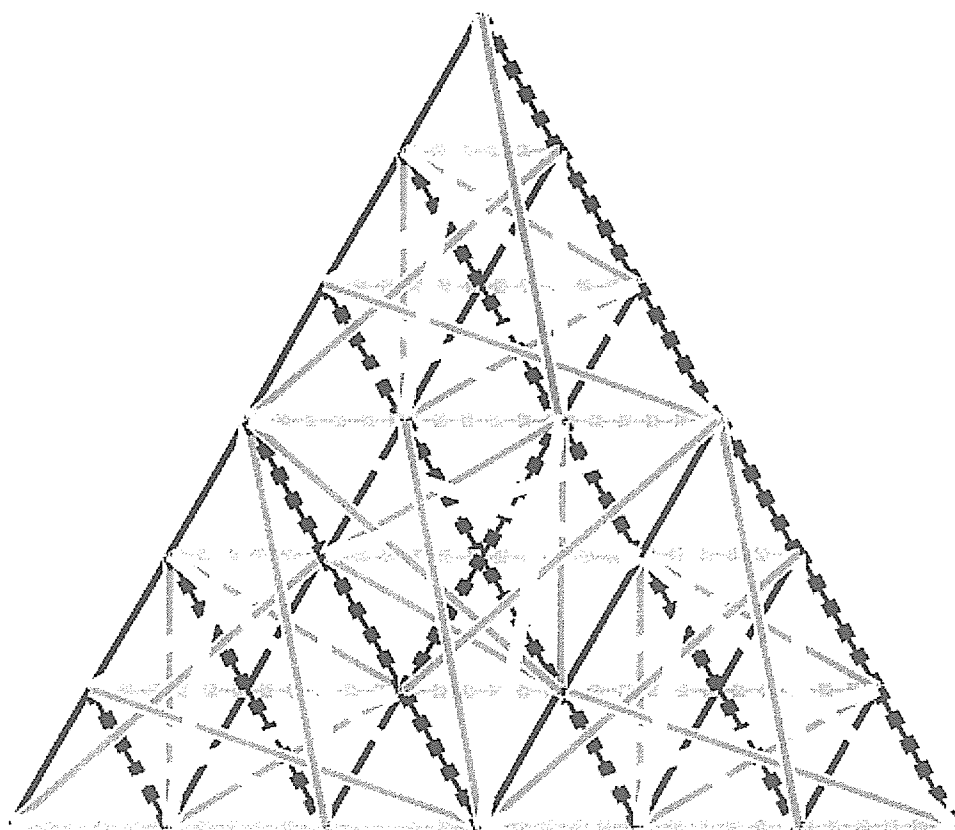
Enfin, de nombreux géomètres pensent qu'il n'existe pas de plans affines pour d'autres ordres que les puissances entières de nombres premiers (pour 6 et 10 par exemple, et une infinité d'autres valeurs, l'inexistence est démontrée). Mais cela reste pour l'instant une conjecture..

Une autre représentation du plan affine d'ordre 4

Nous avons également construit une autre représentation du plan affine d'ordre 4. Cette fois nous utilisons un tétraèdre sur lequel nous plaçons 16 points de la façon suivante : les 4 sommets, plus douze points situés à chaque tiers de chacune des six arêtes. Les faisceaux de

droites parallèles sont les suivants : trois faisceaux constitués chacun de deux arêtes opposées, et de deux rectangles parallèles à ces deux arêtes. Deux autres faisceaux constitués chacun de quatre "droites" constituées par un sommet et trois points de la face opposée situés aux tiers des arêtes, constituant l'un des deux triangles équilatéraux possibles.

Ci-dessous, un découpage permettant par pliage d'obtenir l'objet (il suffit de rabattre les trois pointes de façon à obtenir un tétraèdre régulier) : Durant l'année, nous l'avons réalisé avec du fil de fer enrobé de plastique et de la peinture pour maquette.

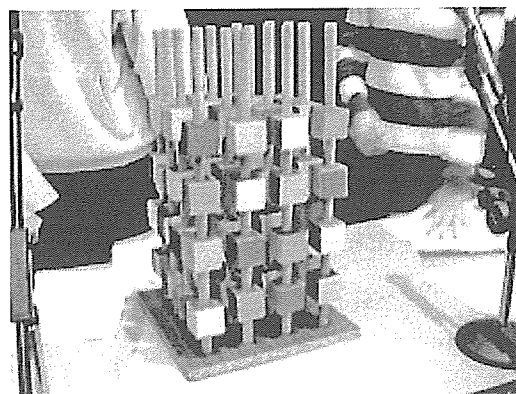


Le cube arabo-greco-latin

Une visite au Palais de la Découverte lors de laquelle nous avons assisté à un exposé de Jean BRETTE sur les carrés gréco-latins et le problème dit des "36 officiers" nous a donné l'idée de résoudre le problème suivant :

On a quatre teintes rouges, quatre teintes vertes et quatre teintes bleues. 64 cubes sont peints chacun de trois couleurs, une rouge, une verte, une bleue. Comment disposer ces cubes pour former un cube quatre fois plus grand, de telle façon qu'aucune suite de quatre cubes parallèle aux arêtes ne comporte deux fois la même couleur. Nous avons appelé ce cube arabo-gréco-latin, considérant qu'au lieu de trois sortes de couleurs, on peut utiliser trois types de signes : des chiffres arabes, des lettres grecques et l'alphabet latin.

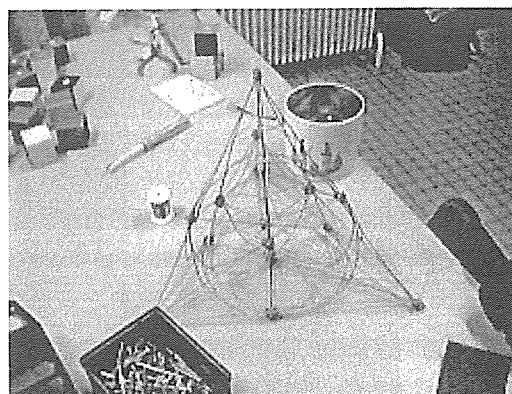
Voici quelques photos témoignant de la construction de notre cube. De façon à ce que le résultat soit visibles, les petits cubes sont espacés les uns des autres, fixés sur des tiges en bois.

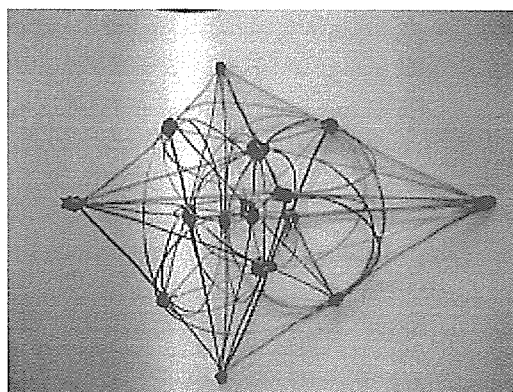


Ce problème se résout en se plaçant cette fois dans un espace affine d'ordre 4 dont les cubes sont les points. Chaque couleur correspond à un plan de 16 points et les trois directions des arêtes sont celles des axes, chaque point possédant trois coordonnées de valeurs 0, 1, 2, ou 3 dans le corps d'ordre 4.

Il y a, par exemple, quatre nuances de bleu, et ces dernières ne peuvent être sur un même cube, ce qui signifie que les 4 fois 16 cubes de chacune de ces nuances forment quatre plans parallèles disjoints. Le problème revient à trouver trois directions de plans distinctes qui ne soient parallèles à aucun des axes. C'est un petit problème qui a été résolu par notre étudiante en DEUG sur la MJC (la solution n'est pas unique).

Le plus petit espace projectif fini





On trouve dans le livre de Burkard POLSTER une représentation très saisissante du plus petit espace projectif fini. L'axiomatique des plans projectifs est la suivante :

1. Deux points distincts appartiennent à exactement une droite.
2. Deux droites distinctes se coupent en exactement un point.
3. Il existe quatre points dont trois quelconques ne sont jamais alignés.

On passe très facilement d'un plan affine à un plan projectif et réciproquement en adjoignant ou au contraire retirant un point, appelé point à l'infini.

Le plus petit espace projectif fini sera quant à lui obtenu en partant du plus petit plan projectif, en ajoutant un point extérieur à ce plan et en exigeant que toute droite ait au moins trois points, que deux points déterminent une droite unique, et que toute droite qui intercepte deux côtés d'un triangle en des points distincts des sommets, coupe aussi le troisième côté.

La géométrie de l'espace projectif de dimension trois se différencie de celle de l'espace affine de dimension trois essentiellement par le fait que deux plans projectifs non confondus se coupent toujours selon une droite.

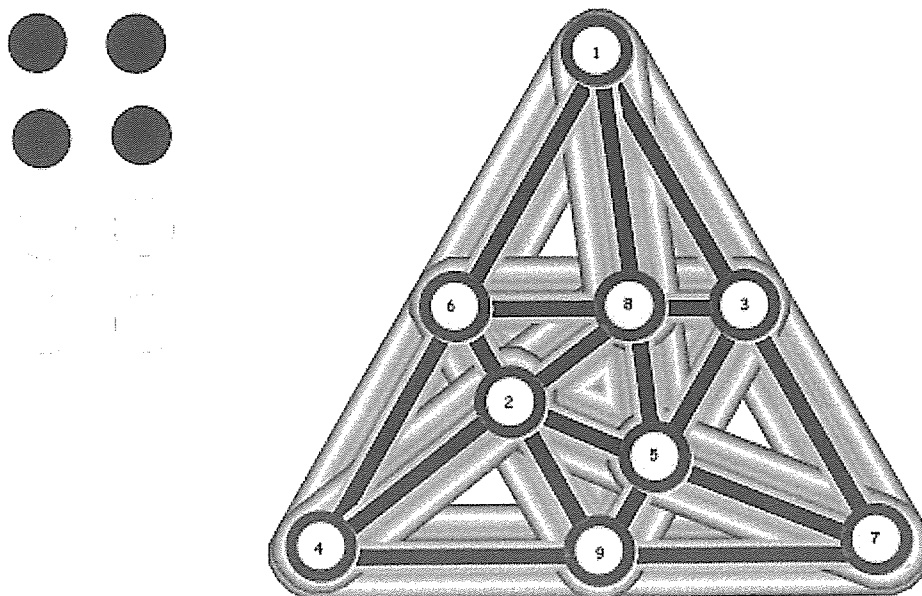
Configurations géométriques et jeu de morpion

Nous avons, lors de l'Université d'été, abordé les notions de configuration plane abstraite, et de configuration plane (les secondes se différenciant des premières par le fait que toutes les "droites" sont vraiment rectilignes. Les axiomes d'une configuration pn (abstraite ou non) sont les suivants :

1. Par deux points distincts il passe au plus une droite
2. Deux droites distinctes se coupent en au plus un point
3. La géométrie est connexe
4. Il y a p droites, p points, et par chaque point il passe n droites, sur chaque droite il y a n points.

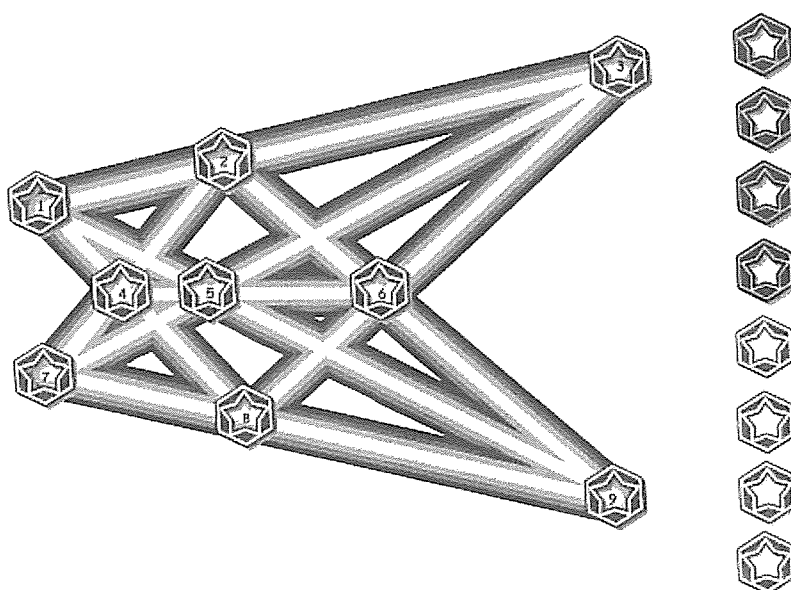
Nous avons étudié les configurations 93, ce qui est normal puisque Bobigny est dans le département 93 ! Ces configurations sont intéressantes parce qu'on peut démontrer qu'il n'y en a que de trois types, ce que nous avons vu au stage, mais pas avec les élèves, nous contentant d'étudier leurs propriétés géométriques de façon à ce qu'ils puissent les tracer. Le but était cette fois de réaliser un jeu de morpion avec chacune de ces configurations, et

d'essayer ensuite de trouver des stratégies gagnantes. Voici les jeux réalisés par les élèves, et en même temps les configurations :

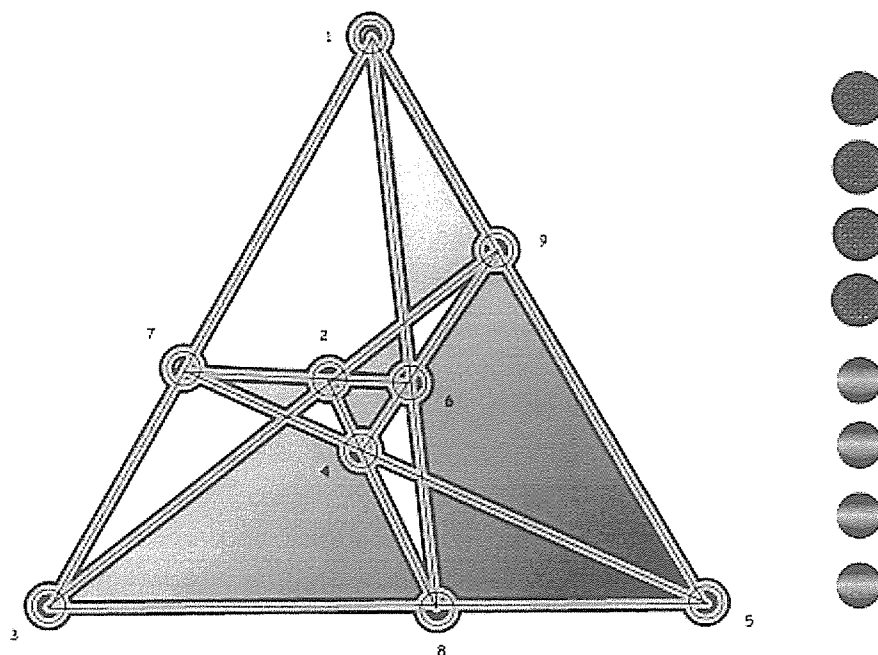


Si l'on veut respecter les symétries de cette configuration et l'alignement de points, les points numérotés 2, 5 et 8 doivent déterminer sur les côtés du triangle équilatéral central des longueurs dont le rapport est le nombre d'or.

La seconde configuration est la configuration de PAPPUS :



Enfin la troisième configuration fait apparaître elle aussi le nombre d'or dans la position des points 2, 4 et 6 sur les segment $[6;7]$, $[2;8]$ et $[4;9]$.



La règle du jeu de morpion consiste à placer un pion à tour de rôle. Le premier qui en a aligné trois a gagné. Si les 8 pions sont placés, le joueur déplace l'un de ses pions sur une case libre voisine.

Nous avons déterminé une stratégie gagnante pour le premier joueur dans chacune des configurations, et organisé quelques confrontations. Cependant ces stratégies ne sont pas simples, et difficilement mémorisables. En fait d'ailleurs, les élèves ont cherché les stratégies mais n'ont pu mener la recherche jusqu'au bout.

Conclusion

L'objectif de ce qui précède est seulement d'évoquer l'étonnante richesse des représentations et des problèmes que l'on rencontre autour des géométries finies. Le livre de Burkard POLSTER comporte beaucoup plus d'autres choses passionnantes. En un an nous n'en avons utilisé que quelques pages ! Je pense qu'il y a là une mine à exploiter pour des activités très diverses.

Lors de l'Université d'été, les stagiaires ont été mis en situation de chercher un certain nombre de problèmes, et ils se sont vu présenter des éléments mathématiques sur les questions abordées ici, ainsi que des références. Pour mener une activité du type de celle qui est proposée ici, il faut cependant s'immerger un peu dans la matière, et chercher soi-même des idées, en ayant en vue ce qui est ou n'est pas accessible aux élèves. Les idées ne doivent d'ailleurs pas seulement porter sur la nature mathématique des problèmes à traiter, mais aussi sur les moyens à mettre en œuvre pour arriver à des réalisations intéressantes (logiciels de dessin, matériel de bricolage). Cela exige un certain investissement et une expérimentation personnelle.

TRAVAUX DES STAGIAIRES

1. Compte-rendu global

Les stagiaires ont choisi cet atelier par curiosité intellectuelle et parce que les réalisations présentées par François Gaudel les ont séduits.

A partir d'une axiomatique très réduite, ils ont construit des représentations de plans affines puis projectifs comportant un petit nombre de points, et chacun d'eux a réfléchi aux prolongements possibles.

Les stagiaires resteront en contact pour faire vivre tout ou partie des acquis de cet atelier dans leur club.

2. Projet de Halim YAHIAOUI, Lycée Georges BRAQUE, 95100 ARGENTEUIL

Thèmes de l'atelier : Histoire des mathématiques, énigmes, jeux et stratégies, problèmes ouverts. L'objectif visé est l'initiation à la recherche mathématique.

La participation à l'atelier "Géométries finies" me fournit la possibilité de proposer à certains élèves, attirés par l'atelier du lycée,

- a) La réalisation d'objets géométriques pour représenter des plans affines associés à un nombre fini de points et qui respectent des axiomes donnés.
- b) L'utilisation de ces objets pour aller vers la notion de graphe et son utilisation pour résoudre de petits problèmes de "Recherche opérationnelle" : transports, affectations.

3. Projet de Philippe JULIEN, professeur au Lycée International de Saint-GERMAIN-en-LAYE (pour des élèves de club niveau 1^{ère} S)

1^{ère} étape :

Les élèves explorent à nouveau la géométrie plane qu'ils pratiquent depuis la sixième et essaient d'en dégager un "squelette" :

- i) 2 types d'éléments fondamentaux : des points et des droites ; autrement dit, on se donne un ensemble de points (P) et un ensemble de droites (D).
- ii) une relation entre les éléments de P et ceux de D : un élément de P appartient à un élément de D (*vrai ou faux*).
Une relation entre les éléments de D : le parallélisme.
- iii) Un certain nombre d'axiomes :
Par deux points distincts passe une droite et une seule ;...

Ces trois points [i), ii), iii)] permettent de préciser avec clarté la relation entre D et P (ex : tout sous-ensemble de P est-il un élément de D ?), et de retrouver les objets et les résultats classiques connus (attention : pour le moment, on laisse de côté l'aspect euclidien du plan).

2^{ème} étape :

Ils essaient, à partir des éléments [i), ii), iii)] dégagés dans la première partie, de construire une géométrie ayant 3 points, 4 points, 5 points, ...

Est-ce toujours possible ?

3^{ème} étape

Une géométrie à 4 points étant donnée, ils essaient de construire un ensemble de nombres, muni d'une addition et d'une multiplication, tel que dans cette géométrie tous les points peuvent être représentés par un couple de nombres de cet ensemble, toutes les droites admettent une équation linéaire à coefficients dans cet ensemble de nombres.

4^{ème} étape

Les transformations de cette géométrie.

.....

4. Projet de Michelle POLLET, Lycée Marie CURIE, 38 ECHIROLLES

Le choix de l'atelier "géométries finies" a été déterminé par l'intérêt suscité à la fois par le support théorique de l'activité et par les réalisations concrètes issues de cet atelier, tant pour leur forme originale que pour leurs couleurs.

Dans un premier temps et parce que je tente déjà une expérience nouvelle en créant un club à la rentrée, je souhaite simplement reconduire le travail déjà fait par F. Gaudel et expérimenté au cours de l'U.E..

Il s'agit, à partir d'une axiomatique simple, de demander aux élèves différentes représentations de plans affines et projectifs en géométrie finie, puis de concrétiser ensuite certaines de ces représentations soit par un dessin effectué sur ordinateur, soit par un bricolage tout en couleur (cf U.E. 99).

Un prolongement envisageable serait alors de faire construire un générateur de FANO (utiliser symétries et rotations) afin de définir une polarité et d'appliquer ensuite cette dernière à une configuration de DESARGUES.

N'ayant pas de structure déjà en place, il m'est difficile pour le moment d'envisager de façon plus précises les conditions matérielles d'un tel atelier, même si je prévois déjà l'achat d'un logiciel de dessin (si possible).

L'intérêt réside à mon point de vue dans le double objectif :

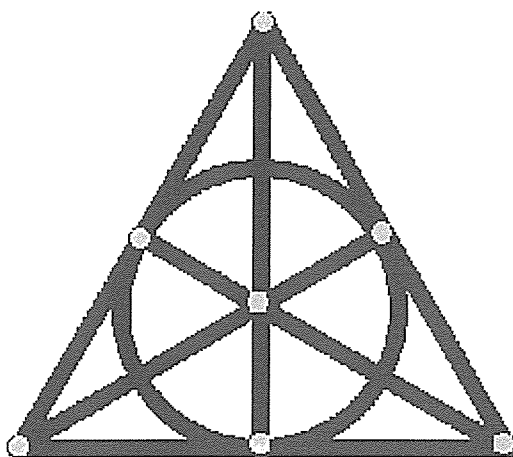
- construire à partir d'une axiomatique et de transformations simples ;
- réaliser des objets d'une certaine qualité artistique, susceptibles de servir de vitrine à l'atelier.

5. Projet de Frédéric de LIGT, collège J. AVIOTTE 33230 GUITRES

Variations autour du plan de FANO

Le club "Jeux et stratégie" que j'anime depuis 5 ans au collège J. AVIOTTE (ZEP) à GUITRES en Gironde a été bien relancé après le stage effectué à l'U.E. en 1999. Aussi j'ai voulu renouveler l'expérience mais en changeant d'atelier afin d'y trouver des idées nouvelles. Le thème de la géométrie finie a tout de suite retenu mon attention car les figures fascinantes qui y apparaissent sont précisément celles que les élèves du club vont pouvoir exploiter. Si la plupart d'entre eux s'affrontent ou se détendent par l'intermédiaire d'un jeu de réflexion, quelques uns ont été intéressés par la création de jeux ou de casse-tête. Or quoi de plus stimulant pour imaginer un jeu que de lui donner un support original, esthétique, comportant une grande densité d'alignements de longueur fixe.

Le plan de FANO, dans un premier temps, est susceptible de faire naître rapidement des idées. Il s'agit du plus petit des plans projectifs finis.



Il comporte 7 points et 7 alignements (le cercle compte pour un alignement). Chaque point participe à 3 alignements et chaque alignement comporte 3 points. Enfin deux alignements ont toujours un point commun.

Etude du tic-tac-toe, du jeu de l'évite, du taquin sur le plan de FANO dans un premier temps, puis création d'un nouveau jeu de stratégie. Recherche de casse-tête numériques sur le plan de FANO.

Prolongement : recherche sur d'autres configurations.

6. Projet de Laurence Le FOLL, Collège GAMBETTA, 59402 LYS-LEZ-LANNOY et de Jean -Claude RENOULT, Lycée MAINE de BIRAN, 24108 BERGERAC

La création d'un club ou atelier suppose un recrutement d'élèves. Le travail sur les géométries finies et, en parallèle, les graphes, va démarrer sur une activité faisant appel à des compétences et désirs variés chez les élèves :

- Recherche de curiosités mathématiques, de notions avancées
- Utilisation d'Internet pour la documentation et la création de pages web
- Utilisation de logiciels (ex : création de tableaux)
- Bricolage manuel.

Un objectif est que chaque élève mette un pied dans chacun de ces domaines.

Premier thème : carrés gréco-latins.

- Approche par une manipulation (3×3 ou 4×4)
- Réflexion avec les élèves sur la construction de ces tableaux par informatique, puis sur la construction "mécanique", matériaux utilisés, etc..., notions mathématiques mises à contribution.
- Recherche sur Internet de la documentation et de l'historique de la notion. Transversalité de la langue anglaise !
- recherche de contacts sur l'extérieur, intervention d'un spécialiste, échange avec d'autres établissements locaux.

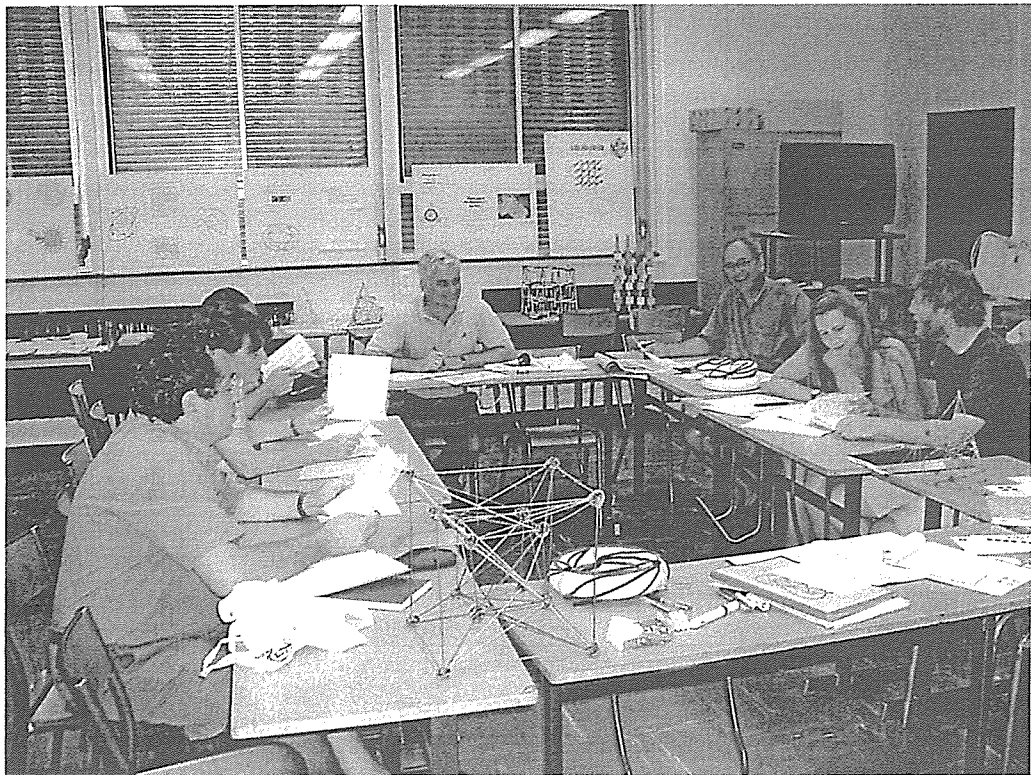
Introduction des autres thèmes suivant un schéma similaire. Les thèmes dérivant seront les géométries finies sur des ensembles restreints de points, puis les configurations, ce afin d'élaborer des jeux mathématiques (ex : morpion) ..

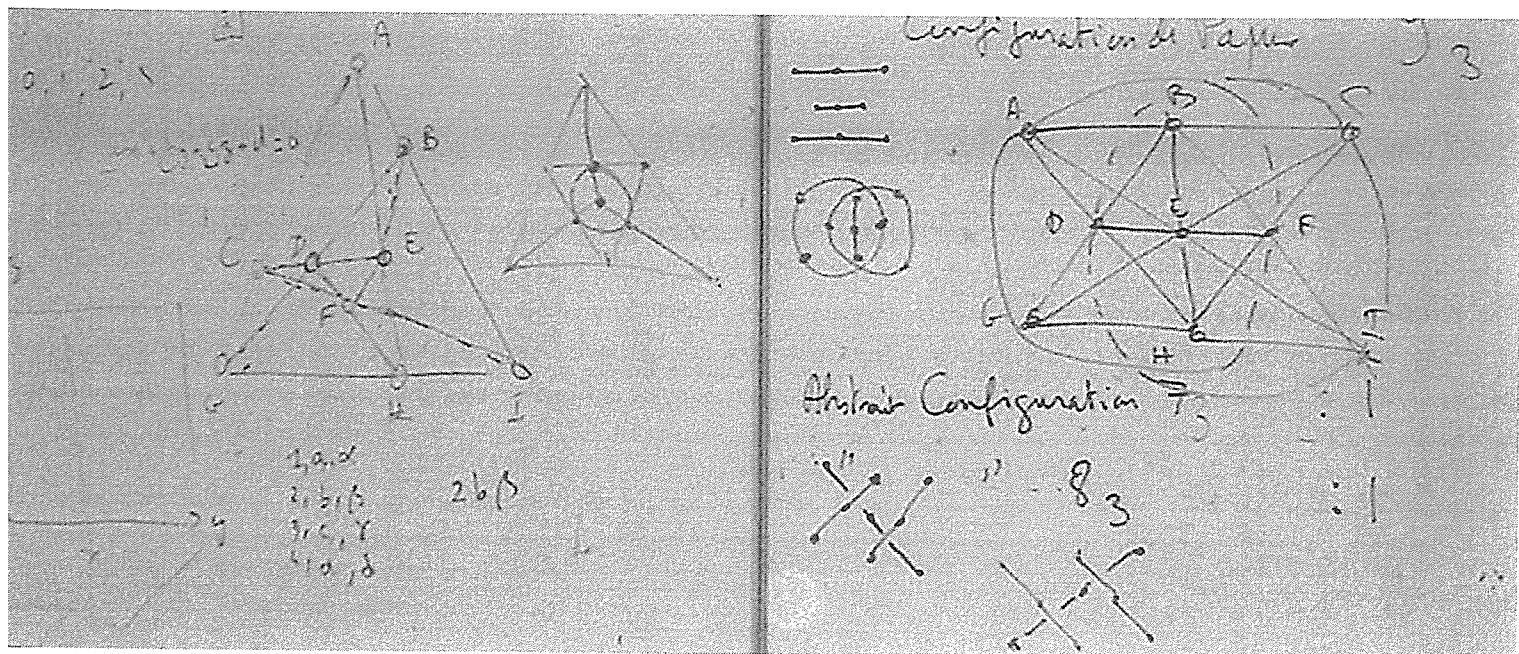
Pour fonctionner correctement, deux ordinateurs et quelques livres sont nécessaires. De plus, il faut réfléchir aux matériaux utilisés (bois, quincaillerie, peintures ...) ainsi qu'à la façon de les récupérer. La débrouille est alors de mise.

7. Rapport de Michel TIXIER, Lycée M. MICHELIS 80000 AMIENS

J'ai choisi cet atelier pour les deux raisons principales suivantes :

- Une motivation d'ordre théorique.** Bien que travaillant personnellement dans le domaine géométrique j'avais toujours reculé à me plonger dans ces univers discrets que sont les géométries finies. L'atelier a donc été un moyen de briser une certaine paresse intellectuelle et de trouver des pistes bibliographiques permettant une progression.
- Une motivation d'ordre pratique.** La présence de réalisations concrètes de modèles de ces géométries m'a donné de nombreuses idées sur comment construire des objets possédant un caractère pédagogique mathématique. La diversité des supports matériels utilisés m'a fait vraiment découvrir de nouvelles possibilités de réalisations.





ATELIER N° 2

MATh.en.JEANS :

Recherche & Démarche Scientifique

Pierre AUDIN - Pierre DUCHET

Atelier animé par P. Audin et P. Duchet, avec la participation de Marie-Thérèse Avinzac, Marie-Claire Combes, Laurent Germa, Bertrand Lebot, Marie-Hélène Lecureux, Philippe Lefeuvre, Olivier Mimeau, Marc Novel, Simone Pogodalla, Jean-Michel Schalk, Jean-Pierre Spagnol.

Le but général de l'atelier est la construction d'un projet concret au sein d'un réseau de ressources. La conduite de l'atelier illustre le dispositif "MATh.en.JEANS". Un mathématicien et deux établissements, jumelés pour l'occasion, un atelier hebdomadaire (travail collectif en petit groupes), des séminaires des articles ... Mettant en liaison les jeunes avec des chercheurs professionnels aux prises avec d'authentiques problèmes, issus de la recherche actuelle en mathématiques, MATh.en.JEANS apporte aux élèves, y compris les plus démotivés ou scolairement faibles, un lieu de découverte, de création et d'investissement possible.

- les participants sont placés en situation de recherche donnant lieu à une mise en commun et une synthèse ;

- la réflexion et le débat, illustrés par des travaux et manuscrits d'élèves, portent sur les situations de recherche (intérêt, fonctionnement, contrôle) et sur leur mise en place effective : comment présenter les sujets, aider les élèves sans faire à leur place ni tuer la recherche, orienter, guider ou contrôler sans corriger ? Bref, comment initier à la démarche scientifique en mathématiques ?

Sommaire

1. MATh.en.JEANS
2. LA RECHERCHE : *les carrés d'Eva*.
3. LA RECHERCHE : *les tableaux de variations*
4. PROJETS & COMMENTAIRES
5. BILAN & PERSPECTIVES

1. MATH.en.JEANS

Une occasion pour les jeunes de faire de la recherche mathématique en milieu scolaire.

- Une activité ouverte à tous les élèves, quels que soient leur classe et leur niveau
- Un travail d'équipe, sur de véritables sujets de recherche, présentés et suivis par un chercheur
- Des rencontres régulières avec les élèves d'un établissement jumelé, qui travaillent sur les mêmes sujets
- Une expérience de communication orale lors du congrès annuel
- Une formation à la communication écrite lors de la rédaction d'articles qui sont publiés.

Ingredients.

Bien sûr, il s'agit ici - et dans ce qui suit - de propositions pour cette activité. Elles ont fait leurs preuves ... Mais chaque jumelage, chaque projet garde son indépendance, fonctionne selon ses possibilités et s'adapte au contexte local.

- Une action MATH.en.JEANS concerne 2 établissements scolaires, des élèves (une quinzaine dans chaque établissement, par exemple) tous volontaires, un ou des professeurs par établissement, un chercheur.
- Dans chaque établissement, les élèves se réunissent à raison d'une séance par semaine, répartis en groupes de trois ou quatre, chaque groupe traitant un des sujets présentés par le chercheur.
- Quatre " séminaires " permettent des échanges entre les équipes des 2 établissements en présence des professeurs et du chercheur.
- Un congrès annuel est le lieu de la communication des travaux et des résultats de la recherche devant un public varié.
- Une production écrite, mise au point après le congrès sera publiée l'année suivante.

Déroulement de l'année.

Démarrage : souhaitable dès la rentrée scolaire

1. Pour informer l'ensemble des élèves de l'établissement de l'existence de l'activité, on peut : organiser une réunion d'information (il existe des cassettes que l'on peut montrer à cette occasion), passer dans les classes, apposer des affiches dans les lieux appropriés de l'établissement ;
2. Inviter les élèves qui désirent participer à l'atelier à une réunion de démarrage dans laquelle le chercheur vient proposer les sujets. En profiter pour choisir les horaires des séances hebdomadaires. C'est souvent une grosse difficulté.

Séances hebdomadaires

1. Les élèves se répartissent en **groupes** selon les sujets choisis.
2. Le travail est collectif : recherche documentaire, compréhension puis appropriation du sujet, discussion, répartition des tâches à l'intérieur du groupe.
3. Il est bon que chaque groupe tienne **un cahier de bord** pour aider à la continuité du travail.
4. Le **professeur** est toujours présent ; il favorise un climat de recherche et le débat entre élèves, sans fournir de solutions aux problèmes posés. Il aide la formulation des questions, à l'expérimentation et à l'énonciation des résultats ; il encourage, relance, console ... ; il fournit des

repères sur la nature des activités (mathématicité, démarche scientifique) ; il invite à la preuve, il donne des outils parfois (s'il y a une "demande"), il conseille pour la discussion, l'organisation et la présentation des résultats.

5. Pour ces séances, insister sur **l'exactitude** et **l'assiduité** de tous les participants. (Cela impose les mêmes règles aux enseignants et chercheurs.)

Séminaires. Avant le congrès, 3 séminaires, si possible, sont à organiser avec le chercheur et l'établissement jumelé. Ces rencontres entre les 2 établissements doivent être suffisamment longues (une journée, voire 4h) pour permettre

- échanges et discussions entre élèves
- exposés
- répartition du travail à venir
- objectifs pour la suite des recherches
- validation mathématique par le chercheur

Ces séminaires sont aussi une occasion pour les élèves de se préparer à la communication pour le congrès. Un 4^{ème} séminaire est nécessaire après le congrès pour mettre au point les articles à publier et faire le bilan général.

Congrès. Moment fort de l'année, très apprécié par tous. Il se déroule sur trois jours : samedi, dimanche, lundi. Elèves, professeurs, chercheurs se retrouvent pour présenter les travaux réalisés, échanger leurs expériences. Sont invités des personnalités, des chercheurs, le public (divers selon le lieu où le congrès se déroule). Le congrès forme un tout, il est important et souhaitable que les acteurs de MATH.en.JEANS participent aux trois journées.

Témoignages-expériences MeJ au lycée Camille Sée (Texte de Véronique Chauveau)

Je commence à m'intéresser à Math en Jeans en 1990, dès que j'en entends parler. Le principal-adjoint du collège dans lequel je travaille, est très réservé sur la création d'un atelier de mathématiques et j'avoue que je ne me bagarre pas beaucoup pour le faire changer d'avis. Nommée au lycée Camille Sée à Paris XVème en septembre 96, la première année, je ne tente rien mais l'année suivante, je propose de créer un atelier de mathématiques au grand étonnement des uns et des autres. Mais l'idée fait son chemin. Parallèlement, je m'intéresse à l'association *femmes et mathématiques*, et j'y rencontre une collègue, Marie Josèphe Schmitt, du lycée Charles Poncet de Cluses (Haute-Savoie) qui connaît Math en Jeans et veut se lancer. **Nous démarrons donc en septembre 1998.**

Mon Proviseur est d'accord mais le dossier de création d'un atelier scientifique sur l'Académie de Paris doit être déposé à la fin de l'année scolaire précédente. Nous fonctionnons donc sans financement sur Paris, il vaut mieux commencer pendant que la plupart des conditions sont réunies : deux lycées prêts à travailler ensemble et un chercheur Jean-Christophe Novelli du LIAFA de Paris VII. Dans l'académie de Grenoble, le dossier est déposé et accepté en septembre. Marie-Jo travaille avec un de ses collègues Michel Lamarre.

Une fois la décision prise, l'atelier annoncé, la plus grande difficulté pour moi est de recruter des élèves. Malgré les nombreuses affiches, les nombreuses réunions d'information proposées, il n'y a que deux élèves inscrits, deux garçons en Terminale S. A Cluses par contre, il y a quinze élèves volontaires, filles et garçons, venant de Seconde et de Première S et ES. D'autre part, un créneau horaire commun n'est pas facile à trouver. Le mercredi après-midi n'est pas forcément une plage horaire très motivante, les élèves ont de nombreuses activités extra-scolaires qui les mobilisent davantage. A Paris, nous choisissons de travailler deux heures le mardi de 16 à 18 heures et à Cluses, comme ils sont deux profs, ils proposent deux plages horaires de une heure trente chacune.

Mes deux élèves travaillent avec un groupe de quatre élèves de Cluses sur les partitions d'un entier. Les rencontres se font par visioconférences. Pour les Parisiens, nous allons à Villetaneuse, à l'Université Paris XIII. Il y a tout le matériel nécessaire, il est mis gracieusement à notre disposition et Paris XIII paie les communications téléphoniques. Les Clusiens sont accueillis par la Société CTDEK, une entreprise de décolletage, qui leur prête gracieusement le matériel et les locaux. Marie-Jo obtient aussi des subventions du Conseil Régional et d'entreprises privées, les

journaux locaux parlent de l'atelier de mathématiques du lycée et interviewent Jean-Christophe lors d'un séjour à Cluses.

Nous faisons cinq visioconférences de début octobre à mi-mars. La première visioconférence est un grand événement, c'est la première rencontre. Elle donne aux élèves l'envie de continuer, même si les sujets paraissent ardues. Ils réalisent encore plus qu'ils font partie d'une équipe. Mes élèves ont des ennuis personnels, familiaux, financiers, tout au long de l'année mais ils ne lâchent pas l'atelier et sont rarement absents.

Pour le congrès, le premier week-end du printemps, les Clusiens arrivent le jeudi et viennent à Camille Sée passer la journée. Nous déjeunons ensemble et travaillons tout l'après-midi. Les élèves répètent, puis ils nous présentent leurs travaux par groupe. Les trois profs et le chercheur surveillent la durée des exposés et corrigent le contenu scientifique et la présentation. C'est une journée intense, de dur labeur mais aussi riche en échanges et en progrès. Le vendredi, les provinciaux se baladent dans Paris avec leurs profs, mes élèves et moi-même travaillons normalement au lycée.

Et le congrès débute le samedi matin. C'est l'effervescence : les retrouvailles, l'installation des posters dans le hall de Paris XIII, les dernières répétitions, les ultimes corrections. Voir tous ces jeunes réunis pour faire des mathématiques est très émouvant, c'est une bouffée d'oxygène pour les profs parfois découragés que nous sommes. Le congrès dure 3 jours, samedi, dimanche et lundi. J'obtiens une autorisation d'absence pour mes élèves pour le samedi mais pas pour le lundi. Et encore, à contre cœur de la part de certains collègues, même de math !

Le week-end est épuisant mais il émane de ce congrès beaucoup d'enthousiasme, de convivialité, de confraternité comme dirait Marc Legrand. La fatigue ne se fait sentir que la semaine suivante.

Après le congrès, il est difficile de remobiliser les élèves tout de suite mais il ne faut surtout pas attendre trop longtemps si on veut qu'ils terminent la rédaction de leurs travaux afin de les publier. En ce qui concerne mes deux élèves de Terminale S, je n'ai pas réussi après les vacances de Pâques à les inciter à écrire et avec l'approche du bac, ils se sont consacrés à leurs révisions.

A la rentrée 1999, le dossier de reconduction de l'atelier est accepté et nous obtenons 2 HSA et une subvention de 1500F. Ravis par l'expérience de l'année précédente, Marie-Jo, Michel et moi souhaitons continuer ensemble. Et Jean-Christophe aussi, il a déjà préparé les sujets.

Mais impossible de recruter des élèves à Camille Sée. Je multiplie les réunions d'information en variant les jours et les heures. Je sollicite les professeurs principaux de Seconde pour faire passer les informations sur l'atelier. Rien n'y fait. Il s'avère par la suite que le message est mal passé. Certains ont cru qu'il s'agit de cours de soutien et d'autres au contraire que ça ne concerne que les forts en maths. A Cluses, l'atelier démarre dès la mi-septembre avec une dizaine d'élèves intéressés. Début octobre, la mort dans l'âme, j'annonce à mes collègues qu'ils vont devoir continuer sans moi et Math en Jeans leur trouvera un autre lycée parisien. Quant à moi, après les vacances de la Toussaint, je refais une dernière réunion, la réunion de la dernière chance. Et miracle, je peux enfin démarrer un atelier mathématique avec un groupe constitué de six élèves, des garçons de Première S, mais sans être dans la structure Math en Jeans.

Pour la rentrée 2000, mes 6 élèves me sont tout acquis et ils savent que nous allons travailler en jumelage avec Cluses suivant les modalités Math en Jeans.

Notre atelier est répertorié par la cellule « Action Culturelle et Scientifique » du Rectorat de Paris qui nous attribue 3 HSA et une subvention de 2000F. La chercheuse qui travaille avec nous, s'appelle Caroline Japhet. C'est une toute jeune maîtresse de Conférences de Paris XIII. Elle propose cinq sujets aux élèves de l'atelier. Nous cherchons aussi à recruter d'autres élèves mais sans succès. A Cluses, il y a neuf élèves volontaires. Mes élèves choisissent trois des cinq sujets : un élève travaille tout seul sur le tore, trois élèves sur les colliers de perles et deux élèves sur l'aiguille. A Cluses, ils ont choisi le tore et le billard circulaire.

Grâce à une convention signée avec Paris VII, dans le cadre de la liaison enseignement Secondaire-Supérieur, les visioconférences sont entièrement prises en charge par l'université Paris VII. C'est aussi une occasion d'emmener mes élèves sur le campus de Jussieu où ils sont susceptibles de venir faire leurs études universitaires. A la première visioconférence, le groupe de l'aiguille lâche son sujet, les deux élèves ont pourtant déjà bien avancé mais ils veulent travailler avec des Clusiens sur le billard. Les trois élèves qui ont choisi les perles restent entre eux, ils n'ont pas d'interlocuteurs à Cluses. A nouveau, cette première visioconférence est un

moment important, nous ressortons tous plein d'énergie et d'idées. Et un groupe a complètement changé de sujet pour bien profiter du jumelage. Rendez-vous est pris pour la séance suivante, Caroline se rendra à Cluses. Pour communiquer en dehors des visioconférences, nous utilisons nos courriers électroniques personnels, éventuellement depuis le lycée, mais nous n'avons pas de boîte aux lettres « Club Camille Sée ».

Pendant les vacances de Noël, au cours d'un déjeuner amical, Marie-Jo me propose de venir à Cluses avec mes élèves pendant notre deuxième semaine des vacances de Février quand eux auront repris. L'organisation matérielle, surtout financière, du voyage est très compliquée. Je préviens le Proviseur mais n'ai pas le temps de le faire approuver par le CA. Il s'agit donc d'un voyage privé hors temps scolaire. Nous sommes hébergés par nos collègues et par les familles de deux élèves. C'est une semaine inoubliable où nous partageons notre temps entre les balades en montagne le matin, les mathématiques l'après-midi et les dîners en commun le soir.

Nous leur suggérons de faire une première présentation pendant que nous sommes tous réunis. On est fin février : ils mesurent tout le travail qui leur reste à faire. Le congrès a lieu un mois après, c'est la fin du temps de recherche, il faut déjà penser à la rédaction et à la présentation. Certains veulent pourtant chercher encore. Cette rencontre à Cluses est très profitable aussi bien du point de vue humain que du point de vue mathématique. Nous en gardons un souvenir très chaleureux. Et pendant tout le trajet du retour, mes élèves n'arrêtent pas de faire des maths entre eux, de me poser des questions au grand étonnement des autres voyageurs qui n'ont jamais vu des jeunes faire des mathématiques avec autant d'enthousiasme. Mis à part ce voyage, le déroulement de l'année est très similaire à la première expérience décrite. Je ne reprends pas tout. Et toujours ce temps fort qu'est le congrès, extrêmement important et enthousiasmant pour tous. Ils ont tous surmonté leur trac et sont contents, voire fiers de leur prestation orale devant un auditoire important.

Après ce week-end du congrès épuisant mais passionnant, il est difficile de remobiliser les troupes, ils demandent à souffler. Mais le travail final ne se limite pas seulement aux exposés du congrès, il consiste aussi à publier les travaux en intégralité sur le web, ce qui est un gros travail mais fait partie du contrat de départ. Instruits par l'expérience, nous insistons beaucoup. De plus, les élèves ont, depuis le début, le projet de créer pour la fin de l'année scolaire une page-web sur l'atelier scientifique et de mettre un lien sur le site du lycée Camille Sée. Ils se tiennent à leurs engagements et vous pouvez consulter le résultat à l'adresse <http://math.as.free.fr>.

Questions de participants

« les sujets posés par le chercheur ne sont-ils pas trop difficiles ? »

Le chercheur propose ses sujets après avoir consulté avec intérêt ceux posés les années précédentes, il en discute avec ses collègues, avec des habitués de MeJ et avec les professeurs des élèves concernés. En principe, il arrive bien à cerner le niveau de difficulté envisageable pour ne pas décourager les élèves mais aussi qu'il y ait matière à chercher.

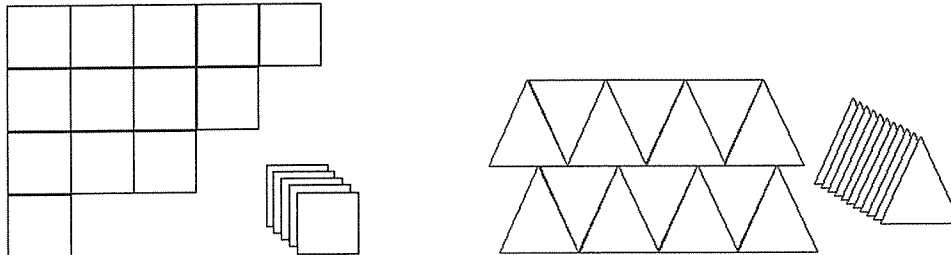
« comment encadrez-vous les élèves ? »

Pour le prof, encadrer le travail de recherche est le plus difficile. Et effectivement, je n'en ai pas du tout parlé. Il faut être présent, disponible, attentif mais ne pas trop en dire. D'ailleurs souvent, on en est bien incapable. Nous devons les encourager dans les moments difficiles et leur conseiller de se tourner vers le chercheur quand ils « sèchent ». Le chercheur aussi a une tâche délicate, il doit être capable de suggérer de nouvelles pistes sans trop en dire et d'avoir un œil critique sans décourager. Lors de la deuxième visioconférence, le groupe du tore annonce qu'au début, ils ont trouvé des résultats, fait une superbe maquette pour les aider à visualiser mais que depuis 2 semaines, ils sèchent lamentablement. Caroline leur propose une nouvelle piste de recherche et leur présente la méthode des différences finies. Ils notent tout avec beaucoup de sérieux, les profs aussi. Mais il s'avère qu'ils ne comprennent rien ni de la méthode et encore moins de son utilisation. Nous avons besoin des trois séances suivantes pour distiller les informations. Par contre, le travail qui consiste à les encadrer pour la préparation de l'exposé est beaucoup plus simple. Il s'agit de veiller à la qualité de la présentation dans le fond et dans la forme et de surveiller la durée de l'exposé.

2 LA RECHERCHE : carrés d'Eva

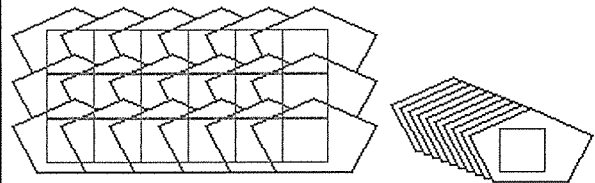
1^{er} sujet de recherche (transmis par Eva Vásarely): *Couvrir avec les carrés d'Eva.*

Comment couvrir un terrain avec un stock de plaques de tailles variées ?



Si l'on dispose d'un nombre illimité de plaques identiques, de forme carrée ou triangulaire, il n'est pas difficile de couvrir le plan tout entier sans perdre un seul cm^2 . En effet, ces formes sont *pavantes*, c'est à dire qu'elles peuvent être juxtaposées exactement et indéfiniment.

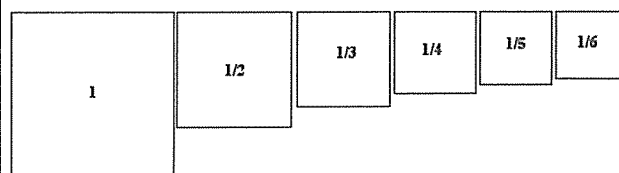
Avec des plaques identiques mais dont la forme est non pavante, on peut encore y parvenir sans trop de mal, en acceptant de superposer certaines parties des plaques (on négligera toujours leur épaisseur). On considère dans chacune des plaques une portion carrée, de la même taille pour toutes les plaques, puis on juxtapose ces carrés : certains endroits seront éventuellement couverts plusieurs fois mais tout sera bien couvert.



Peut-on encore arriver à couvrir le plan, ou du moins une région choisie, lorsque le stock disponible est constitué de plaques différentes ?

• Un exemple prototypique est fourni par la question suivante : *couvrir avec la série harmonique.*

Peut-on disposer successivement dans le plan les carrés d'aire 1, $1/2$, $1/3$, $1/4$, etc. de manière à ce que chaque point du plan se trouve couvert par au moins un des carrés. On peut étudier cette question sous une forme plus générale : comment recouvrir le plan avec une infinité de carrés dont les aires forment les termes d'une série divergente arbitraire... ? On peut évidemment se demander dans chaque exemple comment faire pour perdre, en pourcentage, le moins possible de l'aire initialement disponible.



La forme la plus élaborée du problème, et la plus intrigante, est celle du

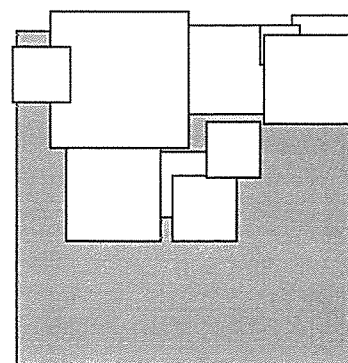
"jeu des carrés d'Eva"

où la seule donnée connue est la surface totale disponible dans le stock : les plaques sont carrés mais non seulement les tailles ne sont pas connues à l'avance, mais la pose s'effectue plaque par plaque, dans un ordre lui aussi inconnu, imposé par Eva.

Le jeu des carrés d'Eva"

Matériel : L'aire de jeu est le plan tout entier. Un sac (opaque) contient des plaques carrées jaunes (ici blanc) en quantité inconnue, d'épaisseur négligeable. L'aire totale des carrés jaunes, notée A , est connue.

But du jeu : L'objectif est de parvenir à couvrir complètement un carré rouge (ici gris foncé) dont nous choisissons nous même, au début du jeu, la taille et l'emplacement. Notre *score* final sera l'aire de ce carré, soit s , si nous y parvenons, et nul sinon.



Déroulement du jeu : A chaque tour Eva nous donne un carré jaune qu'elle puise dans le sac et nous plaçons ce carré où nous voulons. L'emplacement choisi est définitif : une fois posé, le carré n'est plus déplacé. Les carrés jaunes se trouvent ainsi placés un à un à notre guise : ils peuvent se chevaucher, et même se recouvrir. Le jeu se poursuit tant qu'il reste des carrés dans le sac. *Quel score sommes nous capables d'atteindre à coup sûr, quelque soit le contenu du sac ?*

On peut étudier diverses variantes de ce jeu, plus ou moins simples à aborder.

variante A (Apprentissage)	ordre et tailles des carrés sont connus à l'avance
variante B ("Beginer")	Les tailles sont connues mais l'ordre est inconnu
variante C (Croissant)	Les carrés, de tailles inconnues, sont donnés par tailles croissantes
variante D (Décroissant)	Les carrés sont inconnus mais arrivent par tailles décroissantes
variante E (d'Eva)	On ne connaît ni la taille des carrés ni leur ordre (et Eva, étant mathématicienne, saura nous placer dans l'embarras)
Chacun des jeux précédents admet une "variante infinitiste" dans laquelle la somme des aires des carrés jaunes est infinie : notre objectif est alors de recouvrir tout le plan.	

A quoi cela sert-il ? ... un peu d'histoire

Ce problème ouvert est inspiré d'une fameuse conjecture géométrique (toujours ouverte, elle aussi) du mathématicien Hadwiger affirmant que

- tout domaine convexe plan peut être recouvert par 4 *modèles réduits* de lui-même (ici, un modèle réduit est une figure obtenue par une homothétie de rapport k , $0 < k < 1$),
- tout domaine convexe de l'espace peut être recouvert par 8 modèles réduits de lui-même.
- et, de manière générale, tout domaine convexe de l'espace réel à d dimensions peut être recouvert par 2^d modèles réduits de lui-même.

Vu que les homothéties préservent les directions des droites, il n'est pas très difficile de voir que, si cette conjecture de Hadwiger est vraie, le carré est un pire cas en dimension 2 (il faut 4 modèles réduits du carré pour le recouvrir), le cube un pire cas dans l'espace tridimensionnel (il faut 8 cubes modèles réduits du cube pour le recouvrir), et ... l'hypercube d -dimensionnel un pire cas dans l'espace à d dimensions (il faut 2^d modèles réduits de l'hypercube pour le recouvrir). De là l'intérêt porté à la forme carrée dans le jeu d'Eva.

Eva (1) - Déroulement d'une situation de recherche.

Le fait qu'on nous confie un sujet dit "de recherche" a, tout d'abord, quelque chose d'encourageant : au lieu d'avoir à vérifier que l'on sait appliquer un cours, on est invité à être actif, à prendre confiance en soi. Mais en relisant le sujet, c'est la perplexité et le doute qui nous envahissent : que va-t-on pouvoir trouver ? peut-on avancer ? Heureusement, on n'est pas seul face à ses doutes, et le désir de ne pas être un "poids mort" pour les copains nous entraîne vers l'avant.

Ecouter l'autre, tenter d'être un interlocuteur attentif et actif, être écouté à son tour, poser des questions, lancer des suppositions et dialoguer en s'appuyant sur le savoir de chacun (même s'il est un peu pauvre, je parle du mien !) : on se trouve dans une situation stimulante, ... mais ... on bute rapidement sur des questions dont l'ampleur pourrait bien nous décourager !! Le chercheur nous invite à restreindre le champ de l'exploration, ce qui a pour effet de "relancer la machine". Puis, c'est la rencontre avec l'autre équipe qui réfléchit sur le même sujet : plaisir de partager la démarche hésitante, de découvrir des exemples enrichissant les nôtres, mais en même temps, regret de ne pas être débloqués !! Retour dans son équipe : on tente une conjecture, le chercheur nous écoute favorablement tout en prévoyant déjà les limites et les prolongements inévitables .

Le deuxième séminaire se donne pour objectif de développer, préciser et ordonner les idées apparues. Une esquisse de réponse au sujet est avancée, mais les questions et points obscurs sont plus nombreux que les affirmations ! Un exposé destiné aux autres groupes travaillant sur un autre sujet nous oblige à être clairs (ce qui n'est pas facile !) et nous confronte à la difficulté de faire partager une réflexion à des personnes qui n'y sont pas préparées.

Je pense qu'il est bon d'avoir expérimenté une situation de recherche de "l'intérieur" avant d'espérer se lancer dans l'aventure de MEJ, et c'était très sympathique d'entrer en dialogue avec ses collègues, de rencontrer des points de convergence et de partager les points d'interrogation.

Projet

Pour autant, je n'envisage pas pour cette année une telle "aventure", peut-être pour l'année 02-03, mais je n'ai peut-être pas bien pris conscience encore des obstacles que j'aurai à surmonter :

- pour trouver un chercheur, je fais confiance à MEJ, j'espère trouver un vrai appui ; peut-être aussi pour trouver un établissement de jumelage;
- pour trouver un financement, je pense qu'il faudra s'investir dans des actions, mais je compte aussi sur le budget REP;
- mais pour résister au scepticisme des collègues de math, à leurs pensées "négatives", je me sens peu sûre, et enfin, je crains de n'avoir pas assez de connaissances mathématiques pour guider un tel atelier.

Conclusion

Je suis venue à l'UE dans l'attente de tuyaux pour "faire des maths autrement", et j'en ai eu ! Tous les ateliers répondent à cette aspiration. Je ne connaissais pas MEJ; ce qui me plaît dans ce que propose MEJ, ce sont les principes suivants :

- les élèves travaillent en équipe;
- le rôle du prof est d'accompagner les élèves, à leur rythme, leur révélant peu à peu leur capacité à réfléchir, et les encourageant à ne pas s'effacer devant un savoir tout construit et ceux qui le détiennent;
- l'attitude du prof qui "ne sait pas ", mais se met à leur service pour leur fournir des outils, garantir la justesse des énoncés, évitant ainsi le risque de "manipuler" les élèves comme on est tenté parfois de le faire.

Eva (1) – Les carrés d'Eva.

(Compte rendu de la recherche menée lors de l'atelier)

N'arrivant pas à envisager le problème dans son entier nous avons choisi de faire des hypothèses sur la distribution des carrés et de tenter de nous affranchir du nombre de carrés. Dans le cas où tous les carrés sont de même aire en nombre inconnu mais d'aire totale S , nous avons obtenu le résultat suivant :

Théorème

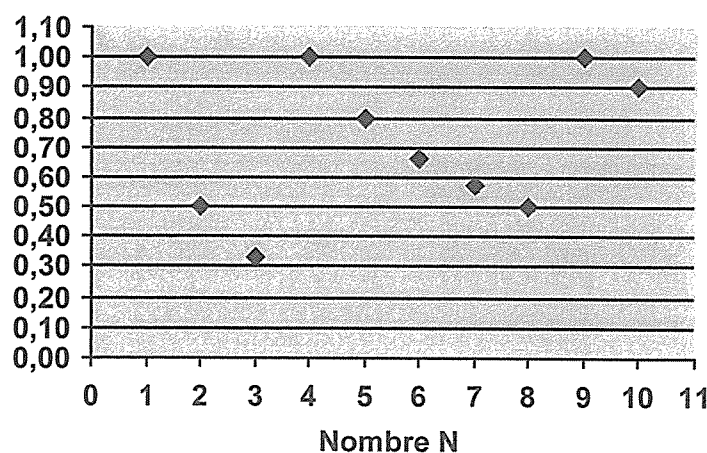
Lorsque tous les carrés sont identiques avec une aire totale S , Il existe une stratégie telle que le score certain s soit $S/3$.

Démonstration

On pose les carrés en L successifs comme numéroté ci-dessous. De cette manière, On ne forme un carré qu'avec un nombre carré de plaques.

5	2	1
6	3	4
7	8	

Posons N le nombre de plaques dans une partie donnée : l'aire d'une plaque est alors S/N et le plus grand carré qu'on peut couvrir l'est avec $(E(\sqrt{N}))^2$ plaques. Ci-dessous le graphique des aires obtenues pour N petit :



En fait la stratégie retenue entraîne un minimum relatif pour chaque N de la forme k^2-1 . L'aire recouverte est alors $(k-1)^2 * S / (k^2-1) = (k-1) * S / (k+1)$ qui est une fonction croissante de k . Donc le score certain est l'aire qu'on peut recouvrir avec 3 plaques soit $S/3$.

Poursuite : ayant remarqué que le score est ainsi atteint avec 3 plaques, nous nous sommes posé la question suivante : Quelle est l'aire du plus grand carré qu'on peut recouvrir avec 3 plaques carrées identiques ?

Nous sommes parvenus à une aire de $S^*(3+2\sqrt{2})/12$, ce qui signifie qu'on peut améliorer le théorème précédent avec cette valeur ($(3+2\sqrt{2})/12 < 1/2$ le minimum relatif suivant).

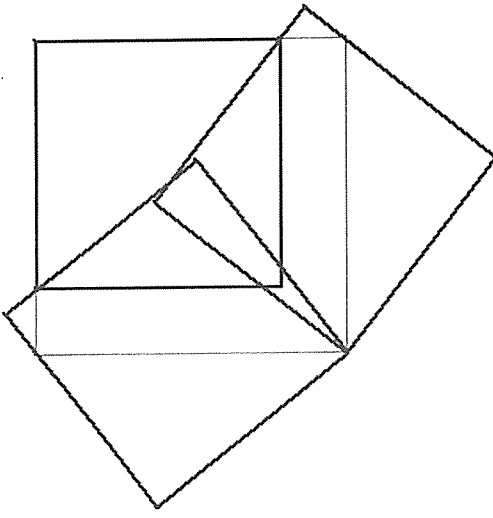
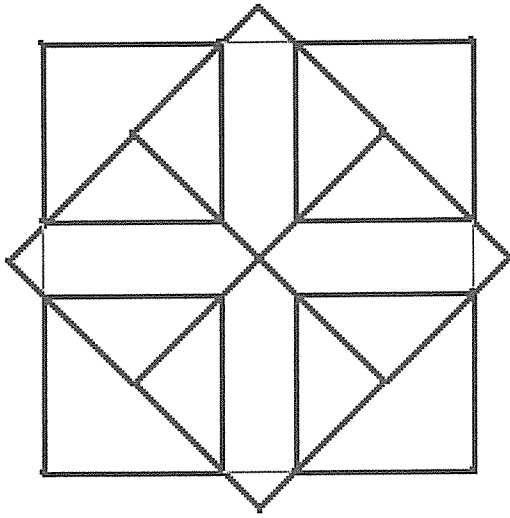
Nous avons aussi étudiés d'autre distributions (notamment les aires des plaques suivant une distribution géométrique) ; sans autre résultat que la stratégie consistant à attendre la plus grande plaque (aire $< \text{ou} = (1-q)S$ où q est la raison).

Enfin un autre résultat :

Le score maximal qu'on peut être certain d'atteindre (dans la situation de départ) est inférieur à $S^*(3+2\sqrt{2})/12$.

Eva (2) – Quelques prolongements.

(Contributions par les internautes à qui le problème a été posé sur le "laboratoire")

De : Olivier Cuzac (10 Oct 2001 21:17) Voici la solution avec 3 carrés.	De : Olivier Cuzac (23 Dec 2001 23:02) Voici une <u>solution</u> avec 8 carrés,
 <i>Avec 3 carrés identiques d'aire 1, on peut couvrir un carré d'aire φ (le nombre d'or)</i> On ne peut pas couvrir de carré plus grand (je l'ai démontré)	 <i>Avec 8 carrés identiques de côté 1 on peut couvrir un carré de côté $3+2\sqrt{2}$</i> Il me semble impossible d'améliorer cette solution.

De : Sylvain Préault (Besançon) (5 Septembre 2001)

N'y a-t-il pas une erreur d'énoncé ? Tels que les règles sont expliquées, sauf erreur de ma part, on ne peut espérer qu'un score nul ! Plus précisément, le meilleur score qu'on puisse espérer est inférieur à "epsilon" pour tout nombre réel "epsilon" positif donné à l'avance. En effet, la distribution des carrés jaunes étant inconnue, on peut supposer que les aires des carrés jaunes forment une série géométrique $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ de raison k , avec $0 < k < 1$. Le mieux que l'on puisse faire avec une telle série est d'attendre que le plus grand carré sorte du sac (pour $k=1/2$, par exemple, l'aire des autres carrés ne suffit pas à couvrir mieux que l'aire du premier carré). Or $A = A_0 (1-k^n)/(1-k)$ (formule de sommation des termes d'une progression géométrique) Le score obtenu est donc $A_0 = [(1-k)/(1-k^n)] * A$

Lorsque n tend vers l'infini, cette expression tend vers $(1-k) * A$, quantité qui peut être rendue inférieure à tout epsilon donné à l'avance. CQFD.

3 LA RECHERCHE : tableaux de variations

2^e sujet de recherche (posé par Gilles Germain): *les tableaux de variation.*

Toute fonction admet-elle un tableau de variation ?

Pour étudier une fonction, on a coutume de dresser un tableau de variation : des valeurs particulières du domaine d'étude sont mises en évidences et le comportement de la fonction (croissance ou décroissance) entre ces valeurs est déterminé.

Pour quelles fonctions réelles d'une variable réelle cette notion de tableau de variation a-t-elle vraiment un sens ? Peut-on toujours découper le domaine de définition en intervalles de manière à ce que la fonction soit effectivement croissante ou décroissante sur chacun de ces intervalles ?

Variations (1)- Variations autour de l'écrit.

Pourquoi écrire sur l'écrit ? Par ce que, au cours de l'atelier Math en Jeans™, j'ai été **contraint** d'utiliser l'écriture. D'abord, ce n'était pas le style d'écriture que j'avais pu rencontrer lors de mes études : pas de pages de calculs, pas d'intégrations par parties en cascade, mais des notes, des points d'interrogations, des parenthèses, des flèches... Bref, pas le côté mécanique habituel... Curieux ! Ensuite, le passage par l'écriture s'est révélé pour moi **obligatoire** pour espérer avancer dans la recherche. Le problème de l'écrit s'est (im)posé à deux moments distincts :

1) pendant la recherche : A ce moment, écrire permet de se retrouver : en plein remue-ménages, les idées foisonnent, il est alors important de toutes les noter, les siennes, celles des autres chercheurs de son groupe, pour ne pas les oublier et y faire ensuite le tri : les bonnes, les fausses-bonnes, les bonnes-faussees, les autres. Ensuite, écrire oblige à se poser : ce qui se conçoit bien s'écrit clairement ! Une idée écrite est plus claire qu'une idée dite, elle-même plus lumineuse qu'une idée seulement pensée. De plus, noter les idées m'a permis de comprendre leur évolution : je pouvais voir en quoi les nouvelles questions étaient liées aux précédentes. Enfin, écrire une question du chercheur m'a permis de la comprendre deux jours plus tard; sans cela...

2) à la "fin" de la recherche : la recherche a alors avancé, la question initiale s'est transformée, restreinte, déplacée sur un autre terrain, des sous-problèmes se sont posés, de nouvelles questions sont apparues... mais il faut rendre compte. A ce moment, écrire devient nécessaire pour structurer l'ensemble de la pensée. Que vaut-il alors mieux faire ? Décrire le chemin parcouru, ou décrire l'endroit où l'on est arrivé ? (si l'on est bien arrivé quelque part...).

*On peut montrer l'évolution du questionnement : *"Nous nous sommes posés telle question, puis telle autre; à ce moment, nous étions dans l'impasse, quand tout à coup..."* Cette narration de recherche, bien qu'éventuellement plaisante, est-elle "efficace" pour faire comprendre globalement ce que l'on a trouvé ?

*On peut présenter les résultats de façon plus classique, aller du général au particulier, sérier, structurer, définir, démontrer, parsemer d'exemples et contre-exemples (comme dans un livre de math, en gros). Notre groupe a adopté cette solution (c'était peut-être lié à la nature de la question posée : dans les tableaux de variation, nous étions quand même en terrain "connu"), et ça m'a semblé ardu. Il est difficile de dégager le(s) point(s) d'arrivée(s???), car ce faisant, il faut "s'abstenir de réfléchir" aux nouvelles questions qui apparaissent alors ! Même en réussissant éventuellement cet exercice de style, je me demande si cette présentation des résultats est "efficace": souvent, les raisons des hypothèses, les questions n'apparaissent plus dans l'exposé, et encore moins dans l'ordre où on les a rencontrés. Bref, le cheminement des idées est plutôt gommé; on se retrouve à un endroit sans savoir pourquoi l'on y est !!!

La vérité est peut-être entre ces deux extrêmes, ou simplement ailleurs...

Variations (2).- Evolution d'un problème lors d'une situation de recherche.

Historique de la recherche

Problème initial : Toute fonction f a-t-elle un tableau de variation ?

Questions : Au début, la réflexion se centre sur la notion de tableau de variation. Il s'agit pour le groupe de s'approprier le problème. Il faut faire une étude approfondie des mots figurant dans l'énoncé. Les membres du groupe cherchent des exemples de fonctions pour mettre en oeuvre les concepts. Les fonctions trouvées proviennent plus ou moins de souvenirs de leurs études universitaires. La recherche de fonctions tordues ou monstres mathématiques témoigne d'une certaine approche permettant d'aborder le problème en recherchant le contre-exemple qui pourrait montrer les limites du concept de tableau de variation.

- Un membre du groupe propose la fonction $f: x \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$ qu'il affirme de mémoire être continue sur $\mathbf{R}$ et nulle part dérivable. Que sont ses variations ? Cette fonction a-t-elle un tableau de variation?
- La fonction caractéristique de $\mathbf{Q}$, $\chi_{\mathbf{Q}}$, qui prend la valeur 1 sur $\mathbf{Q}$ et 0 sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ met un coup d'arrêt à une recherche trop générale. Quel sens donner à la recherche des variations de cette fonction ? $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$. Peut-on trouver un intervalle, non réduit à un point, sur lequel $\chi_{\mathbf{Q}}$ serait monotone? Le groupe pense que non et s'en persuade sans pour autant en chercher une démonstration. Cette fonction ne serait monotone que sur chaque intervalle réduit à un point. On aurait donc un découpage de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R} = \bigcup_{x \in \mathbf{R}} \{x\}$. Ceci ne présente pas d'intérêt par rapport à la notion de variation d'une fonction.

La nature profonde de la fonction est importante. Le groupe décide alors de se restreindre à des fonctions plus sympathiques. Il envisage les fonctions dérivables sur un intervalle. Donner un résultat général reste bien difficile à obtenir. Régulièrement le problème revient sur la notion de tableau de variation. Le découpage de $\mathbf{R}$ en intervalles disjoints sur lesquels f serait monotone ne semble pas correspondre au sens donné par le groupe à la notion de tableau de variation. Il faut que l'on puisse le montrer explicitement pour pouvoir conclure.

Si l'on est capable de proche en proche de découper $\mathbf{R}$ selon la définition peut-on dire que f a un tableau de variation ? Doit-on s'assurer de l'existence du tableau ou faut-il exhiber un moyen de le construire? Est-ce suffisant ?

Après de multiples errances, le chercheur nous suggère de limiter encore le champ d'investigation. Le groupe se restreint aux fonctions dérivables à dérivée continue. Le problème change alors de nature. Les variations de f sont liées au signe de sa dérivée f' . Si, pour une fonction f donnée, on est capable de connaître la répartition des zéros de f' et si on peut déterminer le signe de f' entre deux zéros alors f a un tableau de variation. Une fonction continue ne peut changer de signe qu'en un zéro. Le nouveau problème devient alors :

Que peut-on dire des zéros d'une fonction continue sur un intervalle ?

- Soit E l'ensemble des zéros d'une fonction f sur un intervalle I . $E = \{z_k \in I \mid f(z_k) = 0\}$
 - si E est fini le signe de f se détermine sans problème et le problème initial est terminé.
 - si E est dénombrable discret on aura aussi un moyen, éventuellement algorithmique, de déterminer le signe de f sur chaque intervalle $]z_k, z_{k+1}[$.

Exemples (1) Signe de $f : x \mapsto f(x) = \sin(1/x)$ sur $]0 ; 1[$. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1/k\pi$ pour $k \in \mathbb{N}$
 (2) Signe de $f : x \mapsto f(x) = (-1)^{\lambda_k} \sin(\pi x)$, où λ_k est la k -ième décimale de π , pour $x \in [k\pi ; (k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{N}$.

• Le groupe cherche alors à généraliser à E dénombrable avec des points d'accumulations, ou E non dénombrable. Le problème se complique... Un des membres du groupe propose alors un théorème bornant d'une certaine manière la recherche.

Théorème: Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et E est dense dans $\mathbb{R}$ alors f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Preuve: Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe une suite (z_n) de zéros de f convergeant vers x car E dense dans $\mathbb{R}$. Mais f est continue donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n) = f(x)$. Or $f(z_n) = 0$ pour tout n donc $f(x) = 0$. $\square$

• Un autre membre du groupe propose une autre piste de recherche très prometteuse mais non exploitée par manque de temps (la recherche et son bilan devait se dérouler en 3 fois trois heures). Il considère $x_0 \in I$ avec par exemple $f(x_0) > 0$. Il recherche alors *le plus grand intervalle* I_0 sur lequel f garde le même signe. Que dire des bornes de I_0 ? La borne "supérieure" est soit $+\infty$ ou $-\infty$ soit un réel a . Dans le troisième cas f étant continue on a forcément $f(a) = 0$ et f change de signe au delà de a .

Un problème se pose alors .

- Y a-t-il un zéro "successeur" de a , où f changera de signe?
- Peut-on ordonner les zéros de f ?

Commentaires personnels

a) Fonctionnement des groupes.

Il se trouve que le groupe global de recherche sur le thème tableau de variation avait été scindé en deux groupes, un de 3 et un autre de 2 personnes dans le but de simuler une recherche Math en JEANS classique. Une certaine unité entre les deux sous-groupes a fait que le sentiment d'existence de deux groupes séparés n'est pas vraiment apparu lors de la recherche. Au contraire les points de vues avancés semblaient toujours provenir du travail d'un seul groupe de 5.

b) Efficacité du travail.

Il me semble que le travail accompli a été efficace car les participants avaient des idées et il est évident qu'une recherche personnelle aurait été moins fructueuse et en tout cas plus longue pour arriver aux mêmes conclusions. Les différences de point de vue sur le même sujet permettent à chacun de rebondir et progresser dans la recherche.

En est-il de même avec des élèves? Il semble que oui aux vues des productions MATH.en.JEANS. L'intervention du chercheur semble quand même essentielle pour recentrer les débats, permettre au groupe de faire une synthèse de l'état de la recherche.

c) Rôle du professeur.

Il apparaît un peu frustrant de laisser le professeur en dehors d'une recherche menée par des élèves. Comment faire en sorte qu'il participe et amène des idées sans pour cela bloquer leurs initiatives et tuer dans l'œuf leurs idées?

Le professeur pourrait par exemple à certains moments aider à la synthèse du groupe en organisant un débat de type débat scientifique (Marc Legrand) en notant et clarifiant toutes les idées exprimées par les membres du groupe.

d) Statut de la Preuve.

Le groupe fonctionne comme une petite communauté scientifique en miniature qui va se construire des certitudes et convictions autour du sujet de recherche. Certaines seront certainement fausses ou incomplètes. Le chercheur sera amené à faire re-préciser les choses. Qu'en est-il du rôle du professeur qui, s'il intervient pour "rétablir la vérité", risque bien de retrouver son statut classique d'enseignant.

e) Connaissances nécessaires.

Si l'on prend le sujet du tableau de variation il est peu probable que la recherche soit fructueuse au niveau des résultats scientifiques avec des élèves si ce n'est au niveau terminale. En effet cette recherche repose sur une connaissance du concept de fonction. Cependant elle peut permettre un approfondissement du concept de variations de fonction qui est un concept essentiel du lycée. Si l'on veut modéliser une situation de recherche il faut tenir compte du fonctionnement réel de la recherche. Un chercheur n'est jamais vierge quand il aborde un sujet nouveau. La communauté scientifique a souvent déjà réfléchi au problème et il existe une littérature sur le sujet. De plus tout en ayant une attitude ouverte et en ne privilégiant aucune direction le chercheur dispose de connaissances pointues qu'un élève ne possède pas. Le "détachement" et l'ouverture d'esprit du chercheur par rapport au problème provient surtout du recul qu'il a acquis par sa maîtrise des concepts fondamentaux. Ceci pose un problème au niveau des thèmes proposés aux élèves. Doivent-ils correspondre à des sujets vraiment ouverts ou bien peuvent-ils être des problèmes bien connus mais pas forcément par des élèves de collège ou lycée.

Conclusion

Cette approche des mathématiques est très intéressante car elle suscite chez l'élève des capacités d'initiative et d'autonomie. La notion de plaisir intervient, en particulier lors de la découverte, alors qu'elle est absente chez la plupart des élèves en situation de classe classique. Elle permet d'autres rapports avec le professeur que les rapports institutionnels classiques. Le rôle du professeur n'est cependant pas très clair à mi-chemin entre le chercheur et les élèves?

Variations (3).- Tableaux de variations.

Analyse du sujet :

- Il porte sur toutes les fonctions.
- L'exemple de la fonction caractéristique des rationnels nous a amenés à restreindre l'ensemble des fonctions à étudier ; en effet est-elle monotone sur des intervalles réduits à un point ?
- Pour supprimer ce cas, nous avons restreint notre étude à celle du **signe d'une fonction continue** sur un intervalle non réduit à un point en commençant par la recherche de l'ensemble de ses 0. Cela répondra alors à la question pour les tableaux de variation des fonctions de classe C^1 par morceaux (fonction continue dont la dérivée est continue sur des intervalles). Cette orientation nous a été suggérée par le chercheur Pierre Duchet. Peut-être que dans des conditions normales d'atelier (un an) cette information n'aurait pas été donnée.

Ensemble des 0

On a distingué différents cas : c'est un ensemble fini, ou un ensemble dénombrable ordonné, ou bien un ensemble dense dans $\mathbb{R}$ (tout point de $\mathbb{R}$ est la limite d'une suite d'éléments de cet ensemble) .

Cas d'un ensemble fini de 0 :

Il ne pose pas de problème : il suffit de prendre une valeur entre chacun des 0 pour obtenir le tableau de signe.

Cas d'un ensemble dense :

Si cet ensemble est dense dans $\mathbb{R}$, alors pour tout réel x , il existe une suite (u_n) de cet ensemble qui tend vers ce réel. On a alors :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \text{ et } f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x) \text{ car } f \text{ est continue.}$$

Comme $f(u_n) = 0$, on a, par unicité de la limite, $f(x) = 0$

Remarque : cette question vient de l'analyse de la fonction caractéristique des rationnels où l'on sait que les rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$.

Cas d'un ensemble dénombrable ordonné :

Exemples de fonctions :

1- $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0, +\infty[$. Les intervalles de changement de signes sont de la forme $\left[\frac{1}{2}k\pi + 1, \frac{1}{2}k\pi\right]$ avec $k \in \mathbb{N}$.

2- $f(x) = (-1)^{v_k} |\sin(\pi x)|$ si $x \in [k, k+1[$ et $k \in \mathbb{N}$ et v_k est la $k^{\text{ième}}$ décimale de π .
On ne peut pas tracer le tableau de variation de cette fonction mais il est bien défini. Ceci nous a amené à dissocier l'existence et la réalisation d'un tableau de variation.

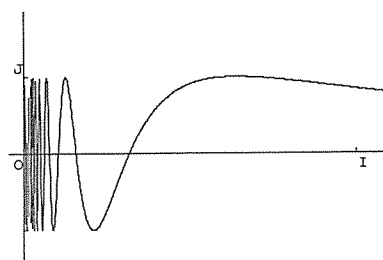
Cas des difficultés à déterminer les 0 : C'est le cas de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$

Conclusion

- On peut affirmer que l'ensemble des 0 d'une fonction ne peut pas être dense dans $\mathbb{R}$.
- Questions auxquelles nous sommes amenés à répondre:
 - Quel est la nature de l'ensemble des 0 d'une fonction de classe C^1 ?
Si l'ensemble des 0 ne permet pas de construire des intervalles, on ne pourra pas établir de changement de signes.
 - A-t-on un changement de signe après un changement de signe ?
Cette question vient de l'idée d'étudier l'ensemble des valeurs pour lesquels la fonction garde le même signe.
 - Peut-on toujours ordonner un ensemble dénombrable de 0 d'une fonction ? Si tel est le cas, on pourra alors définir un tableau de variation de façon itérative.
- Exemples de fonctions illustrant notre recherche :

1. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in]0, +\infty[$

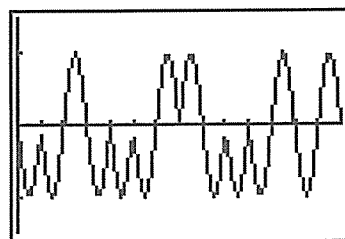
Cette fonction s'annule une infinité de fois sur l'intervalle de définition. L'ensemble des zéros est discret ; ce sont tous les réels du type $\frac{1}{2}k\pi + 1, \frac{1}{2}k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Nous sommes en mesure de donner le signe de f entre deux zéros successifs.



Courbe obtenue avec GeoplanW

2. $f(x) = (-1)^k |\sin(\pi x)|$ sur $[0 ; +\infty[$ où k est la partie entière de x et k la $k^{\text{ème}}$ décimale de π .

L'ensemble des zéros de f est $\mathbb{N}$. Pour donner le signe de f , nous sommes limités par la connaissance des décimales de π .



Courbe obtenue avec la TI 83 Plus

3. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$, sur $]0 ; 2\pi[$. Pour cette fonction non dérivable, mais continue, nous ne sommes pas en mesure de donner les variations.

4 PROJETS & COMMENTAIRES

Recette pour réussir une situation de recherche

1. Trouver dans votre établissement des jeunes prêts à tenter l'aventure de la recherche mathématique
2. Jumeler votre groupe de chercheurs avec celui d'un autre établissement partageant le même projet.
3. Choisir une situation suffisamment ouverte pour donner ensuite l'impression de la simplifier et ne pas effrayer les apprentis chercheurs.

Une surface quelconque se transforme alors en carré et quoi de plus simple en apparence que le travail avec des carrés !

4. Lancer plusieurs groupes éloignés géographiquement sur la même recherche afin que se crée une certaine émulation et que dans un premier temps des idées complètement différentes puissent jaillir. Cela permettra un enrichissement mutuel par la suite.
5. Recruter un chercheur capable, à partir de quelques idées confuses émises par les différents groupes, de problématiser le travail entrepris, de fédérer les différentes pistes et enfin de faire préciser les résultats obtenus.
6. Choisir un professeur donnant l'impression de ne presque rien faire pour ne pas par son attitude influencer le travail des groupes, mais attentif aux problèmes de fonctionnement des groupes afin de pouvoir réguler leur dynamique.
7. Laisser mariner suffisamment de temps pour que des idées se précisent mais en surveillant que le découragement ne vienne pas annihiler le travail déjà entrepris.
8. Confronter les différents groupes de travail sur un même thème afin que le travail de chacun puisse s'enrichir des différents apports.
9. Laisser reposer afin que de nouvelles idées jaillissent.
10. Alternier les temps de travail de chaque groupe nécessaires à la maturation et les temps de confrontation des différentes équipes.
11. Accélérer le mouvement afin que chaque groupe soit capable de produire un écrit afin de communiquer à la communauté l'état de leur travail.
12. Interrompre volontairement la recherche afin d'engendrer la frustration nécessaire pour désirer aller encore plus loin dans la recherche.

Si vous pensez pouvoir suivre soigneusement cette recette, vous pouvez nous rejoindre pour vivre avec vos élèves une situation de recherche avec **Maths en jeans**.

Projet d'atelier MeJ au collège F. Dolto (Paris 20^{ème}) pour l'année 2001-2002.

Début mars 2001, je reçois une invitation pour le congrès MATH.en.JEANS (MeJ) à Villetaneuse à la fin du mois. J'assiste à plusieurs exposés: impression très, très, très, très ... favorable ! C'est décidé, je ferai tout mon possible pour commencer un atelier MeJ à la rentrée 2001.

L'Association MATH.en.JEANS (AMeJ) me conseille pour le démarrage de l'atelier et m'indique l'existence de l'Université d'Eté à Saint Flour à laquelle je m'inscris.

Départ à la recherche d'un collège pour le jumelage et d'un chercheur. Tout le monde m'écoute poliment mais aucun volontaire. Le prof de maths parisien serait-il effrayé de faire des maths autrement? Quant au chercheur, j'ai peu de contacts dans le milieu.

Au mois de juin, je présente et fais voter le projet MeJ au Conseil d'Administration du collège.

Finalement c'est par l'intermédiaire de la Mission Générale d'Insertion du Rectorat de Paris que je trouve un établissement de jumelage, ce sera le collège Marx Dormoy dans le 18ème arrondissement avec Monsieur Lemouzer et le Rectorat accorde une heure hebdomadaire pour le fonctionnement de l'atelier au collège Dolto .

A Saint Flour, deux sujets de recherche nous sont proposés: 1) les carrés d'Eva ou comment couvrir un terrain avec un stock de plaques de tailles variées , 2) toute fonction admet-elle un tableau de variations ?

Nous sommes plongés en situation de recherche comme dans un atelier MeJ et y trouvons tous les ingrédients d'une bonne recherche:

- transformation du sujet de recherche initial pour le rendre plus abordable
- échange d'idées entre les deux établissements lors des séminaires, les élèves vont découvrir l'importance de la communication orale en maths, beaucoup d'entre eux imaginent que les maths se "font" seulement par écrit
- le rôle de l'enseignant au sein de l'atelier : mettre les élèves sur des pistes sans "tuer" la recherche ...

Des collègues ayant déjà animé un atelier MeJ nous confient leur précieuse expérience: les problèmes de logistique, le coût de l'atelier , le financement de l'atelier ... l'organisation des séminaires ...

Début septembre, nous nous rencontrons avec Monsieur Lemouzer pour réfléchir sur des sujets à proposer aux élèves et au chercheur ...

Sans titre

J'anime seul, depuis de nombreuses années un club intitulé : « autres regards sur les Mathématiques » rebaptisé « Animath » (*sic !*) lors de ma mutation en 1999. Le groupe d'une quinzaine d'élèves travaille sur des sujets plus ou moins ouverts proposés par le professeur. Tous les élèves, quelque soit le niveau ou la section sont invités, mais au delà des compatibilité d'emplois du temps, je constate sans surprise que ce sont les élèves de 1S et TermS les plus motivés. Globalement, les activités ont été les suivantes : Cryptographie ; Nombres premiers ; Constructions de polyèdres ; Logique et énigmes ; Recherches sur Recherche et parfois résolution partielle de problèmes ouverts ; Travaux géométriques (construction de figures planes) ; Travaux sur ordinateur (tableur, logiciel de géométrie) ; Construction d'un pendule ; Statistiques, sondages, probabilités ... ; Quelques tentatives sur Internet

Je suis venu à Saint-Flour pour donner un second souffle à mon club et pour concrétiser notre participation à « maths en jeans ». En effet, plusieurs obstacles me semblaient presque insurmontables : le contact avec un chercheur, le financement du projet (déplacements), la motivation des élèves et peut-être le jumelage. Grâce à l'atelier brillamment animé par les deux « Pierre », c'est maintenant beaucoup plus limpide. Nous avons simulé en une quinzaine d'heures une année de « maths en jeans », y compris le congrès le vendredi matin et maintenant la rédaction des actes. Ces deux brillants animateurs, jouant respectivement les rôles du professeur et du chercheur, m'ont mis en confiance et je les en remercie. Je tiens également à remercier Véronique Chauveau qui a su communiquer sa joie d'avoir participé à « maths en jeans ».

Pour l'année 2001-2002, le club va poursuivre ses activités, en essayant de former une équipe motivée pour la participation effective à « maths en jeans » l'an prochain. Parallèlement, je vais monter un projet de financement et contacter des chercheurs (en cas de problèmes, je sais que je pourrai compter sur P.Audin et P.Duchet). Avec mes élèves, nous irons visiter les autres lycées de la ville pour concrétiser un jumelage.

Des carrés d'Eva à un club math en jeans dans un lycée toulousain

Nous étions deux, d'un lycée de Toulouse, à venir à l'Université d'été organisée par Animath.

Notre lycée, situé dans le centre ville, est un lycée d'enseignement général et technique, qui a la particularité d'accueillir 700 lycéens et 1300 étudiants, essentiellement en B.T.S. tertiaires, et quelques prépas. Les élèves qui arrivent en seconde ont, pour une grande part, des projets dans le tertiaire. A partir de 7 classes de seconde, on remplit difficilement 2 classes de première scientifique. Notre objectif était de créer un club pour développer l'intérêt des lycées face à la démarche scientifique.

L'université d'été nous proposait plusieurs ateliers, celui de Math en Jeans nous a semblé le plus approprié. En effet, Toulouse est une grande ville universitaire, et nous étions intéressées par le contact proposé avec un chercheur. Nous étions un peu inquiètes de savoir comment des élèves qui se qualifient souvent eux-mêmes de « pas bons en math » pourraient s'intéresser à des activités de recherche.

L'atelier a consisté à nous mettre dans la même situation que les élèves quand ils participent à Math en Jeans : travail de recherche en équipe de trois comme les élèves au sein de leur lycée - nous avons travaillé sur le problème des « carrés d'Eva » (si vous voulez savoir de quoi il s'agit, allez voir le site : mathenjeans.free.fr)-, échanges avec une autre équipe travaillant sur le même sujet, présentation du travail de recherche devant d'autres équipes, comme les élèves en séminaire. Cela a permis de mettre en valeur certains aspects importants.

- se mettre dans une situation de recherche, ce qui n'était jamais arrivé à l'une de nous deux.
- l'importance de l'échange avec d'autres qui travaillent sur le même sujet. On se rend compte alors de la diversité des axes de recherche, de la richesse apportée ainsi par les autres, qui vont nourrir nos idées, ou les contester.
- l'importance et la difficulté de la mise en forme. En particulier, c'est très difficile de s'arrêter de chercher pour prendre le temps de mettre en forme.
- le rôle du prof : il est important que celui-ci soit présent, mais n'intervienne pas dans la recherche. Et on sait que cela va être dur !

En conclusion, c'est parti ! nous sommes revenues gonflées à bloc. Maintenant que nous avons bien senti le fonctionnement de l'activité Math en Jeans, nous avons contacté les enseignants du lycée d'à côté, et début octobre nous démarrons. Rendez-vous à Orsay en mars 2002

BILAN & PERSPECTIVES

« Finalement, MATH.en.JEANS n'est pas une secte »

Élaboration de projets de terrain pouvant interagir au sein d'un réseau de ressources.... Disons que le but fut pleinement atteint. Etayons ce constat sur trois points.

1) La mise en place d'ateliers de recherche dans les établissements scolaires

Elle permet aux élèves de modifier de manière durable et positive leur rapport aux mathématiques, en découvrant l'enjeu et la nature de la démarche mathématiques.

Le dispositif « jumelage MATH.en.JEANS » donne à un atelier de recherche des contenus mathématiques substantiels et des objectifs pédagogiques clairs, tout en prévoyant les moyens nécessaires pour y parvenir.

L'initiation à la démarche scientifique s'y appuie sur l'élaboration et le travail de conjectures autour d'un objet de recherche qui reste présent tout au long du travail. Dans un espace ouvert offrant liberté d'action et de décision, l'apprenti-chercheur s'oriente en direction de la preuve : suivant la formule d'un des jumelages de l'année 2001-2002,

« une conjecture, c'est plus qu'une hypothèse, mais moins qu'un théorème ... »

2) La mise en situation de recherche des professeurs eux-mêmes.

Elle leur a permis de mieux cerner les contours d'une activité de recherche, en identifiant son cheminement et ses étapes essentielles. Les échanges et discussions auxquels ont conduit cette recherche ont porté tant sur les contenus mathématiques que sur les modalités choisies et ont incité les participants à clarifier les rôles respectifs des différents agents d'un jumelage MATH.en.JEANS.

Suivant les objectifs et les contraintes propres à chacun, des projets de terrains, réalistes et cohérents ont pu ainsi voir le jour.

3) La participation à un réseau.

La réflexion sur les ateliers de recherche utilise et alimente d'ores et déjà le site Web de l'association MATH.en JEANS :

<http://www.mjc-andre.org/pages/amej>

L'université d'été 2001 d'ANIMATH a consolidé et élargi ce réseau embryonnaire, tout en appelant de ses vœux la constitution d'un réseau effectif de personnes-ressources pour l'ensemble des animateurs de clubs et ateliers mathématiques.

Vers la poursuite de la réflexion

Les travaux de l'atelier MATH.en. JEANS 2001 de l'université d'été ANIMATH ont approfondi et enrichi ceux de l'université d'été précédente (1999), tout en touchant un public nouveau. Ils sont de toute évidence appelés à être poursuivis.

Un atelier MATH.en.JEANS d'une université d'été 2003 pourrait notamment travailler les questions suivantes :

L'accompagnement des situations-recherches par les professeurs : quels gestes, quelles compétences ?

L'articulation des situations-recherches avec « la classe »: en particulier la place de la recherche dans l'enseignement, les projets de type TPE, les parcours diversifiés, etc.

D'ici là, un rendez-vous à ne pas manquer : le 14^e congrès MATH.en.JEANS, à Bordeaux.

Université Bordeaux I (33-TALENCE) : vendredi 28, samedi 29, dimanche 30 mars 2003.

ATELIER N° 3

« Jeux et Mathématiques » au collège.

Nicole TOUSSAINT – Jean FROMENTIN

L'objectif de cet atelier était de montrer aux stagiaires comment on peut espérer motiver les élèves à faire des mathématiques en s'appuyant sur les activités ludiques d'un club.

La première partie de l'atelier a consisté à présenter des jeux du commerce ou des matériels permettant à des collégiens de faire des mathématiques soit en les utilisant de façon "ludique", soit en en faisant une « étude ». Il s'agissait ici de faire découvrir aux collègues les types d'activités que permettent les jeux, et les modalités de leur utilisation en club et éventuellement en classe.

Ces jeux peuvent être classés en trois familles :

- **Les jeux numériques** tels que TRIO, le LOTO Mathématique, le PYTHAGORE, le MATHADOR, le MATHABLE, l'ALGORIX...
- **Les jeux géométriques** tels que REFLEXION, le JEU du MIROIR, le CUBE SOMA, le CURVICA, le KATAMINO, les PATRONS à colorier...
- **Les jeux logiques** tels que la TOUR de HANOÏ, le SPIN-OUT, LOGIX, les FRISES ÉVOLUTIVES, les DOMINOS (Boîte de rangement)...

La plupart de ces jeux ayant déjà été décrits soit dans les actes de l'UE d'Animath 1999, soit dans les brochures "JEUX" de l'APMEP, nous ne le ferons pas à nouveau ici et nous proposons aux lecteurs intéressés de se reporter à ces documents.

La deuxième partie de l'atelier a mis les stagiaires en activité avec des coloriages géométriques (Patrons à colorier, Kaléidoscope) ou algorithmiques (Frises évolutives). Ces activités ont été aussi décrites dans les actes de l'UE d'Animath 1999. Nous n'y reviendrons donc pas ici.

La troisième partie de l'atelier a mis les stagiaires en situation de recherche sur des activités de dénombrement.

Un premier type d'activité a consisté à **trouver l'ensemble des pièces d'un jeu**, étant donnée la logique de construction des pièces de ce jeu (Triminos, Carrés de Mac Mahon, Curvica...).

Un deuxième type d'activité a consisté à observer un jeu et à en **trouver les caractéristiques des pièces** (Set, Quarto, Chromino...).

C'est cette dernière partie qui fait plus particulièrement l'objet de ce compte rendu. Nous présentons ensuite le compte rendu fait par les stagiaires de l'atelier à la fin de l'UE, puis les contributions de certains à la suite de cette UE.

Trouver l'ensemble des pièces d'un jeu.

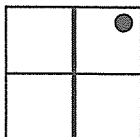
Nous présentons dans ce qui suit les jeux où il s'agit de trouver l'ensemble des pièces connaissant leurs caractéristiques :

- les Carrés bicolores
- les 24 Carrés
- les Carrés de Mac Mahon
- le Trioker
- le Trimino
- le Curvica
- les Polyminos
- les Polyamants
- les Tricalissons
- les Polyhex
- l'Hexaron
- le Soma
- le Tetracube.

Les caractéristiques des pièces sont suffisamment simples et leur nombre « acceptable » pour que l'activité soit accessible à des élèves de collège.

Dans ce compte rendu, chaque fiche comprend, en encadré, le texte de la fiche – élève et, en-dessous, l'ensemble des pièces demandées. Sur la fiche – élève, il est fait souvent allusion à une « feuille jointe » pour trouver les pièces. Nous n'avons pas mis ces feuilles dans ce dossier. Elles consistent simplement en une série de pièces vierges (plus que nécessaires) ou des réseaux triangulaires ou hexagonaux indispensables pour la recherche.

Les CARRÉS BICOLORES



Le dessin ci-contre montre la pièce de base de ce jeu de juxtaposition. Cette pièce est carrée, partagée en quatre zones et "orientée" par le point noir qui devra toujours se trouver en haut et à droite.

Le jeu est composé de toutes les pièces "orientées" différentes qu'on peut obtenir en coloriant entre zéro et quatre zones du carré de base, par exemple en bleu.

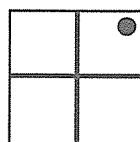
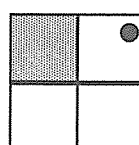
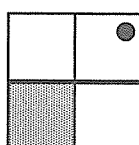
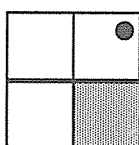
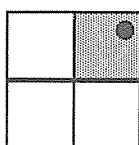
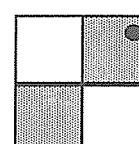
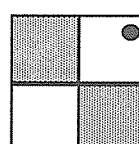
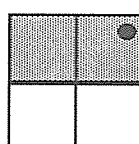
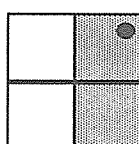
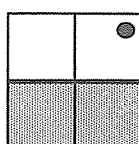
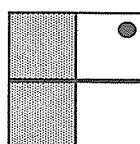
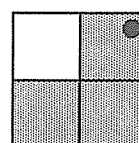
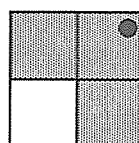
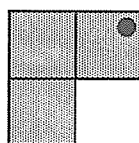
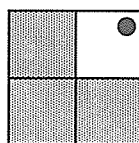
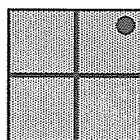
Trouver toutes les pièces de ce jeu.

Les disposer de manière logique.

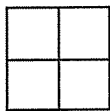
Pour cela, utiliser la feuille jointe. Coller les pièces sur du carton et les découper.

Les CARRÉS BICOLORES

Voici les 16 pièces de ce jeu :

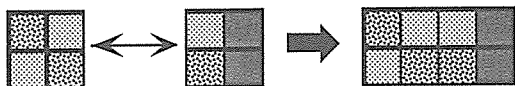


Les ? CARRÉS



Le carré ci-contre, partagé en quatre zones, est la pièce de base de ce jeu de juxtaposition. Ce jeu est composé de tous les carrés possibles, coloriés de la manière suivante : on choisit trois couleurs ; chaque zone peut être coloriée de l'une ou l'autre des trois couleurs choisies. Ainsi les quatre zones peuvent être d'une même couleur, trois zones d'une couleur et la quatrième d'une autre couleur et ainsi de suite.

ATTENTION : deux carrés coloriés "superposables" par déplacement ne sont pas différents.



Avec les pièces de ce jeu, il s'agit de réaliser des figures en respectant la règle de juxtaposition suivante : deux carrés ne peuvent être juxtaposés que si leurs sommets communs ont la même couleur.

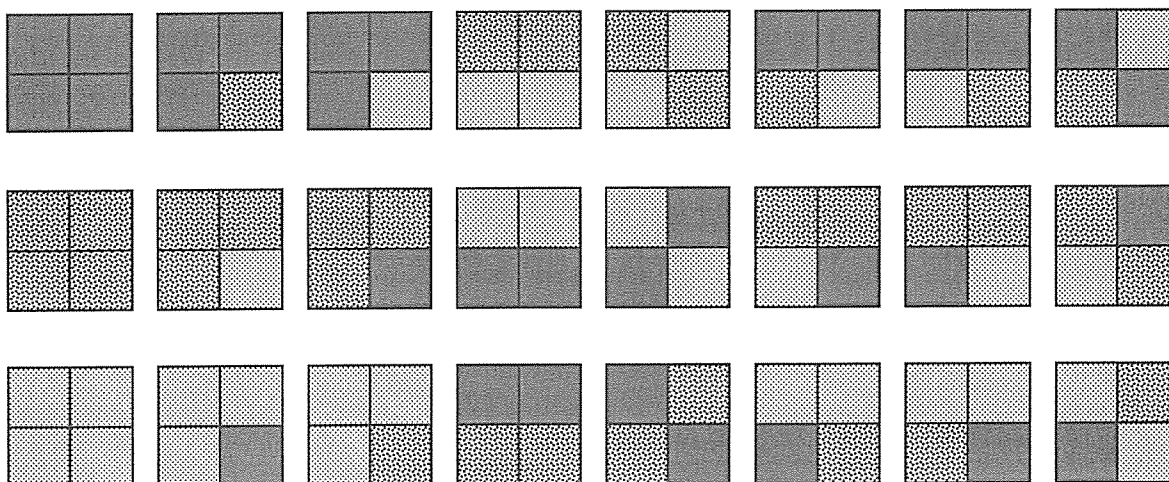
Trouver toutes les pièces de ce jeu. Les disposer de manière logique.

Pour cela, utiliser la feuille jointe. Coller les pièces sur du carton et les découper.

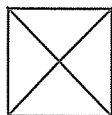
Quels rectangles peut-on tenter de réaliser avec toutes les pièces ?

Les 24 CARRÉS

Voici un classement logique des 24 pièces de ce jeu

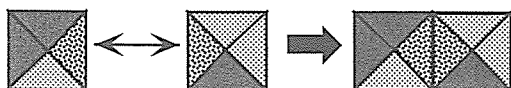


Les CARRÉS de MAC MAHON



Le carré ci-contre, partagé en quatre zones, est la pièce de base de ce jeu de juxtaposition. Ce jeu est composé de tous les carrés possibles, coloriés de la manière suivante : on choisit trois couleurs ; chaque zone peut être coloriée de l'une ou l'autre des trois couleurs choisies. Ainsi les quatre zones peuvent être d'une même couleur, trois zones d'une couleur et la quatrième d'une autre couleur et ainsi de suite.

ATTENTION : deux carrés coloriés "superposables" par déplacement ne sont pas différents.



Avec les pièces de ce jeu, il s'agit de réaliser des figures en respectant la règle de juxtaposition suivante : deux carrés ne peuvent être juxtaposés que si leurs côtés communs ont la même couleur.

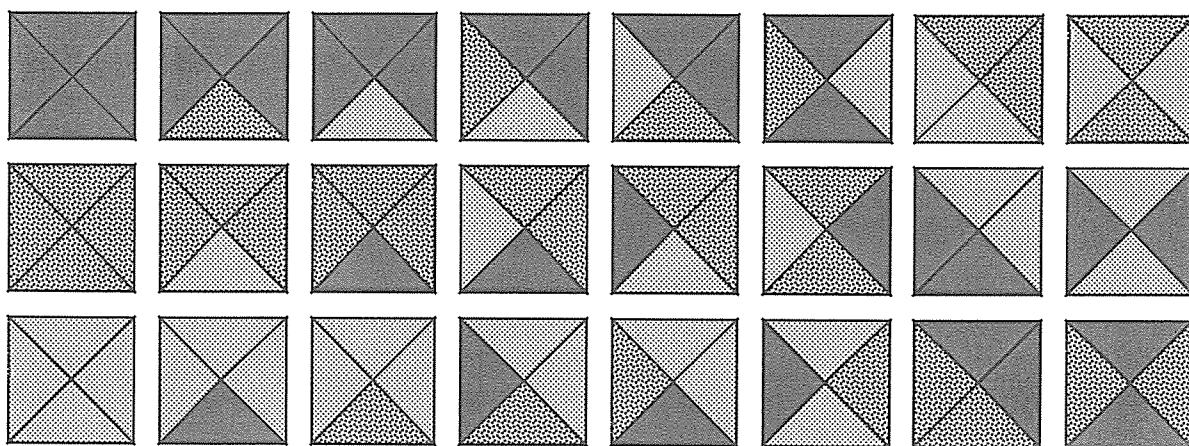
Trouver toutes les pièces de ce jeu. Les disposer de manière logique.

Pour cela, utiliser la feuille jointe. Coller les pièces sur du carton et les découper.

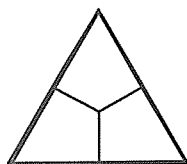
Quels rectangles peut-on tenter de réaliser avec toutes les pièces ?

Les CARRÉS de MAC MAHON

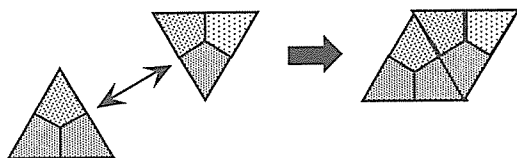
Voici un classement logique des 24 pièces de ce jeu



Le TRIOKER



Le triangle équilatéral ci-contre, partagé en trois zones, est la pièce de base de ce jeu de juxtaposition. Ce jeu est composé de tous les triangles équilatéraux possibles, coloriés de la manière suivante : on choisit quatre couleurs ; chaque zone peut être coloriée de l'une ou l'autre des quatre couleurs choisies. Ainsi les trois zones peuvent être d'une même couleur, deux zones d'une couleur et la troisième d'une autre couleur, ou les trois zones de couleurs différentes.



Avec les pièces de ce jeu, il s'agit de réaliser des figures en respectant la règle de juxtaposition suivante : deux triangles ne peuvent être juxtaposés que si leurs sommets communs ont la même couleur.

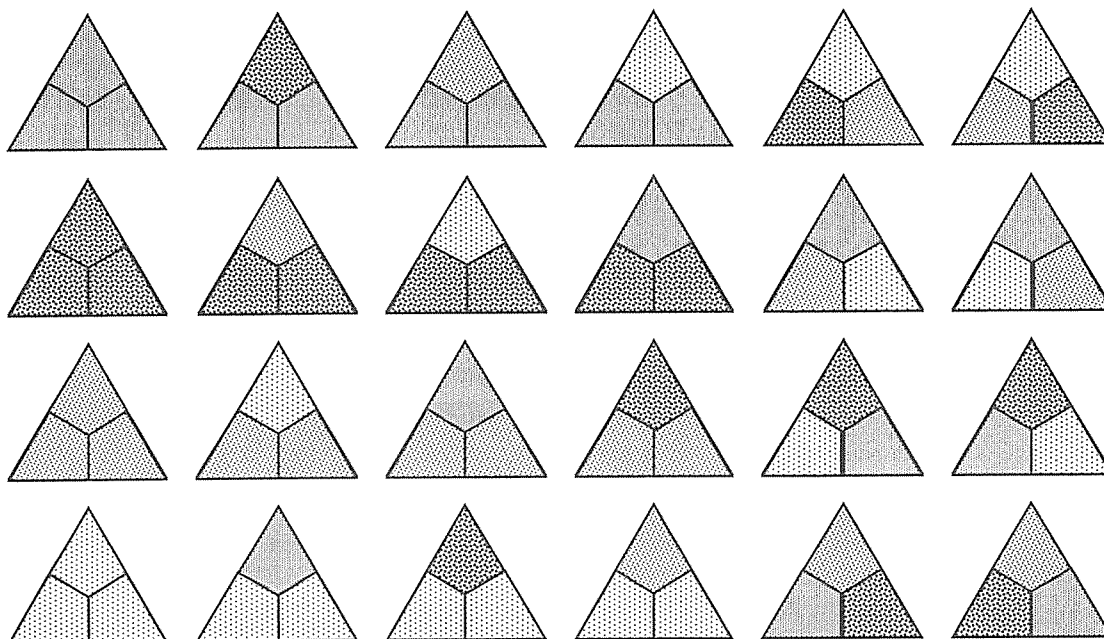
Trouver toutes les pièces de ce jeu.

Les disposer de manière logique.

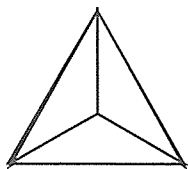
Pour cela, utiliser la feuille jointe. Coller les pièces sur du carton et les découper.

Le TRIOKER

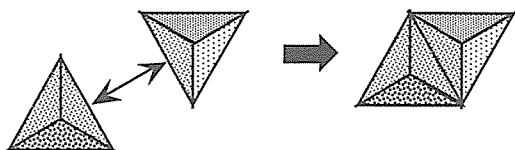
Voici un classement logique des 24 pièces du Trioker.



Le TRIMINO



Le triangle équilatéral ci-contre, partagé en trois zones, est la pièce de base de ce jeu de juxtaposition. Ce jeu est composé de tous les triangles équilatéraux possibles, coloriés de la manière suivante : on choisit quatre couleurs ; chaque zone peut être coloriée de l'une ou l'autre des quatre couleurs choisies. Ainsi les trois zones peuvent être d'une même couleur, deux zones d'une couleur et la troisième d'une autre couleur, ou les trois zones de couleurs différentes.



Avec les pièces de ce jeu, il s'agit de réaliser des figures en respectant la règle de juxtaposition suivante : deux triangles ne peuvent être juxtaposés que si leurs côtés communs ont la même couleur.

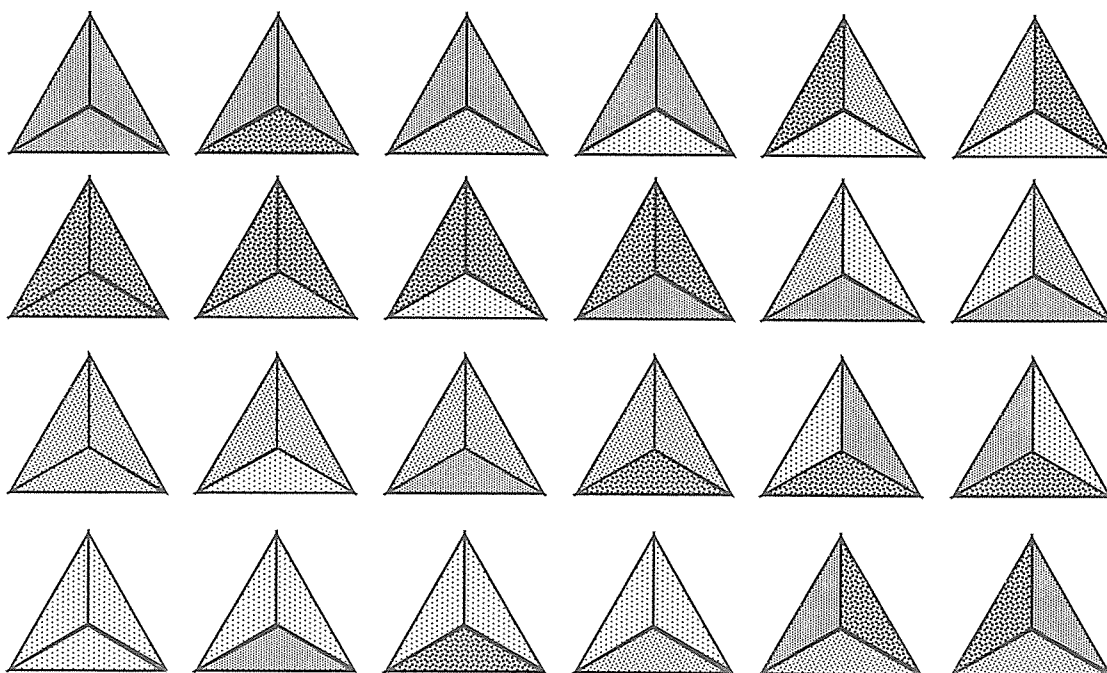
Trouver toutes les pièces de ce jeu.

Les disposer de manière logique.

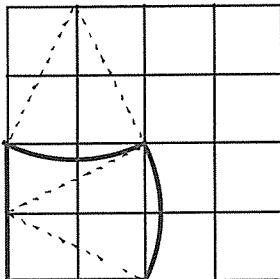
Pour cela, utiliser la feuille jointe. Coller les pièces sur du carton et les découper.

Le TRIMINO

Voici un classement logique des 24 pièces du Trimino.



Le CURVICA



Ce jeu de juxtaposition comprend toutes les pièces qu'on peut obtenir, en "creusant", en "bombant" ou en laissant droit les côtés d'un carré.

Le dessin ci-contre montre une pièce de ce puzzle et une construction possible des contours à partir du carré de base.

Avec les pièces de ce jeu, il s'agit de réaliser des figures en respectant l'emboîtement naturel des pièces : bord "droit" contre bord "droit" et bord "bombé" contre bord "creusé".

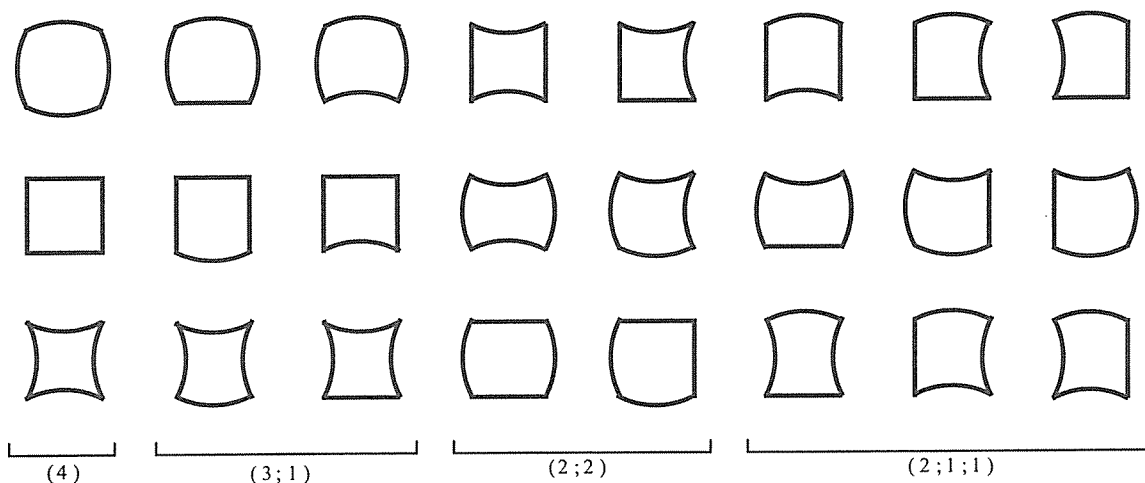
Trouver toutes les pièces de ce jeu. Les disposer de manière logique.

Pour cela, utiliser la feuille jointe. Coller les pièces sur du carton et les découper.

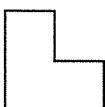
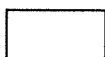
Quels rectangles (bords droits) peut-on tenter de réaliser avec toutes les pièces ?

Le CURVICA

Voici un classement logique des 24 pièces de ce jeu



Les POLYMINOS



Les Polyminos sont les assemblages qu'on peut former en accolant des carrés par les côtés : deux carrés (Domino), trois carrés (Triminos), quatre carrés (Tétraminos), cinq carrés (Pentaminos) et plus (Polyminos).

La figure ci-contre donne le carré de base, le domino et les deux triminos possibles.

Le puzzle le plus courant est le Pentamino, puzzle formé de tous les assemblages de cinq carrés.

Deux pièces superposables par glissement ou retournement sont identiques.

Avec les pièces obtenues on peut imaginer et réaliser de nombreuses figures.

Trouver tous les tétraminos (4 carrés). Trouver tous les pentaminos (5 carrés)

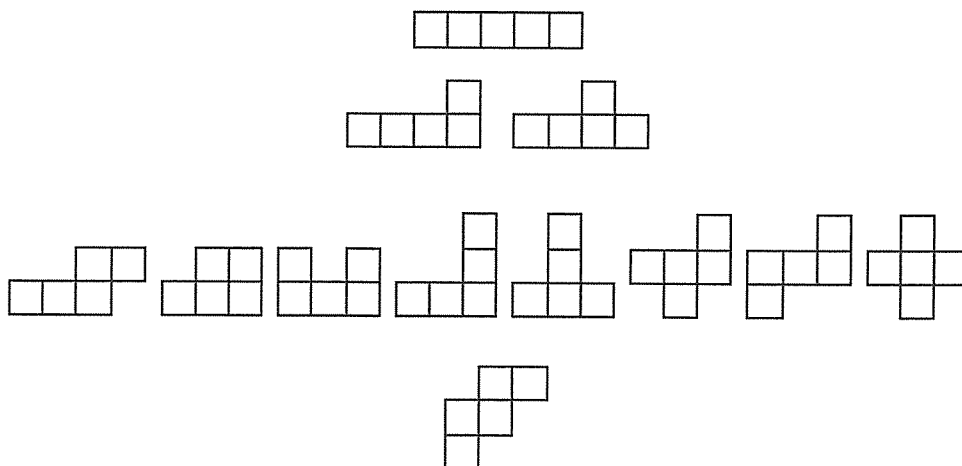
Pour cela utiliser des petits carrés ou le réseau quadrillé de la feuille jointe.

Quels rectangles peut-on tenter de réaliser avec les pièces du Pentamino ?

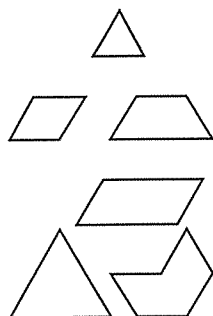
Les POLYMINOS

Voici les 12 pentaminos :

Le classement ci-dessous a été obtenu par alignements successifs de 5, 4, 3 et 2 carrés.



Les POLYAMANTS



Les Polyamants sont les assemblages qu'on peut former en accolant des triangles équilatéraux par les côtés : deux triangles (Diamant), trois triangles (Triamants), quatre triangles (Tetramants), cinq triangles (Pentamants), six triangles (Hexamants) et plus (Polyamants).

La figure ci-contre donne le triangle équilatéral de base, le diamant, le triamant et les trois tétramants possibles.

Le puzzle le plus courant, appelé parfois "Hexacornes", est composé de tous les hexamants.

Deux pièces superposables par glissement ou retournement sont identiques.

Avec les pièces obtenues on peut imaginer et réaliser de nombreuses figures.

Trouver tous les Pentamants (5 triangles). Trouver tous les Hexamants (6 triangles).

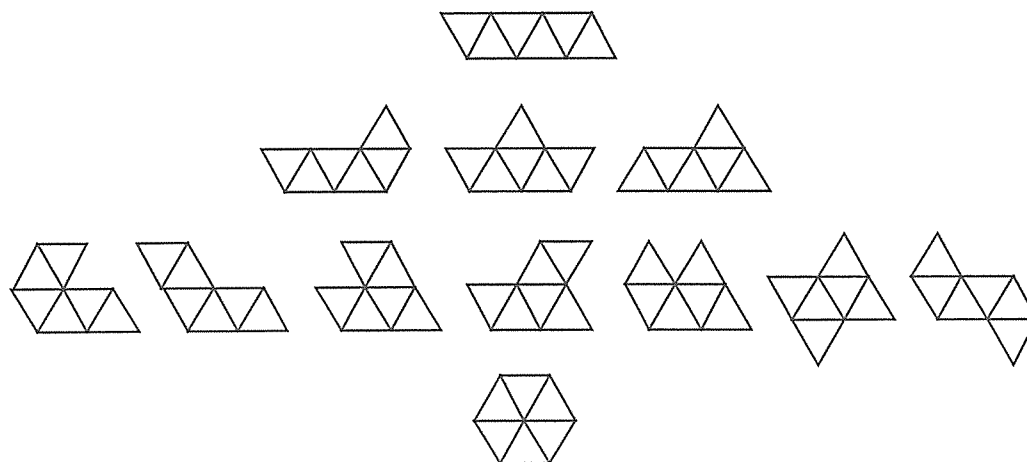
Pour cela utiliser le réseau triangulaire de la feuille jointe.

Quels parallélogrammes peut-on tenter de réaliser avec les hexamants ?

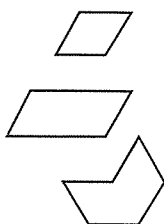
Les POLYAMANTS

Voici les 12 hexamants :

Le classement ci-dessous a été obtenu par alignements successifs de 6, 5, 4 et 3 triangles



Le TRICALISSON



Le calisson, nommé ainsi en référence à la friandise connue, est un losange formé de deux triangles équilatéraux.

La figure ci-contre montre le calisson de base et les deux "dicalissons" possibles.

Le puzzle appelé "Tricalisson" est composé de toutes les pièces qu'on peut obtenir en accolant trois calissons. Deux pièces superposables par glissement ou retournement sont identiques.

Avec les pièces obtenues on peut imaginer et réaliser de nombreuses figures, dont un hexagone.

Trouver tous les tricalissons.

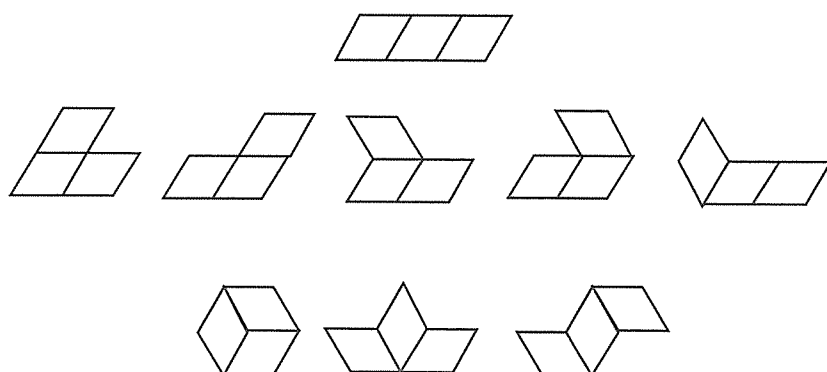
Pour cela, utiliser le réseau triangulaire de la feuille jointe.

Coller les pièces sur du carton et les découper.

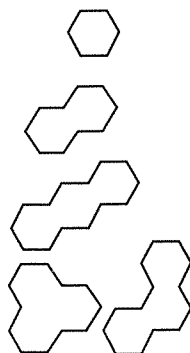
Le TRICALISSON

Voici les 9 pièces :

Le classement ci-dessous a été obtenu par alignements successifs de 3 puis 2 losanges.



Les POLYHEX



Les Polyhex sont les assemblages qu'on peut former en accolant des hexagones réguliers par les côtés : deux hexagones (Dihex), trois hexagones (Trihex), quatre hexagones (Tetrahex), cinq hexagones (Pentahex) et plus (Polyhex).

La figure ci-contre donne l'hexagone de base, le dihex et les trois trihex possibles.

Le puzzle le plus courant est composé de tous les tetrahex. Deux pièces superposables par glissement ou retournement sont identiques.

Avec les pièces obtenues on peut imaginer et réaliser de nombreuses figures.

Trouver tous les tétrahex (4 hexagones)

Pour cela, utiliser le réseau hexagonal de la feuille jointe.

Coller les pièces sur du carton et les découper.

Imaginer des figures réalisables avec tous les tetrahex

Les POLYHEX

Voici les 6 tetrahex :

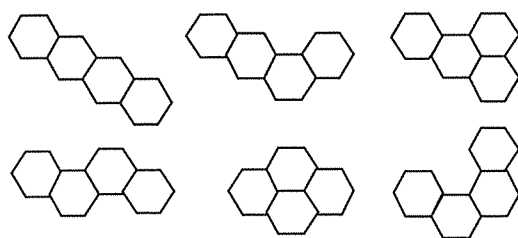
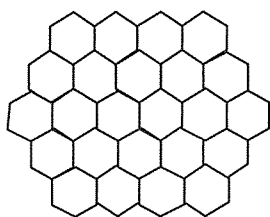
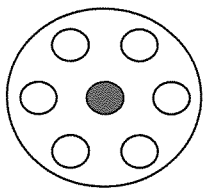


Figure réalisable avec les 6 tetrahex

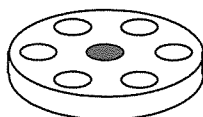


L'HEXARON (Discon - NaeF)

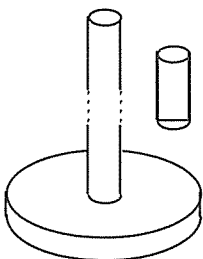


Le casse-tête comprend tous les disques différents (retournables) qu'on peut réaliser en faisant de 1 à 6 trous aux emplacements indiqués.

Le trou central permet d'enfiler les disques sur une tige fixée sur un socle (voir le dessin ci-contre).



Le casse-tête consiste à enfiler les disques percés sur la tige en introduisant au fur et à mesure des bâtonnets dans les trous. Chaque bâtonnet traverse trois disques.



Chacune des surfaces de séparation entre les disques doit être traversée par au moins un bâtonnet afin que les disques ne puissent pas tourner autour de la tige centrale. De plus, aucun bâtonnet ne doit être placé directement sur un autre, et, une fois les bâtonnets placés, aucun ne doit dépasser le disque de dessus.

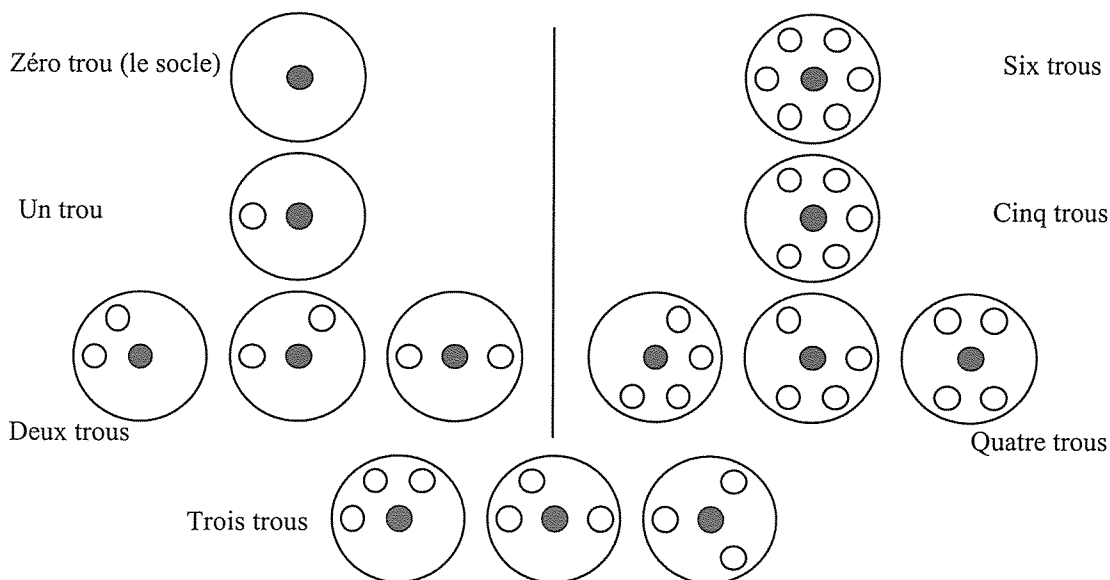
Trouver tous les disques de ce casse-tête.

Combien y a-t-il de bâtonnets ?

Pour cela, utiliser la feuille jointe.

HEXARON

Un classement logique



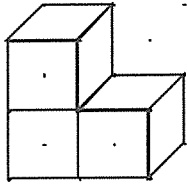
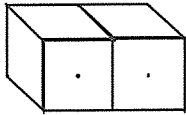
D'une colonne à l'autre, les disques en regard les uns des autres se correspondent par complémentarité (0 et 6 trous, 1 et 5 trous, 2 et 4 trous) ; les disques à 3 trous sont leur propres complémentaires.

Le SOMA

En 1936, un danois, Piet Hein a créé un jeu, le Soma.

Ce jeu est composé de tous les assemblages non parallélépipédiques de 3 ou 4 cubes.

Deux cubes sont assemblés par leurs faces comme le montre la figure ci-contre.



Trouver toutes les pièces de ce jeu.

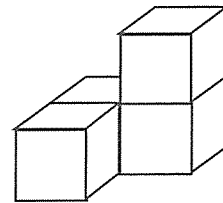
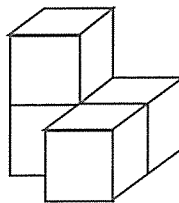
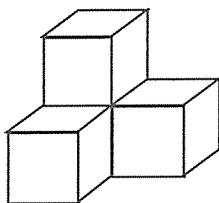
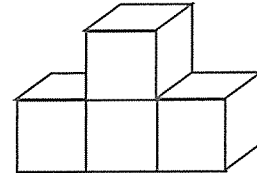
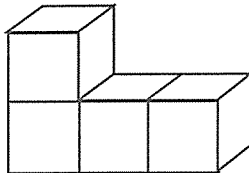
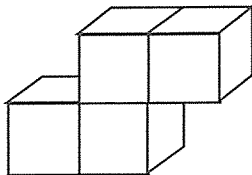
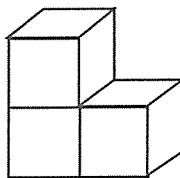
On peut utiliser des cubes ou le réseau pointé de la feuille jointe.

Dessiner chacune des pièces.

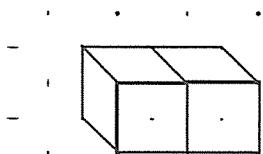
Quels parallélépipèdes peut-on tenter de réaliser avec toutes les pièces ?

Le SOMA

Voici les 7 pièces du Soma



Le TETRACUBE



Ce jeu est composé de tous les assemblages qu'on peut réaliser avec 4 cubes.

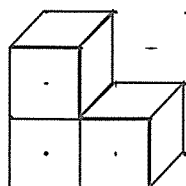
Deux cubes sont assemblés par leurs faces comme le montre la figure ci-contre.

Trouver toutes les pièces de ce jeu.

On peut utiliser des cubes ou le réseau pointé de la feuille jointe.

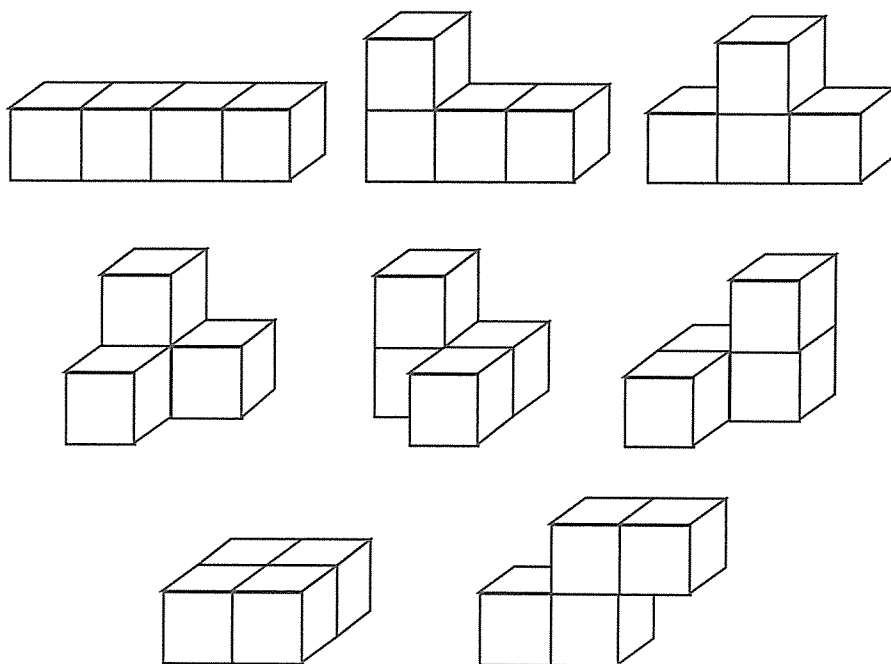
Dessiner chacune des pièces.

Quels parallélépipèdes peut-on tenter de réaliser avec toutes les pièces ?



Le TETRACUBE

Voici les 8 pièces du tétracube.



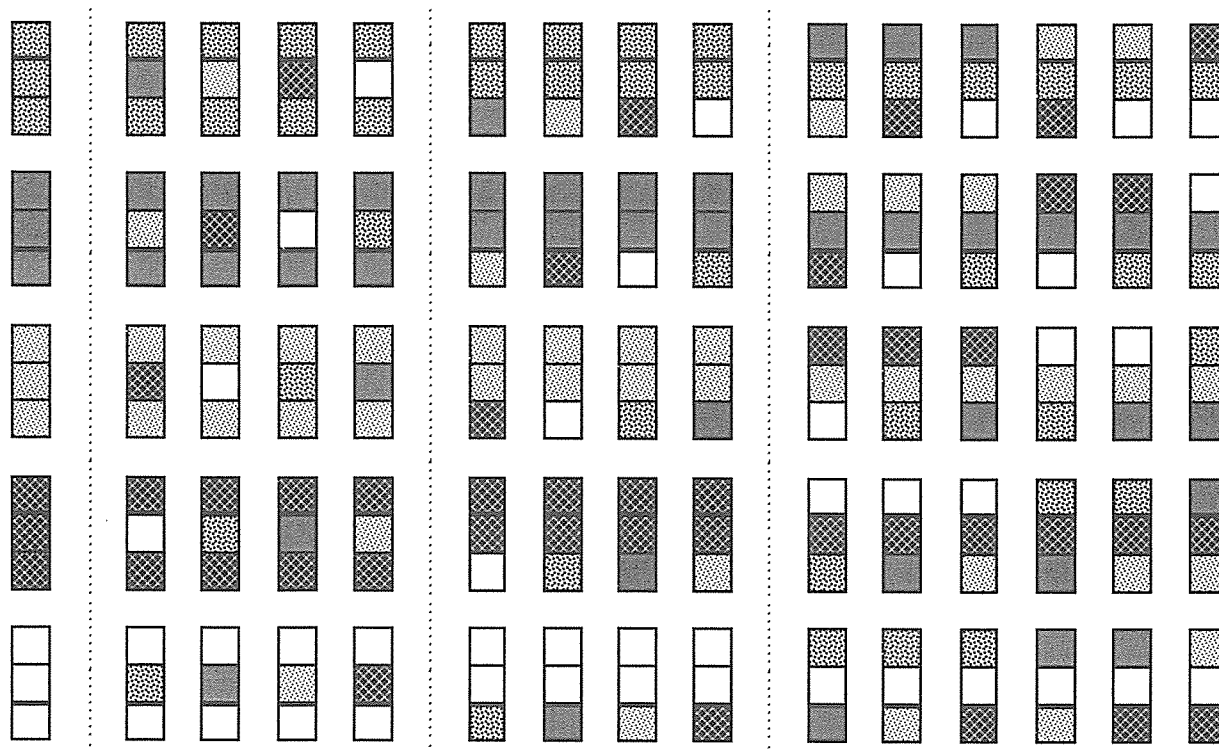
Trouver les caractéristiques des pièces d'un jeu.

Dans cette activité, le jeu est donné aux élèves. Il s'agit pour eux de trouver, d'une manière ou d'une autre, les caractéristiques des pièces du jeu : observations, analyses, classements... Ce qui est primordial ici est de pouvoir manipuler les pièces, organiser leur collection, faire des essais de classement. Les jeux que nous avons choisis pour cela ont un nombre assez important de pièces. Ils se prêtaient donc difficilement à l'activité précédente.

- le Chromino
- le Quarto
- le Set
- les Cubes de Mac Mahon
- le Tantrix
- le Coq Japonais.

Dans ce compte rendu, nous présentons pour chaque jeu l'ensemble des pièces et nous donnons, à la suite, leurs caractéristiques.

CHROMINOS



La pièce de base est un rectangle formé de trois carrés "alignés".

Le jeu comprend toutes les pièces différentes qu'on peut obtenir en coloriant chaque carré d'une couleur choisie parmi cinq. Il y en a $5 \times 15 = 75$.

La première partie du tableau ci-dessus (première colonne) donne toutes les pièces dont les trois carrés sont d'une même couleur.

La deuxième et la troisième partie (les huit colonnes suivantes) donne toutes les pièces dont deux carrés sont d'une même couleur.

La troisième partie (Les six dernières colonnes) donne les pièces dont les trois carrés sont de couleurs différentes.

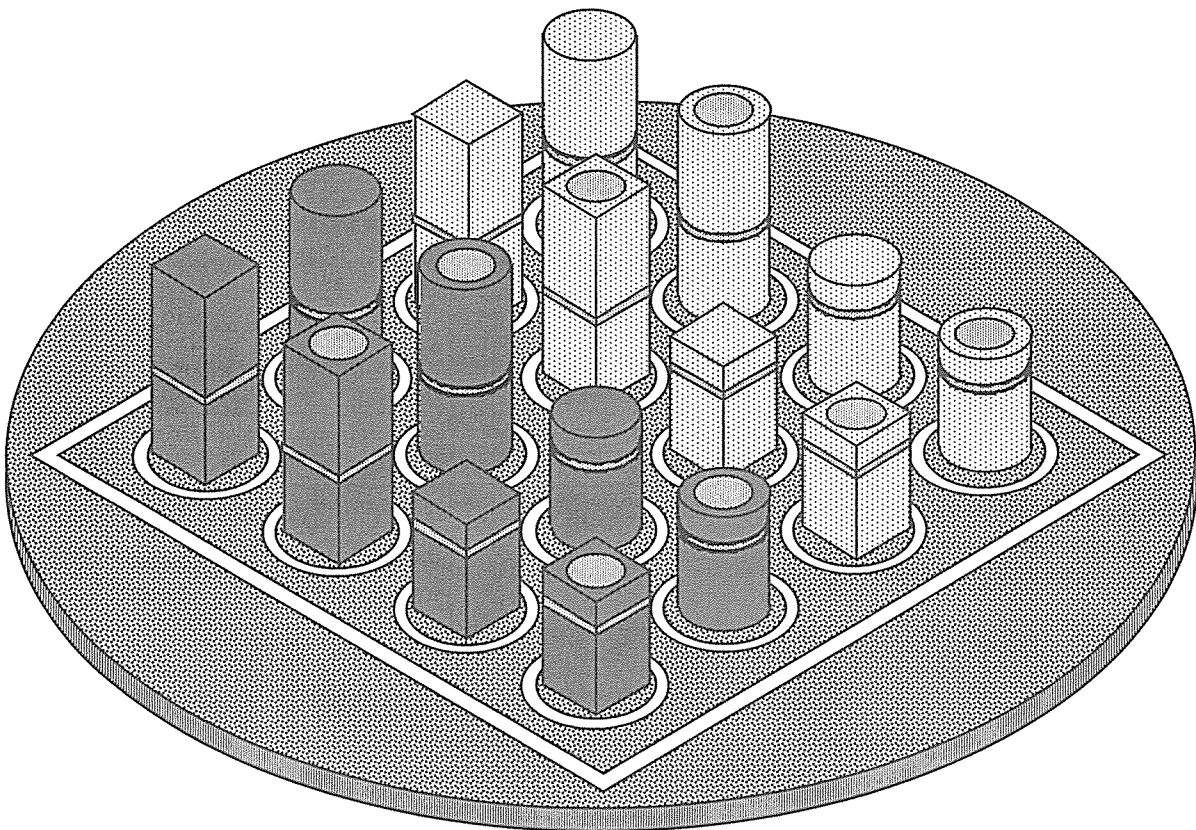
Le QUARTO et le SET

La comparaison de ces deux jeux est particulièrement intéressante (voir leur présentation ci-après). Bien qu'apparemment différents, ce qui est vrai au niveau de leur aspect (cartes pour le Set, pièces et plateau pour le Quarto) et des règles (combinaisons pour le Set, alignement pour le Quarto), les pièces et cartes de ces deux jeux répondent aux mêmes types de caractéristiques d'un point de vue mathématique.

Pour le Quarto, les pièces répondent à quatre caractères, chaque caractère ayant deux occurrences : la couleur (clair – foncé), la taille (grand – petit), la forme (rond – carré) et le dessus (plein – creux). Pour le Set, les cartes répondent à quatre caractères, chaque caractère ayant trois occurrences : la couleur (rouge – vert – mauve), la forme (rectangle – losange – ovale), le nombre (1 – 2 – 3) et le remplissage (plein – hachuré – vide).

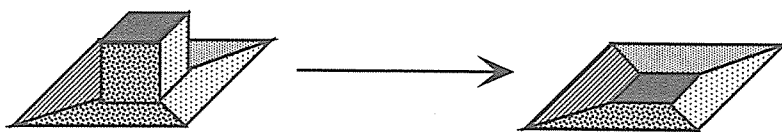
Ainsi, le Quarto comprend 2^4 pièces (2 occurrences pour chacun des 4 caractères) et le Set comprend 3^4 cartes (3 occurrences pour chacun des 4 caractères).

QUARTO



*Couleur(clair/foncé) ; Taille (grand/petit)
Forme (rond/carré) ; Dessus (plein/creux)*

CUBES de MAC-MAHON



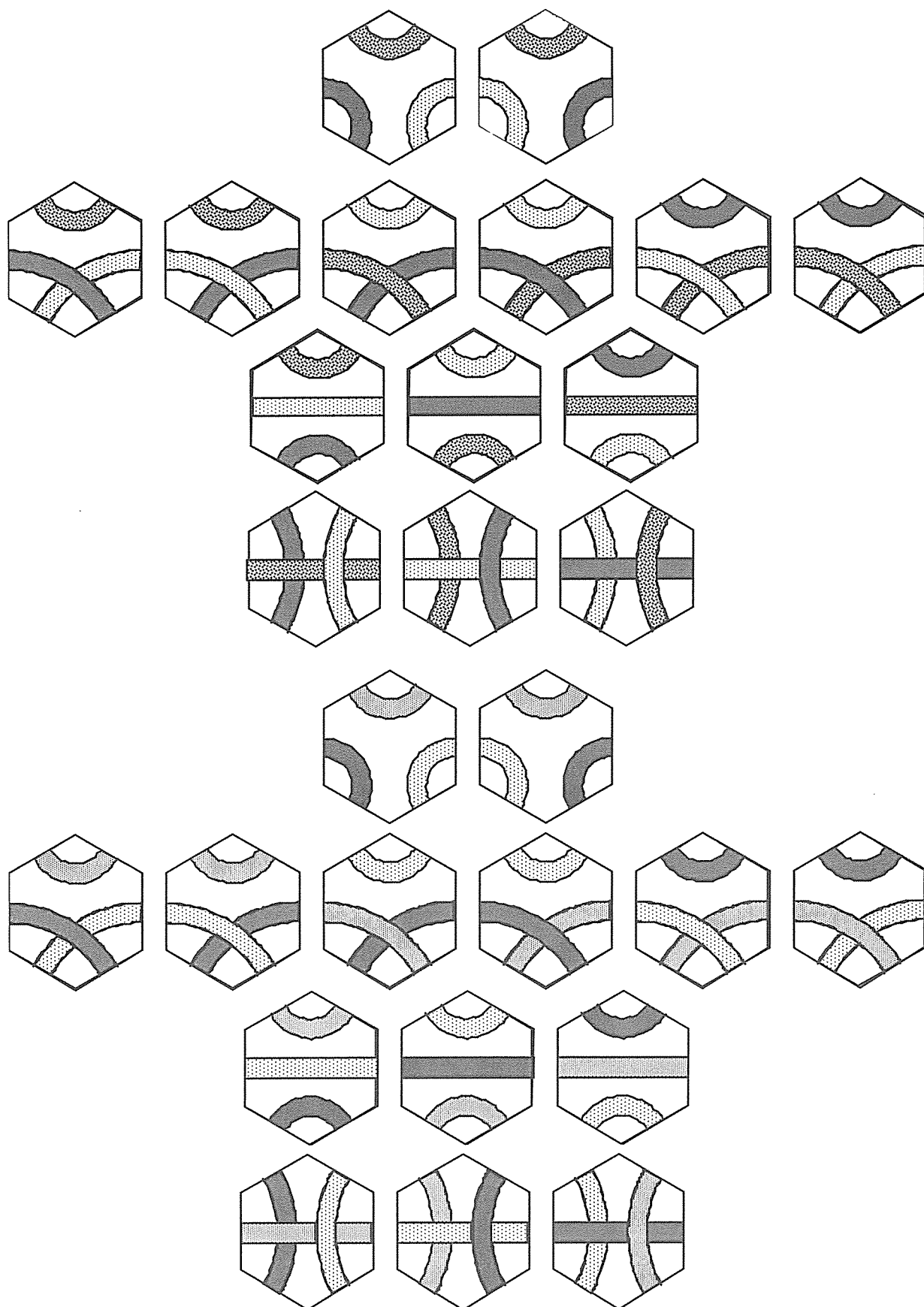
*Représentation plane du cube.
La sixième face, celle du dessous, est de la sixième couleur.*

La pièce de base est un cube.

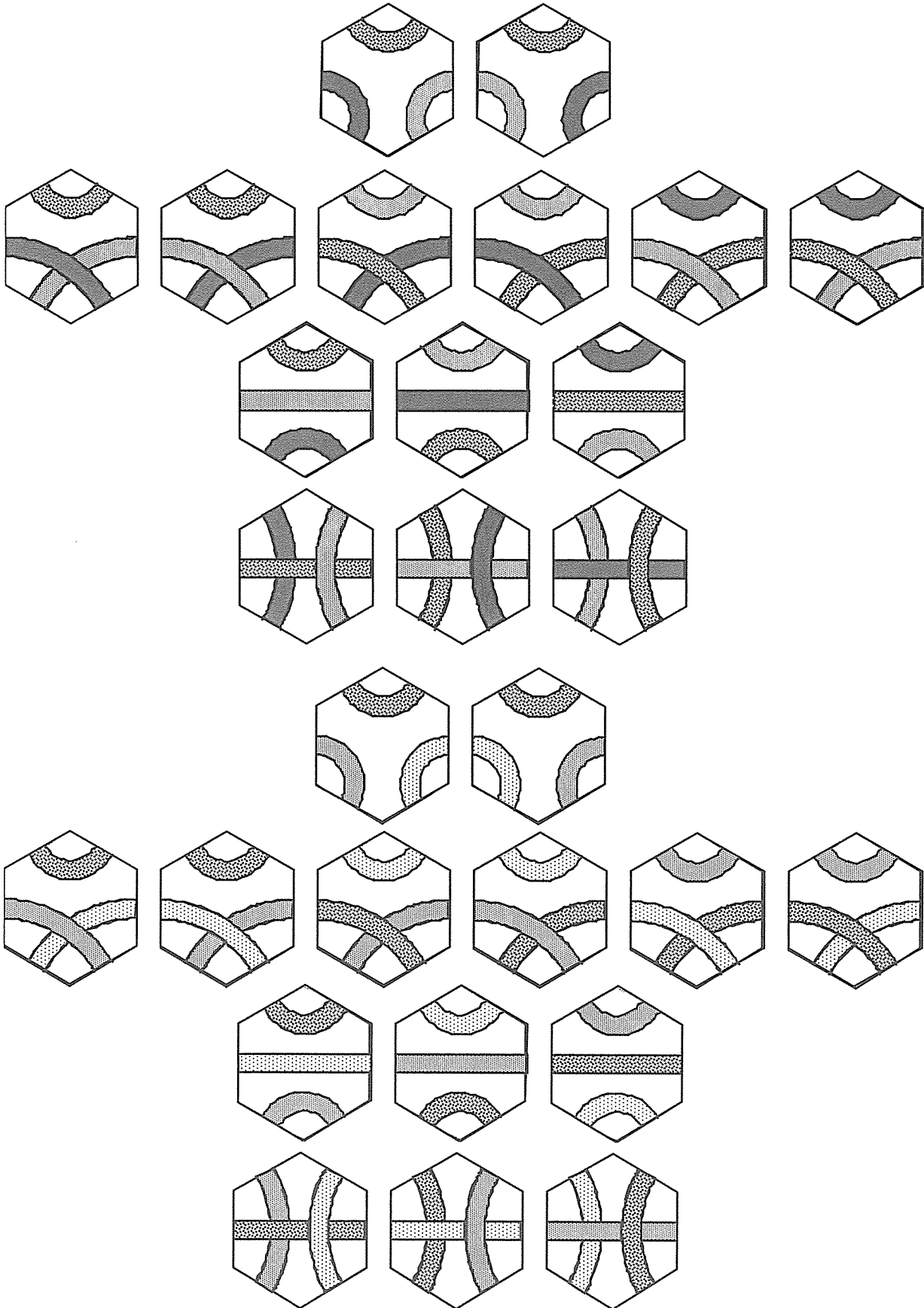
Le jeu comprend toutes les pièces qu'on peut obtenir en coloriant chaque face d'une couleur choisie parmi six, les faces d'un même cube étant de couleurs différentes.

La face du dessous du cube étant de la couleur "6", il y a 5 possibilités pour la face opposée à la face "6" (les cinq lignes du classement ci-dessus), puis $(4 \times 3 \times 2 \times 1)/4$ combinaisons pour les quatre couleurs restantes, la division par 4 correspondant aux symétries axiales du carré, ce qui donne 30 cubes différents. Pour leur réalisation, il suffit de décider d'une face latérale parmi les quatre pour le choix de la troisième couleur (face du "haut" des cubes de chaque ligne du classement ci-dessus) et de disposer les trois couleurs restantes ($3 \times 2 \times 1$ permutations), ce qui correspond aux six colonnes du classement ci-dessus.

TANTRIX (1)

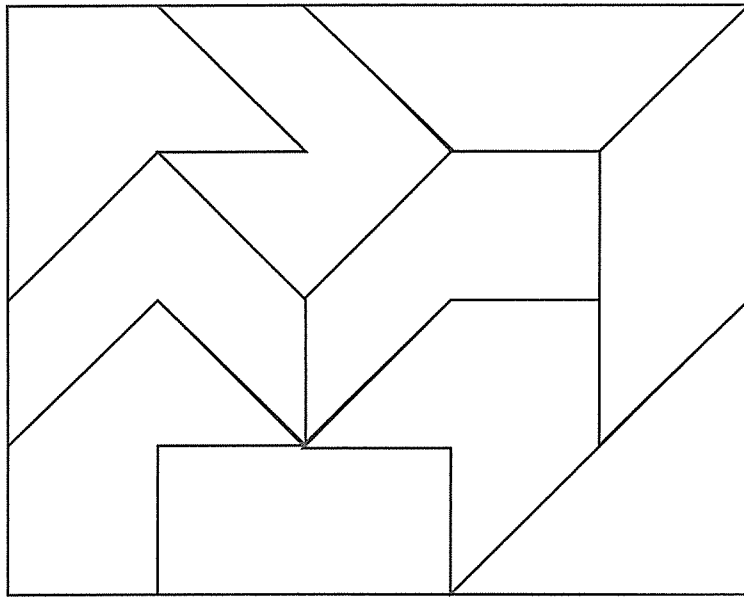


TANTRIX (2)



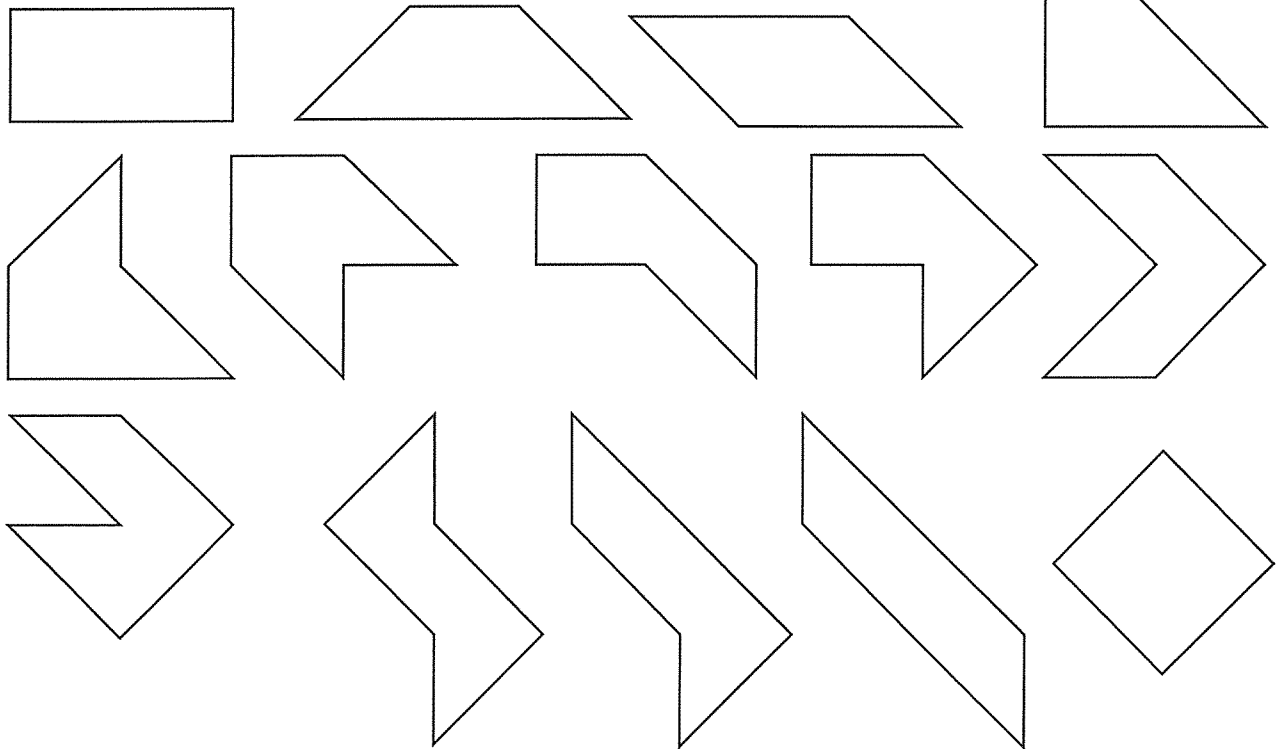
COQ JAPONAIS

Que vous inspire ce puzzle ?



Toutes les pièces de ce puzzle sont formées de quatre triangles rectangles isocèles isométriques assemblés suivant les côtés de même longueur.

Mais ce puzzle ne comprend pas toutes les pièces possibles que voici :



L'HEXARON

Florian Odor

Extension du jeu l'Hexaron en vue d'une activité au niveau du collège et plus particulièrement en 3^{ème}.

On se rendra compte à la lecture de cette étude que l'on peut aisément étendre cette étude au niveau lycée et bac+.

Le principe de l'hexaron est simple : un casse-tête constitué de 12 disques contenant 1 à 6 trous, tous différents, et de 13 tiges d'une épaisseur de 3 pièces. Le but de ce casse-tête étant d'empiler ces 12 disques sur les 13 tiges sans qu'il y ait de vide. (Voir par ailleurs la fiche - élève présentant le jeu).

Les disques étant tous différents et ayant au maximum 6 trous se répartissent de la façon suivante :

- 1 pièce à 1 trou
- 3 pièces à 2 trous
- 3 pièces à 3 trous
- 3 pièces à 4 trous
- 1 pièce à 5 trous
- 1 pièce à 6 trous

Il y a donc un total de 39 trous, d'où les 13 tiges de longueur 3.

La question est la suivante :

Peut-on imaginer théoriquement d'autres hexarons dont les disques soient bien répartis de cette façon (pas vraiment le choix si on veut l'unicité des disques et tous les disques possibles) mais dont les tiges ne soient pas forcément toutes de longueur 3 ?

On écartera le cas où des tiges sont de longueur 1 (cas le moins difficile à étudier).

I) Première étude (niveau collège)

Soit x le nombre de tiges de longueur 2. On a donc $0 \leq x \leq 18$ car on a au maximum 39 trous.

Soit y le nombre de tiges de longueur 3. On a donc $0 \leq y \leq 13$ car on a au maximum 39 trous.

Les nombres x et y de tiges sont solutions de l'équation $2x + 3y = 39$, avec bien entendu x et y entiers.

1^{ère} méthode : tâtonnement par les x

- On pose $x = 0$. On trouve alors $3y = 39$, soit $y = 13$, résultat déjà connu, car c'est le jeu d'origine.
- On pose $x = 1$. On trouve alors $3y = 37$ et pas de solution entière. Donc l'Hexaron contenant 1 tige de longueur 2 n'existe pas.
- On pose $x = 2$. On trouve alors $3y = 35$ et pas de solution entière.
- et ainsi de suite.

2^{nde} méthode : tâtonnement par les y

Même principe que précédemment, mais plus rapide.

- Pour $y = 0$, on a $2x = 39$ et pas de solution entière.
- Pour $y = 1$, on a $2x = 36$, soit $x = 18$
- Et ainsi de suite.

3^{ième} méthode : graphiquement.

On trace dans un repère la droite d'équation $y = -\frac{2}{3}x + 13$ et on regarde sur un maillage les points communs de cette droite avec les points de coordonnées entières.

4^{ième} méthode : un peu d'astuce avec l'utilisation du PGCD et des propriétés de divisibilité.

On a $2x + 3y = 39$. Donc $2x = 39 - 3y$, c'est-à-dire $2x = 3(13 - y)$.

On remarque que 2 étant premier avec 3, 2 doit diviser $13 - y$ (théorème de Gauss) ; et comme 13 est impair, y doit l'être aussi.

On doit alors avoir $13 - y$ pair et $0 \leq y \leq 13$. Donc les seules possibilités pour y sont 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13. On en déduit les valeurs correspondantes de x.

II) « On complique » (niveau lycée)

Posons x le nombre de tiges de longueur 2. On a donc $0 \leq x \leq 19$ car on a au maximum 39 trous.

Posons y le nombre de tiges de longueur 3. On a donc $0 \leq y \leq 13$ car on a au maximum 39 trous.

Posons z le nombre de tiges de longueur 4. On a donc $0 \leq z \leq 9$ car on a au maximum 39 trous.

On a donc l'équation suivante : $2x + 3y + 4z = 39$ (équation de plan dans l'espace de dimension 3).

On peut appliquer également les méthodes par tâtonnement ou alors par transformation. Pour cette dernière, on a : $2(x + 2z) = 3(13 - y)$ et on applique la méthode du I.4).

III) « On peut encore compliquer » (niveau supérieur)

En posant davantage d'inconnues x ; y ; z ; t...

Au maximum il peut y avoir une tige de longueur 12, en alignant 12 trous, car il y a 12 disques contenant au moins un trou.

Ici l'outil matriciel et l'ordinateur peuvent rendre de grands services.

Compte rendu des stagiaires à la fin de l'UE

Avant de commencer l'atelier animé par Nicole Toussaint et Jean Fromentin, lors de cette université d'été, nos attentes et nos questions étaient sans limites.

En effet :

- Peut-on faire des mathématiques en s'amusant ?
- Quels sont les différents types de jeux ?
- Dans quel cadre utiliser ces jeux ?
- Quels sont les intérêts pédagogiques de ces jeux ?

À la première question, la réponse est OUI.

Nicole et Jean nous ont convaincu que les jeux mathématiques permettent bien souvent d'aborder des thèmes importants et variés des programmes officiels. Ils nous ont fourni un matériel pédagogique innovant, très varié, livré "prêt à l'emploi" pour nos animations.

À la deuxième question, ils nous ont présenté une typologie des jeux utilisables à tous les niveaux. Ceux-ci sont soit vendus dans le commerce, soit disponibles dans des ouvrages pédagogiques.

- Premier type : Les jeux numériques tels que TRIO, le LOTO Mathématique, le PYTHAGORE, le MATHADOR, le MATHABLE, l'ALGORIX...
- Deuxième type : les jeux géométriques tels que REFLEXION, le JEU du MIROIR, le CUBE SOMA, le CURVICA, le KATAMINO, les PATRONS à colorier...
- Troisième type : Les jeux logiques tels que la TOUR de HANOÏ, le SPIN-OUT, LOGIX, les FRISES ÉVOLUTIVES, les DOMINOS (Boîte de rangement)...

La plupart de ces jeux sont décrits soit dans les actes de l'UE d'Animath 1999, soit dans les brochures "JEUX" de l'APMEP.

En ce qui concerne la troisième question : Dans quel cadre utiliser ces jeux ?, nous étions persuadés que la plupart ne serviraient que dans le cadre d'un club. Et bien NON !

Nicole et Jean nous ont montré que beaucoup de ces jeux sont riches de notions mathématiques et peuvent donc aussi être exploités dans le cadre de la classe. Leur expérience pédagogique nous prouve que les jeux peuvent aider les élèves en remédiation, en parcours diversifiés, en exercices ou en activités.

En ce qui concerne les intérêts pédagogiques (quatrième question), ces jeux permettent des apprentissages divers :

- Les symétries avec le REFLEXION, le KALÉIDOSCOPE, les FRISES ÉVOLUTIVES,
- Les aires et périmètres avec le CURVICA, les PATRONS du CUBE,
- La vision et la structuration de l'espace avec le CUBE SOMA et la TOUR INFERNALE,
- La logique avec LOGIX, BOÎTE DE RANGEMENT (Dominos),
- Le calcul mental avec TRIO, TRIOLET, MATHADOR, CAMPUS, PYTHAGORE, LOTO,
- La combinatoire avec la recherche de l'ensemble des pièces d'un jeu, étant données leurs caractéristiques, avec les carrés de MAC-MAHON, le TRIOMINO, le CURVICA, les DOMINOS...

Deux exemples :

- Le LOTO mathématique

Le principe est celui du loto traditionnel. On distribue des cartes de LOTO aux élèves, mais les nombres ne sont pas annoncés tels quels par l'animateur. Ils sont donnés sous formes d'opérations adaptées au niveau de la classe (entiers, décimaux, fractions...). Ils peuvent même être les solutions d'équations pouvant être résolues mentalement. Des grilles figurent dans la brochure "JEUX 5" de l'APMEP.

- Les DOMINOS - Boîtes de rangement

Ce jeu permet une activité de recherche de classification logique, de dénombrement et de rangement des pièces dans une boîte avec un plan préétabli. Les 28 dominos ont été rangés dans une boîte rectangulaire de dimensions 7 x 8. Seule la position des points a été notée ; il s'agit donc de retrouver la disposition des dominos.

Nous avons aussi appris comment faire travailler nos élèves sur la recherche de la logique de l'ensemble des pièces d'un jeu (SET, TANTRIX...).

Tout ceci nous permettra d'analyser un nouveau jeu et de l'adapter pour en tirer un profit mathématique.

En conclusion, nous sommes persuadés que tous ces jeux permettent de remotiver les élèves à faire des mathématiques, de développer la concentration, les qualités de soin, l'écoute et le respect des autres à travers le respect des règles, tout en procurant du plaisir.

La passion communiquée par Nicole et Jean, la quantité d'informations transmises et la somme de documents donnés ont largement dépassé nos attentes. Nous regrettons seulement le manque de temps : 3 x 3h, c'est bien trop court pour appréhender un thème aussi vaste.

Et OUI, les maths en jouant, c'est jouable.

Merci à Nicole et Jean.

Sabine, Dominique, Pierre, Rose, Bernard, Abderrahman, Florian, Éric et Françoise.

BIBLIOGRAPHIE

- Les brochures "JEUX" de l'APMEP, particulièrement "JEUX 1" et "JEUX 5".
- Jeux de formes et formes de jeux, Bernard Bettinelli - IREM de BESANÇON.
- Problèmes et divertissements mathématiques (2 tomes), Martin Gardner – DUNOD.
- Nouveaux divertissements mathématiques, Martin Gardner – DUNOD.
- Mathématiques, magie et mystère, Martin Gardner – DUNOD.
- Récréations mathématiques (4 tomes), Édouard Lucas - ALBERT BLANCHARD.
- Avec des nombres et des lignes, André Sainte-Laguë – VUIBERT.
- Jeux mathématiques et mathématiques des jeux, Jean-Paul Delahaye - BELIN/Pour la Science

ATELIER N° 4

Pliages mathématiques

Valérie LAROSE - François BOUYER

Objectifs généraux

Le chapitre "géométrie dans l'espace" est maltraité, repoussé en fin d'année et le premier supprimé du programme au cas (non exceptionnel) où l'on manquerait de temps. Les professeurs y sont mal à l'aise, car les objets manipulés étant encombrants, on a pris l'habitude de les évoquer de façon abstraite, le plus souvent par l'intermédiaire de dessins en perspective. Dans le meilleur des cas, le professeur dispose d'un solide en bois ou en plexiglas à montrer du bureau aux élèves. Enfin, pour les mêmes raisons de manque de temps, les règles du dessin en perspective, pas si simples ni intuitives, ne sont jamais vraiment enseignées. Par sa facilité de mise en œuvre, le pliage peut être une réponse à ces difficultés. Que ce soit en classe ou en club, les pliages sont un moyen motivant de faire des mathématiques. L'élève qui a réalisé un pliage a par la suite une représentation concrète de l'objet mathématique obtenu ; il s'approprie l'objet en manipulant du concret. La présence simultanée de l'objet et de sa reproduction en perspective permet des allers et retours rapide entre les deux et ancre la perspective dans les représentations de l'élève. Il apprend ainsi à décoder un dessin en perspective, en particulier lorsque des calculs de volumes ou de longueurs sont demandés.

En classe, l'enseignant a une priorité pédagogique liée au programme : les pliages seront ceux des volumes étudiés (cube, pavé droit, pyramides, prismes) ou des pliages plans mettant en action la symétrie axiale ; ils permettent de manipuler les objets, de se les approprier, de mieux comprendre par la suite la nécessité de choisir tel ou tel plan pour appliquer un théorème en vue de calculer une longueur demandée. Parmi les pliages possibles pour obtenir un volume souhaité, l'enseignant choisira en fonction de la simplicité du pliage ou des calculs qu'il souhaite ensuite faire.

Exemple : on peut construire rapidement une pyramide à base carrée évidée (on a matériellement la hauteur et quatre triangles rectangles ayant comme côtés la hauteur de la pyramide et une demi diagonale du carré de base) ce qui permet à l'élève de réaliser dans quel triangle rectangle le théorème de Pythagore pourra être appliqué. Mais on peut également choisir de faire réaliser une pyramide de même volume que la précédente mais ayant ses faces latérales pleines pour une première approche de l'objet.

Les pliages proposés lors de l'atelier sont en grande partie des créations de Didier Boursin, architecte et sculpteur de papier, ils sont décrits dans les ouvrages "Mathématiques et pliages" ainsi que "mathémagie des pliages" écrits par Didier Boursin et Valérie Larose, édités aux éditions du Kangourou.

En club, les élèves sont volontaires et on a le temps de réaliser des structures géométriques qui impressionnent soit du point de vue esthétique (choix des couleurs des papiers utilisés), soit par leur complexité, soit par leur côté totalement magique (flexagone ou flexaèdre réalisés à partir d'une simple enveloppe par exemple). Les élèves découvriront des mathématiques là où ils ne pensaient que construire des objets. Il est passionnant d'observer des élèves qui en classe abandonnent très vite avec un refus de l'effort se mettre à plier soigneusement quelques dizaines de modules pour un assemblage futur qui aurait de quoi décourager ! Ces assemblages demandent de la patience et plusieurs séances pour être achevées.

Certains pliages proposés lors de l'atelier utilisent la technique du pliage modulaire. Une référence en ce domaine est l'artiste japonaise Tomoko Fusé qui a publié de nombreux ouvrages en langue anglaise dont le remarquable "Unit Origami". Une technique de pliage modulaire trouvée sur internet et présentée lors de l'UE 99 par François Gaudel a été expérimentée en club par François Bouyer : il la présentera au cours de l'atelier.

Je dois préciser qu'après avoir animé pendant des années un club pliage en collège, je me suis depuis trois ans investie dans un parcours diversifié hebdomadaire intitulé "Devenez mathartiste" en partenariat avec une collègue d'arts plastiques. Les pliages "mathémagiques" sont à l'honneur et permettent à des élèves en grande difficulté ou scolaire ou comportementale (voire les deux à la fois) de se motiver et d'être enfin acteur.

Déroulement de l'atelier

L'introduction d'un pliage lors d'un cours de maths ou en club peut se faire de diverses manières selon les objectifs visés : Il importe cependant que l'enseignant le maîtrise totalement, qu'il l'ait testé de nombreuses fois pour en repérer les difficultés.

Avec des élèves, je choisis soit de montrer aux élèves le pliage pli par pli ; c'est alors l'écoute de toute la classe en même temps qui est sollicitée ainsi que la mémoire visuelle des plis pour pouvoir recommencer seul le pliage ; cette mémoire n'est pas la même que celle qui permet de retenir les tables de multiplication ou une poésie : c'est une mémoire des gestes, d'un savoir faire manuel peu sollicité durant nos cours de maths.

Il m'arrive également de distribuer le diagramme du pliage pli par pli avec les consignes rédigées en français ; c'est alors l'utilisation du français qui est sollicitée. L'élève est autonome devant les consignes, il doit comprendre un nouveau langage ... le solfège du plieur de papier et visualiser les dessins en perspective.

Lors de l'atelier, j'ai proposé les deux façons de procéder. Les ouvrages d'où sont tirés les diagrammes étaient disponibles et permettaient aux stagiaires de se familiariser avec les diagrammes, les codes des plieurs pour signaler telle ou telle action.

Nous avons donc réalisé, dans l'ordre, les pliages suivants, dans la bonne humeur même si parfois il a fallu tout recommencer depuis le début et pester lors de l'assemblage final ! Chaque réalisation a permis de discuter de son utilisation en cours, en club, des mathématiques à exploiter ...

Les secrets mathématiques du ballon de foot

Ceci n'est pas un véritable pliage mais une activité de découpage/pliage tout à fait spectaculaire qui permet d'obtenir un icosaèdre tronqué à partir d'un pavage d'hexagones (donc plan). Les faces pentagonales sont évidées, les faces hexagonales pleines. Vous trouverez en Annexe 1 de quoi réaliser l'objet.

Ref : "mathématiques buissonnières en Europe" publié à l'occasion de la fête de la science 2000.

Le flexagone plan

Pliage mathémagique qui fait apparaître une troisième face lors de sa manipulation

Un choix astucieux de décoration géométrique des faces permettra des transformations étonnantes.

Ref : "mathémagie des pliages" page 43 D. Boursin et V. Larose, Editions du Kangourou.

Un stagiaire a également pris l'initiative de réaliser un flexaèdre à partir d'une enveloppe.

Ref : "pliages et mathématiques" page 63 D. Boursin et V. Larose, Editions du Kangourou.

Cube réalisé avec 6 modules

Pliage qui à partir de six modules identiques permet d'obtenir un cube à faces pleines. Le pliage d'un module est simple, l'assemblage demande de réfléchir surtout si on souhaite obtenir un cube avec des faces opposées de la même couleur.

12 modules identiques mais pliés en deux à la fin permettent d'obtenir un rhomboèdre.

Ref : "pliages et mathématiques" page 39 et 41 D. Boursin et V. Larose, Editions du Kangourou.

Cube réalisé à partir d'une enveloppe 11×22

Pliage magique qui permet à une enveloppe au format 11×22 de se transformer en cube au bout de quelques plis et coups de ciseaux. Ce cube peut se coller astucieusement à cheval sur deux feuilles d'un cahier d'élève et permettre ainsi d'être utilisé toute l'année en classe.

Ref : "pliages et mathématiques" page 44 D. Boursin et V. Larose, Editions du Kangourou.

Cube réalisé à partir de "bandes" d'enveloppe 11×22

Pliage extrêmement simple qui permet à un élève dès le CP de construire un cube en intégrant la notion de "trois dimensions". La réalisation de huit cubes et leur fixation les uns aux autres permet de construire un jeu de cubes articulés, qui décorés avec des lignes géométriques réserve de belles surprises visuelles.

Ref : "pliages et mathématiques" page 42 D. Boursin et V. Larose, Editions du Kangourou.

Ref : "mathémagie des pliages" page 7 D. Boursin et V. Larose, Editions du Kangourou.

Cubes avec des coins en moins

Même pliage/découpage que précédemment mais des entailles sont faites astucieusement sur les bandes pour qu'au montage (parfois délicat), un cube avec un ou deux coins en moins apparaisse.

Ref : "mathémagie des pliages" page 7 D. Boursin et V. Larose, Editions du Kangourou.

Cube réalisé avec 12 modules

Réalisation de 12 modules créés par Tomoko Fusé. Cette fois, un diagramme a été fourni aux stagiaires. Ce pliage est avant tout une réalisation de club car les 12 modules puis l'assemblage demandent du temps. Le cube obtenu a ses faces évidées, on voit les arêtes communes à deux faces.

Ref : "Unit Origami" de Tomoko Fusé

Pop Up ou cartes animées

Un pop up se définit comme une structure en 3D qui se déploie lorsqu'on ouvre des formes préalablement pliées. Les structures obtenues permettent de travailler les notions de parallèles et perpendiculaires, de symétries ; accessibles dès le plus jeune âge, les objets obtenus développent l'imagination et permettent la construction d'objets fractals.

Ref : "mathémagie des pliages" page 40 D. Boursin et V. Larose, Editions du Kangourou.

Ref : "pliage et découpage" de Paul Jackson aux éditions Manise.

Octaèdre réalisé à partir d'une enveloppe 11×22

Magie de ce pliage qui après plusieurs plis transforme l'enveloppe en hexagone puis en octaèdre !

Ref : "pliages et mathématiques" page 52 D. Boursin et V. Larose, Editions du Kangourou.

Tétraèdres réguliers

Plusieurs tétraèdres ont été réalisés soit à partir d'enveloppe 11×22, soit à partir de feuille au format A4. Les modèles obtenus ont soit des faces pleines, soit des faces évidées. Un assemblage de plusieurs tétraèdres de volumes différents permet d'obtenir un octaèdre étoilé.

Ref : "pliages et mathématiques" page 30 ; 31 ; 32 D. Boursin et V. Larose

Ref : "mathémagie des pliages" page 22 D. Boursin et V. Larose, Editions du Kangourou.

Pyramides à bases carrées

Là aussi, des pliages utilisent des enveloppes 11×22 avec la possibilité de coller astucieusement la pyramide dans un cahier et de la voir se monter en ouvrant le cahier. Une pyramide évidée permet de visualiser la hauteur de la pyramide et les 4 arêtes latérales.

Ref : "pliages et mathématiques" page 36 D. Boursin et V. Larose

Ref : "mathémagie des pliages" page 20 et 24 D. Boursin et V. Larose, Editions du Kangourou.

Pliages modulaires de polyèdres, partie de l'atelier animé par François Bouyer

L'idée de base de ce mode de construction est séduisante par sa simplicité: chaque arête du solide sera formée par une feuille de papier pliée en trois. Le fait de plier la feuille en trois forme une "poche" de chaque côté, dans laquelle viendront s'insérer les arêtes concourantes. Les angles entre les arêtes sont déterminés par les angles entre les plis que l'on fera comme expliqué plus loin.

L'énorme atout de cette technique, c'est qu'on peut se lancer dans une construction dantesque sans trop savoir où on va. Tout ce qu'on a besoin de savoir, c'est l'angle entre deux arêtes et la longueur des arêtes. Nul besoin de génie de plieur de papier qui fait apparaître une pyramide après 3 plis. Un peu de méthode, des papiers de couleurs différentes pour ne pas se mélanger entre les différents types d'arêtes et c'est parti. De fait, en club (cette technique est trop longue pour être utilisée en classe), il faut plutôt freiner les élèves qui, après avoir fait un ou deux cubes pour s'échauffer, attaqueraient volontiers le grand rhombicuboctaèdre étoilé...

Un autre atout de cette technique est que le résultat est vite spectaculaire et qu'elle se prête bien à un travail en groupe : il y a beaucoup (parfois **vraiment** beaucoup) de feuilles à plier, et de nombreuses mains sont utiles, voire indispensables à l'assemblage final. Lors de l'atelier, nous nous sommes lancés dans un ballon de football (32 faces, 60 sommets, 90 arêtes...) dont rien que l'assemblage a mobilisé 8 personnes pendant 2 heures....

Il y a aussi quelques défauts.

Tout vient du fait que chaque bande de papier s'enroule en oblique autour d'une arête. Ceci a plusieurs conséquences:

La principale me semble-t-il est que l'aspect final est un peu déroutant. En effet, cette oblique fait apparaître sur chaque face un polygone de même nature mais ayant tourné d'un certain angle. C'est assez voyant sur les faces à angles droits et donne un aspect bancal à la construction. J'ai essayé avec des bandes de papier plus fines (en partant d'un rectangle plus allongé que du A4), mais c'est pire : l'angle de l'oblique est alors plus faible, et l'aspect "de guingois" encore plus visible.

D'autre part, cet enroulement est orienté : la bande peu s'enrouler dans une hélice à droite ou une hélice à gauche. Ceci est déterminé par le premier pli que l'on fait (voir plus loin). Il faut bien faire attention à faire tourner les arêtes toutes dans le même sens!

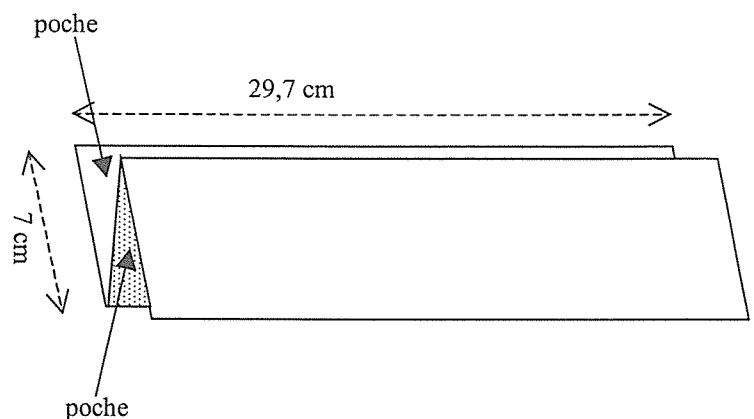
Enfin, chaque arête étant commune à deux faces (rien de nouveau ici), chaque extrémité de la bande de papier fait donc partie d'une face différente. Les angles qu'il faut marquer aux extrémités de la bande sont les angles des faces concernées. Par exemple, une arête située entre un hexagone et un pentagone devra avoir une extrémité à 120° et l'autre à 108°. Mais on a tellement l'habitude de considérer une arête comme un côté d'une face qu'on aura vite fait de plier des arêtes 108°-108° ou 120°-120°, et l'angle étant peu différent, on ne s'en rendra peut-être compte qu'assez tard dans l'assemblage...

De ces trois défauts, seul le premier est sérieux : le deuxième ne demande qu'un peu d'attention, et le troisième est en fait une qualité : après quelques erreurs de ce type, on comprend bien mieux l'agencement spatial entre les arêtes.

Enfin, il faut prendre garde que dès que le nombre d'arêtes monte, vu qu'on part d'une arête d'une vingtaine de centimètres, le résultat est vite monumental. Notre ballon de football (un cas extrême quand même) faisait près d'un mètre de diamètre et s'écroulait quelque peu sous son propre poids...

Concrètement, on part d'une feuille au format A4 qu'on plie en trois dans sa largeur (on obtient donc un rectangle de 7cm sur 29,7cm).

Sur cette bande, on réalise un pli montagne en oblique. Ce pli sera l'arête. L'angle de l'oblique est quelconque, et on peut le faire varier pour choisir la longueur de l'arête. C'est également à cette étape qu'on choisit le sens de rotation des bandes autour des arêtes : si l'oblique part d'en haut à droite vers en bas à gauche, les bandes s'enrouleront dans une hélice à droite (pas de vis normal) ; si elle va d'en haut à gauche pour aller vers en bas à droite, on aura une hélice à gauche (pas de vis gaz butane). Il n'y a plus qu'à marquer, à chaque extrémité de l'oblique, un pli montagne à l'angle qu'il faut, c'est-à-dire l'angle de la face dans laquelle cette extrémité de la bande est incluse.



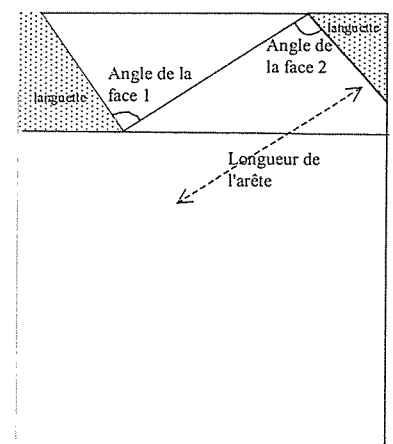
Quelques conseils pratiques:

Si toutes les faces sont semblables (cas des solides de Platon), toutes les arêtes sont semblables. C'est un choix raisonnable pour débuter.

Comme toujours en pliage, il est important d'avoir des plis bien marqués. Une bonne façon pour ce faire est de marquer le pli avec une pointe de compas, un stylo bille fin ou le dos d'un couteau de cantine avant de le plier.

Pour épargner nos précieuses tables, il convient de fournir des cartons. On en trouve des très solides dans les supermarchés entre les packs d'eau minérale.

Pour une production en série, il pourra être agréable d'imprimer les plis à faire. Cela permettra au passage de réaliser un pliage en trois précis, ce qui n'est pas très facile. En fait, il n'y a donc que 4 traits à imprimer (comme ci-contre). Pour cette raison, on préférera l'impression directe depuis l'ordinateur à la photocopieuse, qui déforme toujours un peu. Le prix revient est faible car il y a très peu d'encre consommée. On procédera par tâtonnement (en agissant sur les marges par exemple) pour bien positionner les traits



Si on attaque une construction avec des faces non toutes semblables (une pyramide à base carrée par exemple), il sera judicieux de prendre des papiers de couleurs différentes pour les différentes arêtes (en l'occurrence, des carré-triangle ou des triangle-triangle).

Bibliographie :

Didier Boursin est l'auteur aux Editions Dessain et Tolra de:

- Pliages en mouvement

- Pliages en liberté (pliages d'avions et d'objets volants)

- Pliages utiles

- Animaux de papier

- Le livre de l'origami rassemble des extraits des précédents ouvrages

- Pliages premiers pas

- Pliages magiques

- Pliages des serviettes

Didier Boursin et Valérie Larose sont auteurs aux éditions ACL-Kangourou de :

- Pliages et mathématiques et Mathémagie des pliages

Paul Jackson (spécialiste des PopUp et cartes animés) est l'auteur de :

- Pliages et découpages aux éditions Manise

- Origami et art du papier chez Quinted Publishing Limited, MLP pour l'édition française

David Mitchell est l'auteur aux éditions Tarquin (voir catalogue des éditions Tangente) de :

- Mathematical Origami

Pour les pliages modulaires, il y a les nombreux livres de Tomoko Fusé en langue anglaise accessibles sur le site internet de Amazon.fr. Entre autres :

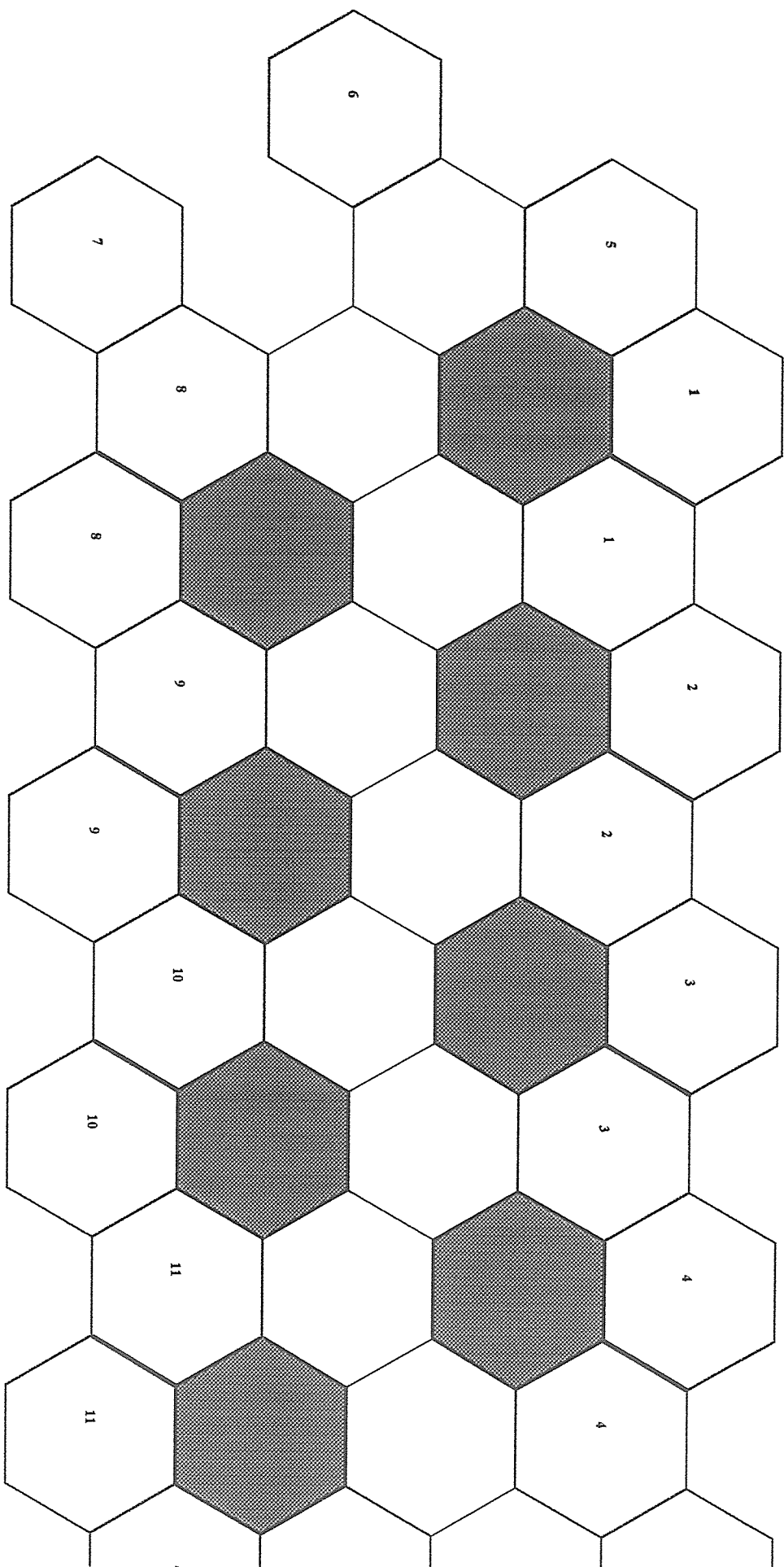
- Unit Origami chez Japan Publication

- Boxes chez Japan Publication

Pour le plaisir des yeux et des textes, un très beau livre aux éditions Seuil intitulé "Papier(s)".

Sur Internet

Compte tenu des délais de confection de ces actes, toute référence donnée ce jour risque fort d'être périmée lors de la parution, il n'est donc pas très raisonnable d'en fournir ici. Par contre les mots "polyèdre", "polyhedron", "origami", "tomoko fusé" permettent de belles trouvailles dans les moteurs de recherche. (www.google.fr fournit très rapidement des réponses nombreuses et pertinentes).



Consignes de montage:

- ① Découper la figure en suivant le bord extérieur
- ② Enlever les hexagones grisés en coupant le long des traits plus épais.
- ③ Marquer soigneusement tous les plis restants.
- ④ Coller l'un sur l'autre les hexagones portant le même numéro.
- ⑤ Combien y a-t-il de sommets ? de faces ? d'arêtes ?
- ⑥ Les sommets sont-ils tous semblables (même nombre d'arêtes, même type de faces, dans le même ordre) ?

ATELIER N° 5

Histoire et N.T.I.C.

Didier MISSENARD – Jean-Alain RODDIER

Le thème central de cet atelier a été la mise en place d'un club mathématique, avec comme une problématique général qui a émané des questions suivantes:

Comment initier un club mathématique?

Quels thèmes peut-on choisir de manière à toucher un public le plus large possible?

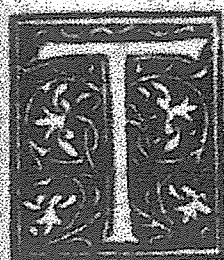
Comment intégrer les nouvelles technologies dans le travail du club?

Nous nous sommes avant tout basés sur notre modeste expérience, non pas pour répondre à toutes ces questions de façon systématique, mais plutôt en essayant au cas par cas d'aider les stagiaires dans leur démarche de mise en place d'un club mathématique dans leurs établissements respectifs.

Le climat d'amitié qui a régné dès le premier jour au sein de cet atelier a eu pour effet que les stagiaires ont d'entrée voulu travailler de façon non-isolé, nous avons ainsi vu plusieurs sous-groupe se former avec plusieurs pistes retenues :

- 1^{er} sous-groupe : Renée (lycée), Fabrice (collège 13), Stéphane (Lille), Mireille (Lycée)
Ce groupe a travaillé sur le nombre PI, en cherchant comment intéresser les élèves à effectuer des recherches sur ce nombre. Le travail s'est ensuite orienté vers l'exploitation de formules classiques donnant PI en intégrant l'outil informatique dans la recherche des premières décimales de PI.
- 2^{ème} sous-groupe : Philippe, Marc, Françoise
La recherche d'exemples simples de cryptographie a motivé ce groupe. Des exemples de codage peuvent être proposés à des élèves de collège à condition de lisser les difficultés. Comment créer une affiche de présentation du club de Mathématiques au sein d'un établissement incluant des questions de cryptographie ?
- 3^{ème} sous-groupe : Yves
Recherche sur des textes anciens, on lira en annexe un texte très intéressant sur la vie d'OZANAM (annexe 1). L'on trouve actuellement de nombreux sites web qui font référence aux textes anciens, le site Gallica disponible à partir de celui de la Bibliothèque Nationale de France en est une excellente illustration.
- 4^{ème} sous-groupe : Catherine
Les marées sont un sujet d'étude qui me peut motiver les élèves, c'est bien entendu un thème qui pourra être repris en TPE en classe de Première.

¶ Tabulę astronomice illustrissimę Alfonsij regis castelle incipiunt fideri fodię.



Abula differentiarę vni⁹ regni ad aliud et nomina regum atq; cuiuslibet grę cognite: Que quidē diuersitas grarę erat necessaria: ut diuersis gentibus possent huiusmodi tabulę deseruire: tam romanis q̄ grecis: tam arabibus q̄ latinis: et ceteris aliorum.

Differentię omniū grarū hic positarę ad inuicē in 4^{to} 3^{to} 2^{to} et p^o eg^o pollutib⁹ quib⁹ ppositis annis: quarū prior et maior in tempore semp pu^o inscribitur et minor et posterior secundo habet scribi.

		4	3	2	p ^o
Dra	Diluij et regis alfonsij	7	21	40	38
Dra	Nabuchodonosor et regis alfonsij	3	22	44	25
Dra	Philippi et alfonsij	2	39	45	5
Dra	Alexandri magni et alfonsij	2	38	32	44
Dra	Cesaris et alfonsij	2	10	49	19
Dra	Incarnationis et alfonsij	2	6	57	59
Dra	Diodetiani et alfonsij	1	38	11	13
Dra	Arabum et alfonsij	1	3	54	24
Dra	Yegdagert. i. periarum et alfonsij	1	2	54	0
Dra	Diluij et nabuchodonosor	3	58	56	13
Dra	Diluij et philippi	4	41	55	33
Dra	Diluij et alexandri magni	4	43	7	54
Dra	Diluij et cesaris	5	10	51	19
Dra	Diluij et incarnationis	5	14	42	39
Dra	Diluij et diodetiani	5	43	29	25
Dra	Diluij et arabum	6	17	46	14
Dra	Diluij et periarum	6	18	46	38
Dra	Nabuchodonosor et philippi	0	42	59	20
Dra	Nabuchodonosor et alexandri	0	44	11	41
Dra	Nabuchodonosor et cesaris	1	11	55	6
Dra	Nabuchodonosor et incarnationis	1	15	46	26
Dra	Nabuchodonosor et diodetiani	1	44	33	12
Dra	Nabuchodonosor et arabum	2	18	50	1
Dra	Nabuchodonosor et periani	2	19	50	25
Dra	Philippi et alexandri magni	0	1	12	21

Activités mathématiques autour de trois documents historiques bruts

En introduction à l'atelier, nous avons présenté trois documents historiques qui nous semblent présenter un intérêt spécifique dans le cadre d'une activité de club.

En effet, ces documents sont pour le moins cryptiques de prime abord, et leur déchiffrement peut sembler, d'une part difficile, voire impossible, d'autre part alléchant : on y joue l'archéologue, le détective.

Leurs caractéristiques communes sont d'être des documents mathématiques (ce n'est pas évident si vous y jetez un coup d'œil...), de requérir une recherche historique, et de receler un contenu mathématique accessible à un élève du secondaire, mais permettant, pour deux d'entre eux, des approfondissements.

Document 1 : une table alphonsine

Cette table est extraite des "tables alphonsines". Ce sont des tables astronomiques qui succédèrent à celles de Ptolémée (II^e siècle), puis aux tables de Toulouse et de Tolède (XIII^e siècle), et qui ne furent détrônées en qualité que par celles de Nicolas Copernic.

Ces tables furent calculées sous l'impulsion d'Alphonse X (1252-1284), roi de Castille, codificateur du Castillan, législateur et poète. Elles furent achevées vers 1292.

Elles furent diffusées dans tout l'Occident par les astronomes parisiens Jean de Murs et Jean de Lignières à partir de 1320. Une notice d'utilisation en fut rédigée par Jean de Saxe, sous le nom de "canons de Jean de Saxe" (vers 1327) : les tables, avec cette notice, furent imprimées dès 1483, et connurent alors une large diffusion, jusqu'au XVI^e siècle.

Ces tables contiennent une partie chronologique, des tables de coordonnées, et des tables d'équations d'objets célestes.

La table qui nous intéresse appartient à la première partie, et permet de traduire des dates écrites dans différentes "ères". Les durées y figurent en jours, en base soixante.

Son intérêt est multiple : de prime abord, elle est très intrigante, puisque même le texte d'introduction, en latin tardif, est délicat à déchiffrer. Ensuite il faut se rendre compte du fait que les nombres indiqués sont écrits en base 60. Enfin, il faut tenter de déchiffrer les légendes des lignes, ce qui oblige à faire de l'Histoire. Finalement, quand on a compris qu'il s'agissait d'écarts entre "ères", il reste à constater la cohérence des calculs.

Document 2 : Une tablette babylonienne

Cette tablette, très simple, est une table de multiplication.

Son intérêt est de permettre une première approche du système de numération babylonien, en écriture cunéiforme, particulièrement pour aborder plus facilement l'étude du document 3.

Document 3 : La tablette "Plimpton 322"

Cette tablette est un ensemble de données numériques dont certains aspects restent encore sujets à controverse.

Elle a été datée d'environ 1700 avant notre ère. Il s'agit d'abord d'un recueil de triplets pythagoriciens. On en est réduits aux conjectures sur, d'une part les raisons qui ont poussé à ces calculs, vu le caractère foncièrement "utilitariste" des mathématiques babyloniennes, d'autre part sur la façon dont ces triplets furent calculés, bien qu'une des colonnes numériques de la tablette permette des tentatives d'explications.

L'étude peut commencer par la colonne de droite, qui numérote les lignes, et permet donc de comprendre le fonctionnement du système de numération des babyloniens. Ensuite vient la

traduction des divers nombres en base 10, pour plus de facilité. On peut alors remarquer la présence de carrés d'entiers dans les deux colonnes centrales, ce qui peut faire penser à une table de triangles rectangles. Effectivement, on constate que la différence entre le carré de l'une des colonnes et celui de l'autre est encore un carré d'entier (à quelques erreurs qui sont sans doute des erreurs de transcription). Ces troisièmes côtés de triangles rectangles ne figurent pas dans la tablette (brisée), et l'on ne sait si cet omission est ou non volontaire. L'étude de la colonne de gauche est beaucoup plus délicate, puisqu'elle donne lieu à diverses interprétations à l'heure actuelle : on pense souvent qu'elle contient des données qui ont permis de construire cette table.

Bibliographie pour le document 1

"Les Tables Alphonsines avec les Canons de Jean de Saxe"

Edition, traduction en commentaire par Emmanuel Poulle

Editions du CNRS, 1984

ISBN 2-222-03430-2

Cet ouvrage contient une introduction critique, une traduction des canons, ainsi que les tables elles-mêmes. Des commentaires explicatifs suivent, table par table.

La table proposée a aussi fait l'objet d'un petit article dans "Tangente" n°24.

Bibliographie pour le document 3

- Mesopotamian Mathematics, 2100-1600 B.C. : Technical constants in bureaucracy and Education.

Eleanor Robson

Oxford University (1998)

- Methods and traditions in babylonian mathematics I : Plimpton 322, Pythagorean Triples, and the Babylonian Triangle Parameter Equations

Historia Mathematica 8 (1981)

- Mathematik, Reallexikon der Assyriologie 7 (1987-1990)

R.C. Buck

- Sherlock Holmes in Babylon

American Mathematical Monthly 87 (1980)

Bibliographie pour les documents 2 et 3

A History of Mathematics, An introduction

Victor J. Katz

Addison-Wesley (1998)

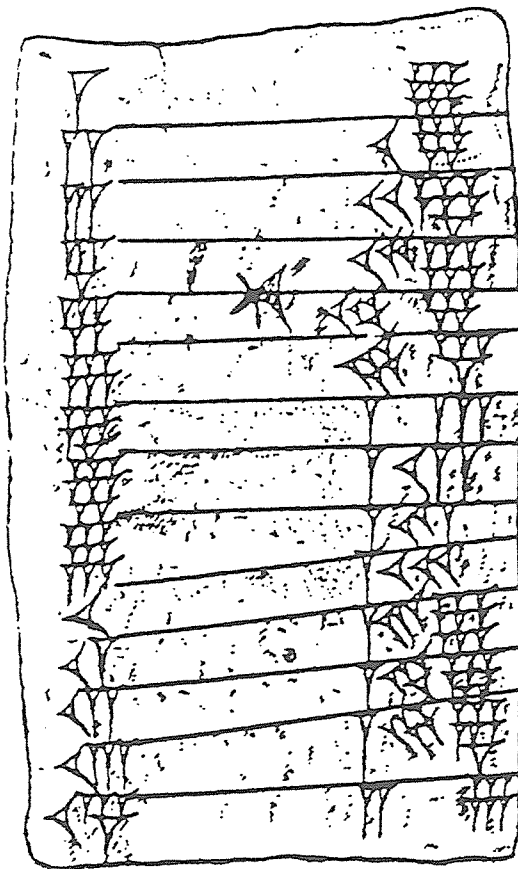
Document 2

Col. I

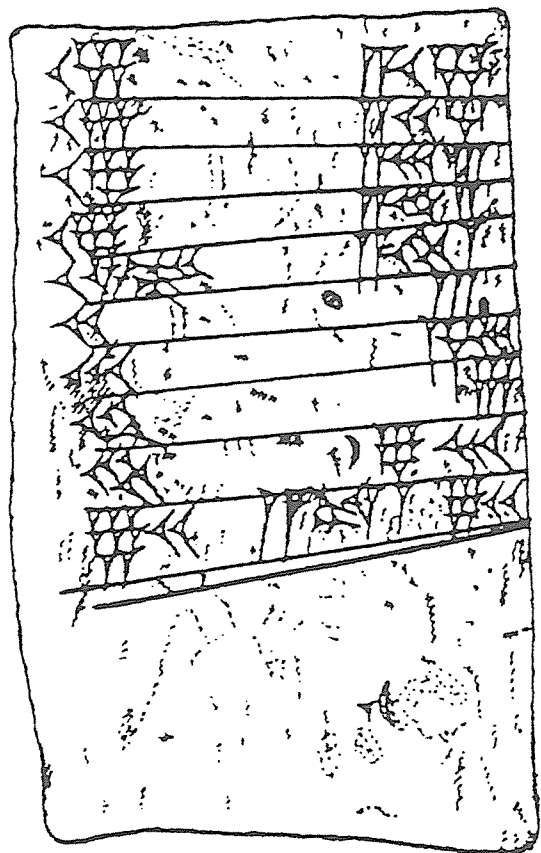
Col. II

Col. I

Col. II

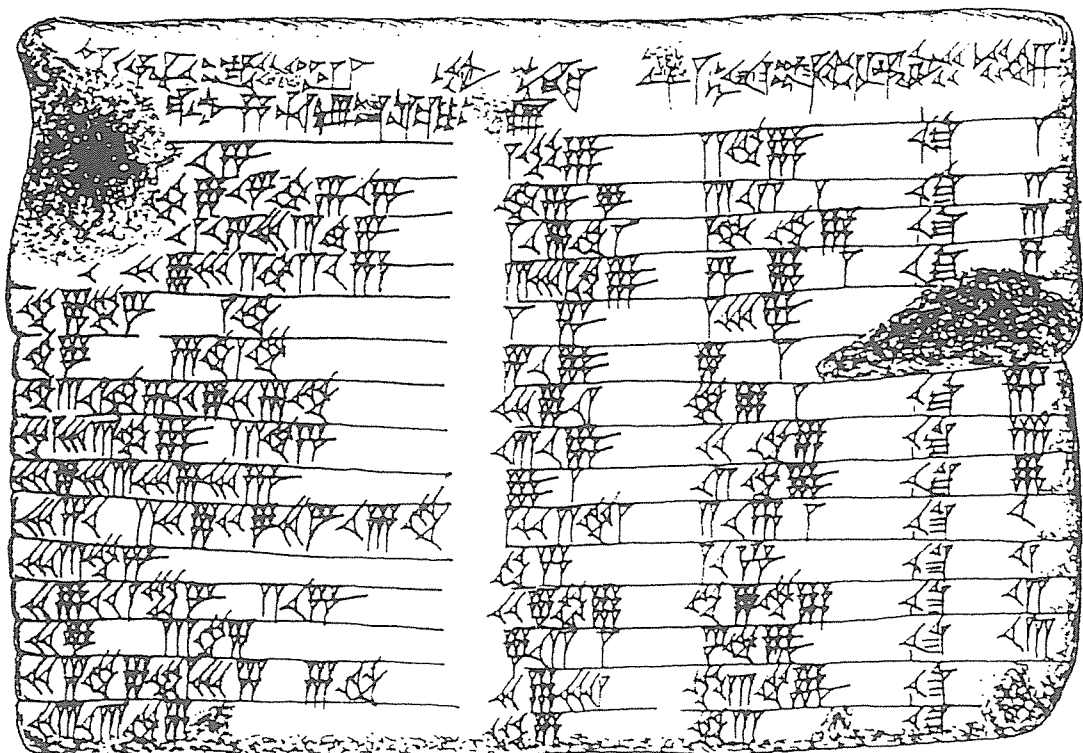


Obverse



Reverse

Document 3



Annexe 1

*Extrait des éloges des académiciens
avec l'histoire de l'Académie Royale des Sciences
par Monsieur de Fontenelle à la HAYE (MDCCXL)*

Eloge de Monsieur OZANAM

Jacques OZANAM, naquit en 1640, dans la Souveraineté de Dombes d'un père riche, et qui avait plusieurs terres. Sa famille était d'origine juive, ce que marque assez son nom, qui tout à fait l'air hébreu, amis il y avait longtemps que cette tache, peut-être moins réelle qu'on ne pense, était effacée par la profession du christianisme, et de la religion catholique. Cette famille était illustrée par plusieurs charges qu'elle avait possédées dans des parlements de provinces.

Monsieur OZANAM était cadet, et par la loi de son pays tous les biens devaient appartenir à l'aîné. Son père, qui était un homme vertueux, voulut réparer ce désavantage par une excellente éducation. Il le destina à l'église pour lui faire tomber quelques petits bénéfices qui dépendaient de la famille. Les mœurs du jeune Homme étaient bien éloignés de s'opposer à cette destination, elles se portaient naturellement à tout ce qui serait à désirer dans un Ecclésiastique, et une Mère très pieuse les fortifiait encore et par son exemple et par ses soins, d'autant plus puissants qu'elle était tendrement aimée de ce fils. Cependant il ne se tourna pas volontiers du côté de l'Eglise, il avait fort bien réussi dans ses Humanités, mais il avait pris beaucoup de dégoût pour la Philosophie Scholastique, la Théologie ressemblait trop à cette Philosophie, et enfin il avait vu par malheur des Livres de mathématiques qui lui avaient appris à quoi il était destiné.

Il n'eut point de maître, et on n'avait, garde de lui en donner, mais la Nature seule fait de bons écoliers. A 10 ou 12 ans il passait quelquefois de belles nuits dans le jardin de son père, couché sur le dos pour contempler la beauté d'un ciel bien étoilé ; Spectacle en effet auquel il est étonnant que la force même de l'habitude puisse nous rendre si peu sensibles. L'admiration des mouvements célestes allumait déjà en lui le désir de les connaître, et il en démêla ce qui était à la portée de sa raison naissante. A l'âge de 15 ans il avait composé un ouvrage de mathématique qui n'a été que manuscrit, mais où il a trouvé dans la suite des choses dignes de passer dans des ouvrages imprimés. Il n'eut jamais de secours que de son professeur en Théologie, qui était aussi Mathématicien, mais un secours léger, donné à regret et toujours accompagné d'exhortations à n'en guère profiter.

Après 4 ans de Théologie faits comme ils peuvent l'être par l'obéissance, son père étant mort, il quitta la Cléricature et par piété et par amour des Mathématiques. Elles ne pouvaient pas lui rendre ce qu'il perdait, mais enfin elles devenaient sa seule ressource, et il était juste qu'elles le fussent. Il alla à Lyon où il se mit à les enseigner. L'éducation qu'il avait reçue lui donnait beaucoup de répugnance à recevoir le prix de ses leçons, il eut été assez payé par le plaisir de faire des mathématiques, et de ne parler que de ce qu'il aimait et il rougissait de l'être d'une autre manière.

Il avait encore une passion, c'était le jeu. Il jouait bien et heureusement. L'esprit de combinaisons peut y servir beaucoup. Si la fortune du jeu pouvait être durable, il eût été assez à propos qu'elle eût suppléé au revenu léger des mathématiques.

Il fit imprimer à Lyon en 1670 des tables des Sinus, Tangentes et Sécantes, et des Logarithmes plus correctes que celles de Ulacq, de Pitifcus et de Henry Briggs. Comme ces tables sont d'un usage fort fréquent, c'est un grand repos que d'en avoir de sûres.

Deux étrangers à qui il enseignait à Lyon lui ayant parlé de chagrin où ils étaient de n'avoir point reçu des lettres de Change qu'ils attendaient de chez eux pour aller à Paris, il leur

demanda ce qu'il faudrait, et sur ce qu'ils répondaient 50 pistoles, il les leurs prêta sur le champ sans vouloir de billet. Ces Messieurs arrivés à paris en firent le récit à feu Monsieur Daguesseau, père de monsieur le Chancelier. Touché d'une action si noble en toutes ses circonstances, il les engagea à faire venir ici Monsieur OZAMAN sur l'assurance qu'il leur donnait de le faire connaître, et de l'aider de tout son pouvoir. Peu de gens aussi sensibles au mérite sont à portée de la favoriser, ou peu de gens à portée de le favoriser, y sont aussi sensibles.

Monsieur OZANAM se décida donc à quitter Lyon. Sur la route un inconnu lui dit que s'il pouvait quitter le jeu il ferait fortune à Paris, qu'il y acquerrait beaucoup de réputation, qu'il s'y marierait à 35 ans, et quelques autres choses particulières que l'événement a justifiées. Il y aurait dans cet inconnu de quoi faire un devin si l'on voulait, ou un Rosecroix qui courait le monde.

A peine Monsieur OZANAM était-il arrivé à Paris qu'il apprit que sa mère était à l'extrémité, et voulait le voir avant de mourir. Comme il l'aimait avec tendresse il y vola, mais il eut la douleur de la trouver morte. Elle avait eu dessein de le faire son héritier, mais le frère aîné l'empêcha par des artifices, dont il se punit ensuite lui-même, en conduisant très mal et en dissipant ce bien qu'il avait tant aimé.

Monsieur OZANAM revint à Paris, et n'eut plus aucun commerce avec une famille dont il ne tenait que le nom. Il se défit de la passion du jeu, les Mathématiques furent son unique fonds. Il était jeune, assez bien fait, assez gai, quoique Mathématicien, des aventures de galanterie vinrent le chercher. Une femme qui se disait de condition et qui logeait dans la même maison que lui, tenta vivement sa vertu. Il lui demanda si elle n'avait pas besoin d'argent, et il fut quitte pour quelques Louis d'or. Il conçut que dans le célibat il risquait non seulement de se défendre plus mal, s'il se présentait de pareilles occasions, mais d'être l'agresseur, et il épousa une femme presque sans bien, sui l'avait touché par son air de douceur, de modestie et de vertu. Ces belles apparences, ce qui est heureux, ne le trompèrent point.

Ses études ni ses occupations ne l'empêchaient point de goûter avec elle et avec ses enfants les plaisirs simples que la Nature avait attachés aux noms de mari et de père, mais qui sont aujourd'hui réservés pour les familles obscures, et qui deshonoreraient les autres. Il eut jusqu'à 12 enfants, dont la plupart moururent, et il les regrettait comme s'il eut été riche, ou plutôt comme ne l'étant point, car ce sont les plus riches qui se tiennent le plus incommodés d'une nombreuse famille.

Dans le temps de paix, où Paris était plein d'étrangers, les mathématiques rendaient bien, et il vivait dans l'abondance, bien entendu que c'était l'abondance d'un homme bien réglé. Pendant la guerre la recette baissait, les français y suppléaient peu, parce qu'il les avait détourné de lui en préférant les étrangers, et qu'une certaine habitude, un certain train établi a beaucoup de pouvoir en toute matière. Il employait le temps de guerre à composer des Ouvrages, non pas tant pour se procurer par-là quelque dédommagement, car que peut-on espérer d'un livre de Mathématiques ? que parce qu'il est presque impossible qu'un Mathématicien habile et qui a du loisir, résiste à des vues et à des méthodes nouvelles, qui viennent s'offrir à lui, et en quelque forte malgré lui.

Il composait avec une extrême facilité, quoique sur des sujets difficiles. Sa première façon était la dernière, jamais de ratures ni de corrections, et les imprimeurs le louaient fort de la netteté de ses manuscrits. Quelquefois il résolvait des problèmes embarrassés en allant par les rues, et alors il le faisait apporter promptement à son réveil de quoi les écrire, car la mémoire ennemie presque irréconciliable du jugement, ne dominait pas en lui.

Ses principaux ouvrages sont un dictionnaire de mathématique très ample imprimé en 1691, où il donne par occasion les solutions d'un assez grand nombre de problèmes de très longue haleine, un cours de Mathématique en cinq volumes, imprimé en 1693. Un grand Traité d'Algèbre, des Sections Coniques, des Récréations Mathématiques et Physiques, un Diophante manuscrit qui est entre les mains de Monsieur le Chancelier, Juge fort éclairé même en ces matières. Tous ces ouvrages, et quelques autres moins considérables seulement par le volume, ne roulent que sur l'ancienne Géométrie, mais approfondie avec beaucoup de travail. La nouvelle n'y paraît point, c'est-à-dire, celle qui par le moyen de l'Infini s'est élevée si haut, elle était

beaucoup plus jeune que Monsieur OZAMAN. Il est vrai aussi que l'ancienne, qui est moins sublime, moins piquante, même moins agréable, est plus indispensablement nécessaire, et plus sensiblement utile, et que c'est elle seule qui fournit à la nouvelle des fondements solides.

A l'âge de 61 ans, c'est à dire en 1701, il perdit sa femme, et avec elle tout le repos et tout le bonheur de sa vie. La guerre qui s'alluma aussitôt pour la succession d'Espagne, le réduisit dans un état fort triste. Ce fut en ce temps-là qu'il entra dans l'Académie où il voulut bien prendre la qualité d'Elève, qu'on avait dessein de relever par un homme de cet âge et de ce mérite. Il a valu cette gloire à l'Académie, qui a eu la douleur de ne l'en récompenser par aucune utilité. Il eut plus que du courage dans sa situation, il alla jusqu'à la patience Chrétienne. Il ne perdit même sa gaieté naturelle, ni une sorte de plaisanterie qui le délassait d'autant mieux qu'elle était moins recherchée.

Sans tomber malade il eut un tel pré-sentiment de sa mort, que des Seigneurs Etrangers l'ayant voulu prendre pour maître, il les refusa sur ce qu'il allait mourir. Le Dimanche 3 avril 1717, il alla le matin se promener selon sa coutume au jardin du Luxembourg, il dîna avec appétit, et à trois heures après-midi il se trouva mal, et demanda à se coucher. Sa seule domestique voulut aller chercher son fils aîné qui était sorti, mais il dit qu'il ne pourrait pas venir assez tôt, et peu de temps après il tomba dans une apoplexie dont il mourut en moins de deux heures.

Feue Mademoiselle, Princesse Souveraine du Pays où il était né, l'appelait l'honneur de Sa Dombes. Il a eu plus de réputation parmi les étrangers que parmi nous, qui sur certains points sommes trop peu prévenus en faveur de notre nation, et trop en récompense sur d'autres.

Il savait trop d'Astrologie pour donner dans l'Astrologie judiciaire, et il refusait tout ce qu'on lui offrait pour l'engager à tirer des Horoscopes, car presque personne ne sait combien on gagne à ignorer l'avenir. Une fois seulement il se rendit à un Comte de l'Empire, qu'il avait bien averti de ne le croire pas. Il dressa par Astronomie le thème de la nativité, et ensuite sans employer les règles de l'Astrologie, il lui prédit tous les bonheurs qui lui vinrent à l'esprit ; En, même temps le Comte fit faire aussi son horoscope par un médecin très entêté de cet art, qui s'y croyait fort habile, et qui ne manqua pas d'en suivre exactement et avec scrupule toutes les règles. Vingt ans après le Seigneur allemand apprit à OZANAM que toutes ses prédictions étaient arrivées, et pas une de celles du médecin. Cette nouvelle lui fit un plaisir tout différent de celui qu'on prétendait lui faire. On voulait l'applaudir sur son grand savoir en Astrologie, et on le confirmait seulement dans la pensée qu'il n'y a point d'Astrologie.

Un cœur naturellement droit et simple avait en lui une grande disposition à la piété. La sienne n'était pas seulement solide, elle était tendre, et ne dédaignait pas certaines petites choses qui sont moins à l'usage des hommes que des femmes, et moins encore à l'usage des Mathématiciens, qui pourraient regarder les hommes ordinaires comme des femmes. Il ne se permettait point d'en savoir plus que le peuple en matière de religion. Il disait en propres termes qu'il appartient aux Docteurs de la Sorbonne de disputer, au Pape de prononcer, et au Mathématicien d'aller en Paradis en ligne perpendiculaire.

ATELIER CRYPTOGRAPHIE

Projet

Introduction

- Public visé : lycéens (élèves de Seconde, Première, Terminale).
- Objectif : étude de différents systèmes de cryptage.
- Intérêt pédagogique :
 - ◆ Possibilité d'approche pluridisciplinaire (histoire, français, philosophie, mathématiques).
 - ◆ Travail autonome en équipe.
 - ◆ Utilisation de nouvelles technologies pour la recherche documentaire et le traitement d'algorithmes (Excel, calculatrices, etc.).
 - ◆ Restitution du travail sous forme d'exposition interactive.

Progression

- Séances de sensibilisation : recherche informelle de codages, afin de faire émerger la problématique du cryptage (numérisation des signes d'écriture ; calculs modulo 26, voire plus si l'on code certains signes de ponctuation ; explication de la validité d'un système de cryptage ; liens entre codage et décodage).
- Recherches documentaires sur divers systèmes de cryptage (aspects historiques, mathématiques, techniques, éthiques).
- Constitution de groupes selon les centres d'intérêt des élèves (histoire ; programmation ; arithmétique ; cryptanalyse ; législation).
- Etude plus spécifique de quelques systèmes classiques.
 - ◆ Codage élémentaire (dit « de Jules César »).
 - ◆ Chiffrement affine.
 - ◆ Codage polygraphique (dit « de Hill » – 1930).
 - ◆ La machine Enigma (Seconde guerre mondiale).
 - ◆ Exponentiation arithmétique.
 - ◆ Système RSA (Rivest, Shamir, Adleman – 1978).

Selon le nombre et le niveau des élèves, on dosera les difficultés théoriques soulevées par les différents systèmes (réservant par exemple le RSA aux élèves de terminale S ayant choisi la spécialité mathématique)

Restitution

- Exposition interactive animée par les élèves, avec notamment des exemples simples illustrant certains systèmes de cryptage, ainsi que des messages à décrypter (et pourquoi pas un concours entre tous les visiteurs de l'exposition ?)
- A plus ou moins long terme, en coopération avec des sections techniques et professionnelles, construction d'une machine Enigma...

Eléments de bibliographie

➤ Revues

- ◆ *Bulletin APMEP*, n°406 (septembre – octobre 1996).
- ◆ *Bulletin APMEP*, n°432 (janvier – février 2001).
- ◆ *Pour la Science*, n°260 (juin 1999).
- ◆ *Repères IREM*, n°37 (octobre 1999).
- ◆ *Secrets des Nombres, Tangente*, hors série n°6 (juin 1998).
- ◆ *Tangente*, n°37 (mai – juin 1994).

➤ Livres

- ◆ *Nouveau Transmath, Mathématiques, Terminale S, spécialité* – Editions NATHAN (la plupart des manuels de spécialité en Terminale S proposent quelques activités en rapport avec la cryptographie).
- ◆ *Arithmétique en Terminale S* – IREM de CLERMONT-FERRAND – CRDP AUVERGNE.
- ◆ *184 exercices corrigés d'arithmétique* – Joachim LLORCA – Editions ELLIPSES.
- ◆ *Cryptographie* – Douglas STINSON – Editions VUIBERT.
- ◆ *Histoire d'algorithmes* – Editions BELIN.
- ◆ *Histoire des codes secrets* – Simon SINGH – Editions Jean-Claude LATTES (vient de paraître au format Poche).
- ◆ *Initiation à la cryptographie* – Gilles DUBERTRET – Editions VUIBERT.
- ◆ *Introduction to cryptography* – Johannes A. BUCHMANN – Editions SPRINGER.
- ◆ *Merveilleux nombres premiers* – Jean-Paul DELAHAYE – Editions BELIN.

LE DEBAT SCIENTIFIQUE

« LE DEBAT SCIENTIFIQUE » :

La démarche scientifique en maths, l'éclairage du débat scientifique.

Marc LEGRAND

Le principe du débat scientifique est de faire passer l'élève ou l'étudiant (souvent assez scientifiquement passif en cours ou en TD) de la position d'auditeur d'assertions impersonnelles et réputées vraies (les définitions, théorèmes et démonstrations du professeur) à la position d'auteur d'énoncés problématiques (les conjectures et les propositions de preuves). On part ici du principe que ces conjectures et ces propositions de preuves, l'étudiant ne peut les effectuer s'il ne cherche au préalable à se faire une opinion personnelle sur ce qui est scientifiquement raisonnable et sur ce qui ne l'est pas.

Au lieu de se sentir obligé de s'adresser au professeur de façon orthodoxe sous la forme "j'ai appris que..., j'ai lu dans un livre que... , on m'a enseigné que... et par suite, j'affirme que ... mais je ne porte pas personnellement la responsabilité de ce que j'avance", l'étudiant qui veut participer au débat scientifique organisé par le professeur est invité à prendre la parole en s'adressant directement à ses pairs de la façon quelque peu iconoclaste suivante : "Moi, je pense que telle idée est valide..., que tel raisonnement prouve ou contredit une idée soutenue par moi ou par un pair..., et voilà mes raisons..."

Dans le contrat du "débat scientifique", personne ne prétend que les conjectures transcrites au tableau par le professeur sont des théorèmes, ni que les preuves proposées sont valides. Dans un premier temps, personne ne demande au professeur de trancher sur la vérité ou la pertinence des propos; le rôle de ce dernier est de faciliter l'expression des idées et de permettre aux oppositions de se manifester avec clarté.

Au cours du débat chacun doit donc défendre ses idées avec ténacité tant qu'elles lui semblent plus raisonnables que les explications concurrentes ou contradictoires, et (contrairement au débat polémique) les abandonner, en disant pour quelles raisons, quand il a été persuadé du contraire.

Dans ce "débat d'idées et d'explications", chacun sait qu'il gagne non pas principalement si le débat lui donne raison, mais plutôt si l'explicitation des convictions des uns et des autres l'éclaire et éclaire les autres, fait avancer le groupe dans la compréhension profonde de la situation.

Dans ce débat, le professeur se porte garant de la scientificité globale du débat mais non de la vérité ou de la pertinence des arguments et résultats proposés au fur et à mesure. C'est à la fin seulement qu'il institutionnalise les résultats vrais et conformes (les définitions et théorèmes du cours), qu'il identifie les résultats faux quoique bien séduisants (les erreurs récurrentes contre lesquelles il faudra continuer à se battre), qu'il met en exergue les procédures qui ont été productrices d'idées ou qui ont permis de séparer le vrai du faux (le "métier" de scientifique).

Remarques d'étudiants de DEUG

- Cette année je me rends compte qu'on peut réfléchir en mathématiques.
- J'ai particulièrement apprécié toute la partie du cours portant sur la logique ... je ne comprends pas qu'on ne l'aie jamais enseigné auparavant.
- J'ai découvert qu'on pouvait comprendre les mathématiques.
- Je comprends maintenant que les mathématiques sont une matière à part entière et qu'on peut trouver du plaisir à l'étudier.
- En octobre, math = simple outil inintéressant en lui-même; j'ai découvert des chemins.
- Je m'intéresse vraiment aux mathématiques pour la 1ère année de ma vie.
- Je n'avais jamais considéré le rôle des maths dans la réalité, c'était une science abstraite complètement séparée de la réalité. La modélisation a fait changer mon point de vue.
- Beaucoup d'idées s'éclaircissent quand je rentre chez moi en tram !
- J'ai malheureusement retravaillé les cours et les TD juste avant le partiel ... trop tard.
- Il faut s'investir dans le débat, sinon on risque de s'intéresser plus à la forme qu'au fond.
- Je me dis que je veux prendre la parole, car avant de parler il faut s'obliger à être clair dans sa tête.
- Retravailler le cours chaque week-end est indispensable, sinon c'est un brouillon; au bout de quelques semaines cela devient incompréhensible.
- J'arrive à m'étonner moi-même !
- En amphi on est catapulté vers un autre univers, on sent la classe et notre personnalité dans une autre dimension.
- Cette nouvelle façon de voir les mathématiques m'a tout simplement émerveillé.
- Je ne fonce plus tête baissée dans les calculs, je me pose des questions avant de commencer à chercher des solutions.
- Le fait de mettre en doute et même de nier des faits que l'on prenait pour des évidences jusqu'alors m'a permis de prendre du recul sur tout ou presque tout, mais en revanche j'ai du mal maintenant à distinguer les vraies évidences au risque peut-être de perdre du temps, ce que je n'aurais pas fait avant.
- Ce sont les questions que je me pose lors du débat scientifique qui m'ont permis d'apprendre ce qui m'était resté inaccessible et surtout ce qui ne va pas dans mes raisonnements.
- Le débat nous permet de comprendre nos erreurs et celles des autres pour les éviter par la suite.
- Les démonstrations m'ont toujours semblé sorties du chapeau d'un prestidigitateur; la pratique du débat m'a montré qu'on pouvait les construire en réfléchissant avec méthode.
- J'ai l'impression de vraiment comprendre les choses.
- J'avais l'impression que ce débat nous faisait perdre beaucoup de temps et qu'on n'apprenait pas grand-chose; en fait je me rends compte que j'ai appris beaucoup de choses.
- Les premiers cours qui se sont déroulés sous forme de débat m'ont paru ridicules.
- Cette pratique de débat est assez déroutante, mais il faut la garder; elle est difficile mais elle commence à me plaire.
- Le changement a été très brutal et l'adaptation difficile.
- Je me suis demandé comment avec un cours si brouillon j'arrivais à apprendre quelque chose !
- J'ai l'impression de perdre mon temps.
- Au début je ne participais pas trop, cela me paraissait inintéressant; depuis, en écoutant je me suis rendu compte que cela pouvait être intéressant, parfois même passionnant.

- Au début j'attendais sans cesse qu'après le débat se déroule un "vrai cours": des définitions et théorèmes....
- Ce qui m'a le plus gêné au début me paraît aujourd'hui le plus intéressant : ne plus penser les maths comme une science finie, ne plus venir en cours apprendre la formule miracle pour faire des calculs impressionnants !
- Je ne voudrais surtout pas qu'on revienne à des mathématiques calculatoires.
- Il faut absolument aller plus vite en gardant le système du débat !
- La pratique du débat ne m'a rien apporté, mais il faut impérativement garder les débats.
- ça me plaît!
- Il est un peu tard pour proposer une nouvelle méthode de travail, il faudrait le faire depuis la maternelle ou alors le faire plus tôt.
- L'enseignement que je reçois en math me paraît révolutionnaire et m'intéresse beaucoup par rapport à l'enseignement secondaire que j'ai reçu.
- Cette façon de travailler est très instructive, mais il faut jouer le jeu !
- ça va être dur de retrouver un cours conventionnel l'année prochaine.

Remarques d'étudiants en préparation à l'agrégation de mathématiques après quatre mois de « débat scientifique »

- Ce que j'apprécie ici et qui manque cruellement à l'enseignement des mathématiques, c'est la créativité, la possibilité qui est donnée à chacun d'être des acteurs et non des spectateurs passifs . . .

Dans la plupart des matières, la frontière entre "prof" et "élèves" est tellement bien gardée qu'il n'est plus possible pour l'un comme pour l'autre de pénétrer de l'autre côté.

- Un cours intéressant pour des élèves intéressés! Comment cela fonctionne-t-il dans une classe genre 4ème, où plein d'élèves ont autre chose à penser, et qui ont des lacunes ?

- Le problème de ce cours est que les notions doivent être déjà connues pour qu'il soit efficace puisqu'il me semble qu'il faut un certain recul... il n'est pas évident à travailler, il y a toujours une différence entre ce qui paraît évident quand quelqu'un explique et ce qu'on comprend lorsqu'on lit ses notes !

- On ne fait pas assez de choses ! Et cependant ... cela permet de bien assimiler et d'approfondir ... cela permet de se poser des questions intéressantes puisqu'on a le droit de poser toutes les questions que l'on veut.

Si habituellement les questions les plus intéressantes sont posées en inter-cours ou ne sont pas posées, c'est parce qu'on ne sait jamais si sa question est intéressante ou débile! Si ça a déjà été dit, poser cette question montrerait qu'on n'a rien compris, que l'on n'a pas appris son cours... ici il n'y a pas de honte à ne pas avoir compris ...

- La démarche qui amène l'ensemble des auditeurs à être auteurs et initiateurs de questions à soulever devrait être la forme de communication de tout savoir !

Ce qui conduit à une remise en cause en profondeur du système "éducatif" actuel.

- Je suis vraiment étonnée de la façon dont les gens ont accepté ce cours ... néanmoins quelques sceptiques ont abandonné au départ ... C'est très, trop - par manque d'habitude - fatigant, mais c'est passionnant. Des fois j'aurais envie de revenir à des choses plus simples ou plutôt plus rassurantes... On ne se sent pas du tout fautif d'avoir tort ou raison ...

- J'aime bien ces séances, ce sont les seules où l'on fait des maths.

Ça fait plaisir de voir que tous les profs ne délirent pas complètement vis-à-vis de ce qu'ils enseignent. Délire signifie être enfoncé dans son monde, ou encore ne pas être capable de se rendre compte que, de ce que l'on raconte, ne va rester un an plus tard, au mieux, que des manipulations formelles.

- Cette méthode met en évidence le fait que je sais travailler "bêtement", guidée par les énoncés des professeurs, mais que je suis totalement désarmée lorsque je suis confrontée seule à un problème ou à une notion.

J'ai eu l'impression de faire des découvertes, souvent sur des sujets que j'avais rencontrés mais qui ne m'avaient laissé aucune trace !

Ce cours m'est très utile dans le domaine de mes connaissances mathématiques, mais il m'oblige à remettre en question ma conception de l'enseignement et des mathématiques, et à me remettre en question moi-même !

- Je me suis aperçue - malheureusement assez tard - que ce cours demande un travail énorme à côté pour vraiment "servir", on s'étonne et on comprend pendant le cours, mais on n'assimile vraiment les résultats qu'en les revoyant. Si on a un empêchement de participer au cours, on a vraiment le sentiment de rater quelque chose. Je crois qu'effectivement cela m'apporte beaucoup plus que des concepts mathématiques, aussi une philosophie.

Cette méthode apprend aussi ce que... je crois, on demande à l'oral : réagir vite et précisément sur une question ... elle m'apporte aussi dans mon travail de recherche où j'ai du mal à comprendre ce qu'on attend de moi, et à prendre mon indépendance ... suivre ce cours est structurant ...

- Je me rends compte qu'aucune de mes connaissances antérieures n'est vraiment acquise, que ce n'était que superficiel. Apprendre par cœur des théorèmes et les oublier l'année d'après, c'est ce que j'ai l'impression d'avoir toujours fait ! Car on nous balance le résultat sans nous expliquer pourquoi!

- Au début je me sens plutôt perdue. Mais plus les idées affluent et plus le débat avance, et plus je me sens concernée : je situe le problème, je repère mes lacunes. Mais le "meilleur moment" reste la fin, lorsque tout s'éclaircit,... j'ai l'impression d'avoir vraiment compris.

- Le débat scientifique, c'est à la fois simple et compliqué ! C'est simple, car quoi de plus naturel qu'une suite de conjectures qui nous amènent à définir de nouveaux objets qui répondent à nos interrogations... c'est la démarche du chercheur... ce qui est compliqué, c'est la mise en pratique! ...

Quelles réactions des élèves, du corps enseignant ? ... cela suppose que l'enseignant ait parcouru ce long chemin sans fin de la construction des mathématiques... Mais l'essentiel me semble être ceci : des trois fondements de nos démocraties que sont la liberté, l'égalité et la fraternité, c'est bien la troisième qui est la plus oubliée; ici..., on arrive à lui donner sens.

Bibliographie

- Qu'est-ce que la science ? A.F. Chalmers (Le livre de poche)
- La formation de l'esprit scientifique, G. Bachelard 1938 Paris Vrin.
- Enseigner autrement en DEUG A 1ère année, 1990 (Publications inter - I.R.E.M)
- Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques, 1993, S. Johsua et J.J. Dupin, (PUF)
- Débat scientifique en cours de mathématiques M.Legrand, janvier 93, Repères IREM n°10 (Topiques Editions)
- Mathématiques, mythe ou réalité : un point de vue éthique sur l'enseignement scientifique, M. Legrand, juillet 95, Repères IREM n°20&21 (Topiques Editions)
- La problématique des situations fondamentales M. Legrand, avril 97, Repères IREM n°27
- La crise de l'enseignement, un problème de qualité, M. Legrand (Aléas Editeur, 15 quai Lassagne, Lyon)
- La pureté dangereuse, B.H. Lévy (Grasset)
- La transposition didactique, Y. Chevallard (La Pensée sauvage)
- La théorie des situations, G. Brousseau (La Pensée sauvage)

L'activité Circuit

(confrontation de deux logiques)

ou

les principes

du débat mathématique

*Pour comprendre une discipline,
il faut la regarder du dedans,
mais aussi du dehors !!!*

En quelques mots...

Quelles sont les idées qui vous
viennent immédiatement à
l'esprit
quand vous pensez
aux
mathématiques ?

aux
mathématiciens ?

Epistémologie vient du grec
épistémé (science), logos (discours, étude ...).

Etre épistémologue

- à propos d'une activité :
- c'est porter un regard critique
sur
ses principes de base,
ses méthodes d'investigation
et ses résultats;
 - c'est aussi se poser la question : qui
suis-je quand je pratique cette activité ?

Nos épistémologies propres sont les réponses
que nous avons apportées au fil des années aux
questions suivantes :

- pourquoi... j'aime faire ceci ?...
je déteste cela ?
- qu'est-ce qui est important ? "utile" ?
- qu'est-ce qui est valide, légitime ?
quel rapport avec "la réalité" ?
- qu'est-ce que je comprends réellement ?
qu'est-ce qui reste obscur,... douteux ?

Deux épistémologies extrêmes

s'opposent autour des mathématiques :

- une vision utilitariste
les maths ne seraient que des "trucs",
des outils pour faire d'autres sciences.
*"En math il n'y a rien à comprendre,
il suffit d'appliquer "bêtement" !*

- une vision idéaliste
les maths, langage universel, sont un pur jeu
de l'esprit, c'est "la" Rigueur absolue!
*Les maths ne s'appuient pas sur la réalité!
Elles n'ont pas besoin des autres sciences!
Hors des maths, ... point de rigueur !*

Question aux "idéalistes" :

A trop séparer math et réalité, ne risque-t-on
pas :

- de perdre sens et inspiration ?
- de passer à côté d'autres formes de rigueur ?

Question aux "utilitaristes" :

Peut-on se servir réellement des maths qu'on
ne comprend pas suffisamment pour pouvoir
les interpréter, les adapter, les modifier ?

Pari fondamental

Si nous acceptons de
"pratiquer un certain jeu",
nous pouvons
malgré nos différences
établir un rapport commun vrai
aux mathématiques.

Propositions de base

Faisons des mathématiques
ensemble !

Et ... pour pouvoir "faire des
mathématiques" ensemble plutôt que de
regarder le professeur en faire

Apprenons
à émettre et à résoudre
des conjectures.

Emettre une conjecture,

c'est résumer dans un énoncé précis une idée que l'on pense être universellement vraie.

C1) "L'aire d'un polygone varie dans le même sens que son périmètre".

Résoudre cette conjecture,

c'est se persuader

avec des raisons acceptées par tous

- qu'elle est vraie

(elle devient alors une propriété, un lemme, un théorème, etc.)

- ou qu'elle est fausse.

La conjecture C1 est-elle

Vraie	Fausse	Autre
-------	--------	-------

Découvrir

qu'une conjecture est fausse est aussi important

que de découvrir

qu'une autre est vraie, puisque dans les deux cas

c'est se donner un moyen

pour savoir

si notre façon

de penser la situation

est adaptée ou non.

Pour cela, lorsqu'une conjecture sera mise à l'étude, vous aurez après réflexion à prendre position en la déclarant :

Vraie ou Fausse ou Autre

(vous expliquerez ultérieurement le sens de votre "Autre").

Contrat

Je vous propose de "faire cours" sous forme de "débat scientifique".

Le but de cette didactique

n'est pas de faire croire qu'on peut rapidement tout redécouvrir seul (mystification !)

mais de vous donner la possibilité

- de faire vôtres les idées d'autrui,

- de "tutoyer" le théorique et l'abstrait

au point qu'ils deviennent pour chacun du familier, du "quasi concret" !

La pratique de l'activité scientifique montre quotidiennement qu'il faut

oser se tromper beaucoup pour ...

comprendre un peu !

En référence à l'évidence, deux usages de la logique

- celui que nous en faisons dans la vie quotidienne et qui correspond à certaines exigences,

- celui qui est en vigueur dans la communauté mathématique et qui répond à d'autres exigences.

Notre travail immédiat

Donner un sens précis

aux jugements

"c'est vrai!", "c'est faux !"

en mathématiques.

En quoi est-ce "la même chose", en quoi cela diffère-t-il des usages quotidiens ?

Validité de ce contrat didactique

Je garantis

*qu'il y a derrière cette activité
d'apparence "simpliste"*

des connaissances fondamentales,

mais pour vous les transmettre,

(dans un vrai bonheur ...)

j'ai besoin de

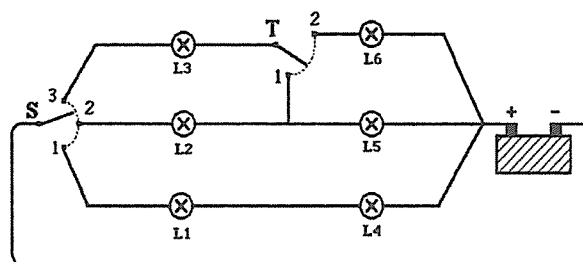
votre spontanéité

et de votre sincérité.

*Vous pouvez, bien entendu, jouer un
autre jeu, mais alors*

je ne peux plus garantir

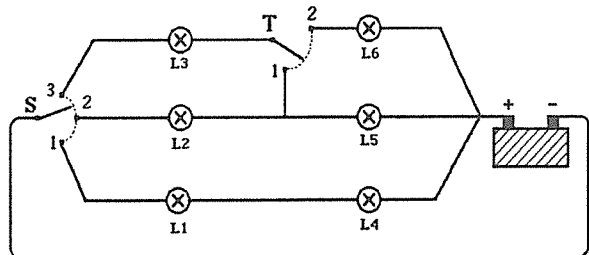
d'apprentissage !



**Ce circuit comporte six lampes
notées L_1 , L_2 , ..., L_6
et deux commutateurs S et T .**

**S ne peut prendre que les trois
positions S_1 , S_2 , S_3 .**

**T ne peut prendre que les deux
positions T_1 et T_2 .**



Conjecture 1

*Si je vois la lampe n°4 briller,
je suis certain que
la lampe n°1 brille elle aussi.*

Vrai	Faux	Autre

Institutionnalisation

Trois constats:

*- dans un cours "normal" de math ou de
physique, "tout le monde" ou presque
admettrait sans discussion que la
conjecture C1 est vraie!*

- le débat ne nous met pas tous d'accord !

***Or, le "à chacun sa vérité !" est
contraire au projet de la science.***

*- dans un circuit matériel ordinaire,
tout le monde a vu L_4 briller et,
contrairement à ce qu'affirme C1,
personne n'a vu L_1 briller !*

Question cruciale:

**Quelle est donc la valeur,
l'utilité de ce vrai théorique**
(si facilement acquis dans l'enseignement)

- s'il devient si fragile
quand nous réfléchissons davantage ?*
- s'il peut s'avérer "si faux" en pratique ?*

Pour arriver à se mettre d'accord par les moyens de la raison, les scientifiques

créent des modèles,

c'est-à-dire des mondes imaginaires qui ne sont pas le monde concret
(ils sont plus simples, plus "calculables").

En mathématiques,

(pour favoriser une pensée universelle)
les objets du modèle
sont par choix dichotomiques :

allumé - éteint,

du courant - pas de courant,

brille - ne brille pas, 1 - 0 , etc.

*Faire un modèle mathématique,
c'est en quelque sorte "peindre"
les objets du réel en deux couleurs !*

Et ce n'est pas forcément triste!

Ici, par ex. pour pouvoir pratiquer un jeu mathématique sur ce circuit,

- on va par convention
donner le même sens

aux trois expressions (distinctes au sens courant) :

"voir la lampe briller",

"la lampe est allumée",

"le courant passe";

- on va remplacer la perception sensorielle

"voir une lampe briller"

par un axiome:

Une lampe brille si elle est en circuit fermé sur le générateur, et sinon elle ne brille pas.

Changements au niveau de la véracité et de la signification de C1

Dans ce modèle, la véracité de C1 ne pose plus de problème puisque L1 et L4 étant sur un même brin, elles sont simultanément "allumées/éteintes"; par contre le sens de C1 change : "L4 brille" ne signifie plus forcément "L4 nous éclaire" !

Conclusion de l'étude de C1

*Pour faire des mathématiques
il nous faut accepter de "définir".*

*Une conjecture (mathématique) est une
déclaration sur les objets d'un modèle.*

*On ne peut donc la résoudre
qu'une fois précisé le modèle.*

Convention de travail (scientifique) :

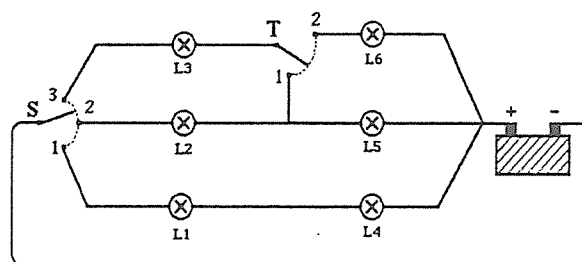
*Convenons que tout débat de
conjecture se situera dans un modèle
dont on précisera les hypothèses et les
règles implicites
autant que faire se peut.*

Efficacité et danger de cette méthode

Efficacité : éliminer les faux (dés)accords.

Danger : identifier modèle et réalité !

(abus scientifique de prétendre avoir la preuve absolue d'un résultat plus riche que celui qui a été établi.)



Conjecture 2

*Si la lampe n°2 n'est pas
allumée, alors la lampe n°5 ne
l'est pas non plus.*

Vrai	Faux	Autre

Institutionnalisation autour de C2

Les deux conjectures que nous venons d'examiner sont des thèses de la forme :

"Si A, alors B".

*A est appelée hypothèse,
B conclusion.*

Cette forme logique appelée implication est symbolisée en mathématiques par

$$A \Rightarrow B.$$

Cette formulation

*"Si ceci..., alors cela"
et les termes*

*"implique" et "implication"
sont très utilisés dans la vie courante,
mais pas toujours avec le même sens !*

Différence entre :

*particulier et général,
contingence et nécessité.*

En travaillant sur C1...

*Par la notion de modèle nous avons
supprimé l'ambiguïté de phénomènes
contingents comme:*

"La lampe 1 brille ou... ne brille pas!"

*Pour donner sens à l'implication $A \Rightarrow B$,
il nous faut maintenant définir un
rapport particulier*

celui de la nécessité

entre deux états contingents A et B.

*Pour cela il nous faut traiter C2
comme une assertion générale,
i.e. comme se référant tacitement
à tous les cas possibles!*

La syntaxe très particulière du mathématicien

Dans les phrases de type "Si A, alors B",
les singuliers comme :

- "la" dans "la lampe L2 est allumée",
ou
 - "un" dans "T est un triangle isocèle"
- sont le plus souvent
des pluriels cachés!*

*Malgré une écriture souvent au
singulier, l'implication mathématique
par souci d'universalité porte
sur "tous" les cas de figure possibles
!*

Interpréter mathématiquement C2, c'est donc
envisager par la pensée

toutes les positions des interrupteurs
(ici il y en a six),
positions dont la conjecture ne parle pas,
mais qui permettent (dans notre modèle)
d'attribuer sans ambiguïté
la valeur vraie ou au contraire fausse
à l'hypothèse A et/ou à la conclusion B !

Faire la différence entre une intentionnalité

(souci d'universalité)

et une recette

(transformer systématiquement un en tous).

*Cette transformation du sens du
"la", ou du "un" en "tous"
cherche à traduire*

*l'universalité du propos mathématique,
elle ne peut (sans danger) devenir
une règle systématique !*

Par exemple, dans l'énoncé classique

*"Si un triangle est isocèle,
il a une médiane qui est hauteur"*

- le "un" triangle doit bien être interprété
comme concernant "tous" les triangles...,
- par contre le "une" médiane doit être
interprété comme la nécessité "au moins une
médiane ..." et non comme "toutes..."
ni comme "une seule..."!

Critère utilisable en toutes situations pour étudier la valeur de vérité d'une implication "si A, alors B".

Pour respecter le sens et l'esprit des mathématiques, on convient d'envisager par la pensée tous les cas particuliers compatibles avec le modèle.

On classe ces cas particuliers en trois catégories, suivant qu'ils rendent "vraie ou fausse"

l'hypothèse A
et/ou la conclusion B :

les exemples,
les contre-exemples,
et ... les hors-sujet.

Trois types de cas particuliers

- les exemples,
cas particuliers qui satisfont
hypothèse et conclusion.

Plus un énoncé comporte d'exemples, plus il est "utile"; en mathématiques on dit alors que cet énoncé est "puissant".

- les contre-exemples,
cas particuliers qui satisfont
hypothèse et non-conclusion.

*Un contre-exemple contredit
la conjecture dans un cas au moins.
Il anéantit son caractère de
vérité universelle.*

- les hors-sujet : cas particuliers
qui ne vérifient pas l'hypothèse.
Qu'ils vérifient ou non la conclusion, ils ne confirment ni ne contredisent la conjecture.

Convention fondamentale

En mathématiques, pour décider de la vérité d'une conjecture "Si A, alors B",
on adopte la double convention :

- elle est fausse lorsqu'elle admet un contre-exemple,

- elle est vraie
"si elle n'est pas fausse"

ou plus exactement

"si la supposer fausse conduit logiquement à une absurdité".

Cette convention ne suit

- ni la logique de l'action immédiate qui est plus positive (le vrai avant le faux!)

- ni la "logique du quotidien" où l'on évalue la portée relative des contre-exemples avant d'exploiter ou de rejeter une conjecture.

Conséquences épistémologiques de cette convention:

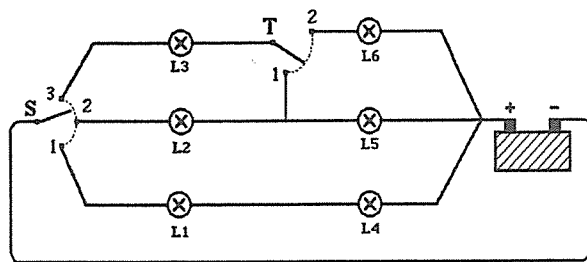
1) En mathématiques, il n'y a pas de petit ou de grand contre-exemple, ni de conjecture très fausse ou très vraie; il y a ou il n'y a pas de contre-exemple, la conjecture est fausse ! ou vraie !

2) Une conjecture est donc vraie ou exclusivement fausse ou encore elle est "indécidable" (indécidable signifie qu'il n'y a pas de contradiction logique à la considérer comme vraie ou au contraire à la considérer comme fausse : postulat d'Euclide).

Il arrive souvent qu'on soit bien en peine de déterminer le caractère de vérité d'une conjecture, on dit alors que la conjecture est non résolue, ce qui correspond à la case "Autre" dans les votes.

3) Pour montrer qu'une conjecture est fausse, il suffit d'exhiber un contre-exemple et non tous les contre-exemples.

Le plus simple et le plus précis possible sera souvent le "meilleur".



Conjecture 3

Si L_1 et L_3 , alors L_2 .

Vrai	Faux	Autre

Institutionnalisation autour de C3

*Cette conjecture est
paradoxalement vraie!*

En effet, la déclarer fausse dans le modèle
mathématique, ce serait affirmer
qu'elle a un contre-exemple!

Ce serait donc prétendre qu'il existe un
moyen d'allumer simultanément L_1 et L_3 .
Or, dans notre modèle de circuit,
**tout le monde convient
que c'est impossible!**

On a donc établi la preuve que cette
conjecture ne peut être fausse.. elle est
donc vraie (dans notre modèle mathématique).

Le "drame pour nous", c'est que le
raisonnement précédent prouve aussi
qu'il n'y a pas d'exemple.

*Au niveau du sens commun, cela
paraît donc totalement "absurde"
d'affirmer qu'elle est vraie.*

*"L'absurdité" ici a deux origines:
la causalité et l'utilité.*

La causalité

Si on interprète l'implication

$$A \Rightarrow B$$

comme signifiant

"A est la cause de B",

alors C3 est doublement absurde
puisque:

A n'est jamais vraie,

et que

*lorsque B est vraie,
c'est ...*

pour d'autres raisons

que celles évoquées en A.

Donc A est tout sauf la cause de B!

L'utilité

Dans la vie quotidienne on attend d'une
assertion de bonne foi qu'elle soit
vraie et utile!

*En mathématiques, le vrai ne
garantit pas que "ce soit utilisable",
le vrai n'est que du non faux!*

En mathématiques, dire que
 $A \Rightarrow B$ est vrai *signifie:*

- quand A est vérifié,
B est certain!

- et quand A est impossible,
 $A \Rightarrow B$ ne doit pas être utilisé pour
affirmer la vérité de B.

($A \Rightarrow B$ est donc encore vrai car
- " $\Rightarrow$ " étant "inutilisable" -
elle ne peut engendrer du faux!)

Différence entre causalité et nécessité

Si on interprète la thèse

"si A , alors B " comme signifiant
"A est la cause de B"

- quand A se produit, on attend que
B se produise aussi
(cas où logique math. = logique quotidienne)

- quand A ne se produit pas, on pense
"en bonne logique"
que B ... ne se produit pas non plus !
(cas où logique math. $\neq$ logique quotidienne)

L'implication mathématique $A \Rightarrow B$
ne peut fonctionner sans contradictions que si
on accepte que :

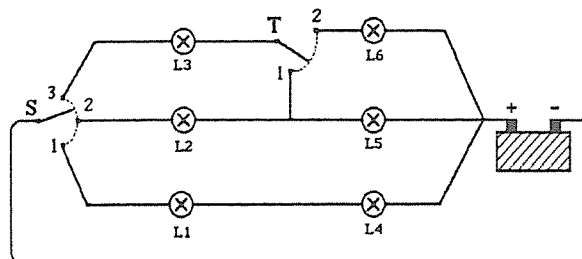
*lorsque A ne se produit pas...,
tout est logiquement acceptable pour B!*

*"Si tu ne ranges pas ta chambre,
tu n'auras pas de chocolat!"*

signifie en logique courante :

Si je la range ... j'en aurai!

mais en math pas forcément !!!



Conjecture 4 Si L_2 , alors L_5
ou L_4 .

Vrai	Faux	Autre

Le "ou" du mathématicien est un "ou" inclusif

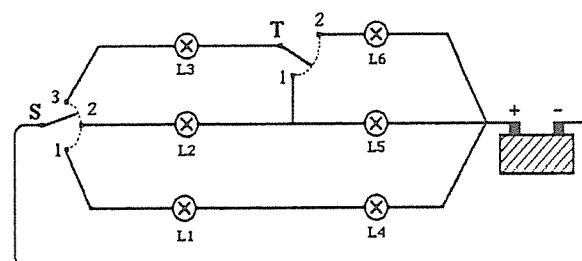
(l'un, l'autre ou bien les deux ensemble),
c'est celui de l'informaticien et des automates.

Ce n'est pas le "ou" exclusif du menu :
escalope ou poisson. (Le restaurateur,
contrairement au mathématicien, ne vous servira les
deux que moyennant supplément !)

En mathématique : " A ou B " signifie
qu'on est dans l'un des trois cas : " A seul vrai", " B seul vrai", " A et B simultanément vrais".

Le " A ou B "

du mathématicien
n'est donc faux que
si A et B
sont simultanément faux.



Conjecture 5 Si L_1 ou L_6 ,
alors L_2 ou L_4 .

Vrai	Faux	Autre

Equivalence, réciproque, contraposée

On note A pour A est vraie,
 $\text{non}A$ pour A est fausse.

On note $A \Leftrightarrow B$ l'équivalence logique
qui signifie que A et B ont le même
caractère de vérité
(toutes deux vraies, ou toutes deux
fausses simultanément).

Résoudre les conjectures :

$$P1) -1 \leq x < 2 \Rightarrow x^2 \leq 4$$

$$P2) x \leq 1 \Rightarrow x^2 \geq 0$$

$$P3) \pi \leq 4 \Leftrightarrow 2(a + b) = 2a + 2b,$$

$$P4) \pi = 4 \Leftrightarrow 2(3 + 5) = 18$$

$$P5) x = 1 \Leftrightarrow 6x - 2 = 4$$

L'implication $A \Rightarrow B$ et l'équivalence logique
" $A \Leftrightarrow B$ " ne signifient pas qu'il y a un rapport
entre le sens de A et celui de B , mais seulement
entre la vérité de A et celle de B .

Questions fondamentales

Quels rapports voyez-vous entre
l'implication

$$I) A \Rightarrow B$$

et les trois autres implications

$$II) \text{non} A \Rightarrow \text{non} B$$

$$III) \text{non} B \Rightarrow \text{non} A$$

$$IV) B \Rightarrow A ?$$

La logique courante nous pousse
à faire les conjectures erronées

$$a) I \Leftrightarrow II.$$

b) Il n'y a pas de rapport
logique

- entre I et III

- et a fortiori entre II et IV.

Institutionnalisation

Si on étudie l'implication $A \Rightarrow B$,
 $B \Rightarrow A$ est appelée sa réciproque.

On montre simplement que :

- l'équivalence $A \Leftrightarrow B$ est
synonyme de la double implication

$$A \Rightarrow B \text{ et } B \Rightarrow A.$$

*L'équivalence est donc fausse si
l'implication ou sa réciproque
ou les deux sont fausses.*

- l'implication et sa réciproque
sont sans lien logique, i.e. on
peut avoir :

$A \Rightarrow B$ vraie et $B \Rightarrow A$ fausse
et vice-versa (réciproquement).

Définition : $\text{non}B \Rightarrow \text{non}A$
est la contraposée de $A \Rightarrow B$.

Théorème (outil de démonstration)
 $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{non}B \Rightarrow \text{non}A)$

Preuve

Comme l'implication et sa contraposée ont
toujours les mêmes contre-exemples, elles sont
fausses simultanément et donc vraies
simultanément, et par suite elles sont
logiquement équivalentes.

Pour prouver $A \Rightarrow B$, il suffit donc de
prouver sa contraposée $\text{non}B \Rightarrow \text{non}A$
et vice-versa.

Par suite $(\text{non}A \Rightarrow \text{non}B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$,
i.e. dire que:

$\text{non}A \Rightarrow \text{non}B$ est vraie,

c'est dire que la réciproque est vraie.

Le principe de la démonstration

Pour établir la vérité de $A \Rightarrow B$,
seul compte le fait de prouver
qu'il ne peut y avoir de
contre-exemples !

On abandonne donc le principe du
maximum d'information :

<<dire la vérité au sens de dire
"tout" ce qu'on sait >>

pour ne dire que ce qui rend
la conclusion nécessaire.

Trois stratégies de preuve de $A \Rightarrow B$

- $A \Rightarrow C$ et $C \Rightarrow B$ (déduction)
- $\text{non-}B \Rightarrow \text{non-}A$ (contraposition)
- " A et $\text{non-}B$ "
est impossible ou absurde !

Résoudre en 2 mn la conjecture :

C) L'équation en X :

$$\sin(\pi/6) + \frac{2.X^2}{X^6 + 5} = 4$$

admet six solutions réelles.

Vrai Faux ?

Institutionnalisation

Comme $\sin(\pi/6) \leq 1$

et comme $\frac{X^2}{X^6 + 5} \leq 1$,

le premier membre ($\leq 1 + 2$)
ne peut égaler le second ($= 4$) !

L'équation n'a donc pas de solutions réelles
et la conjecture est fausse.

(Si elle était vraie, alors $3 \geq 4$!)

La démonstration par l'absurde

C'est parfois le seul moyen dont on dispose
pour montrer qu'une propriété est non-fausse,
donc vraie !

Principe:

* Si la propriété est l'implication " $A \Rightarrow B$ ":

- on prend pour nouvelle hypothèse
" A et $\text{non}B$ ",
- par une suite de **déductions logiquement
valides**, on essaye d'obtenir une **absurdité**
(i.e une propriété certainement fausse ; par ex.
 $2 = 3$!)
- puisque cette conclusion "**absurde**" a été
obtenue par une suite de **déductions valides**,
cela **prouve** que
l'hypothèse introduite " A et $\text{non-}B$ "
ne peut pas être vraie.

Comme A est vraie, c'est donc que $\text{non}B$
est fausse,
donc B est vraie; ce qu'on voulait montrer !

La propriété cruciale : $\sqrt{2}$ est irrationnel .

Notre intuition première nous pousserait
plutôt à énoncer le résultat inverse.

En effet, lorsqu'il s'agit de comparer les longueurs
 M et N de deux segments :

_____ M _____ N _____

notre "bon sens" nous pousse à penser qu'on peut
toujours trouver une unité de mesure U commune,
i.e. une longueur U qui, mise m fois bout à bout,
donne M , et mise n fois bout à bout donne N :

_____ m _____ n _____

Dans ce cas, on écrit : $M = m.U$ et $N = n.U$
ou encore $n.M = m.N$

Les grandeurs M et N sont dites **commensurables**.

Le nombre $M/N = m/n$ est alors rationnel.

Comme "Pythagore" montre que la longueur de la
diagonale du carré de côté unité est $\sqrt{2}$, notre "bon
sens" semble indiquer que :

$\sqrt{2}$ est commensurable à 1, i.e. est **rationnel** !!

Preuve de : " $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel"

Pour dépasser le simple "bon sens" qui ne permet pas de conclure ici,

supposons donc que $\sqrt{2}$ est rationnel

et montrons que cela

nous conduit à une absurdité.

1) Si $\sqrt{2}$ est rationnel il existe deux entiers p et q tels que : $\sqrt{2} = p/q$.

2) On peut supposer, sans changer le problème, que les opérations de simplification par les multiples de 2 ont déjà été faites, i.e. que :

dans l'écriture $\sqrt{2} = p/q$,

soit p est impair soit q est impair.

3) On peut donc écrire que :

$\sqrt{2}$ est rationnel $\Rightarrow \Delta$

Δ) Il existe deux entiers p et q non tous deux pairs vérifiant l'équation :

$$M : \quad "2 \cdot q^2 = p^2"$$

Montrons que cette conjecture Δ est absurde, car l'écriture M impose aux entiers p et q d'être tous deux pairs !!!

Montrons que p et q sont tous deux pairs :

a) L'écriture $M : 2 \cdot q^2 = p^2$, et q entier montrent que p^2 est pair,

donc que p est pair !

En effet (p^2 pair $\Rightarrow p$ pair) se montre par simple contraposition (p impair $\Rightarrow p^2$ impair) :

<< si $p = 2n + 1$, alors $p^2 = 4n^2 + 4n + 1$,

qui peut se réécrire $p^2 = 2 \cdot (2n^2 + 2n) + 1$,

écriture qui prouve que p^2 est impair". >>

b) Si p est pair, $p = 2r$ pour un entier r ;
par suite " M et q entier" $\Rightarrow L$

$L : "2 \cdot q^2 = 4 \cdot r^2$, pour un entier r ."

Soit encore, en simplifiant par 2, $\Delta \Rightarrow \Pi$

$\Pi : 2 \cdot r^2 = q^2$ pour un entier r .

Ce qui prouve (par le raisonnement précédent) que q est lui aussi pair.

Ce qui est absurde puisqu'en écrivant $\sqrt{2} = p/q$, on a pris soin de simplifier la fraction par 2 jusqu'à ce que l'un au moins soit impair !

*Ce que je crois
avoir compris
des problèmes actuels
de l'enseignement,
dans une recherche
de plus de cohérence
entre
Enseignement
Démocratie
Humanisme*

Marc Legrand
Enseignant-chercheur
à
l'Université Joseph Fourier de Grenoble .

Question initiale

*Quelles valeurs
sont fondamentalement
au cœur d'une culture
scientifique et mathématique,
valeurs qui peuvent
totalement disparaître
si on remplace
Science par
Technologie,
et
Mathématiques par
Outils Informatiques.*

Mathématiques, constructivisme, et culture démocratique et humaniste 9/05/2000

2

La science,

*"quand elle est profonde",
reconnait qu'elle ignore ce que
les choses sont en vérité,
elle affirme que
ce n'est pas son objet de savoir
avec une certitude totale.*

*La science qui se respecte fait des
hypothèses et des modèles
et regarde s'ils ne sont pas
trop faux, trop inadéquats.*

*Et les mathématiques de même:
dans un monde où les angles et
les triangles se marient d'une
façon ou d'une autre,
qu'advient-il nécessairement ?*

Mathématiques, constructivisme, et culture démocratique et humaniste 9/05/2000

3

*L'humilité scientifique
vis-à-vis de
l'accès aux vérités absolues,
doublée
d'un refus de l'abandon aux
délices de l'irrationnel
est (à mon sens)
le rempart de nos sociétés
face aux fondamentalismes
sectaires et dictatoriaux,
c'est
ce qui permet l'établissement d'une
démocratie forte et tolérante,
c'est
ce qui donne une rationalité
à l'humanisme face aux
totalitarismes économiques.*

Mathématiques, constructivisme, et culture démocratique et humaniste 9/05/2000

4

Le "péché originel" ou le triomphe des mystifications :

*L'idéologie du tout concret,
de la réussite immédiate, du zéro
risque, de la transparence...*

*Puisqu'aujourd'hui
on sait tout... par le <http://www>,
on sait tout faire...*

*avec les nouvelles technologies,
exit le doute!*

*Inutile d'apprendre
à penser, à se questionner,
il suffit d'apprendre
à maîtriser les techniques!*

Mathématiques, constructivisme, et culture démocratique et humaniste 9/05/2000

5

*Pourquoi ne sommes-nous
pas plus vigilants pour
préserver ces valeurs
fondamentales de la science?*

(à mon sens)

*1) Nous ne les voyons pas
comme nécessaires
pour fonder une
démocratie, pour permettre
un humanisme raisonné.*

*2) Ce ne sont pas ces valeurs
qui structurent actuellement
nos enseignements.*

*Qu'avons-nous fait
depuis trente ans
des recherches
effectuées sur
l'enseignement ?*

*En particulier,
quid
du constructivisme ?*

*Ce que je crois avoir
compris du constructivisme
quand on le travaille
dans un désir
de plus de cohérence
entre*

Enseignement

Démocratie

Humanisme

*et ce qu'il me semble être
devenu dans la majorité de
nos classes !*

*La création d'un mode hybride :
le pseudo-constructivisme.*

*Pour enseigner,
le professeur a le choix
entre trois modes*

*- deux modes cohérents au
plan philosophique et didactique :*

** le mode monstratif*

** le mode constructiviste*

*- un mode incohérent
sur les plans
philosophique et didactique,
mais
socialement bien accepté :*

** le pseudo-constructivisme
ou activisme pédagogique.*

*Pour moi, la question
fondamentale
est celle du sens !*

Mais...pas de transparence !

*Le sens ne s'enseigne pas
c'est*

*notre interlocuteur
qui le construit,
et le sens qu'il attribue
à notre savoir
détermine, transforme
sa nature, sa consistance.*

Mathématiques, constructivisme, et culture démocratique et humaniste 9/05/2000 10

Deux regards sur le Savoir

On peut envisager le savoir
essentiellement comme :

- externe

à celui qui connaît

c'est alors ce qu'on enseigne,
ce qui est... indiscutablement vrai,
ce... qu'il faut savoir !

ou au contraire comme

- interne

à celui qui connaît

c'est alors un outil de
*transformation de la
personne par la réflexion.*

Mathématiques, constructivisme, et culture démocratique et humaniste 9/05/2000 11

Philosophiquement
et didactiquement

Le monstratif vise
pour l'essentiel
le Savoir Externe.

Le constructivisme vise
pour l'essentiel
le Savoir Interne.

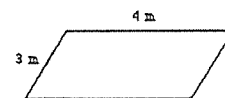
Le pseudo-constructivisme
est plus "une mode"
qu'un modèle didactique
car sans véritable visée philosophique
ni fondement cognitif.

Mathématiques, constructivisme, et culture démocratique et humaniste 9/05/2000 12

Savoir externe - savoir interne

A la question (impertinente à ce niveau)

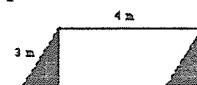
Quelle est l'aire de ce parallélogramme de côtés 3 m et 4 m ?



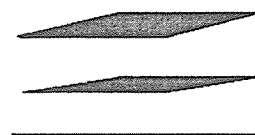
plus de 50% des étudiants de première année
d'université répondent :

$$A = 12 \text{ m}^2 !!!$$

Certains donnent "spontanément" une "preuve" :



Rarissimes sont ceux qui mettent en évidence
la variable "aplatissement" !

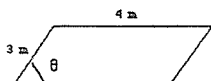


Pourquoi ?

Mathématiques, constructivisme, et culture démocratique et humaniste 9/05/2000 13

Si par contre on pose la ("même") question :

Quelle est l'aire de ce parallélogramme de côtés 3m et 4m ?



la réponse majoritaire devient :

$$A = 12 \cdot \sin(\theta).$$

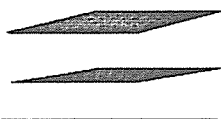
Formule exacte qui "dit presque tout" !

Constat

*La formule exacte est "connue de tous"
mais ce n'est qu'un savoir externe
puisque dans l'action, elle ne dit rien sur le réel
dont on parle, elle ne donne aucune sagesse
face au mauvais réflexe $\text{aire} = \text{longueur} \times \text{largeur}$
c'est un savoir non intériorisé !*

Le Savoir interne ici, ce serait :

A défaut de connaître l'inclinaison



tout est possible entre 0 et 12 m² !!!

Questions fondamentales

- Quel est donc le sens, l'utilité de ces savoirs externes que nous savons
*si bien enseigner par monstration
s'ils ne se transforment pas
en savoirs internes ?*

Ces savoirs intériorisés

"D'où vient ce que je pense être vrai ?"

*ne sont-ils pas nécessaires à tous pour
permettre à chacun d'assumer ses
responsabilités de citoyen et d'humain,
puisque ce sont eux qui nous aident à démasquer
préjugés et croyances irraisonnées ?*

Problème

Ces savoirs intériorisés

- ne s'enseignent pas... "naturellement",
- ils sont très délicats à évaluer,
- ils vont "contre" la culture courante !

Question de contrat didactique

Tous nos élèves et nos étudiants

souhaitent réussir!

Combien désirent con-naître ?

Le didactique - La didactique

Il y a du didactique lorsque, face à un savoir, un contrat (*le plus souvent implicite*)

- le contrat didactique -

place des personnes dans les positions
dissymétriques de maître et d'élève.

Ce contrat

- traduit une double obligation :
*"enseigner ceci ... à... ceux-là ,
apprendre cela ... avec... celui-ci",*

- définit des rôles : ceux
que maître et élève(s) s'attribuent
pour marquer le nécessaire décalage
entre

*celui qui "sait" (autrement),
et celui qui "ignore" (ou ne sait
pas encore de la même façon).*

La didactique

*c'est le pari de la rationalité :
pour tenter de mieux comprendre
et maîtriser le réel (le didactique)
on le "met à distance"
en construisant théories et modèles.*

*Cet effort théorique a pour effet de
replacer au centre
la question fondamentale du sens!*

Par ex. postuler un contrat didactique
introduit la question fondamentale

des effets de contrats :

*le contrat didactique modifie-t-il
la signification du savoir
pour l'élève?*

pour le professeur ?

et comment ?

L'âge du capitaine

Au problème "absurde" suivant :

"Sur un bateau il y a 26 moutons et 10 chèvres. Quel est l'âge du capitaine?"

Sur 97 élèves de CE1 et CE2, 76 donnent une réponse en utilisant les nombres figurant dans l'énoncé:

26 moutons → 26 ans

ou $26 + 10 = 36 !!!$

A la question "Que penses-tu de ce problème?",

Peter qui avait répondu :

"le capitaine a 26 ans",

ajoute :

"je trouve que c'est bien, mais je ne vois pas quel rapport entre des moutons et un capitaine!"

Anne qui avait répondu :

"on ne peut pas savoir l'âge du capitaine",
placée devant le nouveau problème :

"Il y a 7 rangées de 4 tables dans la classe. Quel est l'âge de la maîtresse ?"

répond néanmoins :

*La maîtresse a 28 ans, car $7 * 4 = 28$!*

A la nouvelle question :

"Tu as 10 crayons dans chaque poche; quel âge as-tu ?",

- Paul répond : *"20 ans !"*

- oh! Paul, tu sais bien que tu n'as pas 20 ans !

- *" c'est ta faute,
tu ne m'as pas donné
les bons nombres !"*

Effets de contrat

Dès qu'un contrat lie professeur et élèves face à un savoir, de par ce contrat :

- le professeur "mène le jeu",
il "doit" être "le maître"!

- l'élève "entre dans le jeu du professeur"

il s'assujettit à sa pensée,
il "doit" être "sujet" (de ce maître).

Quel maître, quels sujets, quel savoirs ?

Quel jeu véritable l'élève joue-t-il ?

*Quels rôles le professeur, l'élève
donnent-ils au savoir?*

Savoir interne / externe ?

*"C'est ta faute, tu m'as pas donné
les bons nombres!"*

Proposition d'une grille d'analyse

Pour analyser un enseignement
non en termes de

jugements de valeurs

"c'est bon!" c'est mauvais!"
mais en termes d'adéquation

entre buts et moyens,

on peut dégager cinq composantes :

- l'épistémologie,

- le cognitif,

- le psycho-affectif,

- le socio-culturel,

- l'éthique.

L'observation didactique

Quatre types d'observation

- 1) *Générale.*
- 2) *Identification de la problématique du professeur.*
- 3) *Modèles cognitifs, effets de contrat.*
- 4) *Cadre psycho-affectif, socio-culturel et éthique.*

Identification de la problématique du professeur

Le professeur semble-t-il

- *avoir choisi d'enseigner un ou plusieurs savoirs ?*
(concepts, méthodes, techniques, etc.)
 - *vouloir privilégier un aspect du savoir aux dépens des autres ou au contraire vouloir équilibrer ?*
 - *avoir repéré un obstacle: une simple difficulté, une possibilité de blocage, de contresens total ?*
- Comment réorganise-t-il le savoir en conséquence ?*
- Envoie-t-il des messages explicites/implicites pour faire partager sa problématique ?*
- Y a-t-il (in)cohérence entre explicite et implicite : réactions des élèves ?*

Modèles cognitifs

Deux modèles,
le modèle (dé)monstratif
et le modèle constructiviste,
assument en cohérence le paradoxe :
"pour comprendre, il faudrait savoir et pour savoir..., il faudrait avoir compris".

Ces modèles sont complémentaires car aucun n'est auto-suffisant pour tous les apprentissages,
mais... leurs logiques propres sont si contradictoires qu'il est impossible de les alterner sans renégocier explicitement le contrat.

Ils ne peuvent donc engendrer de modèles médians
sans fortes contradictions.

Le modèle (dé)monstratif

Le professeur présente/explique tout (ce qu'il pense pouvoir montrer).

L'élève donne sens au nouveau savoir par la cohérence du discours magistral, les problèmes et applications du cours.

Le modèle constructiviste

Le professeur problématise le nouveau savoir (là où il craint trop de perte de sens s'il "montre" directement).

L'élève donne sens à un savoir construit
- comme réponse à des questions
- comme solution de problèmes qu'il ne parvient pas à résoudre avec ses seules anciennes connaissances.

Logiques internes de ces modèles:
prééminence des certitudes ou du doute.

En mode monstratif, pour arriver à "tout"
montrer, démontrer, il faut absolument :

- éliminer les attermoissements et le doute pour privilégier les bonnes solutions,
 - bien structurer, garder le fil de sa pensée,
 - neutraliser les pensées divergentes,
 - ne pas faire appel aux conceptions des élèves
- découper et aplanir les difficultés
 - décontextualiser, "naturaliser" le savoir.

En mode constructiviste, pour que le savoir apparaisse comme réponse aux questions et problèmes il faut absolument créer du doute et accepter :

- l'implication personnelle de l'élève
 - en cours l'élève propose, soutient, n'est pas d'accord
- la retenue de l'opinion magistrale
 - le prof s'interdit pendant un temps de donner son avis
- les propositions maladroites ou erronées
 - erreurs, maladresses ≠ stupidités, temps perdu
- la complexité et la fragilité du "direct".

Deux éléments complémentaires et
indissociables du modèle constructiviste

Dans la phase problématique où les élèves cherchent, discutent, conjecturent, critiquent les solutions qui leur sont proposées, *l'élève n'invente pas le savoir, ne le construit pas (mystification), l'élève construit du sens à propos du savoir que le professeur va institutionnaliser.*

Dans la phase d'institutionnalisation le professeur doit introduire une part importante du savoir

*"il doit faire cours",
mais en lien étroit avec les éléments de réflexion apportés par les élèves pendant la phase problématique.*

*Aucune des deux phases isolée ne se suffit,
c'est leur complémentarité qui donne
force et consistance à ce modèle.*

Pour analyser et comprendre
ce que font véritablement les
élèves en classe

*voyons le didactique
comme un jeu
dans lequel professeur et élèves
"gagnent ou perdent" ensemble!*

*Convenons alors que
ce qui caractérise un jeu,
c'est la nature des coups permis !*

*ce qui caractérise le joueur,
c'est son degré de responsabilité !*

Connaissez-vous le nom

* du champion du monde des échecs ?

** du champion du monde de la bataille?

La place du doute dans la classe

Principe de base de l'analyse didactique

*Quand un joueur ne peut envisager
qu'un seul coup... il le joue sûrement
mais personne ne peut attribuer la
moindre signification à sa décision
puisque'il n'a rien décidé!*

**La discipline (matière) définit
les coups théoriquement permis !**

**Le contrat didactique fixe la nature
des coups réellement autorisés !**

*Pour savoir si l'élève apprend,
comprend véritablement, il faut que
le professeur ait créé du doute,
des occasions de choix, d'erreurs !*

Le rôle du psycho-affectif

*Le contrat gère l'acceptation par l'élève
du jeu du maître.*

L'Amour paradoxal maître-élève

Si ce maître "m'aime" :

- il doit me faire "réussir" et ...
"échouer"... aussi!
- je voudrais le garder
mais... j'aspire à le quitter.

*Au delà d'apparences autoritaires/cordiales,
le contrat traduit*

un amour-estime au premier degré

*"Avec ce prof. c'est facile, on réussit bien, on
comprend tout, on sait tout de suite ce qu'il attend... !"
"Ils ne peuvent pas comprendre; je suis donc bien
obligé de leur donner ... !"*

un amour-estime au deuxième degré

*"Ce prof. est exigeant, il fait chercher, il laisse se
tromper, il fait travailler sur les erreurs"
"Je parie qu'ils peuvent aller bien plus loin que ce qu'ils
montrent ou réclament ... !"*

Les pathologies du constructivisme

*Une analyse trop sommaire du didactique
⇒ confusions entre*

Action ↔ Action réflexive

Prise de parole ↔

Engagement intellectuel

Manifestation de l'erreur ↔ Echec

Raisons principales de ces dérapages

- vide épistémologique,
- affectif mal maîtrisé,
- usage incontrôlé de l'effet Topaze
- refus des obstacles épistémologiques
(phantasme de toute puissance du Prof.
et refus du principe de réalité)

Un obstacle épistémologique

C'est un savoir

- trop "énorme" pour être
simplement (dé)montré ou expliqué
sans déformation de sens!
- trop "révolutionnaire"
pour être directement accepté;
- qui nécessite un tel changement
de point de vue
que l'élève qui ne l'aborde pas
comme solution
d'un problème crucial,
"ne peut dépasser l'obstacle
de sa compréhension" !

D'où le principe du

conflit (socio)cognitif.

L'effet Topaze

Les moutons étaient entrés dans ...

Les moutons.....étaient entrés..

Les moutons-ses.....étaient.

Les moutons-se s s S....

Mettez un S à mouton !

L'usage incontrôlé de l'effet Topaze

*Comme tous les moyens détournés pour
provoquer une action ou une réponse "qui
ne vient pas de soi", cet effet n'est pas à
proscrire s'il est conscient à visée psycho-
sociale (sauver une situation dramatique,
redonner du courage etc.).*

*Mais... il doit être pratiqué avec
économie dans un clin d'œil complice
à l'élève, à la classe, à l'amphi!*

*Son abus fait croire à l'élève et au prof.
qu'on sait ce qu'on ignore, que l'on a
compris ce qui est obscur, que l'on peut
passer à la suite puisqu'on "sait faire".*

Bilan des observations en classe

- à première vue... la plupart des cours se présentent comme ... constructivistes!

Très rares sont les professeurs qui font du monstatif pur, ils proposent des activités, posent des questions et des problèmes, les élèves parlent, ... travaillent en groupes.

- par une analyse plus fine, on voit que :

les élèves, sans cesse sollicités par les questions du professeur, réagissent moins en fonction du problème qu'en fonction de ce qu'ils espèrent être la réponse attendue :

ils proposent et... le professeur trie !!!

Les professeurs ne font jamais véritablement cours, car par un jeu subtil de questions qui suppriment doute et problème, ils font dire aux élèves ce qu'ils ne leur laissent pas le temps de découvrir.

Les élèves n'engagent pas leur responsabilité, n'entrent pas dans de vrais débats, car tout passe et repasse par le professeur.

Souvent les questions et les débats des élèves abordent des incompréhensions et problèmes de fond... et si...

le professeur laissait mûrir la situation, certains blocages trouveraient peut-être un début de solution...

mais il faut que le cours avance!

Alors le professeur

- n'entend pas la question,

ou la repousse comme hors-sujet ,

- résout lui-même le problème ou fait appel au bon élève ou à "Topaze".

Domage ... !

La classe est active et "réussit" presque toujours dans les temps à aller là où le professeur voulait en venir. Malgré ces manipulations répétées il règne en classe une ambiance de travail chaleureuse et confiante car une grande complicité unit l'élève à son professeur dans un amour-estime au premier degré.

Nous avons nommé ce mode très souvent observé le "pseudo-constructivisme" ce que Rudolf Bkouche appelle

"activisme pédagogique".

Des étudiants ont questionné des professeurs du primaire, secondaire ou du supérieur

sur leurs problématiques,

il leur a souvent été répondu qu'ils n'en avaient pas ... et... pas besoin !

Ils ont un programme à traiter!

Quand certains ont fait remarquer qu'en laissant plus de doute, de responsabilité aux élèves, cela pourrait... il leur a été répondu qu'on n'avait pas le temps !

Souvent ces étudiants ont conclu eux aussi que c'était...dommage, mais qu'on ne pouvait faire autrement!

Alors... le constructivisme, utopie totalement irréaliste ?

Tous les étudiants qui ont observé des séquences constructivistes

(et il y en a quand même !)

constatent que c'est possible !!

C'est lent et aventureux, mais...

ça marche bien mieux qu'ils ne le pensaient :

- beaucoup d'élèves, et pas seulement les bons jouent le jeu, comprennent !

- contrairement à l'autre pratique où le temps gagné se paye souvent en contresens et non sens, le temps perdu ici se retrouve là !

Alors ... !!!

Etude d'un exemple

Question initiale

Si $e_1, e_2, \dots, e_n$ est une base d'un espace vectoriel normé E et si X est un vecteur de E , alors X se décompose de façon unique :

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

Question :

Quelles inégalités peut-on écrire entre les valeurs absolues $|x_i|$ des composantes de X et la norme $\|X\|$ de X ?

Rép. (100%) : $|x_i| \leq \|X\|$

Preuves : $\|X\|^2 = \sum |x_i|^2$,

$$\|X\| = \|x_1 e_1\| + \|x_2 e_2\| + \dots + \|x_n e_n\|$$

Pourquoi engager un débat sur une situation de type "jean" ?

Dans l'introduction de nouveaux savoirs, nous devons effectuer un choix entre rupture et continuité

i.e. entre

affrontement ou évitement des "obstacles épistémologiques".

1er choix : celui de la simplicité et de la continuité avec le connu :

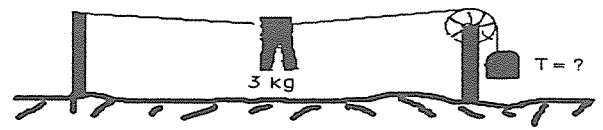
C'est presque comme d'habitude...

2ème choix : celui de la rupture avec ce qu'on connaît déjà,

et l'affirmation d'une certaine complexité : *c'est plus compliqué mais ... il y a des raisons.*

Problème pratique

Ce blue-jean mouillé suspendu sur ce fil à linge pèse environ 3 kg.



Question cruciale (par ex. pour choisir un fil à linge adapté)

A votre avis, la tension T du fil

(c'est-à-dire l'équivalent en kg du contre poids qu'il faudrait suspendre à son extrémité pour soutenir ce blue-jean dans cette position)

est-elle plutôt de :

(cochez la valeur qui vous semble la mieux adaptée - ni trop, ni trop peu -)

1,5 kg	3 kg	6 kg	20 kg	50 kg	100 kg	?
3	27	15	0	0	1	20
7	35	40	6	1	0	12

Ici, le savoir visé est "le vectoriel"

Pour l'introduire, deux possibilités :

1er choix, celui de la simplicité et de la continuité avec le connu (le nombre) :

Un vecteur $\vec{V}$ est un triplet de "trois nombres"

$$\vec{V}_{\text{def}} = (v_1, v_2, v_3)$$

Deux vecteurs $\vec{V}$, $\vec{W}$ s'additionnent simplement

$$\vec{V} + \vec{W}_{\text{def}} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$$

Quand un vecteur $\vec{F}$ représente une force, sa longueur $\|\vec{F}\|$ est le nombre positif qui mesure l'intensité de cette force, elle se calcule par la formule

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}.$$

Ce vecteur-là s'enseigne et s'apprend "bien", mais ... est-il apte à nous aider à "bien penser" les situations complexes où les nombres échouent ?

2ème choix : celui de la rupture avec ce qu'on connaît déjà, et l'affirmation a priori de la nécessité de la complexité.

Le vecteur doit donc apparaître comme ce nouveau concept-outil qu'il nous faut inventer, construire pour modéliser les situations où l'outil nombre échoue.

Le Jean au service de cette intention didactique

Pour le "jean", penser les "tensions" seulement comme des nombres positifs est très "pervers" puisque cela

- nous pousse à choisir 1,5 kg, 3kg ou 6 kg, (trois valeurs qui ne sont vraiment pas adaptées à la réalité !)

- détourne notre attention du paramètre crucial :

le fait que les deux tensions (à droite et à gauche du jean) s'ajoutent d'autant plus mal pour contrer le poids du jean que l'angle qu'elles forment est plat.

Or l'expérience nous montre que cette variable angle est déterminante, à poids fixe:

si Angle $\rightarrow 180^\circ$, alors Tension $\rightarrow \infty$

Le cours magistral peut alors commencer

- Au professeur de proposer une grandeur apte à représenter cette situation (le vecteur).

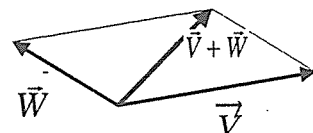
Cette proposition complexe sera entendue

- si l'élève arrive à accepter l'inconfort d'abandonner (momentanément) les nombres positifs (qu'il connaît et qui s'ajoutent si facilement)

pour ouvrir son esprit à des grandeurs plus complexes qui tiennent compte de l'angle lorsqu'on les ajoute.

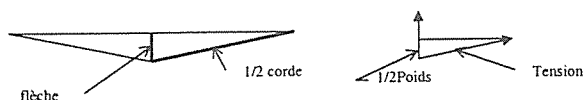
Dans cette optique, on peut alors montrer que "la règle du parallélogramme" prend en compte

(par sa complexité) tout ce que l'expérience du jean nous a montré.



Retour de la théorie sur la pratique

Cette mathématisation de la tension par un vecteur, pertinente au niveau qualitatif, l'est aussi au niveau quantitatif, car en utilisant Thalès on peut calculer :



La Tension est au 1/2 Poids ce que la 1/2 Corde est à la flèche.

Si $1/2 \text{ corde} = 2m$,

$\text{flèche} = 0,05m$,

le rapport $1/2 \text{ corde} / \text{flèche} = 40$.

Dans ce modèle,

la tension devrait être 40 fois le 1/2 poids, soit 20 fois le poids, soit environ 60 kg ! ce que l'expérience tend à confirmer.

Bilan épistémologico-didactique

1) Epistémologique

Il est clair que dans une telle présentation le vecteur introduit ici n'est pas réputé "plus vrai" ou "plus probant" que le nombre (un modèle ne prouve jamais une réalité, mais est plus ou moins pertinent pour prévoir, expliquer et quantifier), il est par contre d'emblée montré pertinent & complexe.

C'est grâce à son addition compliquée que le vecteur est apte à rendre compte d'une situation de vie où le bon sens et l'ancien savoir nombre échouent.

Par suite...

Le pseudo paradoxe des normes qui, bien que nombres positifs, ne s'additionnent pas comme on l'attend

$$\|\vec{V} + \vec{W}\| \leq \|\vec{V}\| + \|\vec{W}\|$$

rarement =

est ici une déconvenue nécessaire, c'est le prix à payer pour avoir un bon outil de modélisation des situations non unidirectionnelles !

II) Didactique : le mode utilisé ici est constructiviste

- il se veut au service de la construction du sens, il n'a pas pour fonction de faire découvrir le savoir - ici le vecteur - mais d'en faire découvrir la portée et la nécessaire complexité,

- il réclame que les élèves s'impliquent et "se trompent" :

*le but n'est pas de faire dire des bêtises aux élèves, de les "humilier d'une certaine façon" afin d'asseoir le pouvoir du Maître;

* c'est un moyen de faire découvrir que : le "bon sens", sans être stupide, nous pousse souvent à proposer des solutions très inadaptées, et que

l'explicitation et le décortilage de nos raisonnements erronés (loin d'être du temps perdu) sont souvent indispensables pour comprendre (même

pour ceux qui croient avoir compris et qui dans un certain cadre ne se trompent pas - effet de contrat - effet Topaze -)

Un double problème psychologique que doit affronter ce mode constructiviste : le trop et le trop peu de confiance en soi

- celui qui se considère ignorant, timide, qui doute beaucoup de lui, risque de ne pas vouloir s'impliquer dans un jeu qui pourrait mettre au grand jour ses faiblesses,

inversement

- celui qui croit tout connaître, qui s'est toujours vu bon élève, peut éprouver un certain agacement à se tromper, à voir des "moins forts" avoir des idées intéressantes, peut être vexé de s'être "laissé prendre" quand il découvre qu'un savoir qui le rendait infailible ne fait pas le poids dans des situations moins "scolaires".

Cette frustration peut le pousser à casser un jeu qui ne le met pas immédiatement à son avantage.

Dans les deux cas on voit tout l'intérêt que l'individu aurait à dépasser l'obstacle psychologique qui l'invite à ne pas jouer, mais pour cela il faut qu'il accepte de changer en profondeur son rapport au savoir.

Savoir Externe → Savoir interne

Bibliographie

- Qu'est-ce que la science ? A.F. Chalmers (Le livre de poche)
- La formation de l'esprit scientifique, G. Bachelard 1938 Paris Vrin.
- Enseigner autrement en DEUG A 1ère année, 1990 (Publications inter - I.R.E.M)
- Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques, 1993, S. Johsua et J.J. Dupin, (PUF)
- Débat scientifique en cours de mathématiques M.Legrand, janvier 93, Repères IREM n°10 (Topiques Editions)
- Mathématiques, mythe ou réalité : un point de vue éthique sur l'enseignement scientifique, M. Legrand, juillet 95, Repères IREM n°20&21 (Topiques Editions)
- La problématique des situations fondamentales M. Legrand, avril 97, Repères IREM n°27 (Topiques Editions)
- La crise de l'enseignement, un problème de qualité, M. Legrand (Aléas Editeur, 15 quai Lassagne, Lyon)
- La pureté dangereuse, B.H. Lévy (Grasset)
- La transposition didactique, Y. Chevallard (La Pensée sauvage)
- La théorie des situations, G. Brousseau (La Pensée sauvage)

LES TABLES RONDES

TABLE RONDE N° 1 :

Une bibliographie pour les ateliers.

Véronique CHAUVEAU - Paul-Louis HENNEQUIN

1 – Une situation peu satisfaisante.

A l'heure actuelle, les C.D.I. sont pour la plupart peu fournis en ouvrages scientifiques alors que le développement des travaux croisés dans les collèges et des T.P.E. dans les lycées crée de nouveaux besoins. Un dixième seulement des établissements sont bien équipés et les exceptions tiennent à des héritages. Cependant, des crédits sont prévus pour l'animation culturelle et les enseignants doivent faire des propositions pour les utiliser.

2 – Quelle bibliographie ?

Une bibliographie limitée à l'essentiel quant aux titres recensés doit donner envie de lire un livre en précisant ce qu'on y trouve, c'est-à-dire non seulement son contenu, mais la manière de l'utiliser individuellement ou en groupe, pour la classe ou pour une recherche.

La bibliographie est-elle destinée aux élèves, aux enseignants ? Aux deux ? Il existe des livres intéressants à lire pour les élèves (par exemple ceux des éditions du Kangourou), mais on manque de bouquins qui posent des questions sans donner la réponse. Une bonne bibliographie doit privilégier ces ouvrages et suggérer des conseils d'usage et des utilisations possibles en club.

3 – Quelques bibliographies.

Depuis quelques années, le serveur PUBLIMATH recense les travaux publiés dans les IREM et ceux qui concernent l'enseignement des mathématiques.

Il existe en France au moins quatre revues qui publient pratiquement dans chaque numéro des analyses d'ouvrages : le Bulletin de l'APMEP à l'intention des professeurs de mathématiques, la revue « Repères IREM » pour les chercheurs en didactique, la Gazette des Mathématiciens pour les mathématiciens et MATAPLI pour les mathématiciens appliqués.

Celles de « Tangente » et de « Quadrature » sont aussi destinées aux élèves de lycée.

Le catalogue de la librairie Tangente rassemble chaque année plusieurs centaines de titre en français classés par thèmes et objectifs.

4 – Quelques titres :

On trouvera en fin de brochure la liste des 182 ouvrages figurant dans la bibliothèque de l'Université d'Été.

Le débat fait émerger quelques titres :

- CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, Eric. V. Weistern – CRC Press 1999.
- Les mathématiques, plaisir et nécessité, A. Ducrocq et A. Warusfel, Vuibert.
- Avec des nombres et des lignes, A. Sainte Laguë, Vuibert – ACL.
- Curiosités mathématiques, R. Ball, Gabay.
- Double détente, B. Novelli, Pole.

- Théorie des corps, la règle et le compas, J.C. Carrega, Hermann.
- La malédiction des maths, J. Scieska et L. Smith, Seuil-Jeunesse.
- Les jeux mathématiques, M. Criton, Que-sai-je ? 3220, PUF.
- Les livres de M. Gardner, I. Stewart, J.P. Delahaye, ainsi qu'une vidéo « Donald au pays des mathématiques ».

5 – Les vœux :

- Apprendre aux élèves à rassembler et à utiliser des documents sur un thème ou pour une recherche.
- Avoir un dictionnaire de mathématiques dans chaque établissement.
- Obtenir que les CDI s'abonnent à Hypercube (collèges) ou Tangente (lycées).
- Elaborer au sein d'ANIMATH une bibliographie régulièrement mise à jour et précisant pour chaque titre le public auquel il est destiné, les objectifs, la lisibilité et les services qu'il peut rendre en classe ou en atelier.
- Faire mieux connaître les ressources accessibles par INTERNET.

TABLE RONDE N° 2 :

Mise en réseau de clubs

Véronique CHAUVEAU - Paul-Louis HENNEQUIN

1 – La situation actuelle. (V. Chauveau)

ANIMATH a pris l'initiative en 1999 d'un premier recensement des clubs qui a abouti à une liste d'environ 200 qu'il est difficile de tenir à jour : l'enquête avait eu un succès très variable d'une académie à l'autre, certains clubs ont disparu, et d'autres sont nés. Parmi les présents, cinq animent un club en contact avec ANIMATH, douze animent un atelier sans contact.

Ouvrir un club quand on est isolé n'est pas évident et suscite des réactions mitigées au sein d'un établissement. Il est donc nécessaire que les diverses initiatives soient en liaison les unes avec les autres et communiquent entre elles. C'est donc l'objectif de la lettre aux clubs d'ANIMATH dont le numéro un vient de sortir en juillet 2001 et a été diffusé en mille exemplaires et qui se propose, à raison de trois numéros par an, de susciter les réactions et l'envie de transmettre de tous ceux qui animent des clubs.

ANIMATH envisage aussi de développer son site internet et la place consacrée aux clubs : faire connaître les clubs virtuels existant (Alain Larroche), tenir à jour le répertoire des clubs, ouvrir un forum.

En ce qui concerne la création d'ateliers, elle est dans l'air du temps (émotion suscitée par la désaffection pour les études scientifiques) et il faut être plus offensif pour en demander.

2 – Le débat

A la suite de cette présentation, le débat dégage les questions suivantes :

- Quel est l'intérêt pour un club de se faire recenser par ANIMATH ?
- Comment mettre les travaux d'un club sur internet ?
- Les professeurs dynamiques sont déjà trop sollicités.
- La « lettre aux clubs » est-elle pour les enseignants ou pour les élèves ?
- Il est inutile de diffuser ce qui se fait dans les clubs.
- Un des moyens de motiver les élèves pour des activités mathématiques est de leur permettre de publier leurs productions. C'est ce que fait MATH en JEANS où les documents produits par les élèves sont destinés à servir à d'autres élèves.
- Réaliser une page internet peut très bien être un travail de club, cela se fait à MATH en JEANS après le congrès.
- Pour créer et développer les liaisons entre collègues actuellement inexistantes, on peut envisager la publication d'énigmes ou susciter des réactions.

- Il y a deux problèmes :
 - . une question de fond : est-on capable de faire un site d'échanges entre les élèves ?
Si oui, chacun peut créer le sien,
 - . réaliser une liste de diffusion ou un forum sur lequel on se branche si on en a envie.
- Que mettre sur le site d'ANIMATH pour que les collègues s'y expriment ?
- Actuellement, Yann Ollivier met tout ce qu'on lui apporte. Pour qu'un forum soit efficace, il faudrait un pilote permanent
- Faut-il être un crac en maths pour créer un club ? On ne cherche pas des trucs extraordinaires, ce qui importe c'est de faire des choses utiles à tous.

3 – Les propositions

- a) Envoyer à tous les établissements un courrier électronique pour savoir s'il y existe un club ou un atelier.
- b) Envoyer un courrier plus détaillé à ceux qui auront répondu, recenser les attentes (milieux isolés, filières spécialisées) et éléments de réponses aux attentes.
- c) Recruter un coordonnateur pour un forum.
- d) Augmenter le nombre de sites qui renvoient à ANIMATH ;
- e) Demander à l'inspection générale jusqu'où elle peut aller pour la validation des travaux faits en club.

TABLE RONDE N° 3 :

Comment créer et animer un club ?

Martin ANDLER, Président d'ANIMATH,
Claudine RUGET, Doyenne de l'Inspection Générale de Mathématiques.

Véronique Chauveau rappelle les discussions des deux tables rondes précédentes : mettre en place une bibliographie minimale, à rassembler dans les CDI pour les élèves, pour les professeurs ; fédérer les initiatives et mettre les clubs en réseau.

1 – La bibliographie

Claudine Ruget a été chargée par Jean-Pierre Kahane de suivre la documentation et de faire la veille sur les publications françaises et étrangères. Ont déjà été publiés « Idées d'activités dans le programme de seconde » et « Les 50 indispensables pour le collège » (CNDP).

Les CDI achètent rarement des ouvrages en anglais. Certains livres présentant plusieurs approches ne sont plus directement utilisables. Du point de vue institutionnel, il y a des crédits inutilisés dans les lycées ; s'il n'y a pas de dotation spécifique pour les mathématiques, il y en a une pour les TPE (destinés aux élèves). Les enseignants doivent être plus vigilants pour faire acheter des livres de mathématiques (certains font remarquer que les professeurs de mathématiques ne se sentent pas très concernés par les TPE, ils ne veulent pas être prestataires de service de la physique). Le problème est plus crucial dans les collèges ; on peut développer les prêts inter-CDI.

2 – Le développement des clubs.

Que fait l'Inspection Générale pour les développer, en particulier en ZEP, alors que les charges des enseignants sont déjà trop lourdes ?

- les ateliers et clubs sont bien perçus actuellement, certains enseignants ont envie d'en créer, d'autres non.

S'agissant de la reconnaissance institutionnelle, l'Inspection Générale avait demandé une inscription dans l'emploi du temps ; cette proposition s'est heurtée à l'opposition du SNES. Mais la circulaire 2001-046 du 21 mars 2001 relative aux ateliers scientifiques, parue au B.O. n° 13 (29 mars 2001) p. 636, ouvre des possibilités de reconnaissance à négocier avec le responsable du service d'action culturelle du rectorat.

A l'heure actuelle, certains établissements ont un contingent d'heures supplémentaires (effectives ou annuelles) mais le ministère n'accepte pas que certaines activités fassent partie du service statutaire : on essaie de compenser par le bénévolat les carences de l'institution en matière de formation mathématique.

Il faut s'appuyer sur les clubs existants (un tiers dans les lycées, deux tiers dans les collèges) pour obtenir une reconnaissance financière qui existait il y a une quinzaine d'années et une aide au démarrage pour les nouveaux clubs.

C'est en fédérant les initiatives que l'on trouvera un interlocuteur. Il faut tout d'abord recenser l'existant avec l'aide des IPR, puis créer un réseau qui associe des chercheurs mobilisés par la SMF, la SMAI, le CNRS en précisant que l'on ne vise pas, en priorité, un objectif d'excellence qui ferait peur.

L'Inspection Générale devrait dire clairement ce qu'elle attend de la création d'un atelier.

3 – L'évolution de l'enseignement.

Il faut préciser le rôle des mathématiques et soigner leur image. La Commission Kahane y réfléchit et souhaite encourager une démarche de projet, de créativité, de créativité mathématique en développant des activités à partir de la sixième. Jusqu'où peut-on aller ? (Mais l'Inspection Générale n'est pas informée des programmes de l'école primaire !)

Les mathématiciens ont l'impression que leur part diminue. Pour se faire entendre, il doivent trouver des lieux de discussion (par exemple « Objectifs Sciences » qui encourage la participation de jeunes français à des concours européens de projets scientifiques). Développer les liens avec les physiciens.

A l'heure actuelle, les mathématiques sont conçues soit comme discipline d'éveil, soit comme discipline fondamentale, mais l'interdisciplinarité n'est pas la base de la formation.

A la suite de cette table ronde, le mémorandum suivant a été adressé à Claudine Ruget.

1) Serait-il possible que l'Inspection Générale de Mathématiques suggère de manière officielle aux professeurs de créer des ateliers de mathématiques ? En insistant sur le fait que l'Inspection n'attend pas forcément des travaux extraordinaires dans ces ateliers, mais une démarche, une ouverture différente que pendant les heures de cours ou de module.

2) Quels moyens financiers et humains pouvez-vous apporter aux ateliers ?

3) La première table ronde a porté sur la nécessité d'une bibliographie d'ouvrages de mathématiques pour enrichir les CDI. Qu'en pensez-vous ? Le Ministère peut-il nous aider ?

4) La table ronde suivante cherchait des moyens de fédérer toutes les initiatives de création de clubs de mathématiques : diffusion d'une lettre aux clubs, création d'une liste de diffusion, rencontres des animateurs de clubs par académies... Pouvez-vous nous aider matériellement pour créer des liens en nous attribuant une personne chargée du serveur d'ANIMATH ?

5) Le travail de nos élèves pourrait-il être reconnu, valorisé, grâce à une appréciation dans le livret scolaire ?

6) Un objectif d'ANIMATH est de pouvoir fournir une banque de données de noms de jeunes mathématiciens et mathématiciennes susceptibles d'intervenir dans un club devant des élèves de collèges ou de lycées.

Nous souhaitons votre aide.

LES CONFERENCES

CONFERENCE N° 1 :

Classification des noeuds diagonaux dans les polygones réguliers

Claude MORIN – Dominique ROUX

1) Position du problème.

Considérons un polygone régulier P_n de n sommets. Appelons diagonale toute droite passant par deux sommets. La tangente au cercle circonscrit en un sommet sera considérée comme une diagonale reliant ce sommet à lui-même. Nous dirons qu'un point M du plan est un nœud d'ordre k ($k \geq 2$) s'il existe exactement k diagonales du polygone P_n passant par M . La figure, aussi complexe soit-elle (figures 1, 2, 3) ne contient qu'un nombre fini de diagonales et par suite un nombre fini de nœuds. Observons que chaque sommet est un nœud d'ordre n et que, si n est pair, le centre O du cercle circonscrit est un nœud d'ordre $n/2$. Nous laisserons désormais de côté ces nœuds triviaux ainsi que les nœuds d'ordre 2. Plusieurs questions se posent:

- 1- Quel est le nombre des nœuds intérieurs au cercle ?
- 2- Quel est le nombre des nœuds extérieurs au cercle ?
- 3- Quelles sont les valeurs prises par l'entier k = ordre d'un nœud ?
- 4- k étant donné, combien existe-t-il de nœuds d'ordre k ?
- 5- Quelles sont les k diagonales qui passent par un nœud d'ordre k ?

Dans les éléments d'EUCLIDE, tout le livre IV porte sur l'étude des polygones réguliers, surtout sous l'aspect construction géométrique. Les auteurs de ce traité reviennent dans le livre XIII sur les polygones réguliers en abordant cette fois des intersections de diagonales. En particulier le théorème 8 étudie le rapport selon lequel une diagonale du pentagone régulier est divisée par une autre. Le théorème 9 reprend la question pour un hexagone et un décagone régulier, le théorème 10 relie les longueurs des côtés de ces figures par une relation de PYTHAGORE. Il est hautement probable que les questions ci-dessus n'ont pas échappé à la sagacité des géomètres grecs, d'autant plus qu'elles sont naturelles et relèvent de la récréation mathématique ou de la réalisation de dessins à la portée d'enfants, pour les petites valeurs de n .

Dans le bulletin vert numéro 302 de l'APMEP (février 1976) Eugène EHRHART, de Strasbourg, pose la question -1-. Dans le bulletin numéro 317 (février 1979) il écrit: *malgré un énoncé simple, il semble difficile, sinon impossible, de donner une réponse générale à cette question.* Charles AUQUE, de l'université de Clermont-Ferrand écrit: *la détermination de ce nombre est un problème extrêmement difficile.* La présente étude a pour objet d'apporter une réponse aux problèmes 1, 2, 3, 4, 5 ci-dessus. Elle n'aurait sans doute jamais abouti sans la précieuse collaboration du professeur Joseph OESTERLE (Paris VI). Depuis la première rédaction de ce travail, nous avons appris que le problème a été résolu, pour les nœuds intérieurs, par BJORN POONEN et MICHAEL RUBINSTEIN (SIAM J.DISCRETE MATH. Vol 11, N1, pp. 135-156, Feb 1998). Donnons d'abord quelques résultats.

Note: certains de ces résultats ont seulement fait l'objet d'une vérification informatique (voir fin du paragraphe 4).

Définitions: nous appellerons cellule fondamentale de P_n un secteur d'angle π/n limité par 2 demi-droites d'origine O (centre de P_n), l'une passant par un sommet, l'autre passant par le milieu d'un côté.

Nous dirons qu'un nœud est symétrique s'il est situé sur un axe de symétrie du polygone. Cette droite est alors clairement un axe de symétrie pour le nœud. Dans le cas contraire, le nœud sera dit dissymétrique.

Le nombre des nœuds d'ordre k intérieurs P_n est $nN_k(n) + 2n\tilde{N}_k(n)$

Le nombre des nœuds d'ordre k extérieurs P_n est $nN'_k(n) + 2n\tilde{N}'_k(n)$

Avec les notations suivantes:

$N_k(n)$, [resp. $N'_k(n)$] désigne le nombre des nœuds symétriques d'ordre k intérieurs [resp. extérieurs] de P_n compris sur les bords d'une cellule fondamentale.

$\tilde{N}_k(n)$, [resp. $\tilde{N}'_k(n)$] désigne le nombre des nœuds dissymétriques d'ordre k intérieurs [resp. extérieurs] de P_n compris l'intérieur d'une cellule fondamentale.

$$\mu_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un multiple de } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

μ_k est la fonction caractéristique de l'ensemble des multiples de k .

2) Le cas réel : les nœuds symétriques.

Etudions d'abord les nœuds symétriques situés sur un rayon du polygone P_n . Si une diagonale (AB) coupe un rayon (OE) en M, en posant $\widehat{AOE} = a\frac{2\pi}{n}$ et $\widehat{BOE} = b\frac{2\pi}{n}$, la distance OH de O à (AB) vaut (cf. figure 4):

$$OH = OE \cos(a+b)\frac{2\pi}{n} = OM \cos(a-b)\frac{2\pi}{n} \text{ d'où: } \frac{OE}{OM} = \frac{\cos(a-b)\frac{\pi}{n}}{\cos(a+b)\frac{\pi}{n}} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des entiers}$$

naturels. Un nœud d'ordre 5 existe donc si on peut écrire une relation non triviale du type $\frac{\cos x\frac{\pi}{n}}{\cos y\frac{\pi}{n}} = \frac{\cos x'\frac{\pi}{n}}{\cos y'\frac{\pi}{n}}$

où x, y, x', y' sont des entiers. On aura un nœud d'ordre 7 si on peut écrire une double égalité de ce type entre trois rapports de cosinus.

Exemple 1:

De $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ nous tirons: $\cos \pi/3 \cos(\pi/2 - 2\theta) = \cos \theta \cos(\pi/2 - \theta)$. Prenons $n = 6p$, $0 < 2q < 3p$ et $\theta = q\pi/n$ alors $\cos(2p\pi/n) \cos((3p - 2q)\pi/n) = \cos(q\pi/n) \cos((3p - q)\pi/n)$; il est donc possible, en choisissant n assez grand, d'avoir autant de nœuds d'ordre 5 que l'on veut, et cela sur chaque rayon de P_n .

Exemple 2:

Si $n = 30k$ on a $\cos(x\pi/n) = \Phi \cos(y\pi/n)$ (où $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ désigne le nombre d'or) pour 3 couples $(x, y) = (3k, 9k), (6k, 10k), (10k, 12k)$, car $\Phi = 2 \cos(\pi/5)$ et $\frac{1}{\Phi} = 2 \cos(2\pi/5)$. Pour $n = 30k$, P_n contient donc au moins un nœud d'ordre 7 sur chaque rayon.

Thorme 1:

Considérons les nœuds symétriques qui ne sont pas sur des tangentes. Alors les nœuds intérieurs au cercle circonscrit sont en bijection avec les nœuds extérieurs à ce cercle; leurs nombres sont donc égaux (figure 5 et figure 6 si $n = 24$).

Démonstration : Supposons que (AB) et (CD) se coupent en M sur le diamètre (EE'). Si B' et D' sont les symétriques de B et D par rapport à (EE') alors (AE) et (CE) sont les bissectrices des angles en A et C. Par suite (AB') et (CD') coupent (EE') au conjugué harmonique M' de M par rapport à E et E' et sont donc sécantes en M'. Comme B' et D' sont aussi des sommets de P_n , M' est également un nœud de P_n .

Remarque: le résultat subsiste pour un nœud situé sur une tangente; cependant, si l'ordre du nœud extérieur est k , celui du nœud intérieur est $k - 1$.

Thorme 2:

dit *théorème du tic tac* par référence à une horloge qui sonne 1 coup lorsque l'aiguille des minutes arrive sur 30mn et 5 coups lorsque cette aiguille arrive sur 60mn (figures 7 et 8).

- L'ordre d'un nœud symétrique vaut au plus 7.
- Si n est un multiple impair de 30 il y a un nœud d'ordre 7 sur chaque rayon de P_n .
- Si n est un multiple de 60 il y a cinq nœuds d'ordre 7 sur chaque rayon de P_n .
- Il n'existe pas d'autres nœuds d'ordre 7. Ils sont donc tous symétriques.

Par suite le nombre des nœuds d'ordre 7 (intérieurs ou extérieurs) d'un polygone régulier de n sommets est: $N_7(n) = N'_7(n) = \mu_{30}(n) + 4\mu_{60}(n)$.

Conséquence: $N_6(n) = N'_6(n) = 4\mu_{30}(n) - 4\mu_{60}(n)$.

En effet si un nœud est symétrique d'ordre 6 dans P_n , en le reliant au centre O il donne un nœud symétrique d'ordre 7 dans P_{2n} . Réciproquement si on supprime le diamètre dans un nœud d'ordre 7 de P_{2n} , on peut montrer que si n est pair on obtient un nœud d'ordre 6 de P_n .

Thorme 3 :

P_n n'admet des nœuds symétriques d'ordre 5 que si n est un multiple de 6. Le nombre de ces nœuds est:

A l'intérieur $N_5(n) = (n/4 - 3/2)\mu_6(n) - (3/2)\mu_{12}(n) - 2\mu_{24}(n) + 6\mu_{84}(n) + 6\mu_{120}(n)$.

A l'extérieur $N'_5(n) = N_5(n) + \mu_{24}(n)$.

On en déduit le nombre des nœuds symétriques d'ordre 4 de P_n en formant la différence entre le nombre des nœuds symétriques d'ordre 5 dans P_{2n} et le nombre des nœuds symétriques d'ordre 5 dans P_n ; cependant on doit ajouter 1 dans le cas intérieur si 24 divise n (figure 6).

$$N_4(n) = (N_5(2n) - N_5(n))\mu_6(n) + \mu_{24}(n) \text{ et } N'_4(n) = (N'_5(2n) - N'_5(n))\mu_6(n).$$

Les nœuds symétriques d'ordre 3 sont obtenus, lorsque n est pair en prenant une diagonale et un diamètre sécants et en construisant la symétrique de la diagonale par rapport au diamètre. Par un dénombrement simple on obtient:

$$\begin{aligned} \text{A l'intérieur } N_3(n) &= \left[\frac{(n-4)^2}{16} \right] \mu_2(n) - 3N_7(n) - 2N_5(n) + \mu_{12}(n) - 2\mu_{24}(n); \\ \text{à l'extérieur } N'_3(n) &= \left[\frac{(n-2)^2}{16} \right] \mu_2(n) - 3N'_7(n) - 2N'_5(n). \end{aligned}$$

Thorme 4 : (informatique)

Lorsque n est impair P_n n'admet que des nœuds d'ordre 2, symétriques ou non.

Autrement dit, en dehors des sommets il n'y a jamais 3 diagonales qui se coupent en un même point.

3) Le cas complexe: les nœuds dissymétriques.

Thorme 5 : (informatique)

L'ordre d'un nœud dissymétrique vaut au plus 5. Cela ne se produit que pour n multiple de 30 (un nœud extérieur) et pour n multiple de 42 (2 nœuds intérieurs et 4 nœuds extérieurs):

$$\tilde{N}_5(n) = 2\mu_{42}(n) \text{ et } \tilde{N}'_5(n) = \mu_{30}(n) + 4\mu_{42}(n)$$

Thorme 6 : (informatique)

Le nombre des nœuds dissymétriques d'ordre 4 de P_n est nul si n n'est pas multiple de 6; il est donné par:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_4(n) &= \left(\frac{n-6}{6} \right) \mu_6(n) - \mu_{12}(n) - 2\mu_{18}(n) + 14\mu_{60}(n) \text{ (nœuds intérieurs).} \\ \tilde{N}'_4(n) &= \left(\frac{n-6}{3} \right) \mu_6(n) - 2\mu_{12}(n) - \mu_{18}(n) + \mu_{42}(n) + 10\mu_{30}(n) + 22\mu_{60}(n) \text{ (nœuds extérieurs).} \end{aligned}$$

En effet il existe une formule génératrice des nœuds d'ordre 4 (en posant $n = 6p$ et en écrivant les couples de sommets reliés):

$$[(0, 2p), (q, 3p - q), (2q, 4p - q), (p + q, -2q)].$$

avec $0 < q < p$ pour les nœuds intérieurs et $-3p/2 < q < -p$ ou $-p < q < 0$ ou $p < q < 3p/2$ pour les nœuds extérieurs.

On obtient les formules donnant les nombres de nœuds en retirant les valeurs de q pour lesquelles le nœud est dégénéré ou symétrique (cela peut se produire quand p est divisible par 2 ou 3). De plus, pour $n = 30$, 2 nœuds intérieurs (resp 2 extérieurs) deviennent des nœuds d'ordre 6 mais il apparait 2 nouveaux nœuds intérieurs d'ordre 4 (resp 12 extérieurs). Pour $n = 42$, 2 nœuds intérieurs (resp 4 extérieurs) deviennent des nœuds d'ordre 5 mais il apparait 2 nouveaux nœuds intérieurs d'ordre 4 (resp 5 extérieurs). Pour $n = 60$, 2 nœuds intérieurs (resp 2 extérieurs) deviennent des nœuds d'ordre 7 mais il apparait 16 nouveaux nœuds intérieurs d'ordre 4 (resp 34 extérieurs).

Thorme 7 : (informatique)

Le nombre des nœuds dissymétriques d'ordre 3 est donné par les formules suivantes:

$$\tilde{N}_3(n) = \left[1 + \frac{n(n-12)}{48} \right] \mu_2(n) + \frac{5(n-6)}{6} \mu_6(n) + \Delta \left(\frac{n}{6} \right) \mu_6(n)$$

avec $\Delta = 36(\mu_{14} + \mu_{20}) + 24(\mu_{15} + \mu_{35}) + 40\mu_{10} - 6\mu_2 - 9\mu_4 - 8\mu_5 - 10\mu_3 + 4\mu_7$.

$$\tilde{N}'_3(n) = \left[\frac{(n-4)^2}{16} \right] \mu_2(n) + \frac{5(n-6)}{3} \mu_6(n) + \Delta' \left(\frac{n}{6} \right) \mu_6(n)$$

avec $\Delta' = 60(\mu_{14} + \mu_{20}) + 36(\mu_{15} + \mu_{35}) + 74\mu_{10} - 10\mu_2 - 13\mu_4 - 19\mu_5 - 17\mu_3 - 2\mu_7$.

Si n est pair non multiple de 6, les nœuds d'ordre 3 sont tous donnés par la formule génératrice suivante:

$$\circ A(i, j) = \{(0, i+j), (j, 2i), (2j, i+n/2)\} \text{ (voir partie 5)}$$

avec pour les nœuds intérieurs: $0 < j < i < 2j$ et $i+j < n/2$, pour les nœuds extérieurs: $0 < i < j$ et $i+j < n/2$.

Si $n = 6p$, il y a 5 autres formules génératrices de nœuds:

$$\circ B_1(q) = \{(0, q), (-p, 2q-2p), (q-p, 4p-q)\}$$

avec pour les nœuds intérieurs: $p < q < 2p$, pour les nœuds extérieurs: $0 < q < p$ ou $2p < q < 3p$.

$$\circ B_2(q) = \{(0, 2p-2q), (2q, 2p-q), (p, 3p-q)\}$$

avec pour les nœuds intérieurs: $-3p < q < -5p/2$ ou $-p < q < p/2$, pour les nœuds extérieurs: $-5p/2 < q < -p$ ou $p/2 < q < 3p$.

$$\circ B_3(q) = \{(0, 3p-q), (q, 4p-2q), (p+q, -3q)\}$$

avec pour les nœuds intérieurs: $0 < q < p$ ou $3p/2 < q < 2p$ ou $-3p/2 < q < -p$, pour les nœuds extérieurs: $-4p < q < -3p/2$ ou $-p < q < 0$ ou $p < q < 3p/2$.

$$\circ B_4(q) = \{(0, 2p), (q-2p, 4p-4q), (p-q, p+2q)\}$$

avec pour les nœuds intérieurs: $p/2 < q < p$ ou $5p/2 < q < 3p$, pour les nœuds extérieurs: $0 < q < p/2$ ou $p < q < 5p/2$.

$$\circ B_5(q) = \{(0, 3p-2q), (p+2q, -3q), (q, 4p-4q)\}$$

avec pour les nœuds intérieurs: $-p < q < -p/2$ ou $0 < q < p/2$, pour les nœuds extérieurs: $-3p/2 < q < -p$ ou $-p/2 < q < 0$ ou $p/2 < q < 3p/2$.

Si p n'a pas 2, 3, 5 ou 7 comme diviseurs, on obtient ainsi tous les nœuds d'ordre 3; leur nombre est donné par les 2 premiers termes des formules $\tilde{N}_3(n)$ et $\tilde{N}'_3(n)$. Sinon, il y a des cas particuliers correspondant à des doublons entre les formules A et B ou au fait que certains nœuds sont symétriques; de plus il apparaît de nouveaux nœuds pour $n=30, 42, 60, 84, 90, 120$ et 210 . Cela explique les formules donnant Δ et Δ' .

4) Principe des démonstrations.

Soit D_1, D_2, D_3 3 diagonales de P_n . D_i coupe le cercle circonscrit à P_n (pris comme cercle unité) en deux points d'affixes ζ_i et ζ'_i . On vérifie que l'équation de D_i est: $\zeta_i + \zeta'_i = z + \bar{z}\zeta_i\zeta'_i$ y compris dans le cas où D_i est une tangente ($\zeta_i = \zeta'_i$). La C.N.S. pour que D_1, D_2, D_3 soient concourantes ou parallèles est

$$\begin{vmatrix} 1 & \zeta_1 + \zeta'_1 & \zeta_1 \zeta'_1 \\ 1 & \zeta_2 + \zeta'_2 & \zeta_2 \zeta'_2 \\ 1 & \zeta_3 + \zeta'_3 & \zeta_3 \zeta'_3 \end{vmatrix} = 0$$

c'est à dire

$$(\zeta_1 + \zeta'_1)(\zeta_2 \zeta'_2 - \zeta_3 \zeta'_3) + (\zeta_2 + \zeta'_2)(\zeta_3 \zeta'_3 - \zeta_1 \zeta'_1) + (\zeta_3 + \zeta'_3)(\zeta_1 \zeta'_1 - \zeta_2 \zeta'_2) = 0 \quad (1).$$

Lemme fondamental (dû à Joseph OESTERLE)

Soit n un entier et $\zeta \in \mathbb{C}$ une racine primitive n^{ime} de l'unité. Soient $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ des entiers rationnels tels que $\sum_{m=0}^{n-1} a_m \zeta^m = 0$ et p un diviseur premier de n . Pour $0 \leq k < p$ notons $A_k = \sum_{m \equiv k \pmod{p}} a_m \zeta^m$.

a) Si p^2 divise n , les nombres A_k sont tous nuls.

b) Si p^2 ne divise pas n et si z est la racine p^{ime} de l'unité telle que $\left(\frac{\zeta}{z}\right)^{\frac{n}{p}} = 1$, les nombres $A_k z^{-k}$ sont tous égaux.

démonstration du lemme:

En considérant le quotient des indicateurs d'Euler $\phi(n)$ et $\phi(n/p)$ on constate que le degré du corps cyclotomique $E = \mathbb{Q}(\zeta)$ considéré comme extension du corps $K = \mathbb{Q}(\zeta^p)$ est p si $p^2 | n$ et $p-1$ sinon.

Si $p^2 | n$, le polynôme minimal de ζ sur K est $X^p - \zeta^p$. Comme les nombres $b_k = A_k \zeta^{-k}$ appartiennent à K et vérifient par construction $\sum_{k=0}^{p-1} b_k \zeta^k = 0$ les b_k sont tous nuls, ce qui prouve a).

Si p^2 ne divise pas n , $n = pq$ avec $\text{pgcd}(p, q) = 1$; par le théorème de Bézout il existe des entiers a et b tels que $aq + bp = 1$. Si $\zeta = e^{2i\pi c/n}$ avec $\text{pgcd}(c, n) = 1$ il suffit de prendre $z = e^{2i\pi ac/p}$ et $u = e^{2i\pi bc/q}$ pour écrire $\zeta = zu$ où u est une racine q -ième de 1 et z une racine p -ième de 1. On a alors $K = \mathbb{Q}(u)$; le polynôme minimal de z sur K étant de degré $p-1$ c'est $X^{p-1} + \dots + X + 1$. Comme $\sum_{k=0}^{p-1} b_k u^k z^k = 0$ les nombres $b_k u^k$ sont tous égaux d'où b).

Exploitions le lemme fondamental dans le cas d'un nœud symétrique M d'ordre 5 situé sur l'axe réel (P_n est le polygone dont les sommets sont les racines n -ièmes de 1). Posons $\zeta = e^{2i\pi/n}$ et notons D_1 (joignant ζ_1 et ζ'_1) et D_2 (joignant ζ_2 et ζ'_2) 2 diagonales distinctes, différentes de $\mathbb{R}$ et non symétriques l'une de l'autre se coupant en M . La relation (1) appliquée avec $\zeta_1 = \zeta^a, \zeta'_1 = \zeta^{a'}, \zeta_2 = \zeta^b, \zeta'_2 = \zeta^{b'}, \zeta_3 = 1$ et $\zeta'_3 = -1$ donne:

$$\zeta^a + \zeta^{a'} - \zeta^b - \zeta^{b'} + \zeta^{a'+b+b'} + \zeta^{a+b+b'} - \zeta^{a+a'+b'} - \zeta^{a+b+a'} = 0 \quad (2)$$

On peut supposer a, a', b, b' entiers entre 0 et $n-1$ et $\text{pgcd}(a, a', b, b', n) = 1$. Posons $s = a + a' + b + b'$.

Dans un premier temps, supposons que p est un diviseur premier impair de n tel que $p^2 | n$ ou bien $p \geq 11$; avec les notations du lemme, on déduit que les A_k sont tous nuls (si $p \geq 11$ il y a au moins une classe vide et le $A_k z^{-k}$ correspondant est nul). Notons E_k l'ensemble des exposants dans (2) qui sont congrus à k modulo p . Si E_k est non vide, son cardinal est au moins égal à 2 (sinon $\zeta^a = 0$ par exemple). Si E_k a pour cardinal 2 et s'il contient par exemple a , il nécessairement égal à $\{a, s-a\}$; il en résulte $a \equiv s/2$ modulo p et il ne peut donc y avoir qu'une classe de cardinal 2. Par suite, les partitions possibles pour 8 sont: 8, 6+2, 5+3, 4+4 et 3+3+2.

8 est à rejeter car on aurait $a \equiv s-a$ d'où $a \equiv s/2$ et par suite $2s \equiv s$; p diviserait a, b, a', b', n .

6+2 est à rejeter car d'une part $a \equiv s/2$ (pour E_k de cardinal 2) et d'autre part $b \equiv s/2$ par exemple (pour E_k de cardinal 6) d'où une contradiction: $b \equiv a$.

5+3 est à rejeter car on a par exemple $a \equiv s-a$ et la classe contenant a et $s-a$ doit avoir un cardinal pair ($b \equiv a$ entraîne $s-b \equiv s-a$).

4+4 est à rejeter car si une somme de 4 nombres complexes de module 1 est nulle alors ces nombres sont opposés 2 par 2 d'où $\zeta^{2a} = -\zeta^s = \zeta^{2a'}$; la droite D_1 passerait par 0.

Finalement il ne reste que le cas 3+3+2. Soit $\{a, s-a\}$ la classe de cardinal 2. On doit considérer 3 sous-cas:

1) Les autres classes sont $\{a', b, b'\}$ et $\{s-a', s-b, s-b'\}$; on obtient:

$$\begin{cases} \zeta^{a'} = \zeta^b + \zeta^{b'} \\ \zeta^a = -\zeta^{a'+b+b'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \zeta^{b-a'} = \rho \\ \zeta^{b'-a'} = \rho^{-1} \end{cases} \Rightarrow [\zeta^b = \rho\mu, \zeta^{b'} = \rho^{-1}\mu, \zeta^a = -\mu^3] \text{ où } \rho = e^{\pm i\pi/3} \text{ et } \mu = \zeta^{a'}.$$

On a utilisé la propriété: $\zeta^a + \zeta^b = 1 \Rightarrow \{\zeta^a, \zeta^b\} = \{\rho, \rho^{-1}\}$.

2) Les autres classes sont $\{a', b, s-b'\}$ et $\{s-a', s-b, b'\}$; on obtient:

$$\begin{cases} \zeta^{a'} = \zeta^b + \zeta^{a+a'+b} \\ \zeta^{b'} = -\zeta^{a-b-a'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \zeta^{b+a} = \rho \\ \zeta^{b-a'} = \rho^{-1} \end{cases} \Rightarrow [\zeta^{a'} = \rho\mu, \zeta^a = \rho\mu^{-1}, \zeta^{b'} = -\mu^{-3}] \text{ où } \rho = e^{\pm i\pi/3} \text{ et } \mu = \zeta^b.$$

3) Les autres classes sont $\{a', s-b, s-b'\}$ et $\{s-a', b, b'\}$; on obtient:

$$\begin{cases} \zeta^{a'} = \zeta^{a'+a+b'} + \zeta^{a+a'+b} \\ \zeta^{a'} = -\zeta^{a-b-b'} \end{cases} \text{ équivalent au 1) en échangeant } a \text{ et } a' \text{ ainsi que } b' \text{ et } -b.$$

Remarque: de $(\rho\mu)^n = 1$ on déduit que n est multiple de 6. En posant $n = 6p$ (p pas nécessairement premier) et $a' = q$ on obtient 2 formules génératrices de nœuds d'ordre 5:

1) $\{(q, 3p+3q), (-q, -3p-3q), (p+q, -p+q), (-p-q, p-q), (0, 3p)\}$.

2) $\{(q, 3p-3q), (-q, -3p+3q), (p+q, p-q), (-p-q, -p+q), (0, 3p)\}$.

Pour chacune de ces 2 formules, lorsque p est pair et q impair, on déduit un nœud d'ordre 4 pour $P_{n/2}$: il suffit de retirer le couple $(0, 3p)$, de retrancher q et de tout diviser par 2.

Dans un second temps on suppose n divisible par 7 et $n' = n/7$ non divisible par 7. On montre alors que $n = 84$. En effet on peut supposer qu'il y a 7 classes modulo 7 (sinon on retombe sur le cas où tous les A_k sont nuls): une de cardinal 2 $\{a, s-a\}$ et 6 de cardinal 1. On en déduit: $u^a + u^{s-a} = u^{a'} = u^{s-a'} = -u^b = -u^{b'} = -u^{s-b} = -u^{s-b'}$ avec u racine n' -ième de 1, puis $u^{a+a'} = 1, u^{a-a'} = e^{\pm i\pi/3}$ d'où $u^{2a} = e^{\pm i\pi/3}$. On en déduit que 12 divise n' puis enfin que $n' = 12$ soit $n = 84$ (si on suppose a, a', b, b', n premiers entre eux dans leur ensemble).

On suppose ensuite n divisible par 5, non par 25, et qu'il y a 5 classes. La partition 4+1+1+1+1 conduit à $n = 30$ ou $n = 120$, la partition 2+2+2+1+1 à $n = 60$.

Une étude minutieuse des cas restants: $n = 3 \times 2^k$ et $n = 2^k$ ne donne rien de plus que le cas général. On a donc obtenu les 4 valeurs de n (30, 60, 84 et 120) pour lesquelles il y a des nœuds d'ordre 5 non donnés par les 2 formules génératrices générales.

Ces conclusions ont été contrôlées par ordinateur jusqu'à $n = 10000$ (pour les nœuds symétriques) d'une part en vérifiant des divisibilités de polynômes par des facteurs irréductibles de polynômes de Tchebychev, d'autre part par un calcul approché en cosinus. Une étude analogue, mais très longue et fastidieuse, pourrait être conduite pour les nœuds dissymétriques. Nous nous sommes contentés de vérifier les formules en factorisant les polynômes correspondants par des polynômes cyclotomiques après avoir fait un calcul informatique de valeurs approchées d'exponentielles complexes jusqu'à $n = 1260$ (avec Maple: 3 jours de calcul rien que pour ce dernier entier sur Pentium III à 500 Mhz). Ceci explique la distinction introduite entre les nonces dmonstrs et les "thormes" 4, 5, 6, 7 qualifiés "d'informatiques".

5) Compléments: problèmes géométriques.

- Taille du plus petit disque couvrant tous les nœuds de P_n . Un calcul élémentaire permet de voir que le rayon de ce disque est asymptotiquement équivalent à $2nR/\pi$ où R est le rayon du cercle de départ. Dans le cas n impair cette valeur est un peu trop petite, dans le cas n pair elle est un peu trop grande.
- Dans les résultats énoncés ci-dessus on peut être surpris par le fait que l'ordre des nœuds soit borné (alors que, lorsque n augmente, le nombre des diagonales augmente énormément) et de plus, que les bornes soient petites: 7 pour les nœuds symétriques (5 configurations), 5 pour les nœuds dissymétriques (7 configurations). Il est également surprenant que l'énoncé le plus simple: le théorème 4 relatif au cas n impair, soit le plus long à démontrer: il est ici obtenu en ayant envisagé tous les autres cas et en le récupérant par absence de nœud. Nous n'en connaissons pas de preuve directe.

- c) Soit un cône de révolution et deux points A et B sur ce cône. En considérant le développement de ce cône, éventuellement reproduit n fois, on constate immédiatement que, pour un angle au sommet convenable, les nœuds diagonaux de P_n fournissent des groupes de géodésiques qui ont la propriété de relier A et B (en faisant plusieurs tours autour du cône) tout en repassant par une de ces deux extrémités.

d) Proposition 1 :

Soit M un nœud, intersection de 2 diagonales (AM) et (BM) où A et B sont deux sommets de P_n . Le cercle circonscrit au triangle ABM contient les sommets d'un polygone régulier de n sommets dont trois d'entre eux sont A, B, M et dont tous les autres sont des nœuds de P_n .

Démonstration: Posons $M_0 = M$ et pour tout entier k , $0 < k < n$ construisons les images (AM_k) de (AM_0) par la rotation de centre A d'angle $2k\pi/n$ et (BM_k) de (BM_0) par la rotation de centre B d'angle $2k\pi/n$. Les droites (AM_k) et (BM_k) se coupent en un point M_k , d'où l'on voit le segment [AB] sous l'angle constant (MA, MB). Donc ces n points M_k sont sur un cercle Ω passant par A, B, M. Par construction les droites (AM_k) coupent Ω en les points M_k , sommets d'un polygone régulier de n sommets.

D'autre part, l'application répétée du théorème de PASCAL aux hexagones formés par 6 des sommets de P_n donnent des alignements de trois points. Certains de ces triplets sont portés par des droites confondues. On obtient ainsi des alignements remarquables dans l'ensemble des nœuds de P_n . Voir exemple en figure 10.

- e) Interprétation géométrique des "formules A" donnant des nœuds d'ordre 3 (cf théorème 7).

Soit un cercle $\mathcal{C}$ et $AA'A''$ un triangle inscrit dans ce cercle. Nous prendrons A comme origine des angles orientés et repérerons chaque point du cercle par un angle au centre mesuré à partir du point A. Soit $2b$ l'angle correspondant à A' et $2a$ celui pour A'' où a et b sont 2 réels définis modulo π . Les bissectrices intérieures du triangle recoupent le cercle $\mathcal{C}$ en B' d'angle associé a , B'' d'angle b (figure 11) et B d'angle $a + b + \pi$. Les bissectrices extérieures recoupent $\mathcal{C}$ en $C(a + b)$, $C'(a + \pi)$, $C''(b + \pi)$. Désignons par H_0 , H , H' , H'' les centres des cercles inscrit et exinscrits à $AA'A''$. Ce sont 4 nœuds, l'un intérieur et 3 extérieurs, tels que chacun est l'orthocentre du triangle formé par les 3 autres. Ces 4 triangles admettent $\mathcal{C}$ comme cercle d'Euler commun. Les formules définissant ces 4 nœuds sont donc:

$$H_0 \begin{cases} (0, a + b + \pi) \\ (b, 2a) \\ (a, 2b) \end{cases} \quad H \begin{cases} (0, a + b + \pi) \\ (b + \pi, 2a) \\ (2b, a + \pi) \end{cases} \quad H' \begin{cases} (0, a + b) \\ (b + \pi, 2a) \\ (a, 2b) \end{cases} \quad H'' \begin{cases} (0, a + b) \\ (b, 2a) \\ (a + \pi, 2b) \end{cases}$$

6) Problèmes diophantiens trigonométriques

Le théorème 3 (nœuds symétriques d'ordre 5) est équivalent à la propriété suivante, de transcendance, de la fonction cosinus :

Proposition 2 :

Les seules relations non triviales du type

$$\cos(x\pi/n) \cos(y'\pi/n) = \cos(x'\pi/n) \cos(y\pi/n)$$

ou, ce qui revient au même via les formules de transformation de produits en sommes, du type :

$$\cos(a\pi/n) + \cos(b\pi/n) + \cos(c\pi/n) + \cos(d\pi/n) = 0$$

($x, x', y, y', a, b, c, d, n$ tous entiers) sont celles associées à l'exemple 1 du 2) ou à l'exemple 2 du 2): propriétés de $\pi/5$ telles que $\cos(\pi/5) = \cos(2\pi/5) + \cos(\pi/3)$ et ses variantes, ou enfin à celles associées aux propriétés de $\pi/7$ telles que $\cos(\pi/7) + \cos(3\pi/7) = \cos(2\pi/7) + \cos(\pi/3)$ et ses variantes.

En particulier et de façon plus précise, il résulte du fait que le seul nœud symétrique d'ordre 5 porté par une tangente soit celui de P_{24} (figure 6), le théorème suivant:

Thorme 8 :

Considérons l'équation $\cos \pi u \cdot \cos \pi v = \cos \pi w$ où u, v, w sont des rationnels. On ne perd pas en généralité en supposant ces 3 nombres dans l'intervalle $]0, 1/2[$. Alors l'équation n'a qu'une solution:

$$u = v = 1/4 \text{ et } w = 1/3.$$

Corollaire 1: dans les mêmes conditions l'équation $\sin \pi u \cdot \sin \pi v = \sin \pi w$ a pour seule solution:

$$u = v = 1/4 \text{ et } w = 1/6.$$

Il en résulte aussi grâce à des transformations élémentaires en posant $u = z - x$, $v = 2y$ et $w = z + x$ le

Corollaire 2: soit l'équation $\tan^2 \pi y = \tan \pi x \cdot \tan \pi z$ où x, y, z sont des rationnels. On ne perd pas en généralité en supposant $0 < x < y < z < 1/2$. Alors l'équation a pour solutions:

- 1) la famille "triviale" : $y = 1/4$ et $x + z = 1/2$
- 2) la solution exceptionnelle: $y = 1/8, x = 1/24, z = 7/24$.

Etude de l'équation : $\cos \pi y = r \cos \pi x$ où r est un réel donné que l'on peut sans perte de généralité supposer strictement supérieur à 1 et où x et y sont deux nombres rationnels inconnus de $]0, 1/2[$. Il résulte de ce qui précède concernant les nœuds symétriques que cette équation a au plus 3 couples (x, y) solutions.

Thorme 9 :

L'équation : $\cos \pi y = r \cos \pi x$ ($r > 1$) admet exactement 3 couples (x, y) solutions (rationnels de $]0, 1/2[$) uniquement pour 5 valeurs de r :

- 1) $r = \Phi$ (nombre d'or); alors $(x, y) = (\frac{3}{10}, \frac{1}{10})$ ou $(\frac{1}{3}, \frac{1}{5})$ ou $(\frac{2}{5}, \frac{1}{3})$.
- 2) $r = 2 \cos(\frac{\pi}{30})$; alors $(x, y) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{30})$ ou $(\frac{11}{30}, \frac{3}{15})$ ou $(\frac{7}{15}, \frac{13}{30})$.
- 3) $r = 2 \cos(\frac{7\pi}{30})$; alors $(x, y) = (\frac{1}{3}, \frac{7}{30})$ ou $(\frac{4}{15}, \frac{1}{30})$ ou $(\frac{13}{30}, \frac{2}{5})$.
- 4) $r = \frac{1}{2 \cos(\frac{11\pi}{30})}$; alors $(x, y) = (\frac{11}{30}, \frac{1}{3})$ ou $(\frac{7}{30}, \frac{2}{15})$ ou $(\frac{1}{5}, \frac{1}{30})$.
- 5) $r = \frac{1}{2 \cos(\frac{13\pi}{30})}$; alors $(x, y) = (\frac{13}{30}, \frac{1}{3})$ ou $(\frac{2}{5}, \frac{7}{30})$ ou $(\frac{11}{30}, \frac{1}{15})$.

Cela résulte du théorème du tic-tac.

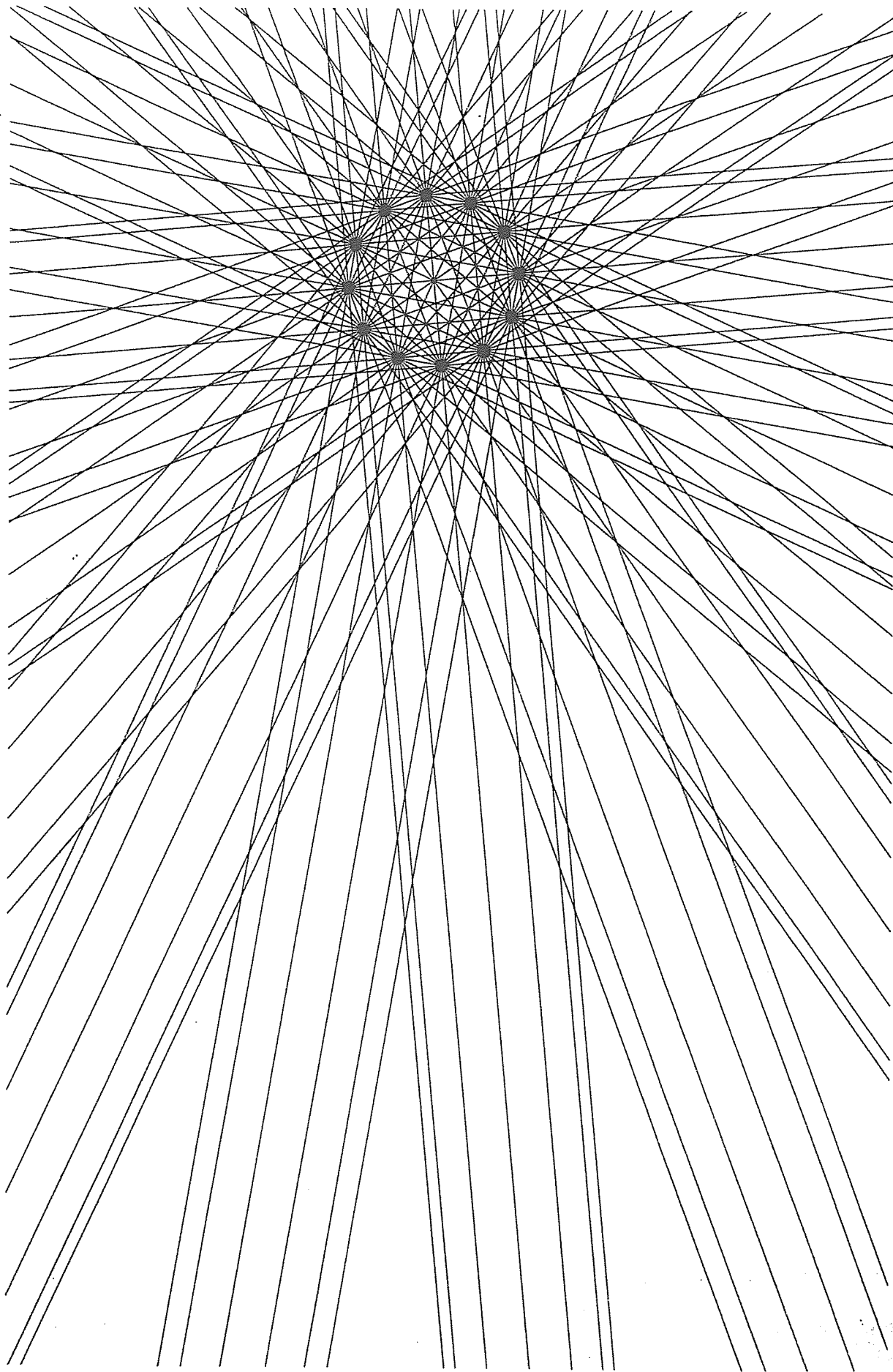
Observons que si $\cos \pi y = r \cos \pi x$ avec x et y rationnels, alors r est nécessairement un nombre algébrique car $\cos \pi x$ et $\cos \pi y$ étant des racines de polynômes de Tchebychev sont eux-mêmes algébriques. Comme l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, si r est pris au hasard dans $\mathbb{R}$, la probabilité pour que l'équation ait une solution est nulle. Notons aussi que la condition r est algébrique est nécessaire pour l'existence d'une solution (x, y) mais n'est pas suffisante comme le montre le

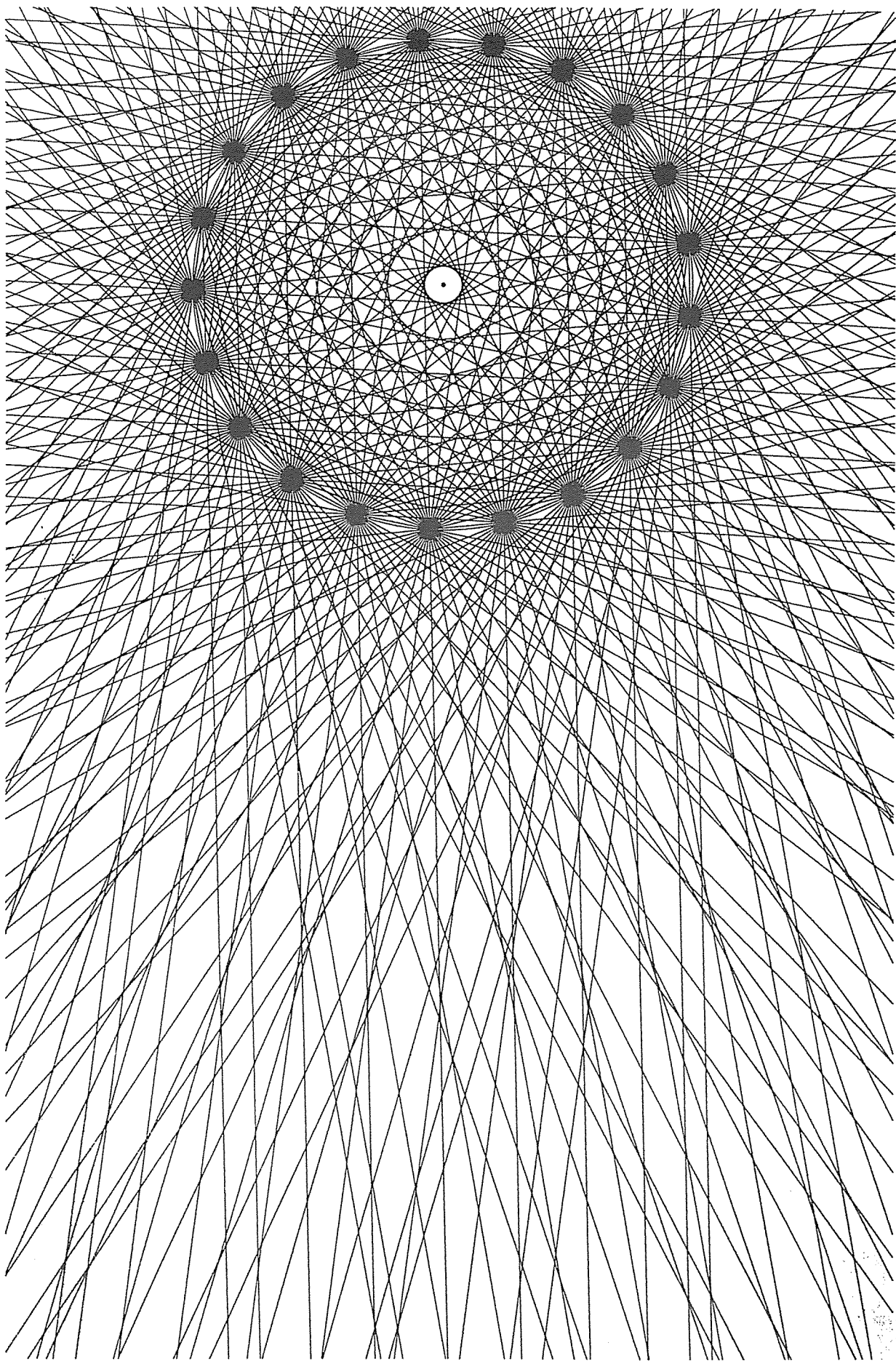
Thorme 10 :

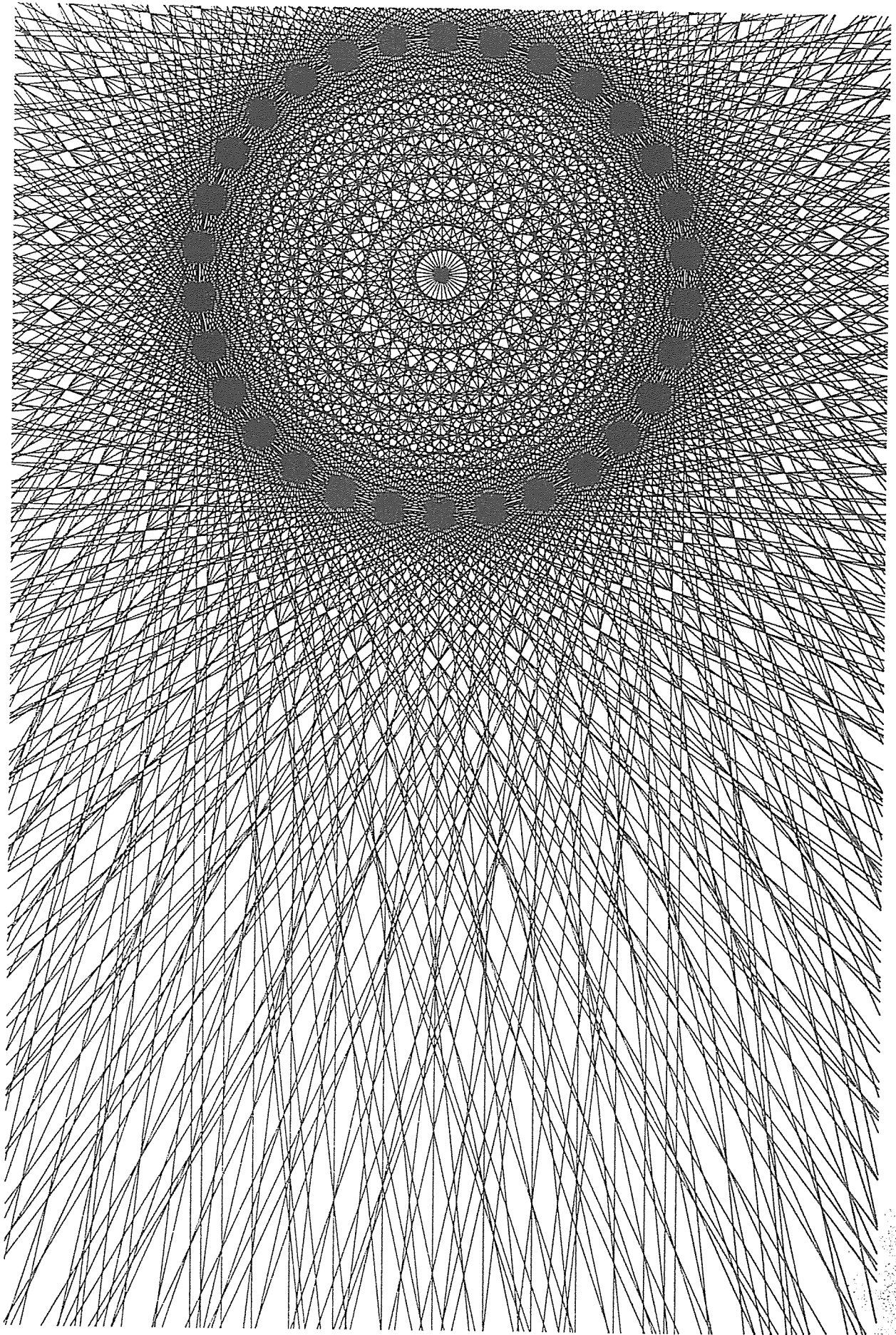
L'équation $\cos \pi y = r \cos \pi x$ avec x, y et r rationnels n'admet des solutions que si $r = 0$ ou ± 1 ou ± 2 ou $\pm 1/2$.

En effet soit n le ppcm des dénominateurs de x et y , $x = a/n$, $y = b/n$, et soit $\zeta = e^{i\pi/n}$. Quitte à remplacer r par $1/r$ et à échanger x et y , on peut supposer $r > 1$. $r = p/q$, $p > q$. L'équation équivaut à $q\zeta^a + q\zeta^{-a} - p\zeta^b - p\zeta^{-b} = 0$ qui s'étudie directement à l'aide du lemme fondamental ce qui conduit, hormis les cas triviaux, à $n = 3, a = 0, b = 1$.

On pourrait de même étudier l'équation $\cos \pi y = \sqrt{r} \cos \pi x$ qui équivaut à $1 + \cos 2\pi y = r + r \cos 2\pi x$ et d'autres équations, en particulier les équations diophantiennes exponentielles qui exploiteront les résultats obtenus dans l'étude des nœuds dissymétriques.







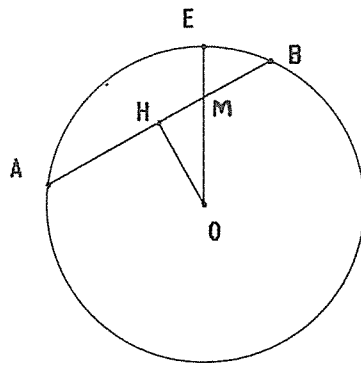


Figure 4

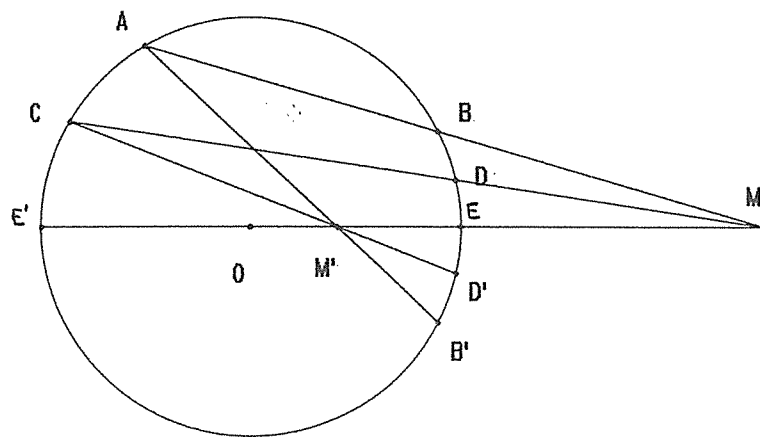


Figure 5

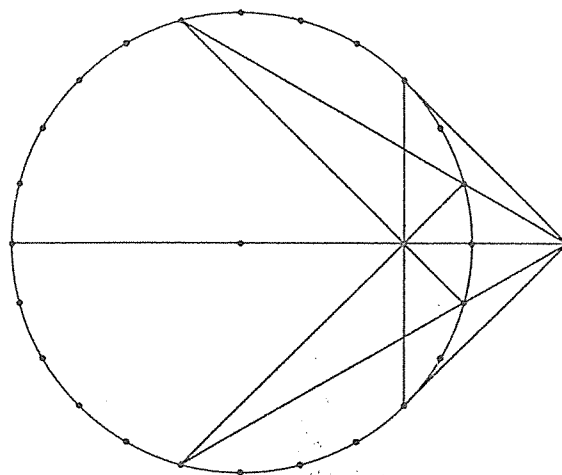
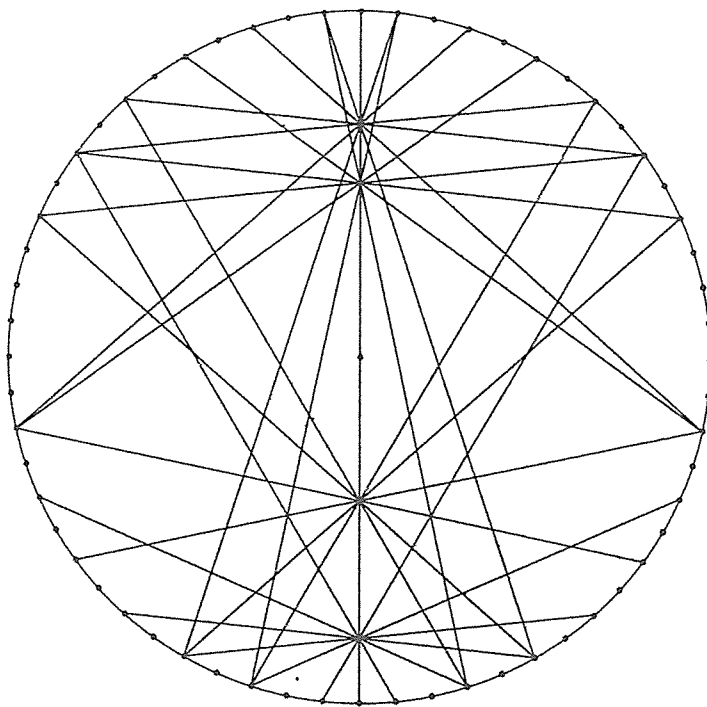


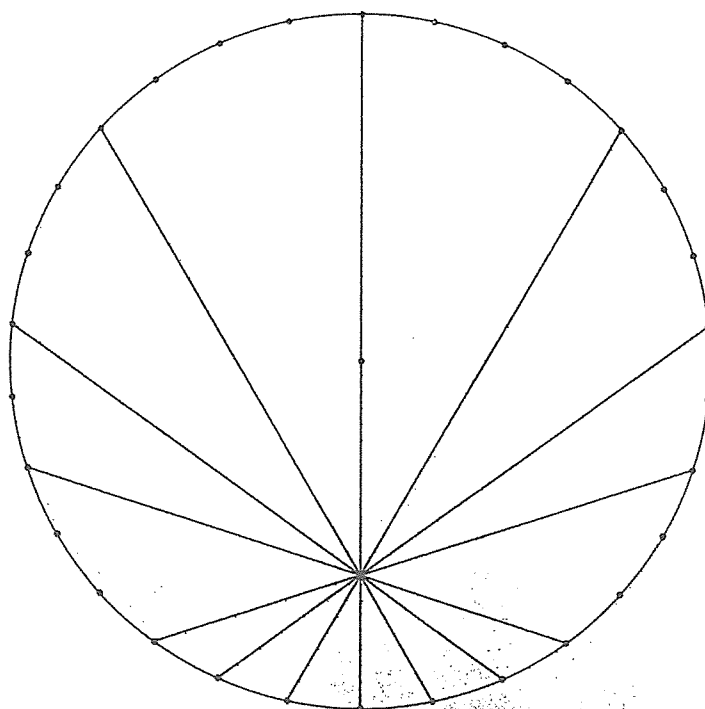
Figure 6

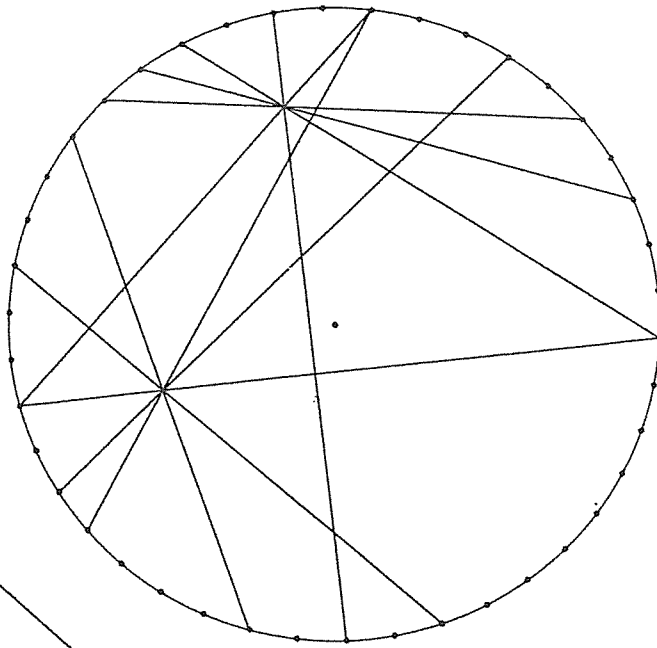
P24

P60

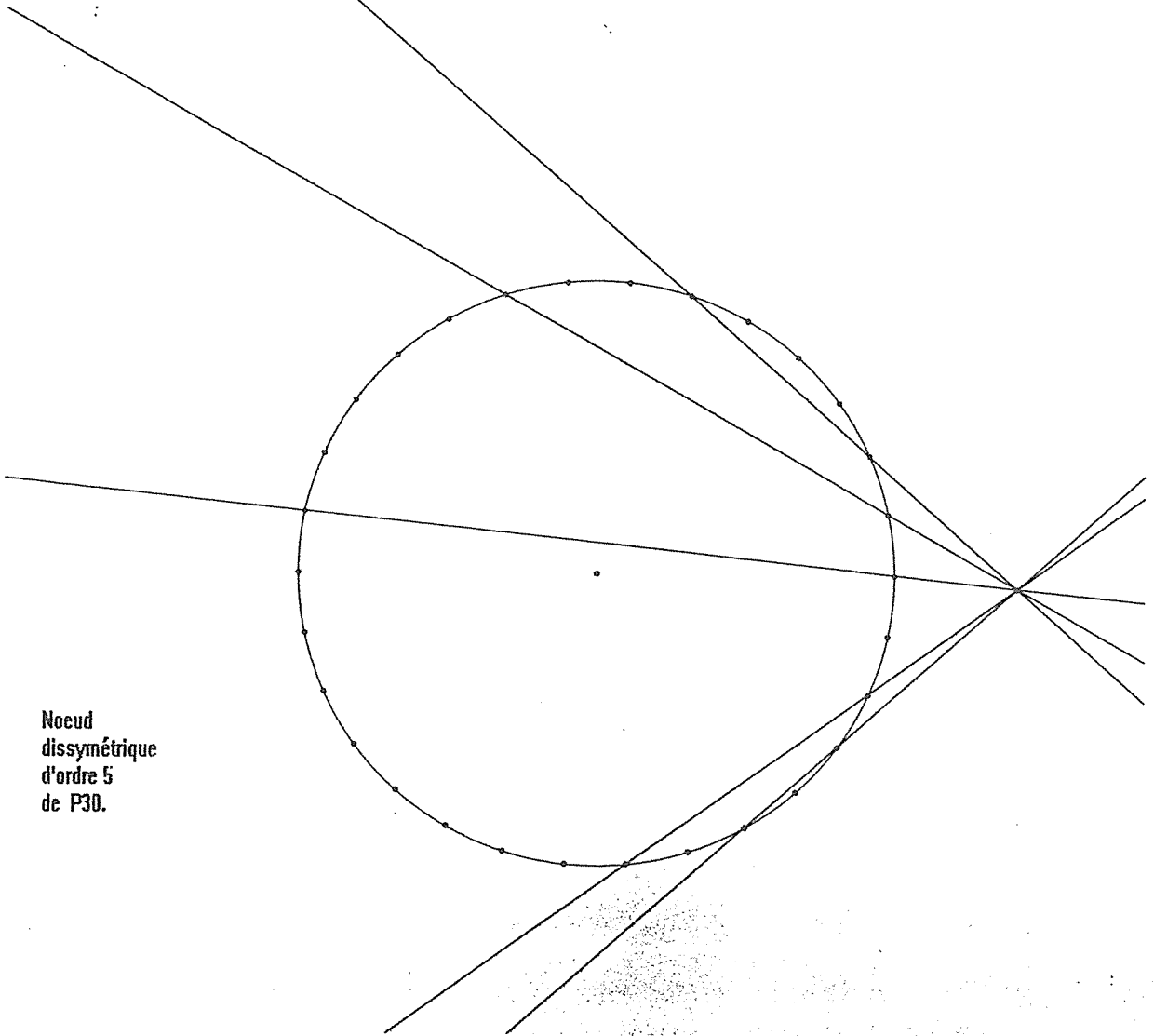


P30

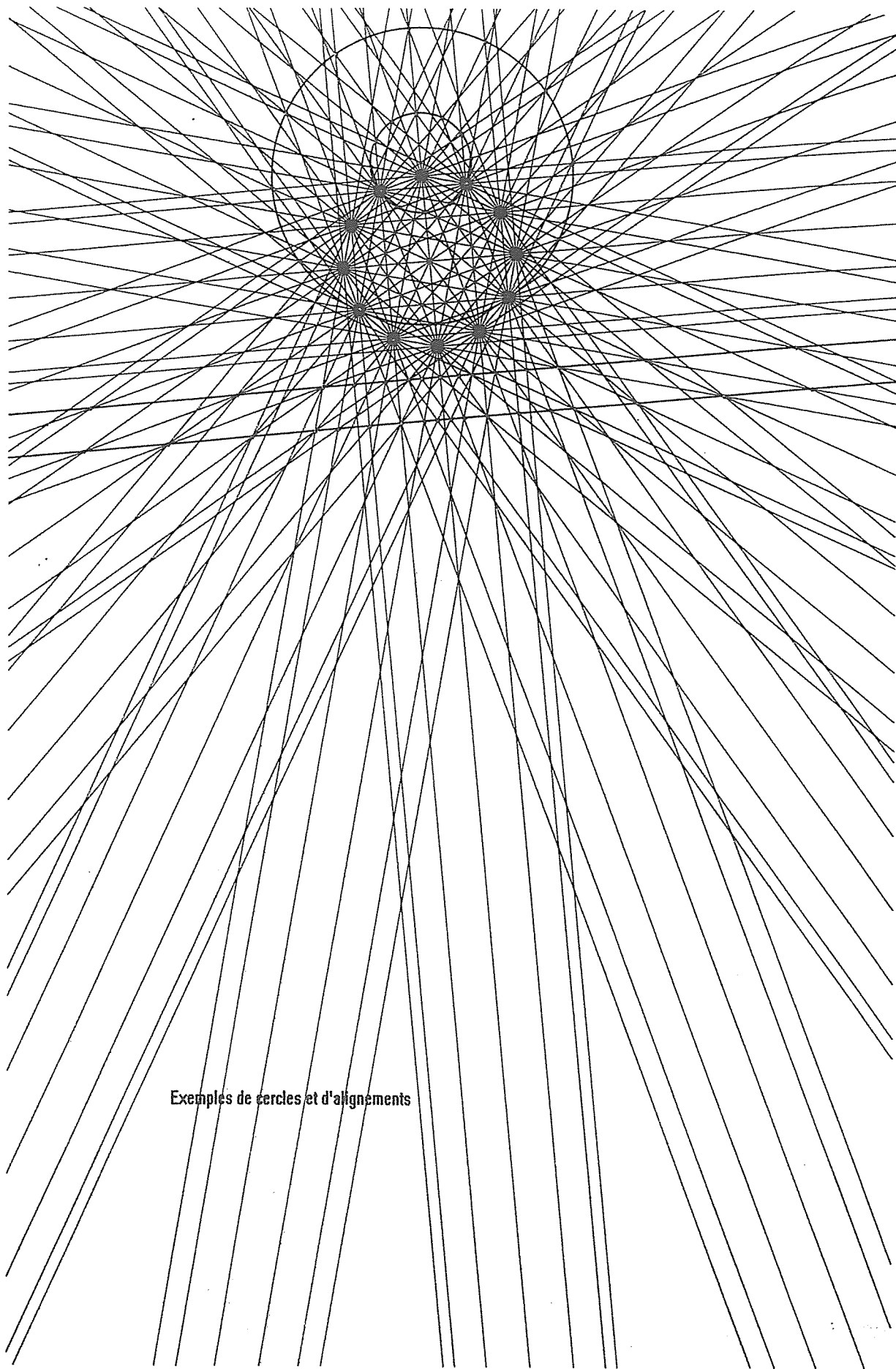




Les 2 noeuds dissymétriques intérieurs d'ordre 5 dans P 42.



Noeud
dissymétrique
d'ordre 5
de P30.



Exemples de cercles et d'alignements

Figure 10

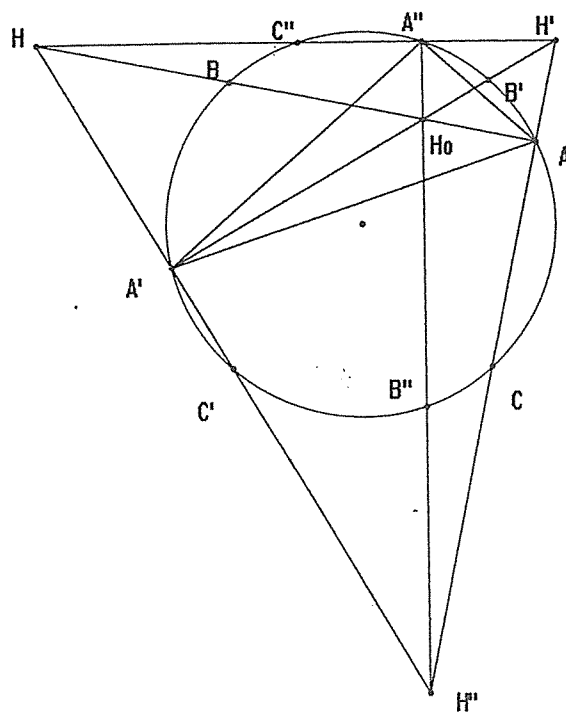
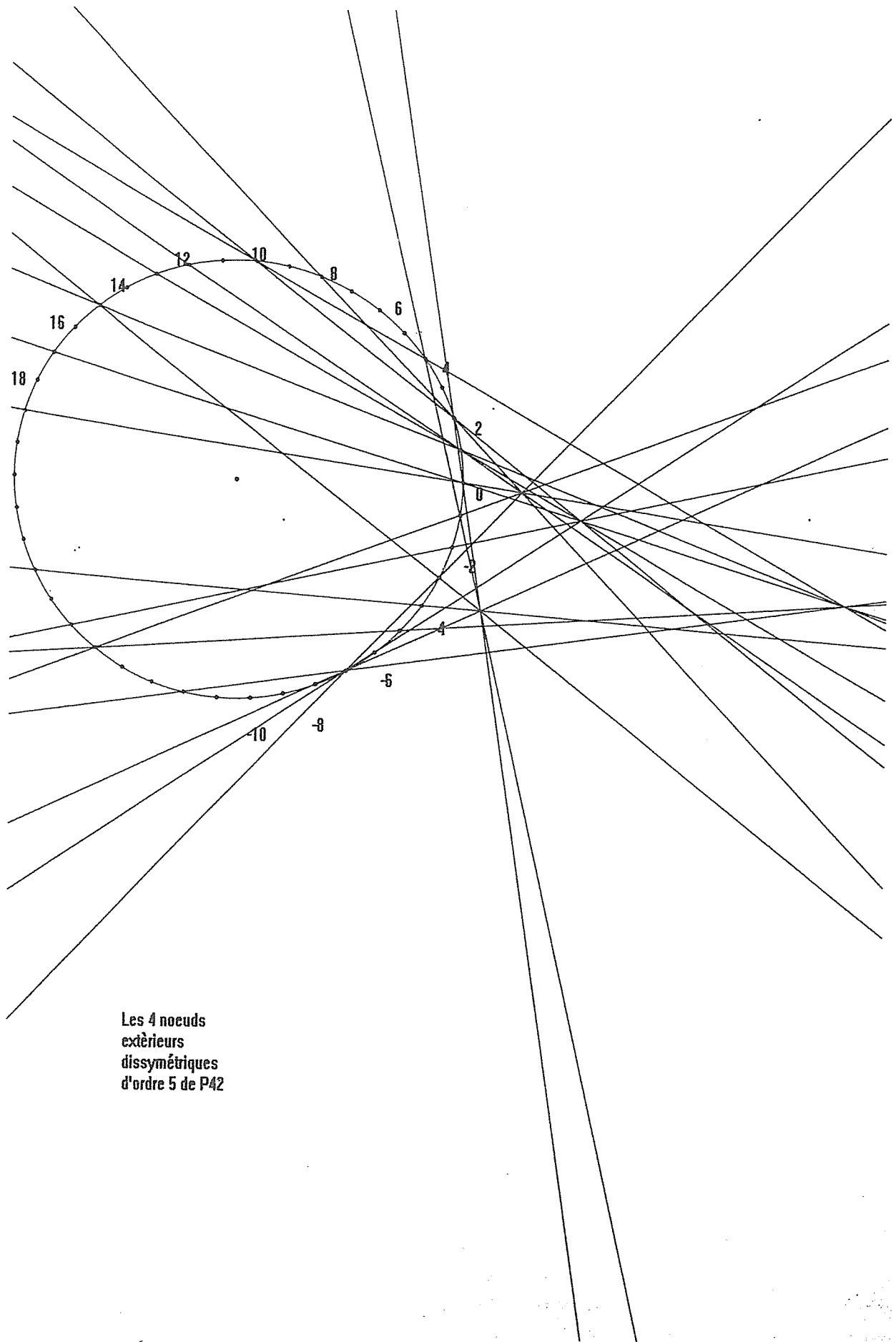


Figure 11

A (0)	A' (2b)	A'' (2a)
B (a+b+ π)	B' (a)	B'' (b)
C (a+b)	C' (a+ π)	C'' (b+ π)



Les 4 noeuds
extérieurs
dissymétriques
d'ordre 5 de P42

CONFERENCE N° 2 :

Les premières olympiades académiques de mathématiques

Dominique ROUX – Aude SAINFORT

1°) Principe et création

Pour le ministre et par délégation, Madame Becquelin, Doyenne de l'inspection générale et Monsieur de Gaudemar, Directeur de l'enseignement scolaire adressaient le 9 novembre 2000 une lettre aux recteurs d'académie leur annonçant la création d'olympiades académiques de mathématiques en direction des lycéens des classes de premières scientifiques et technologiques dans le but de favoriser l'émergence d'une nouvelle culture scientifique et technologique. La démarche préconisée doit conduire à développer chez les élèves l'initiative et le goût de la recherche. Elle doit permettre d'aborder les exercices et problèmes de la manière la plus ouverte. Sa dimension académique favorise les relations entre les professeurs d'une même académie et les corps d'inspections tout en permettant le repérage, au plan national, des lauréats susceptibles de participer à des compétitions nationales et internationales.

2°) Organisation et dispositif (cf. B.O. n°44 du 7 décembre 2000)

Le dispositif comprend un groupe national présidé par un inspecteur général et dans chaque académie une cellule présidée par un responsable désigné par le recteur en liaison avec l'inspection générale. L'épreuve, d'une durée de quatre heures, comprend quatre exercices : trois choisis par le groupe national plus un quatrième élaboré par chaque cellule académique. Une publicité a été faite par voie d'affiches en couleur format A3 confectionnées et envoyées en double exemplaire dans chaque lycée par la MICOM(*) accompagnées d'une lettre adressée aux proviseurs. L'épreuve s'est déroulée le mercredi 9 mai 2001 de 14h à 18h en métropole, les horaires étant décalés pour les académies lointaines de façon à empêcher la transmission des sujets par courrier électronique entre les candidats.

La correction des copies a été assurée localement, dans chaque académie, par les cellules académiques qui ont envoyé au groupe national les meilleures copies. Celles-ci ont été classées par le groupe national afin d'établir un palmarès comprenant des prix et des accessits.

(*) MICOM : MIssion (ministérielle) à la COMmunication.

3°) Bilan pour l'année 2001

Pour cette année de lancement le déroulement des olympiades n'a pas été parfait, mais est assez satisfaisant. Tout d'abord la date de départ a été tardive, à quinze jours près il fallait reculer d'un an. Cependant, il faut louer la rapidité avec laquelle les équipes académiques se sont constituées, il y a là un témoignage de l'action efficace et irremplaçable du corps des inspecteurs d'académie-inspecteurs pédagogiques régionaux dont le dévouement et la compétence ne sont plus à démontrer. Il convient aussi de féliciter les cellules académiques qui ont réalisé un travail souvent remarquable et ont réussi à envoyer les propositions d'énoncés à temps (trois académies ont eu un léger retard) puis à organiser l'épreuve, la correction des copies, la remise des prix avec des moyens en général modestes. Le ministère a sa part dans la réussite de l'entreprise : l'action dans les temps de la MICOM a été décisive pour informer les élèves et déclencher leurs inscriptions, en revanche l'information auprès des proviseurs est parfois mal passée.

4°) Les élèves

Plus de 6 000 élèves ont participé à cette première édition des olympiades. Pour la très grande majorité, ce sont des élèves de 1^{re} S mais il y a eu aussi des élèves des séries technologiques. On note une fois de plus, comme au concours général, l'absence totale de fille dans le palmarès national.

Dans l'ensemble, les élèves ont trouvé les sujets trop difficiles. Certains ont été découragés. Un message de l'académie de Rennes parle même de larmes. Il est important de reconforter ces élèves, de leur expliquer qu'il n'y a rien de déshonorant à ne pas savoir résoudre les problèmes posés dans une telle compétition et que, s'il n'y a pas de mathématiques sans larmes (comme l'a écrit Laurent SCHWARTZ en tête de son cours d'analyse à l'Ecole Polytechnique), il y a aussi de grandes joies dans les mathématiques. Il conviendra de tenir le plus grand compte de ces signaux remontés des académies et, pour l'année 2002, de baisser un peu de niveau de difficulté des exercices.

Une soixantaine de copies sont parvenues au groupe national, dans lesquelles au moins deux exercices sur quatre ont été bien abordés et le plus souvent complètement résolus. Les meilleures copies traitent les quatre exercices parfaitement ou au moins de façon très substantielle.

5°) Les exercices

Le plus difficile des 4 exercices proposés était sans aucun doute le quatrième : volume minimum de l'intersection de deux cubes ayant un diamètre commun. Deux copies arrivent à la réponse exacte ($= 3/4 V$). Mais le premier ne justifie pas l'existence des 6 points de rencontre des arêtes intermédiaires, ce qui est clairement prouvé par deux autres candidats en utilisant la projection orthogonale sur un plan orthogonal à l'axe commun aux 2 cubes et en considérant les hexagones réguliers ainsi

obtenus. La réunion des idées des deux premiers aurait donné une solution complète et parfaite. Cet exercice a servi à classer les 4 meilleurs candidats, ceux-ci seront particulièrement suivis dans la perspective de leur participation aux olympiades internationales.

L'exercice sur les 3 angles égaux émanait de l'académie de Versailles. Il a été résolu par une vingtaine de candidats, le plus souvent en obtenant $2MA=MC$ et $2MD = dMB$ au moyen de rapports d'aires de triangles et, contre notre attente, au lieu de prendre un repère et d'écrire les équations analytiques de deux cercles la majorité des élèves qui résolvent cette question préfèrent passer par les produits scalaires.

$$(\overrightarrow{2MA} - \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{2MA} + \overrightarrow{MC}) = 0 \text{ et } (\overrightarrow{2MD} - d\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{2MD} + d\overrightarrow{MB}) = 0$$

Ils introduisent alors les barycentres correspondants et obtiennent ainsi les deux cercles par les extrémités d'un diamètre. La discussion qui conduit à la condition $d \geq 6$ est parfois ébauchée mais n'est jamais conduite à son terme. Il est vrai que l'énoncé tel qu'il était posé ne la demandait pas explicitement, mais on aurait aimé que quelques candidats éprouvent la nécessité de pousser l'analyse jusqu'au bout.

Le premier exercice émanait de l'académie de Clermont-Ferrand (tétraèdre qui bascule dont les faces portent les numéros 1, 2, 3, 4). Il était destiné à être résolu par beaucoup, il ne nécessite aucune connaissance. Toutes les copies envoyées au groupe national offrent une bonne solution.

L'exercice académique (numéroté 3 dans les sujets) est de difficulté très variée, depuis des exercices qui se résolvent en quelques lignes jusqu'à d'autres dont la solution nécessite plusieurs pages. C'était la règle du jeu. En attendant qu'il y ait un peu plus d'homogénéité dans cette gamme intermédiaire de sujets, nous conserverons la formule, 3 exercices nationaux plus 1 académique, avant de passer à la formule 2 + 2.

Il y a lieu de se réjouir de l'effort d'originalité et de création déployé dans les académies, c'est un objectif indirect de ces olympiades ; il a été atteint, et il faut souhaiter que la publication des textes en coédition APMEP - ACL les éditions du Kangourou soit utile aux enseignants.

6°) Conclusion

La conclusion est dans la suite qui sera donnée à ces premières olympiades académiques de mathématiques. Tout d'abord, il y a eu des récompenses et remises de prix dans les académies accompagnées de cérémonies plus ou moins festives, en principe placées sous la responsabilité des recteurs. Ici, il faut remercier les membres de l'association ANIMATH qui ont obtenu des livres auprès d'éditeurs afin de récompenser les lauréats.

Ensuite, il y a les meilleurs parmi ceux qui sont classés sur le plan national. Là aussi ANIMATH est intervenu et a organisé un stage olympique près de TOULOUSE du 22 au 29 juillet 2001. Signalons au passage l'efficacité de ces stages : celui de l'année 2000 se déroulait à Paris et réunissait des élèves de Seconde et de Première. Il se trouve que trois des élèves qui étaient alors en Seconde sont aux meilleures places des olympiades 2001 : le 1^{er} prix, le 2^{ème} prix et un premier accessit.

Enfin, la suite est dans ce que seront les olympiades 2002. Il convient d'ajuster, de préciser le niveau, de trouver un meilleur calendrier, de mieux faire circuler les informations, de rechercher de nouveaux sponsors, de développer le travail dans les académies et le dialogue avec le groupe national.

Compte tenu des vacances d'avril et des jours fériés en mai la date retenue pour les olympiades est

MERCREDI 27 MARS 2002

D'où il résulte le calendrier suivant pour la prochaine session :

- mi-septembre : réunion des cellules académiques, confection de propositions d'énoncés, envoi des propositions au groupe national avant le 21 octobre 2001.
- mi-novembre : envoi des 3 énoncés nationaux aux cellules académiques, affiches dans les Lycées,
- mi-décembre : les cellules remettent les 4 énoncés au D.E.C.(*)
- clôture des inscriptions d'élèves avant le 15 décembre 2001.
- janvier-février 2002 : préparation des centres par les D.E.C.
- envoi des sujets en mars,
- mi-mai : envoi au groupe national des palmarès académiques et des meilleures copies.

*Paris le 13 juin 2001
Dominique ROUX
I.G.E.N*

(*) D.E.C. : Division des Examens et Concours

PALMARÈS NATIONAL

PRIX

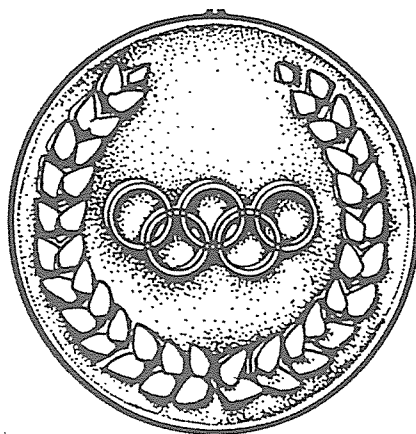
1 ^{er} prix :	Guillaume GORON	Lycée E. PERRIER - Tulle (19)
2 ^{ème} prix :	Rémy OUDOMPHENG	Lycée P. CORNEILLE - Rouen (76)
3 ^{ème} prix :	Axel BACHER	Lycée J. MOULIN - Lyon (69)
4 ^{ème} prix :	Julien SULZMAN	Lycée R. DESCARTES - Tours (37)

1^{ers} ACCESSITS ex aequo

Thomas AILLERET	Lycée AUX LAZARISTES - Lyon (69)
Christophe BIONDI	Lycée E. D'ORVES - Nive (06)
Frédéric BOUCHIER	Lycée J. DAUTET - La Rochelle (17)
Gwilherm COURVOISIER	Lycée CONDORCET - Belfort (90)
Michaël LAUNAY	Lycée R. VALIN - La Rochelle (17)
Marc SAGE	Lycée J. VERNE - Nantes (44)

7^{èmes} ACCESSITS ex aequo

Thomas CABARET	Lycée J. PRÉVERT - Longjumeau (91)
Jonathan CHICHE	Lycée E. BRANLY - Nogent s/Oise (94)
Minh-Tâm HUA	Lycée L. LE GRAND - Paris (75)
Ivan MOREL	Lycée P. LAPIE - Courbevoie (92)
Pierre PETIT	Lycée FUSTEL - Strasbourg (67)
Thibaud QUAINON	Lycée FESCH - Ajaccio (2A)
Vincent ZANOTTI	Lycée MONTAIGNE - Bordeaux (33)



OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

SESSION DE 2001

CLASSE DE PREMIÈRE

DURÉE : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants.

Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 1 :

Les faces d'un dé en forme de tétraèdre régulier sont numérotées de 1 à 4.

Le dé est posé sur une table, face « 1 » contre cette table.

Une étape consiste à faire basculer le dé autour de l'une quelconque des arêtes de sa base.

A l'issue de chaque étape, on note le numéro de la face contre la table. On fait la somme s de tous ces nombres après 2001 étapes, en comptant aussi le « 1 » initial.

1) Donner la valeur maximale et la valeur minimale que l'on peut ainsi obtenir pour s .

2) La somme s peut-elle prendre toutes les valeurs entières entre ces deux valeurs ?

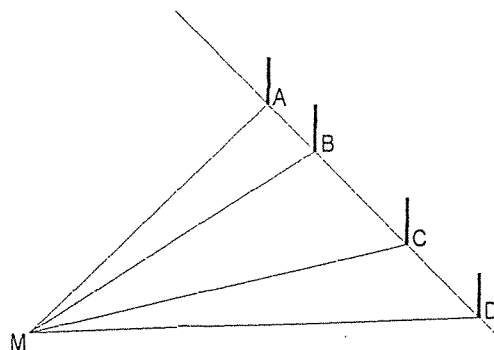
EXERCICE 2 :

Sur un terrain de jeu sont alignés quatre poteaux, plantés en A, B, C et D dans cet ordre.

Ces poteaux délimitent trois buts de largeurs :

$AB = 1$, $BC = 2$, $CD = d$, où d est une longueur donnée.

Déterminer l'ensemble des points M du terrain d'où l'on voit les trois buts sous des angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{BMC}$ et $\widehat{CMD}$ égaux.



EXERCICE 3 :

Proposé par chaque académie.

EXERCICE 4 :

Dessinez un cube C (un dessin même approximatif en perspective suffira).

Soient A un de ses sommets et B le sommet opposé, c'est-à-dire tel que le milieu du segment $[AB]$ soit le centre du cube.

Considérons un autre cube C' admettant aussi (A, B) comme couple de sommets opposés.

Certaines arêtes de C rencontrent des arêtes de C' . Justifiez le fait que, en dehors de A et B, on obtient ainsi six points d'intersection entre une arête de C et une arête de C' .

Placez l'un d'eux sur le dessin et expliquez comment placer alors les cinq autres.

V étant le volume de C , quelle est la valeur minimale du volume de la portion d'espace commune aux cubes C et C' ?

SOLUTIONS

EXERCICE N° 1

(Clermont-Ferrand)

Notons $n = 2q + 1$ le nombre d'étapes.

a) La somme minimale est obtenue pour :

$$s = 1 + 2 + 1 + 2 + \dots + 1 + 2, \text{ ce qui donne : } s = (1 + 2)(q + 1) = \frac{3n + 3}{2}.$$

Pour $n = 2001$, on trouve $s = 3003$.

La somme maximale est obtenue pour :

$$s = 1 + 4 + 3 + 4 + 3 + \dots + 3 + 4, \text{ ce qui donne : } s = -2 + (3 + 4)(q + 1) = \frac{7n + 3}{2}.$$

Pour $n = 2001$, on trouve $s = 7005$.

b) Toutes les valeurs entières intermédiaires sont obtenues de la manière suivante :

$1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + \dots + 1 + 2$ puis

$1 + 3 + 1 + 2 + 1 + 2 + \dots + 1 + 2$ puis

$1 + 3 + 1 + 3 + 1 + 2 + \dots + 1 + 2$ puis

$1 + 3 + 1 + 3 + 1 + 3 + \dots + 1 + 2$ etc, jusqu'à obtenir

$1 + 3 + 1 + 3 + 1 + 3 + \dots + 1 + 3$.

Ensuite on recommence en transformant progressivement les 3 en 4 ; ceci fait, on change progressivement les 1 en 2, et enfin on change progressivement les 2 en 3.

EXERCICE N° 2

SOLUTION 1

(D. Roux)

Si M n'est pas sur la droite (AB) alors, (MB) étant bissectrice de $\widehat{AMC}$, on a

$$\frac{MA}{MC} = \frac{BA}{BC} \quad (1)$$

M appartient donc au cercle de diamètre [BB'] tel que $(A, C ; B, B') = -1$ c'est-à-dire que B' soit le symétrique de C par rapport à A.

De même (MC) étant bissectrice de $\widehat{BMD}$, on a $\frac{MB}{MD} = \frac{CB}{CD}$ (2). M appartient au cercle de diamètre [CC'], tel que $(B, D ; C, C') = -1$.

M est à l'intersection de deux cercles. Le cas limite est $d = 6$. Si $d < 6$ l'intersection est vide. Si $d = 6$ les deux cercles sont tangents en B'. Si $d > 6$ il y a deux points symétriques par rapport à la droite (AB). On peut n'en retenir qu'un si l'on considère que le terrain de jeu est un demi plan limité par la droite (AB).

Remarque : On peut considérer que l'ensemble cherché contient aussi tous les points de la droite (AD) privée du segment [AD] (angles nuls).

Rares sont les élèves connaissant cette vieille géométrie et les lignes de niveau. La seule ressource offerte par les actuels programmes est de choisir un repère puis, soit à partir des égalités (1) et (2), si l'élève connaît ces relations, soit en écrivant l'égalité de lignes trigonométriques des angles, d'obtenir les équations des deux cercles et d'étudier leur intersection en résolvant le système obtenu

Remarque : Si d varie de 6 à l'infini, les points M parcourent chacun un arc limité par B' et K (K tel que $(KA) \perp (KB)$ du demi-cercle de diamètre [BB']). Ils sont le plus éloignés de la droite (AB) lorsque $d = 10$.

SOLUTION 2 (par un élève de première)

Choisissons un repère orthonormé d'origine A. B(1, 0), C(3, 0), D($d + 3$, 0), M(x , y).

Supposons M en dehors de la droite (AB) (sinon les angles sont nuls si $M \notin [AD]$)

L'aire du triangle MAB est $\frac{1}{2} MA \cdot MB \sin \widehat{AMB}$.

L'aire du triangle MBC est $\frac{1}{2} MB \cdot MC \sin \widehat{BMC}$.

Or $\widehat{AMB} = \widehat{BMC}$ donc le rapport de ces deux aires vaut : $\frac{MA}{MC}$.

Comme ces deux triangles ont même hauteur issue de M, le rapport de leurs aires est égal au rapport de leurs bases : $\frac{MA}{MC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$ (**)

d'où $4MA^2 = MC^2$ soit $4(x^2 + y^2) = (x - 3)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 6x + 9$; divisons par 3, M appartient au cercle d'équation $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$ qui a pour diamètre [BB'] où B'(-3, 0).

De même $\widehat{BMC} = \widehat{CMD}$ entraîne $\frac{MD}{MB} = \frac{d}{2}$ d'où $4MD^2 = d^2 MB^2$ (***)

soit $(x^2 + y^2)(d^2 - 4) - 2x(d^2 - 4d - 12) - 3d^2 - 24d - 36 = 0$. Divisons par $(d + 2)$.
M appartient au cercle d'équation $(x^2 + y^2)(d - 2) - 2x(d - 6) - 3(d + 6) = 0$ qui coupe l'axe des abscisses en C(3, 0) et en C' dont on trouve l'abscisse en disant que lorsque $y = 0$, le produit des deux racines est $\frac{-3(d + 6)}{d - 2}$.

Donc l'abscisse de C' est $\frac{d + 6}{2 - d}$

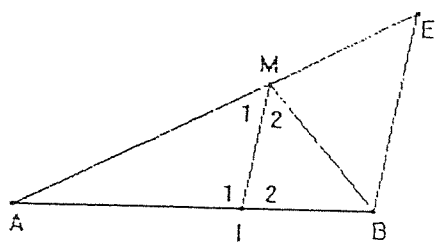
(*) NDLR : Ce choix n'intervient pas au début mais seulement pour traduire $MA/MC = 1/2$.

(**) Ceci peut aussi être obtenu en utilisant la relation des sinus $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ dans les triangles

(***) Ici, plusieurs élèves préfèrent écrire $(2\vec{MD} - d\vec{MB})(2\vec{MD} + d\vec{MB}) = 0$ et introduire les barycentres des points D(2), B(-d) et D(2), B(d). M appartient au cercle dont un diamètre a pour extrémités ces deux barycentres. De même pour $4MA^2 = MC^2$ écrit sous la forme $(2\vec{MA} - \vec{MB})(2\vec{MA} + \vec{MB}) = 0$

SOLUTION 3

Préliminaire : une propriété des bissectrices intérieures d'un triangle : $\frac{MA}{MB} = \frac{IA}{IB}$



Première démonstration

La parallèle à (MI) passant par B coupe (MA) en E ; $\frac{MA}{ME} = \frac{IA}{IB}$ (Thalès) ;
or, MEB est isocèle donc, $ME = MB$ ce qui donne le résultat.

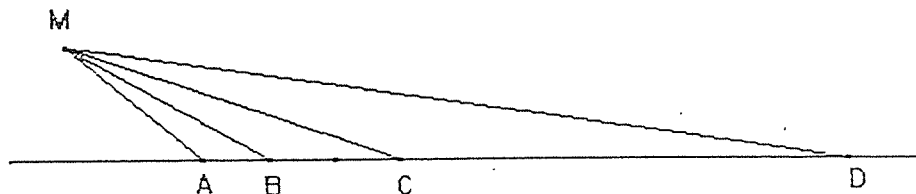
Deuxième démonstration

$\frac{MA}{\sin I_1} = \frac{IA}{\sin M_1}$ et $\frac{MB}{\sin I_2} = \frac{IB}{\sin M_2}$ or, $M_1 = M_2$ et $\sin I_1 = \sin I_2$ donc, $\frac{MA}{IA} = \frac{MB}{IB}$,

ce qui démontre le résultat.

Problème proposé

On applique ces relations dans le triangle MAC avec (MB) bissectrice et dans le triangle MBD avec (MC) bissectrice.



$$\frac{MA}{MC} = \frac{BA}{BC} = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{MB}{MD} = \frac{CB}{CD} = \frac{2}{d}$$

On cherche donc les points M vérifiant simultanément :

$2 MA = MC$ et $d MB = 2 MD$, ce qui équivaut à :

$$4 MA^2 = MC^2 \text{ et } d^2 MB^2 = 4 MD^2$$

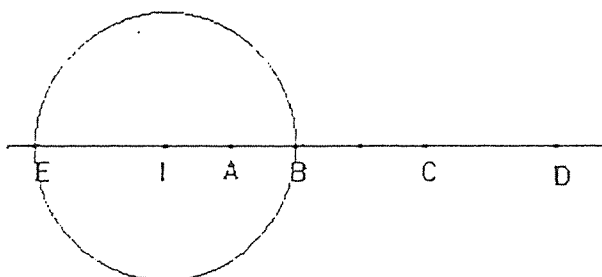
Première méthode : on utilise produit scalaire et barycentre.

$4 MA^2 = MC^2$ équivaut à $(2 \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) \cdot (2 \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 0$ ou encore $\overrightarrow{ME} \cdot 3 \overrightarrow{MF} = 0$
où E est le barycentre de $(A ; 2) (C ; -1)$ et F le barycentre de $(A ; 2) (C ; 1)$.

Pour tout point N du plan, $2 \overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NE}$ et $2 \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = 3 \overrightarrow{NF}$ donc ,
en remplaçant N par A, $-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC} = 3 \overrightarrow{AF}$;

E est le symétrique de C par rapport à A et F = B, le centre I du cercle est le symétrique de B par rapport à A.

L'ensemble des points M vérifiant cette relation est le cercle de diamètre [EB]

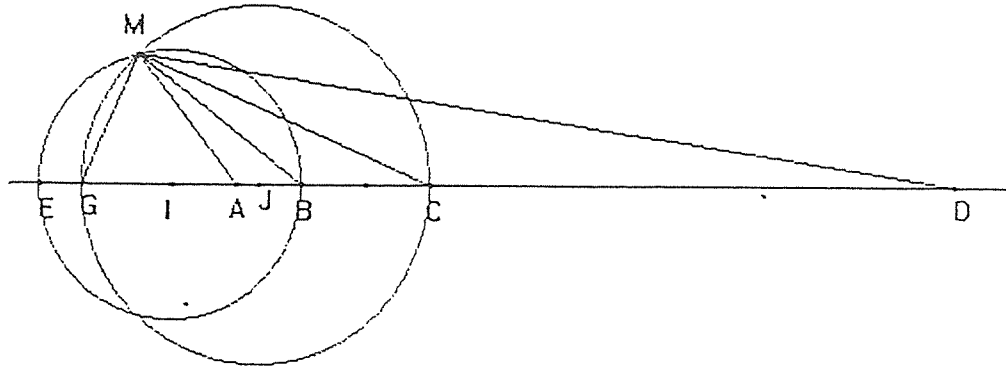


Si $d = 2$, l'ensemble des points M vérifiant la relation $d MB = 2 MD$, est la médiatrice de $[BD]$, elle ne coupe pas le cercle de diamètre $[EB]$

Si $d \neq 2$, $d^2 MB^2 = 4 MD^2$ équivaut à :

$$(d \overrightarrow{MB} - 2 \overrightarrow{MD}) \cdot (d \overrightarrow{MB} + 2 \overrightarrow{MD}) = 0 \text{ ou encore } \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$$

où G est le barycentre de $(B; d)(D; -2)$ et H le barycentre de $(B; d)(D; 2)$. On remarque que $H = C$. L'ensemble des points M vérifiant cette relation est le cercle de diamètre $[GC]$, soit J son centre. On donnera plus loin les conditions pour que les deux cercles se coupent.



Deuxième méthode : on introduit un repère orthonormé.

On le choisit tel que : $C(0; 0)$ $A(-3; 0)$ $B(-2; 0)$ $D(d; 0)$ $M(x; y)$

$$4 MA^2 = MC^2 \text{ équivaut à : } 4(x+2)^2 + 4y^2 = x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 + 8x + 12 = 0 \quad (1)$$

$$(x+4)^2 + y^2 = 4$$

C'est l'équation du cercle de diamètre $[EB]$.

$$d^2 MB^2 = 4 MD^2 \text{ équivaut à : } d^2(x+2)^2 + d^2 y^2 = 4(x-d)^2 + 4y^2$$

$$(d^2 - 4)(x^2 + y^2) + 4dx(d+2) = 0 \quad (2)$$

C'est l'équation d'un cercle passant par C .

La résolution du système (1) (2) conduit à :

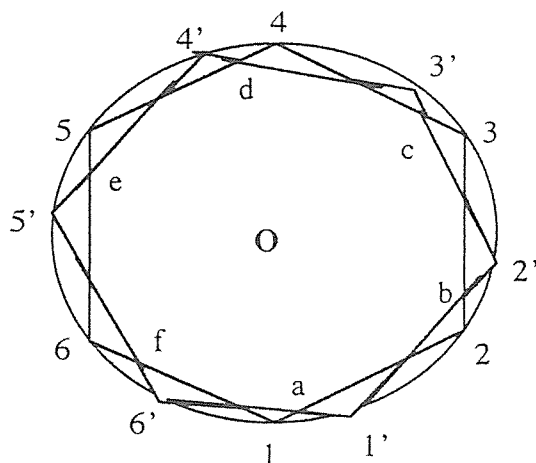
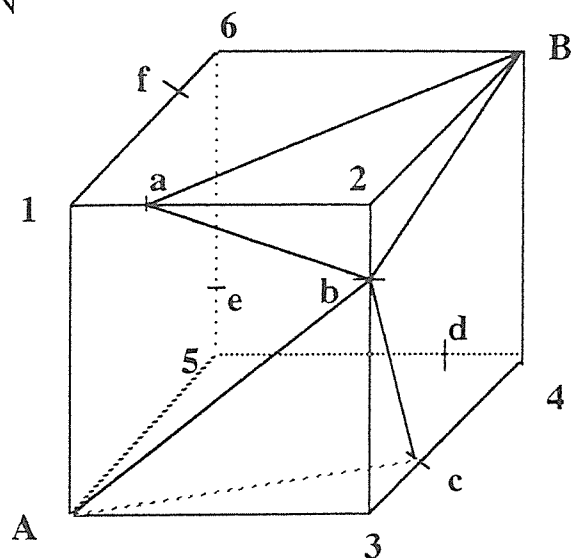
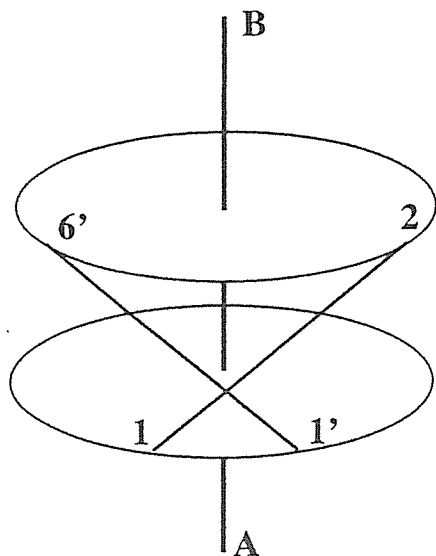
$$(4-d)x = 3(d-2) \text{ qui n'a pas de solution pour } d=4,$$

$$\text{et sinon, } x^2 + y^2 = 3 \frac{(d-6)(d+2)}{(4-d)^2} \text{ qui admet deux solutions pour } d > 6$$

EXERCICE N° 4

SOLUTION (D. Roux)

Appelons les 6 sommets du cube C autres que A et B par les numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6. De même notons les 6 sommets du cube C' par $1', 2', 3', 4', 5', 6'$. Les points 1, 3, 5, $1', 3', 5'$ appartiennent à un même cercle d'axe (AB) . Les points 2, 4, 6, $2', 4', 6'$ appartiennent à un cercle égal au précédent et aussi d'axe (AB) .



Lorsqu'on projette la figure formée par C et C' sur un plan P perpendiculaire à (AB) , on obtient deux hexagones réguliers de même centre O .

Les segments $[1; 1']$ et $[2; 6']$ sont dans des plans parallèles au plan P et ont des projections qui sont des segments parallèles, donc ces deux segments sont parallèles. Donc $(1; 2)$ et $(1'; 6')$ sont deux droites coplanaires. Elles se coupent en un point a . De même on obtient b, c, d, e, f .

Les points a, b, c, d, e, f partagent les arêtes du cube C , auxquelles ils appartiennent, dans le même rapport car il en est de même pour les projections sur P et ces arêtes de C font toutes le même angle avec P .

Remarque : Ces raisonnements pourraient être simplifiés si l'on pouvait utiliser les isométries dans

l'espace : réflexion par rapport au plan médiateur de $[1; 1']$, rotation d'axe (AB) d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Soit L la

longueur de l'arête de C . Posons $x = \text{longueur } a1$.

On a $x = a1 = b2 = c3 = d4 = e5 = f6$ et $L - x = a2 = b3 = c4 = d5 = e6 = f1$.

Ayant les points a, b, c, d, e, f communs entre les arêtes de C et de C' , les segments $[ab], [bc], [cd], [de], [ef], [fa]$, qui les joignent sont communs aux faces de C et C' ainsi que les segments $[Aa], [Ab], [Ac], [Ad], [Ae], [Af], [Ba], \dots, [Bf]$. La portion de l'espace commune à C et C' a des faces triangulaires (il y en a 12). Les côtés de chacun de ces triangles sont 3 des 18 arêtes qui viennent d'être obtenues.

Par suit, pour obtenir le volume de $C \cap C'$, il faut retirer à C 6 tétraèdres isométriques : $(A1af), (A3bc),$

$(A5de), (B2ab), (B6fe), (B4dc)$. Le volume de chaque cube est $V = L^3$. Le volume de $C \cap C'$ est

$$L^3 - 6 \times \frac{1}{3} L \times \frac{1}{2} x(L - x) = L(L^2 - xL + x^2) = L \left[\left(x - \frac{L}{2} \right)^2 + \frac{3L^2}{4} \right] \geq \frac{3L^3}{4} = \frac{3V}{4}$$

Le minimum cherché est $\frac{3V}{4}$. Il est obtenu pour $x = \frac{L}{2}$. (seul cas où a, b, c, d, e, f sont coplanaires.

Contribution d'André Warusfel (I. G. Paris)

La solution trouvée par l'auteur du problème consiste dans l'affirmation que cette intersection est formée du premier cube duquel on supprime six tétraèdres isométriques qu'il décrit avec précision et dont le volume est immédiat à calculer. Il en déduit alors le minimum, qui est exact, mais sa solution "élémentaire, il suffisait de voir !" d'après ses propres termes dans une correspondance privée, est incomplète dans la mesure où elle s'appuie uniquement sur l'intersection des surfaces cubiques (les frontières des cubes) et suppose implicitement que cette intersection des frontières détermine complètement l'intersection des cubes eux-mêmes. C'est loin d'être évident, puisque la formule la plus naturelle (à savoir $I(U \cap V) = I U \cap I V$) est inexacte, comme le montre le cas particulier de l'intersection de deux boules fermées, pourtant connexes et compactes comme les deux cubes en question.

La justification de l'intuition de Dominique Roux que j'ai pu mettre au point passe par trois lemmes, triviaux ou faciles selon les connaissances de chacun, mais non classiques à ce que j'en sais, et dont les deux plus importants sont du niveau d'une maths sup au minimum.

a) Un cube est l'intersection de deux trièdres trirectangles images l'un de l'autre par une symétrie centrale.

b) Un compact convexe de l'espace est la fermeture convexe de sa frontière.

c) Si U et V sont deux fermés, on dispose de l'égalité surprenante, un peu analogue à une formule de Leibniz et inspirée par l'intersection de deux boules fermées :

$$I(U \cap V) = (I U \cap V) \cup (I V \cap U).$$

Le premier lemme, dont on pourrait d'ailleurs se passer, n'a pas besoin ici de justification. C'est la bonne façon, me semble-t-il, d'utiliser la définition donnée par Yohann Yebbou d'un cube comme défini par l'intersection de six demi-espaces fermés en position particulière que l'on devine aisément.

Le second lemme est un corollaire très faible d'un théorème bien connu, dit de *Minkowski-Krein-Milman*, selon lequel tout convexe compact de l'espace est la fermeture convexe de l'ensemble (parfois appelé *profil*) de ses points extrémaux, mais peut heureusement être démontré de façon élémentaire : une droite, d'ailleurs arbitraire, passant par un point donné du compact convexe le coupe suivant un segment; ses extrémités appartiennent évidemment à la frontière et le point étudié en est clairement barycentre à coefficients positifs.

Le troisième lemme résulte d'une manipulation ensembliste facile basée sur la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion et les relations classiques :

$$I E = \overline{E \cap E'}, \quad (X \cap Y)' = X' \cup Y', \quad \overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$$

où E' représente le complémentaire de l'ensemble E . (Il peut être curieux de remarquer que Bourbaki s'intéresse, dans un exercice, au cas où U et V sont tous deux ouverts, mais ne fait aucune allusion à la propriété ci-dessus.)

Les lemmes deux et trois justifient l'intuition de Dominique Roux consistant à définir l'intersection par l'intersection des faces du premier cube avec celles du second. Le premier lemme peut servir à déterminer une expression telle que $U \cap V$ en coupant successivement chaque face de U par chacun des deux trièdres trirectangles dont V est l'intersection, puis en prenant l'intersection de ces deux traces.

Je n'ai pas eu le temps de poursuivre jusqu'au bout dans cette voie, mais je me suis contenté, dans ce premier temps, de montrer à l'aide de figures ci-contre dessinées par *Cabri Geometre* comment commencer à rendre rigoureuse la preuve originale de Dominique Roux telle qu'il me l'avait communiquée le 30 juillet 1999.

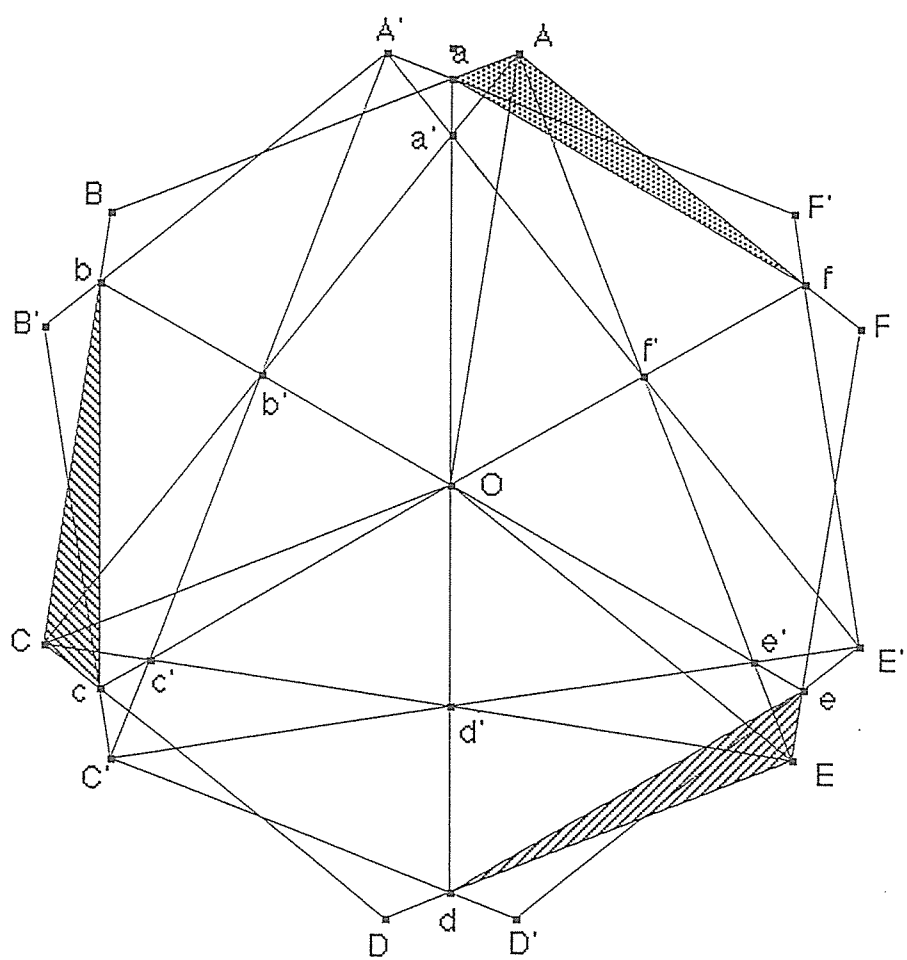
Rappelons que ce dernier a énoncé que l'intersection de deux cubes $OABCDEFGS$ et $OA'B'C'D'E'F'S$ dont OS est un diamètre commun et où les sommets $ABCDEF$ sont nommés de façon que la projection du cube sur un plan orthogonal à OS soit exactement l'hexagone régulier formé des projections de ces points dans cet ordre. Il a affirmé que les six tétraèdres à ôter du cube $OABCDEFGS$ de façon à obtenir l'intersection cherchée étaient les six pyramides ayant une base orthogonale à la hauteur (ce qui simplifie le calcul du volume) $OAaf$, $OCcb$, $OEed$, $SFfe$, $SBba$ et $SDdc$ où (a, b, c, d, e, f) sont les intersections respectives des couples de droites indiqués sur la figure. Ces six points sont naturellement chacun situés dans les plans médiateurs des sommets de même nom des deux cubes (ainsi a , intersection des segments $F'A'$ et AB , est telle que $aA = aA'$, et ainsi de suite).

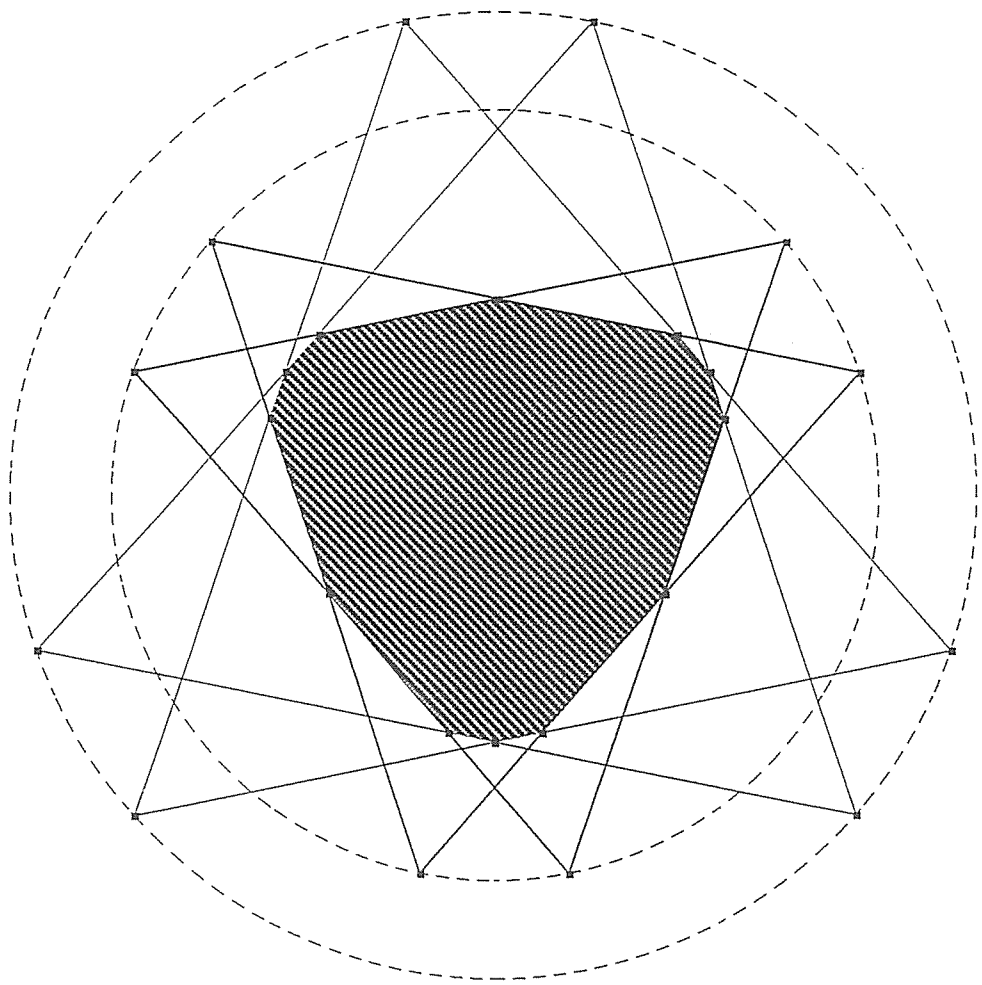
On peut retrouver ces six pyramides d'une autre manière, à partir d'une autre figure beaucoup plus simple où n'apparaissent que les deux triangles équilatéraux ACE et $A'C'E'$: on y voit trois triangles $OA'a'f'$, $OCb'c'$ et $OEE'd'$, qui sont des sections planes des trois premières pyramides de Dominique Roux (les trois autres s'obtiendraient par symétrie, et sont également lisibles sur cette même figure si on le désire). À partir de ces six points (a', b', c', d', e', f') , définis par exemple par le fait que a' est l'intersection des segments AC et $E'A'$ situés dans le plan contenant les six sommets $ACEA'C'E'$, on retrouve aussitôt les points (a, b, c, d, e, f) de Dominique Roux par intersections respectives avec les faces concernées (ainsi a est l'intersection de Oa' avec l'arête AB qui appartient, comme le point O et la diagonale AC , à la face $OABC$).

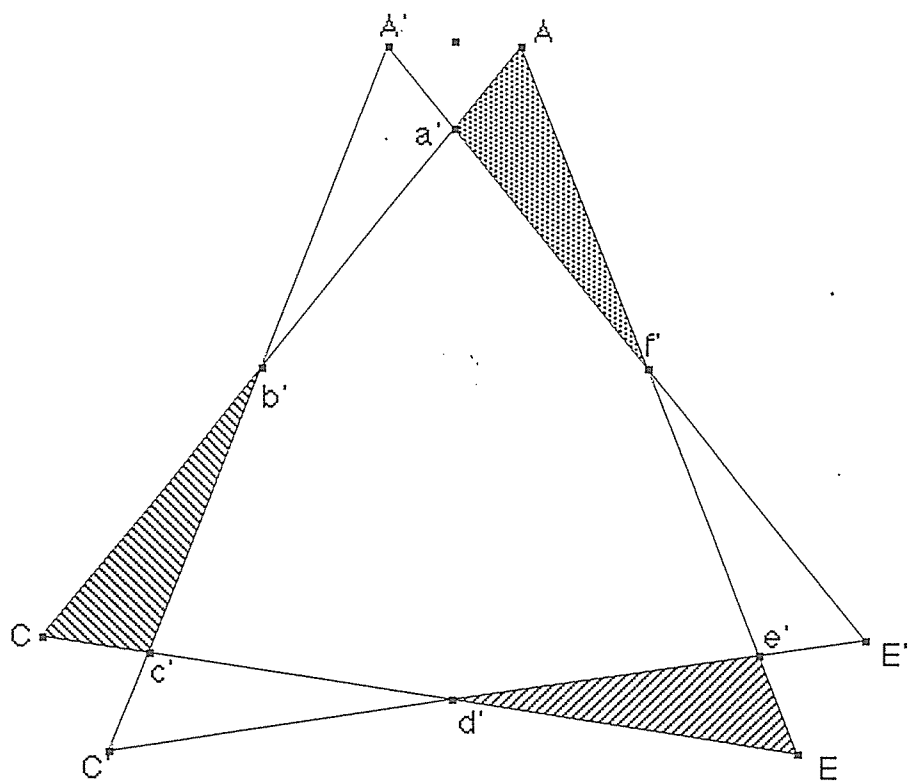
Il est également possible de tracer, toujours sous Cabri-Geometre, une figure susceptible d'une très remarquable animation – dommage que cela ne puisse se voir sur papier – montrant la forme de l'intersection des deux cubes et d'un plan variable orthogonal à OS . Dans certains cas, cette intersection est l'intérieur d'un hexagone irrégulier (mais dont les six côtés sont néanmoins égaux entre eux), et dans d'autres l'intérieur d'un dodécaèdre, encore plus irrégulier, bien qu'invariant par les rotations d'angles $\pm \frac{2\pi}{3}$.

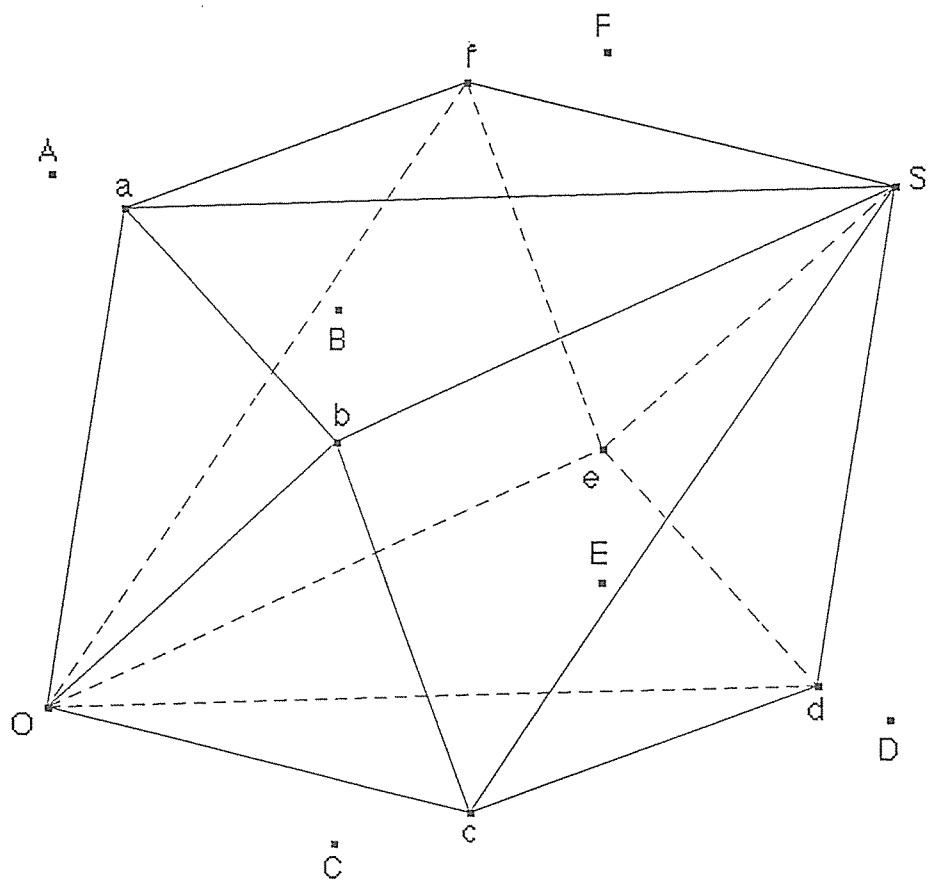
L'intérêt de cette figure si étrange est de montrer la grande complexité de fond du problème de Dominique Roux, si simple qu'a priori puisse paraître un objet aussi familier qu'une paire de cubes isométriques. Y lire les six tétraèdres est certes possible, mais demande vraiment beaucoup d'attention et de rigueur.

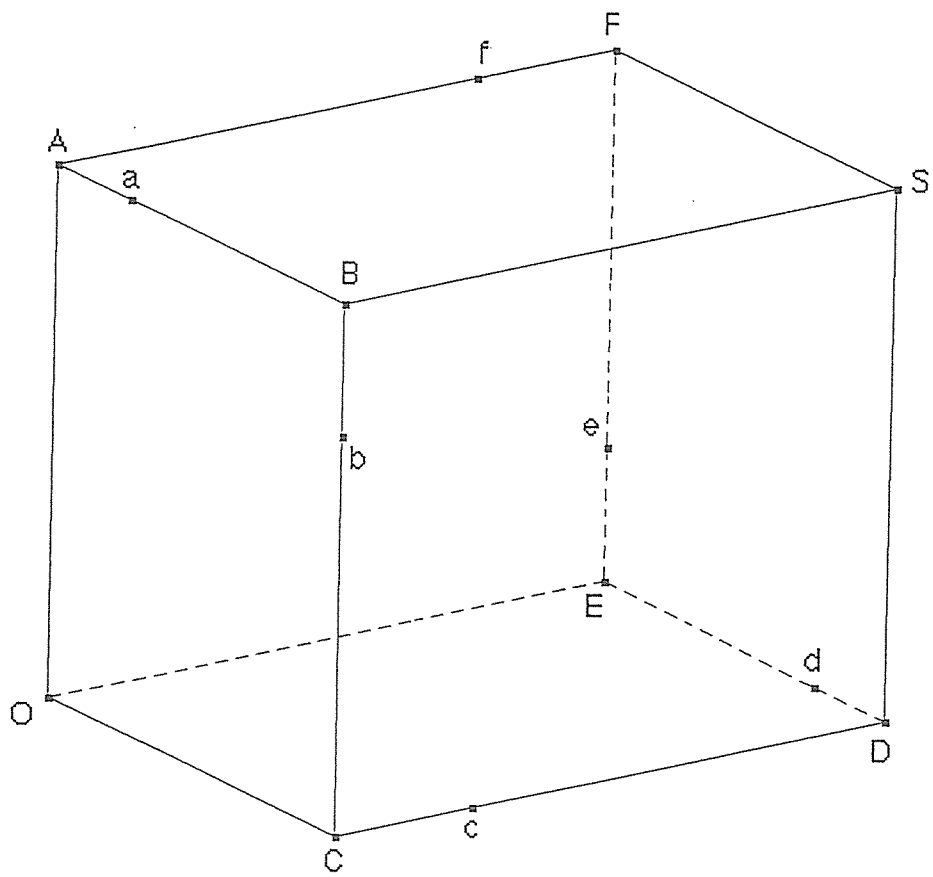
Elle est enfin accompagnée d'un couple de figures montrant, l'une le cube $OABCDEFGS$ et les six points (a, b, c, d, e, f) , placés pour cette occasion au quart des segments (AB, BC, CD, DE, EF, FA) , l'autre l'intersection des deux cubes, polyèdre à huit sommets (dont seuls O et S appartenaient aux cubes de départ) et douze faces dont on sait qu'elles rencontrent certains plans orthogonaux à OS suffisamment proches du centre de symétrie de l'ensemble.











Solution du problème par les trios

a) Soit A le volume cubique de départ, (E_i) la famille des six demi-espaces définissant le volume cubique B obtenu après rotation de A , et T_i les tétraèdres définis par $T_i = A - E_i$. Un calcul ensembliste *lambda* montre que :

$$A \cap B = A \cap \left(\bigcap_i E_i \right) = A - \left(\bigcup_i T_i \right)$$

puis $\text{Vol}(A \cap B) = \text{Vol}(A) - \text{Vol}\left(\bigcup_i T_i\right)$.

b) Le solide cubique en position usuelle dans l'espace (c'est-à-dire $[0, 1]^3$) est contenu dans le solide conique C de sommet O engendré par les rotations selon l'axe ternaire des trois demi-droites d'origine O contenant les arêtes du cube de sommet O , d'équations :

$$xy + yz + zx \geq 0, \quad x + y + z \geq 0.$$

Par suite, nous disposons de l'inclusion $A \subset C$ puisque A peut-être défini par une rotation convenable selon l'axe ternaire du volume cubique usuel.

Cette inclusion peut d'ailleurs être trivialement vérifiée d'après la définition du produit cartésien $[0, 1]^3$, ce qui est immédiat. Ce qui est moins évident, c'est que C est invariant par le groupe des rotations d'axe $x = y = z$, mais c'est clair si l'on écrit les équations sous la forme. :

$$(x + y + z)^2 \geq x^2 + y^2 + z^2, \quad x + y + z \geq 0$$

puisque une telle rotation laisse invariants distance à l'origine et produit scalaire par $(1, 1, 1)$.

c) Montrons qu'un point de C ne peut avoir deux coordonnées strictement négatives (disons $x < 0$ et $y < 0$). Sinon en effet :

$$0 \leq x + y + z \leq x + y - \frac{xy}{x + y} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y} < 0$$

ce qui est impossible.

d) Par suite, si E_i et E_j sont respectivement définis par $x \geq 0$ et $y \geq 0$, on a $A \subset C \subset E_i \cup E_j$, d'où :

$$T_i \cap T_j = (A - E_i) \cup (A - E_j) = A - (E_i \cap E_j) = \emptyset$$

puis la formule désirée : $\text{Vol}(A \cap B) = \text{Vol}(A) - \sum_i \text{Vol}(T_i)$. Le reste est affaire de trinômite *lambda* (pas même besoin de dérivation) si l'on admet naturellement que le volume d'une réunion (ici finie) de parties cubables disjointes de l'espace est la somme de leurs volumes respectifs.

Contribution de Johan Yebbou (Paris)

Je garde les notations d'André Warusfel. On dispose de deux cubes A et B distincts ayant même grande diagonale Δ . J'appelle "point de Roux" tout point intersection n'appartenant pas à Δ d'une arête de A et d'une arête de B et je ne reviens pas sur l'étude détaillée de ces intersections.

Le cube B est l'intersection de six-demi espaces fermés E_i limités par six plans π_i . Notant E'_i le complémentaire de E_i et posant $T_i = A \cap E'_i$, on a $A \cap B = A - \bigcup T_i$.

D'après l'étude de Dominique Roux, la section de A par π_i est un triangle $s_i p_i q_i$ où s_i est un des sommets de B appartenant à Δ et où p_i et q_i sont deux points de Roux ; il existe un unique sommet a_i de A appartenant à E'_i ; T_i est alors le tétraèdre semi-ouvert $a_i s_i p_i q_i$ où a_i est l'unique sommet de A appartenant à E'_i . On obtient ainsi six tétraèdres isométriques T_i , en correspondance bijective avec les six faces de B et les six sommets a_i de A n'appartenant pas à Δ . On ne revient pas ici sur le calcul facile du volume de ces tétraèdres.

Pour justifier l'intuition géométrique de Dominique Roux, il nous reste à montrer que ces tétraèdres sont disjoints. Soient i et j distincts. On remarque que, a_i étant l'unique sommet de A appartenant à E'_i , on a $a_j \in E_i$ pour $j \neq i$ et de même $a_i \in E_j$ par symétrie des notations ; de plus, les points s_i, p_i, q_i appartiennent à B donc à E_j . Les sommets de T_i étant dans E_j , on a $T_i \subset E_j$ et, comme $T_j \subset E'_j$, on conclut que T_i et T_j sont disjoints.

CONFERENCE N° 3 :

Mathématiques et codes correcteurs

Josèphe BADRIKIAN

L'exposé est une introduction au problème que posent les erreurs de transmission en téléinformatique et au moyen de le résoudre. On trouvera des compléments, des prolongements et des exercices d'application corrigés dans [1].

Les erreurs de transmission sont inévitables et imprévisibles, elles sont considérées comme des événements aléatoires. Pour remettre au destinataire un message le plus exact possible, l'idée est

- de coder avec redondance l'information avant l'émission,
- d'établir un système capable de détecter les messages erronés et de les corriger.

Il faut donc élaborer des algorithmes implantables d'où la nécessité d'une modélisation préalable, c'est-à-dire de trouver une réponse mathématique au problème.

Les solutions dépendent de l'ingéniosité des chercheurs et des moyens mathématiques mis en œuvre. Elles sont de plus en plus performantes par l'introduction de notions mathématiques de plus en plus complexes et la recherche en ce domaine est toujours d'actualité. Mais dans aucun cas les messages erronés ne sont tous repérés ni les messages inexacts reconnus tous corrigés.

Une initiation à ce sujet, avec quelques exemples simples, peut mettre en évidence

- la nécessité des mathématiques dans notre environnement actuel,
- l'intérêt des structures algébriques,
- la diversité des notions mathématiques entrant en jeu,

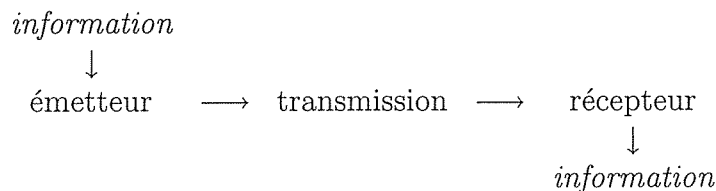
tout en développant une certaine aisance calculatoire.

et permettre de faire des mathématiques à propos d'une situation concrète.

Projet

En informatique, toute communication est codée par une suite de 0 et de 1, chiffres binaires, appelés aussi bits, de l'anglais **b**inary **d**igits.

Le cheminement d'une information dans une communication idéale est le suivant :



Lors de la transmission, des erreurs peuvent déformer la communication. Pour remédier à cet inconvénient, on applique à l'information, avant l'émission, un codage supplémentaire destiné à faire apparaître une anomalie à la réception si le message a été altéré.

Le schéma de ce projet est décrit ci-dessous.

En pratique toute communication est divisée en tranches élémentaires :

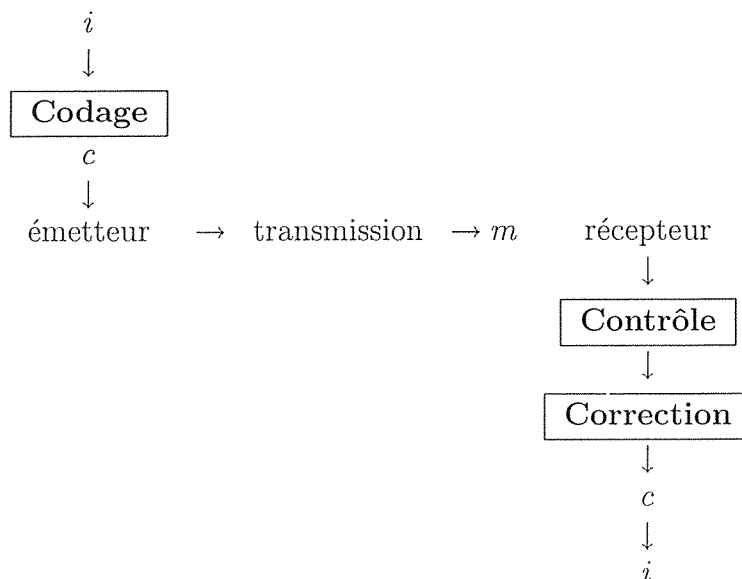
- i , de même longueur r appelé **mot d'information**,

Chacune est codée par

- c , fonction de i , de longueur $n > r$ appelé **mot de code**.

La différence $s = n - r$ mesure la **redondance**.

On appellera **message**, noté m , tout mot reçu qu'il soit ou non un mot de code.



L'ensemble des mots codant tous les mots d'information de longueur r s'appelle un **code correcteur** et se note $\mathcal{C}_{n,r}$ et n est la **longueur du code**.

Exemple : Codage par bit de parité

Le codage dit *par bit de parité* consiste à ajouter à la suite de chaque mot d'information, un nouveau bit, de telle sorte que le nombre total de chiffres 1 soit alors de parité fixée, par exemple qu'il soit pair. Le code obtenu s'appelle un **code de parité**.

Supposons que l'on veuille coder tous les mots de longueur $r = 3$:

$$\begin{array}{ll} i = 101 & \text{sera codé par } 1010 \\ i = 111 & \text{par } 1111 \end{array}$$

À la réception la règle de codage est appliquée aux 3 premiers bits du message et le 4^e bit du résultat est comparé au 4^e bit reçu. Ainsi pour $i = 101$:

si $m = 1011$ il y a anomalie donc erreur
mais si $m = 1111$ il n'y a pas anomalie et cependant il y a erreur !

On comprend qu'un nombre pair de bits erronés ne présente pas d'anomalie.

Remarquons que dans le cas d'une anomalie, ni le nombre ni la place des bits erronés ne sont connus.

Pour mesurer la qualité de la détection, évaluons le taux de messages inexacts détectés. Supposons que les erreurs par bit soit indépendantes et la probabilité d'erreur identique pour chaque bit. La situation est alors un schéma de Bernoulli.

Soit	la probabilité d'un bit erroné :	p
on a	probabilité d'un bit exact :	$q = 1 - p$
dans un message:		
soit	la probabilité de k erreurs :	$p(k)$
on a	probabilité d'un message correct :	$p(0)$
	probabilité d'un message inexact :	$p_{inex} = 1 - p(0)$
et :	la probabilité d'une anomalie :	$p_{anom} = p(1) + p(3)$

$$\text{Or } p(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$\text{où } C_n^k = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (\text{nombre de configurations de } k \text{ bits erronés}).$$

Pour $p = 0,1$, le rapport $p_{inex}/p_{anom} = 0,86$; le codage a donc très sensiblement diminué le nombre de messages erronés non reconnus.

Modélisation

Structure de corps de $B = \{0,1\}$

On définit dans B des opérations d'addition et de multiplication "modulo 2" en calculant dans $\mathbb{N}$ et en prenant le reste de la division du résultat par 2.

Ainsi $1 + 1 = 2$ dans $\mathbb{N}$, d'où $1 + 1 = 0$ dans B .

On a donc les tables d'opérations suivantes

<i>addition</i>					<i>soustraction</i>			
+		0	1		-		0	1
0		0	1	$\Rightarrow$	0		0	1
1		1	0		1		1	0

<i>multiplication</i>					<i>division</i>			
$\times$		0	1		$\div$		0	1
0		0	0	$\Rightarrow$	0		<i>impossible</i>	0
1		0	1		1		<i>impossible</i>	1

Avec ces opérations $B = \{0, 1\}$ est un **corps fini**. Il est composé de l'élément neutre de l'addition et de la multiplication, propres à tous les corps, c'est le plus petit corps fini.

Structure espace vectoriel de B^r et B^n

Dans B^p , ensemble des suites binaires de longueur p , on définit les opérations suivantes :

1) une *addition* de 2 suites en ajoutant modulo 2 les composantes de même rang, ainsi :

$$\begin{array}{rcccccc}
 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
 + & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\
 \hline
 = & 0 & 1 & 0 & \dots & 0
 \end{array}$$

2) une *multiplication* par les éléments de B

$$\begin{array}{l}
 (1 \ 0 \ \dots \ 1) \times 1 = 1 \ 0 \ \dots \ 1 \\
 (1 \ 0 \ \dots \ 1) \times 0 = 0 \ 0 \ \dots \ 0
 \end{array}$$

Avec ces 2 opérations B^p est un espace vectoriel sur B et ses éléments sont appelés des "vecteurs". On identifiera donc

l'ensemble des mots d'information à l'espace vectoriel B^r

et ensemble des messages reçus possibles à l'espace vectoriel B^n

Un mot (d'information, de code ou message) est alors considéré comme un vecteur, que l'on écrira sous la forme $(a_1, a_2, \dots,) ; a_i \in B$.

Dans un espace vectoriel tous les vecteurs peuvent être déterminés à partir de certains d'entre eux qui forment une "base" de l'espace vectoriel et dont le nombre est la "dimension" (dim) de cet espace.

Codage

Le codage revient à définir une application f de B^r dans B^n , **injective** car chaque mot de code ne doit coder qu'un seul mot d'information.

$$\begin{array}{ccc} B^r & \xrightarrow{f} & B^n \\ i & \mapsto & c \end{array}$$

Il est intéressant de choisir comme fonction de codage une application linéaire de B^r dans B^n c'est-à-dire telle que :

toute composante c_i de c soit une combinaison linéaire des composantes de i , donc dans le cas binaire, une somme de certaines composantes de i . Par exemple :

$$c_1 = i_1 + i_2 \quad ; \quad c_2 = i_1 + i_3 \quad ; \quad c_3 = i_2 + i_3 \quad ; \quad c_4 = i_1 + i_2 + i_3.$$

Alors

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad i \quad \text{codé par } c \\ \quad i^* \quad \text{codé par } c^* \end{array} \right\} \longrightarrow i + i^* \text{ codé par } c + c^* ;$$

2) si i est codé par c , pour $\lambda \in B$, λi est codé par λc (évident ici), ce qui implique $f(0) = 0$ c'est-à-dire que 0 dans B^r est coté par 0 dans B^n .

Avec f , application linéaire :

– le code, image de B^r par f (ou $\mathcal{Im}(f)$), est un sous-espace vectoriel de B^n , (les mots s'expriment donc tous en fonction d'une base du code et une somme de mots de code est encore un mot du code) ;

– puisque f est injective :

- le code $= f(B^r)$ est de même dimension que B^r , soit r ;
- le transformé d'une base de B^r est une base du code.

Soit la base canonique de B^r : $e_1 = (1, 0, \dots, 0, 0) ; \dots ; e_r = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

Un mot de code $i = (1, 0, \dots, 1)$

s'écrit $i = 1e_1 + 0e_2 + \dots + 1e_r ;$

il est codé par $c = f(i) = 1f(e_1) + 0f(e_2) + \dots + 1f(e_r)$

où $\{f(e_1); \dots; f(e_r)\}$ est une base du code. Le code $\mathcal{C}_{n,r}$ a donc, comme espace vectoriel, la dimension r .

Matrice génératrice

On dispose en colonnes les vecteurs de base du code. Ils forment une **matrice génératrice** G du code. On a :

$$c = f(i) = i_1 G_1 + i_2 G_2 + \dots + i_r G_r$$

où les G_i sont les colonnes de G . Les mots du code s'obtiennent donc par le produit G_i .

Précisons ce calcul dans le cas d'un type particulier de code.

Code systématique

Un codage linéaire très simple appelé **systématique** consiste à prolonger le mot d'information i par une **clé de contrôle**, fonction de i , ce qui se traduit par :

$$c = (i_1, \dots, i_r, k_1, \dots, k_s) = (i, k).$$

Le code par bit de parité est un code de ce genre où la clé de contrôle est de longueur 1.

La fonction de codage est bien injective, en effet deux mots d'information distincts sont codés par deux mots différents au moins sur l'ensemble de leurs r premiers bits.

Le codage de la base canonique de B^r est :

$$f(e_1) = (1, 0, \dots, 0, k_1^1, \dots, k_s^1) ; \dots ; f(e_r) = (0, \dots, 0, 1, k_1^r, \dots, k_s^r)$$

les k_i^j appartenant à $B = \{0, 1\}$

d'où la matrice génératrice du code :

$$G_{n,r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ k_1^1 & k_1^2 & \dots & k_1^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_s^1 & k_s^2 & \dots & k_s^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r \\ - \\ K \end{pmatrix}$$

Exemple : un code $\mathcal{C}_{5,3}$

Soit le code systématique défini par la fonction f linéaire telle que :

$$c_1 = i_1 \quad ; \quad c_2 = i_2 \quad ; \quad c_3 = i_3 \quad ; \quad c_4 = i_1 + i_2 \quad ; \quad c_5 = i_1 + i_3$$

En appliquant f à la base canonique de B^r on calcule les vecteurs colonnes de la matrice génératrice, soit

$$G_{5,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Certains mots du code sont déjà connus : le vecteur nul (propre à chaque code) et les vecteurs d'une base qui figurent comme colonnes de G .

D'où le tableau de codage incomplet suivant :

$$\begin{array}{ll}
(0, 0, 0) & \longrightarrow (0, 0, 0, 0, 0) \\
(0, 0, 1) & \longrightarrow (0, 0, 1, 0, 1) \\
(0, 1, 0) & \longrightarrow (0, 1, 0, 1, 0) \\
(0, 1, 1) & \\
(1, 0, 0) & \longrightarrow (1, 0, 0, 1, 1) \\
(1, 0, 1) & \\
(1, 1, 0) & \\
(1, 1, 1) &
\end{array}$$

Calculons les autres ; il s'agit de coder $(0,1,1)$; $(1,0,1)$; $(1,1,0)$; $(1,1,1)$.

On a vu que le mot codant $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ est $i_1 G_1 + i_2 G_2 + \dots + i_r G_r$ c'est-à-dire, en binaire, la somme des colonnes G_j de G de même rang que les chiffres 1 dans i .

On obtient :

$$\begin{aligned}
G_{5,3} i &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

d'où le codage complet :

$$\begin{array}{ll}
(0, 0, 0) & \longrightarrow (0, 0, 0, 0, 0) \\
(0, 0, 1) & \longrightarrow (0, 0, 1, 0, 1) \\
(0, 1, 0) & \longrightarrow (0, 1, 0, 1, 0) \\
(0, 1, 1) & \longrightarrow (0, 1, 1, 1, 1) \\
(1, 0, 0) & \longrightarrow (1, 0, 0, 1, 1) \\
(1, 0, 1) & \longrightarrow (1, 0, 1, 1, 0) \\
(1, 1, 0) & \longrightarrow (1, 1, 0, 0, 1) \\
(1, 1, 1) & \longrightarrow (1, 1, 1, 0, 0)
\end{array}$$

Remarquons que dans un codage systématique il suffit de calculer la clé de chaque mot, c'est-à-dire $(K)i$, la première partie du mot de code étant le mot d'information.

Contrôle

Pour reconnaître qu'un message est inexact, on construit une application linéaire S de B^n dans B^s ($s = n - r$) telle que les mots du code et eux seuls prennent la valeur nulle. On dit que le code est le **noyau** de S qui est appelée fonction de contrôle ou fonction **syndrome** car elle globalise l'ensemble des symptômes d'erreur sur les bits.

Étudions le cas d'un code systématique et laissons nous guider par la démarche de contrôle d'un code de parité vue antérieurement.

Soit m le message reçu, il est de la forme $m = (i, q)$, m est un mot de code si et seulement si q est la clé de contrôle calculée à partir de i , c'est-à-dire si

$$Ki = q$$

Vérifions si les messages reçus suivants sont des mots du code $\mathcal{C}_{5,3}$ précédent :

- $m = (1, 1, 1, 1, 1)$

$$Ki = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(1, 1, 1, 1, 1)$ n'est pas un mot du code.

- $m = (1, 1, 1, 0, 0)$

$$Ki = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = q$$

$(1, 1, 1, 0, 0)$ est un mot de code.

Matrice de contrôle

Remarquons que

$$Ki = q \iff (Ki + Iq = 0) \iff (K|I) \begin{pmatrix} i \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La fonction S est décrite par la matrice

$$H_{s,n} = (K|I) = \left(\begin{array}{c|cccc} & \mathbf{1} & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{1} \end{array} \right)$$

S est donc bien une application linéaire.

H est appelée **matrice de contrôle** du code, d'où la règle :

$$\begin{aligned} \text{si } Hm &= 0, \quad m \text{ est un mot de code} \\ \text{si } Hm &\neq 0, \quad m \text{ n'est pas un mot de code.} \end{aligned}$$

On note qu'un code $\mathcal{C}_{n,r}$ peut donc être défini comme :

- l'image d'une fonction de codage f ,
- le noyau d'une fonction syndrome S .

Efficacité du contrôle

Dire qu'un message m est erroné revient à imaginer qu'au mot de code c émis s'est ajouté, pendant la transmission, un vecteur e non nul, nommé **vecteur d'erreur**,

$$m = c + e.$$

En effet, une erreur sur un bit se produit lorsqu'à une composante de c s'est ajoutée une composante non nulle de e :

$$\begin{aligned} 1 & \text{ transformé en } 0 \iff 1 + 1 \\ 0 & \text{ transformé en } 1 \iff 0 + 1. \end{aligned}$$

On appelle **poids d'un vecteur** le nombre de ses composantes non nulles.

Pour un vecteur binaire le poids est la somme *dans* $\mathbb{N}$ de ses composantes et les bits erronés dans m correspondent aux symboles 1 de e .

Le poids du vecteur erreur e , noté $w(e)$, est donc le nombre k de symboles inexacts dans la transmission de c , il varie de 0 à n pour un code de longueur n ; on dit que e est une **erreur de poids k** .

Remarquons alors que pour $e \neq 0$:

- 1) si $e \in \text{code}$: $c + e$ est encore un mot de code (puisque le code est linéaire) ; dans ce cas $S(m) = 0$, le message erroné n'est pas reconnu comme tel.
- 2) si $e \notin \text{code}$: $c + e$ n'est pas un mot de code $S(m) \neq 0$, le message est reconnu comme erroné.

Un message erroné n'est détecté que si le vecteur d'erreur est un mot de code non nul.

Probabilité d'erreur détectée

Un code possède 2^r éléments. Soit $m = c + e$ un message, et $e \neq 0$. Si e est un des $(2^r - 1)$ mots du code, différents du vecteur nul, m ne sera pas reconnu comme éronné.

La probabilité de non détection est :

$$p_{nd} = \Pr\left((e = c_1) \cup (e = c_2) \cup \dots \cup (e = c_{2^r-1})\right)$$

où les c_i sont les mots de code non nuls.

Un mot de code de poids k non nul, est une erreur de poids k dont la probabilité, dans le cas d'un schéma de Bernoulli, est $p^k q^{n-k}$. S'il y a N_k tels mots dans le code, la probabilité d'erreur de poids k non détectée est alors :

$$p_{nd}(k) = N_k p^k q^{n-k}$$

et la probabilité d'erreur non détectée :

$$p_{nd} = \sum_{k=1}^n N_k p^k q^{n-k}.$$

Soit $p(0)$ la probabilité que le message soit correctement transmis, alors la probabilité d'erreur détectée est :

$$p_{det} = 1 - (p(0) + p_{nd}).$$

Exemple : probabilité d'erreur détectée pour le code $C_{5,3}$ précédent

Notons les poids des mots de code non nuls :

e	$w(e)$
$(0, 0, 1, 0, 1)$	2
$(0, 0, 1, 0, 1)$	2
$(0, 1, 1, 1, 1)$	4
$(1, 0, 0, 1, 1)$	3
$(1, 0, 1, 1, 0)$	3
$(1, 1, 0, 0, 1)$	3
$(1, 1, 1, 0, 0)$	3

$$p_{nd} = 2p^2 q^3 + 4p^3 q^2 + p^4 q$$

$$p(0) = q^5$$

d'où

$$p_{det} = 1 - (q^5 + p_{nd}).$$

Correction

La soustraction et l'addition binaires étant identiques, de $m = c + e$ on déduit $c = m + e$. Pour retrouver c à partir du message m reçu il suffit d'ajouter à m le vecteur d'erreur e . Mais ce dernier est évidemment inconnu. L'idée est donc d'ajouter à m le plus probable vecteur d'erreur ; il est nommé **vecteur de correction** et noté ε .

Le bon sens induit (et cela se démontre) que le mot émis le plus probable est le plus proche du mot reçu. Encore faut-il préciser ce que signifie mathématiquement la proximité de 2 mots et donc définir une "distance" entre 2 vecteurs.

Distance entre 2 vecteurs binaires

Il s'agit du nombre de composantes de même rang, différentes dans l'un et l'autre des 2 vecteurs. Par exemple

$$\text{si } m = (1, 0, 1, 1, 1)$$

$$\text{et } c = (1, 1, 0, 0, 1),$$

la distance de m à c , notée $d(m, c)$ est 3.

Cette distance est égale au **poids** de $e = m + c$, en effet pour les composantes de rang i :

$$m_i \neq c_i \implies m_i + c_i = 1$$

$$m_i = c_i \implies m_i + c_i = 0$$

ce qui implique

$$d(m, c) = w(m + c) = w(e).$$

Distance minimale d'un code

C'est la plus petite distance *non nulle* entre 2 vecteurs du code.

C'est donc aussi le poids *positif* le plus faible des mots du code.

La distance minimale est une caractéristique du code, comme nous allons le voir elle est liée à la puissance de correction du code.

Algorithme de correction

Il doit prendre en compte les 2 conditions suivantes :

Condition 1 : $m + \varepsilon$ doit être un mot de code , ce qui implique

$$\begin{aligned} S(m + \varepsilon) &= 0 \\ &= S(m) + S(\varepsilon), \text{ puisque } S \text{ est linéaire} \end{aligned}$$

d'où $S(m) = S(\varepsilon)$

$S(m)$ est appelé **Syndrome** de m .

Condition 2 : $d(m, c)$ doit être minimum
ou de manière équivalente, $w(\varepsilon)$ minimum.

Deux étapes sont donc nécessaires :

Etape 1 : classer tous les ε possibles d'après leurs syndromes

Etape 2 : calculer $S(m)$
et chercher dans la classe de $S(m)$, un ε de poids minimum.

Mettons en place l'algorithme sur un exemple.

Exemple : algorithme de correction pour un code $\mathcal{C}_{3,2}$

Soit le code linéaire $\mathcal{C}_{3,2}$ défini par le codage suivant :

$$\begin{aligned}(0,0) &\longrightarrow (0,0,0) \\ (0,1) &\longrightarrow (0,1,0) \\ (1,0) &\longrightarrow (1,0,1) \\ (1,1) &\longrightarrow (1,1,1)\end{aligned}$$

Les syndromes des messages étant les éléments de B^s , avec $s = n - r = 1$, sont donc au nombre de 2, soit : $S_0 = 0$ et $S_1 = 1$.

Les quatre mots du code sont de syndrome nul et forment la classe 0.

Les quatre autres vecteurs de B^3 sont donc de syndrome 1 et forment la classe 1, d'où les messages reçus possibles rangés d'après leur syndromes :

syndromes	$S_0 = 0$	$S_1 = 1$
	$(0,0,0)$ $(0,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$	$(0,0,1)$ $(0,1,1)$ $(1,0,0)$ $(1,1,0)$
classes	0	1

Dans la classe 1 deux vecteurs sont de poids minimum, choisissons l'un d'entre eux comme vecteur de correction ε , par exemple $\varepsilon = (0,0,1)$.

La correction automatique s'établit alors comme suit :

$$\begin{aligned}(0,0,0) &\longrightarrow (0,0,0) \\ (0,0,1) + (0,0,1) &= (0,0,0) \\ (0,1,0) &\longrightarrow (0,1,0) \\ (0,1,1) + (0,0,1) &= (0,1,0) \\ (1,0,0) + (0,0,1) &= (1,0,1) \\ (1,0,1) &\longrightarrow (1,0,1) \\ (1,1,0) + (0,0,1) &= (1,1,1) \\ (1,1,1) &\longrightarrow (1,1,1).\end{aligned}$$

Remarquons que la transformation ci-dessus n'est pas unique. En effet on aurait pu choisir le vecteur $\varepsilon = (1, 0, 0)$ comme représentant de la classe 1, dans ce cas les messages erronés auraient été transformés comme suit :

$$\begin{array}{lll} (0, 0, 1) & \text{en} & (0, 0, 1) + (1, 0, 0) = (1, 0, 1) \\ (0, 1, 1) & \text{en} & (0, 1, 1) + (1, 0, 0) = (1, 1, 1) \\ (1, 0, 0) & \text{en} & (1, 0, 0) + (1, 0, 0) = (0, 0, 0) \\ (1, 1, 0) & \text{en} & (1, 1, 0) + (1, 0, 0) = (0, 1, 0). \end{array}$$

Capacité de correction

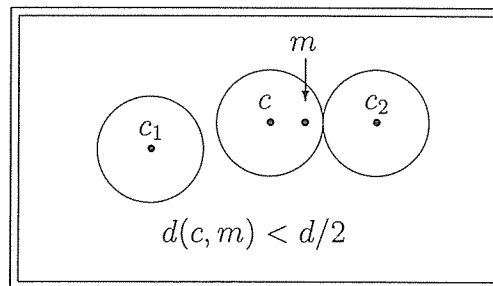
Nous venons de voir que le choix de ε est parfois aléatoire, l'algorithme peut donc remplacer le message erroné par un mot de code qui n'est pas le mot émis.

Plus généralement examinons dans quels cas la correction est assurée.

Imaginons que chaque mot de code c soit le centre d'une boule de rayon $d/2$. Pour un message erroné m , provenant du mot émis c , 2 cas peuvent se produire :

1) L'erreur de m est de poids $w < d/2$, donc $d(c, m) < d/2$.

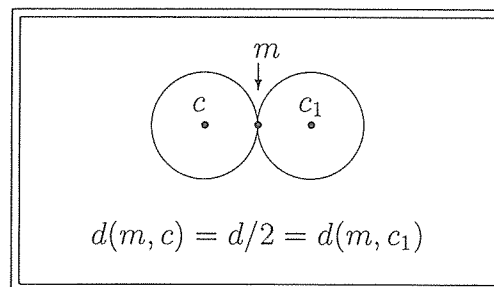
Comme le montre la figure ci-dessous le seul mot de code le plus proche de m est c : le message est corrigé.

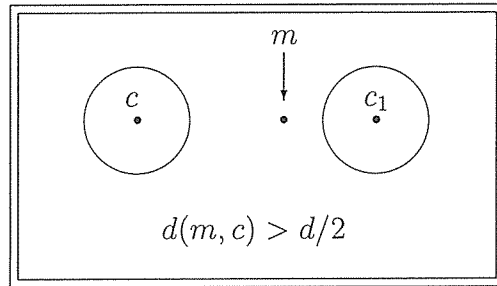
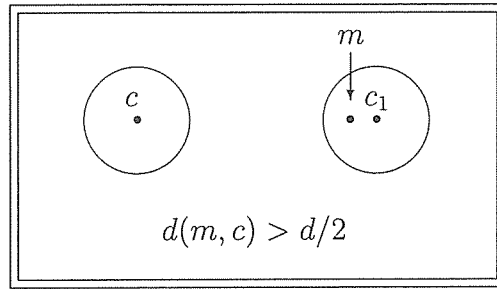


2) L'erreur de m est de poids $w \geq d/2$, c'est-à-dire $d(c, m) \geq d/2$.

Dans ce cas la correction est aléatoire, car il peut se trouver des mots de code différents de c à la même distance de m que c ou plus proches de m que ne l'est c .

Les figures suivantes représentent ces diverses possibilités.





On peut donc seulement assurer que :

toute erreur de poids strictement inférieur à $d/2$ est corrigée.

Le poids des vecteurs étant un nombre entier, on considère le plus grand entier positif t inférieur à $d/2$ que l'on appelle **capacité de correction** du code

Probabilité d'erreur résiduelle

Soit $p(k)$ la probabilité d'une erreur de poids k .

La probabilité d'une erreur de poids inférieur ou égal à t est :

$$p(0) + p(1) + \cdots + p(t)$$

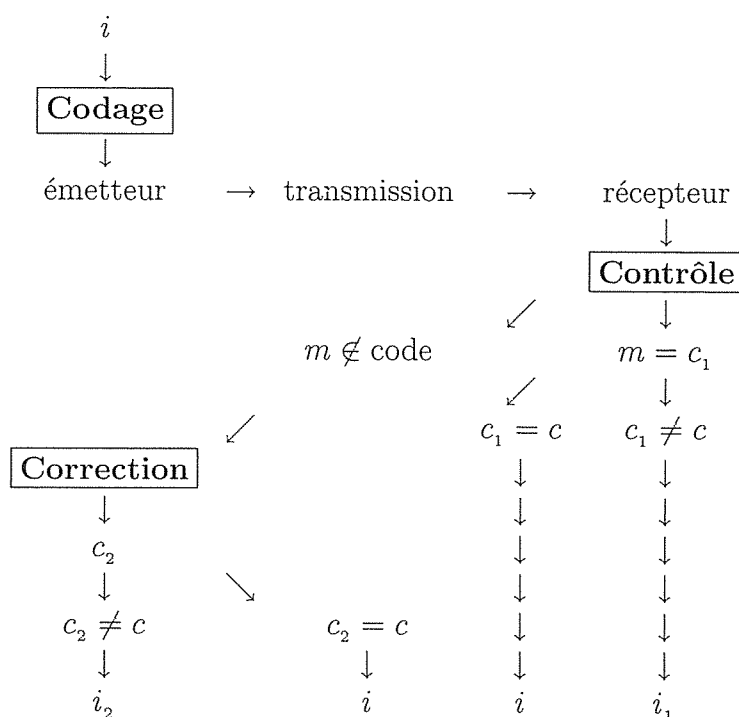
La probabilité d'exactitude après correction est donc

$$Pr_{corr} \geq \sum_{k=0}^t p(k)$$

et la probabilité d'erreur résiduelle

$$Pr_{res} \leq 1 - \sum_{k=0}^t p(k).$$

Les développements précédents peuvent se résumer par le schéma suivant.



Conclusion

Les méthodes utilisées sont imparfaites, il est donc nécessaires

- d’évaluer leur efficacité
- et surtout d’améliorer leur qualité

et cela ne peut se faire qu’en inventant des codages plus sophistiqués.

Sont ainsi créés des codes

- corrigeant toutes les erreurs de poids 1 et parmi eux ceux de redondance minimum (codes de Hamming),
- corrigeant
 - toutes les erreurs de poids fixé d’avance,
 - les paquets d’erreurs, (correspondants à des détériorations de plusieurs bits consécutifs),
- ou tenant compte du contexte, en codant le mot d’information i en fonction non seulement de lui-même mais aussi des mots d’information précédents,
- etc.

tout en perfectionnant les algorithmes de correction.

Mais ceci est une autre histoire.

[1] MATHÉMATIQUES POUR TÉLÉINFORMATIQUE – CODES CORRECTEURS
 Josèphe Badrikian (Ellipses, 2002)

EXPOSITIONS

Si les nombres m'étaient contés...

Robert CHARBONNIER

L'apparition et la généralisation du calcul électronique ont depuis trente ans bouleversé les méthodes et les techniques de calcul utilisées jusque là. Qu'il s'agisse du calcul à la « plume », avec les jetons ou avec des instruments et des machines, ces diverses techniques ont une longue histoire que j'ai eu envie d'explorer dans les musées et les fonds anciens des bibliothèques et il m'a paru très intéressant de partager cette recherche avec des collégiens dans le cadre d'un atelier.

C'est ainsi que depuis 1998, l'atelier du Collège Louise Michel de Maringues (63) travaille sur le thème des numérations et des techniques de calcul. Les collégiens volontaires de 4^e et 3^e qui le fréquentent sont mis en contact direct avec les textes originaux recueillis dans les fonds anciens des bibliothèques ainsi que dans les départements des manuscrits orientaux et occidentaux de la BNF, les musées du Louvre et des Arts et métiers de Paris. Le travail de l'atelier a été consacré essentiellement au déchiffrement, à l'analyse des documents pour extraire et faire fonctionner les différents algorithmes de multiplication et de division.

Chaque année, une exposition du travail effectué, intitulée : *Si les nombres m'étaient contés ...* est présentée au public sous forme de panneaux mais aussi de stands de démonstration animés par les élèves¹. Chaque année, l'exposition s'enrichit des recherches nouvelles.

En 2001, l'exposition a présenté l'histoire du zéro, les numérations et les calculs babyloniens, égyptiens, et le calcul sur les abaques. Le calcul avec des instruments et des machines a été poursuivi par l'étude de la *Pascaline*, la machine de Blaise Pascal dont le Musée des Arts et métiers de Paris nous a prêté une maquette de démonstration pendant plusieurs mois.

Au cours de l'Université d'Été, tandis que Paul-Louis Hennequin effectuait des démonstrations de la *Pascaline* (après avoir travaillé sur ce thème avec les collégiens de l'atelier durant l'année scolaire), j'ai présenté le travail sur les abaques, et donné des explications concrètes sur le contenu de l'exposition et sur sa réalisation.

Cette année 2001-2002, l'atelier a fait une recherche plus systématique sur l'histoire des algorithmes de multiplication et de division en explorant les supports les plus variés : les mains, les abaques, le papier, les instruments.

Une brochure reprenant une partie du travail de l'atelier a été publiée par l'IREM de Clermont Ferrand. Elle a tout naturellement pris le nom de l'exposition : *Si les nombres m'étaient contés ...*. Dans son sommaire, on peut trouver : le calcul digital, le calcul sur abaques (à colonnes et à lignes), la multiplication écrite à travers les âges, la division *par la galère* ou le calcul avec des réglettes. Elle contient plus d'une vingtaine d'algorithmes mais aussi des reproductions des pages essentielles d'ouvrages s'échelonnant du XI^e au XVIII^e siècle. Les textes qui suivent et qui concernent surtout le calcul sur l'abaque à colonnes en sont extraits.

¹ Pour en savoir plus, voir Robert Charbonnier : *Dix bonnes raisons de faire une exposition de mathématiques animée par les élèves*, Bulletin de l'APMEP n°436 de Nov-Déc. 2001 et Actes de l'Université d'été de 1999 « créer et animer un club de mathématiques en collège et en lycée »

Le calcul sur abaques

Pour écrire les nombres, les Grecs et les Romains ont utilisé des systèmes de numération additifs. Faciles d'utilisation pour exprimer des petits nombres, ils étaient inefficaces pour écrire les grands nombres et surtout rendaient presque impossibles les opérations arithmétiques élémentaires. C'est pour cela qu'ils avaient recours au calcul digital pour les calculs courants et qu'ils utilisaient des abaques pour des calculs plus importants, des calculs de comptabilité par exemple.

Le premier abaque connu est la table de Salamine (Grèce), en marbre. Il remonte probablement au quatrième siècle avant J.C. Les calculs financiers qui étaient effectués sur cette table l'étaient en « talents », « drachmes » et « oboles » à l'aide de petits cailloux disposés dans les différentes rangées gravées sur la table. Le mot *calcul* témoigne d'ailleurs de l'utilisation historique du caillou, du latin *calculus* : petit caillou.

L'abaque à poussière

Un autre type d'abaque, à poussière ou à sable, fut utilisé dans l'Antiquité. On le trouve cité dans nombre d'écrits.

Cet abaque consistait en une planchette sur laquelle on avait l'habitude de répandre du sable ou de la poudre ou même de la farine pour y tracer les chiffres et effectuer les opérations avec des techniques adaptées à ce support : c'est ce que les savants d'expression arabe ont appelé le *hisab al ghubar* (« calcul sur la poussière ») ou *hisab 'ala at turab* (« calcul sur le sable »).

Les calculateurs par exemple commençaient par tracer sur le sable avec le doigt ou avec un stylet, des lignes parallèles pour former des colonnes correspondant aux unités, dizaines, centaines, etc. Ils écrivaient alors les chiffres dans les colonnes. Le zéro n'était pas nécessaire car lorsqu'il s'agissait d'écrire 703 par exemple, il suffisait de laisser vide la colonne correspondant aux dizaines. D'ailleurs, en écrivant les chiffres dans des colonnes, ceux-ci ont acquis implicitement une valeur de position et petit à petit les colonnes s'effacèrent.

Une autre caractéristique du calcul sur l'abaque à poussière : il était facile d'effacer avec le doigt les calculs intermédiaires. On trouvera, page suivante, un exemple de multiplication illustrant cette technique.

Quand, par la suite, le papier et l'encre se substitueront à la planchette, il sera difficile d'effacer les chiffres des résultats intermédiaires, alors on les biffera, on les barrera et ce sera la naissance des techniques de multiplication et de division avec quantité de chiffres barrés qu'on trouvera du XVe au XVIIIe siècle.

Multiplier sur l'abaque à poussière

Voici un exemple de multiplication tiré des *Maqalatan fi osu'l hisab al hind* (« Deux livres sur les opérations de calcul à l'aide des chiffres indiens ») de Abu'l Hassan Kushiya ibn Labban al Gili (971-1029).

Il s'agit de multiplier 325 par 243.

Après avoir disposé 325 et 243 de la manière suivante :

3 2 5
2 4 3

Il effectue le calcul en trois étapes. Elles correspondent aux trois ordres décimaux du multiplicande.

Première étape :

Il multiplie 243 par le chiffre des centaines 3 de 325. Le résultat se place au fur et à mesure des calculs au dessus de 243 :

$3 \times 2 = 6$. 6 est placé au-dessus du 2 :
6 3 2 5
2 4 3

$3 \times 4 = 12$.

2 est placé au-dessus du 4.

Le 6 est effacé et est remplacé par 7 pour tenir compte de la retenue :

7 2 3 2 5
2 4 3

$3 \times 3 = 9$. Le 3 de 325 est effacé (les calculs avec lui sont terminés). 9 prend sa place.

7 2 9 2 5
2 4 3

Deuxième étape :

Il décale 243 d'un rang vers la droite et il reprend les calculs avec le chiffre 2 du multiplicande.

7 2 9 2 5
2 4 3

$2 \times 2 = 4$. 4 est ajouté au 2 de 72.
6 remplace le 2 de 72 :

7 6 9 2 5
2 4 3

$2 \times 4 = 8$. 8 est ajouté au 9 qui est situé juste au-dessus. 69 devient 77.

7 7 7 2 5
2 4 3

$2 \times 3 = 6$. 6 remplace le 2 situé au dessus. Les calculs avec le chiffre 2 de 325 sont terminés.

7 7 7 6 5
2 4 3

Troisième étape :

Elle consiste à faire les mêmes calculs avec le chiffre 5 après avoir déplacé 243 d'un rang vers la droite.

7 7 7 6 5
2 4 3

Les trois phases sont :

7 8 7 6 5
2 4 3

7 8 9 6 5
2 4 3

7 8 9 7 5
2 4 3

78975 est le résultat.

L'utilisation de jetons qui dérive de l'usage des cailloux sur l'abaque antique se fera sur des planches à calcul de deux sortes : les **abaques à colonnes** et les **abaques à lignes**.

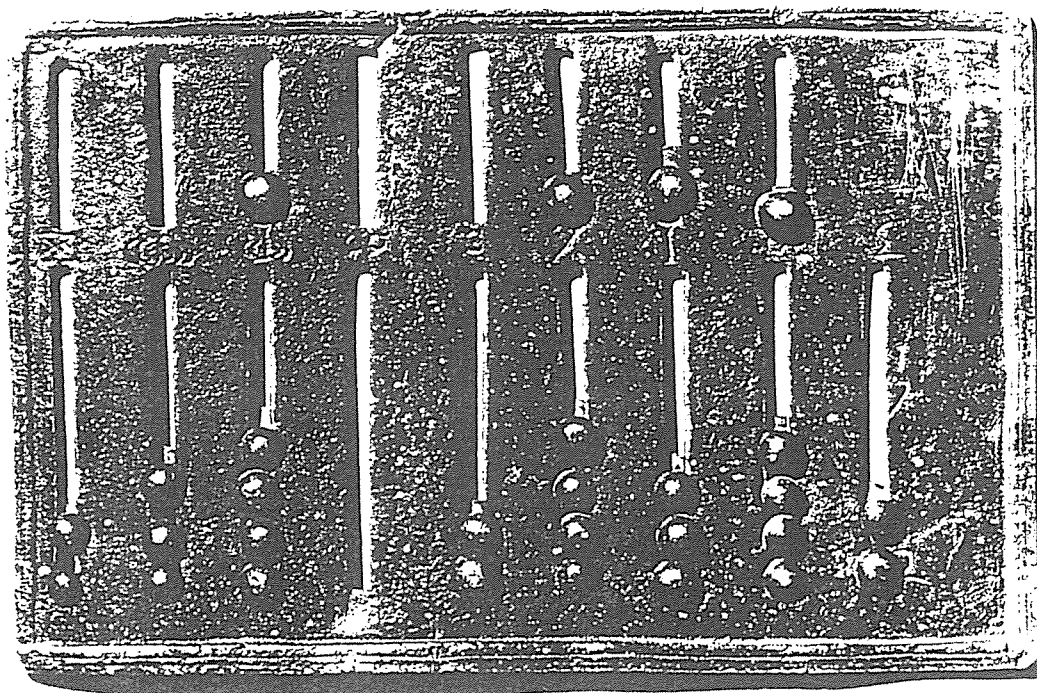
Il faut ajouter les « **abaques** » **portatifs**, comme ceux inventés par les Romains au début de l'ère chrétienne. Les jetons ne se « jettent » pas sur la planche à calcul, ils couissent dans des rainures correspondant aux différents ordres décimaux.

Le boulier romain, la première calculatrice de poche

C'est un instrument de taille modeste, destiné à être transporté, ce qui en fait la première calculatrice de poche. Seulement 4 exemplaires nous sont parvenus. Ils se trouvent dans quatre musées différents : le Cabinet des médailles de la Bibliothèque Nationale de France (site Richelieu) à Paris, le British Museum de Londres, le Musée des Thermes de Rome et le Musée archéologique de la région d'Aoste.

Le dernier a été trouvé en 1972 dans une nécropole du Val d'Aoste datée de la fin du 1er siècle de notre ère. Les trois autres n'ont pas été datés.

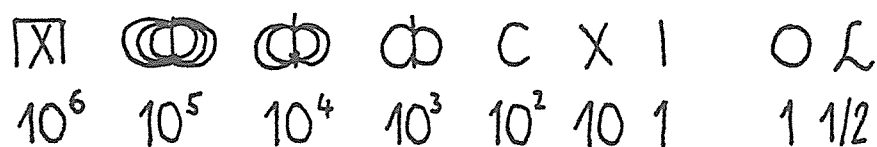
Voici une photographie du boulier conservé à Paris :



Le boulier romain conservé à la Bibliothèque Nationale de France
Plusieurs boutons sont perdus !

Cabinet des médailles . Cliché BNF.

Le boulier romain est une plaquette de bronze qui comporte des rainures jouant le rôle des colonnes de l'abaque, des boutons qui coulisent dans ces rainures et des signes numériques associés chacun à une rainure. Peu visibles sur la photo, ils se trouvent inscrits entre les rainures supérieures et inférieures (deux signes $\mathcal{J}$ et $\mathcal{L}$ se trouvent à droite de la première rainure en partant de la droite). En voici une reproduction :



Entiers

Onces

La rainure de droite permet de compter des fractions d'once, la deuxième en partant de la droite des onces (la douzième partie de l'as qui était l'unité monétaire romaine), la troisième est consacrée aux unités, la suivante aux dizaines, etc. A partir de la troisième rainure en partant de la droite, on retrouve donc les chiffres exprimant les puissances successives de dix dans la numération romaine de l'époque.

Le boulier romain comporte neuf rainures verticales à sa partie inférieure et huit rainures plus courtes à sa partie supérieure.

A part les deux rainures les plus à droite, elles comportent un bouton dans leur partie supérieure et quatre dans la partie inférieure (certains sont perdus). Les quatre boutons du bas représentent les unités de chaque ordre décimal et ceux du haut, cinq unités. Le nombre figuré sur la photographie du boulier est 0050055 car seuls les boutons poussés vers les inscriptions numériques comptent.

La rainure la plus à droite, divisée en trois parties, comporte normalement quatre boutons qui permettent de compter la demi-once ou semuncia ($\mathcal{L}$), le quart d'once silicius ($\mathcal{J}$) et le tiers d'once ou duella ($\mathcal{Z}$) avec les deux derniers boutons. On peut voir à la page suivante un tableau des fractions romaines utilisées jusqu'au XIIe siècle au moins.

La deuxième rainure en partant de la droite comporte normalement un bouton dans sa partie supérieure et cinq dans sa partie inférieure qui servent à marquer les multiples de l'once ou douzièmes de l'as, chaque bouton inférieur valant une once et le bouton supérieur 6 onces pour permettre de compter jusqu'au 11/12 de l'as.

Ce boulier romain est tout à fait semblable aux bouliers chinois et japonais qui continuent à tenir une place très importante en Asie.

Le boulier romain (fin du Ier siècle) est antérieur à ces bouliers. Bien que l'origine du boulier chinois ne soit pas résolue, on sait de manière certaine que le boulier n'a été couramment utilisé en Chine qu'à partir de la deuxième moitié du XVIe siècle (J.C. Martzloff, *Histoire des mathématiques chinoises*).

Les fractions romaines

Si la numération romaine est encore utilisée pour certains usages, le système de notation et de calcul des fractions ne l'est plus. Il est complètement tombé en désuétude, vu son insuffisance et les efforts constants de traduction demandés au calculateur.

Ci-contre : les fractions utilisées par Gerbert (Gerb.) et Bernelinus (Bern.).

Extrait des *Oeuvres de Gerbert* d' A. Olleris, doyen de la faculté des Lettres de Clermont. Paris, 1867.

Bibliothèque municipale et interuniversitaire de Clermont-Ferrand.
Cote : A10075.

	Gerb.	Bern.	
As	×	×	
Deunx	fff	fff	$\frac{11}{12}$
Decunx.	} fff	} fff	$\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$
Dextans			
Dodrans	ff	ff	$\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$
Bisse	ff	ff	$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$
Septunx	f	f	$\frac{7}{12}$
Semis	τ	τ	$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$
Quincunx.	ff	ff	$\frac{5}{12}$
Triens	ff	ff	$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
Quadrans.	f	f	$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
Sextans.	τ	τ	$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$
Sescuncia.	} ε	} ε	$\frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}$
Sescunx			
Uncia	τ	τ	$\frac{1}{12}$
Semuncia.	ℓ	ℓ	$\frac{1}{24} = \frac{1}{2} \tau$
Duella	υυ	υυ	$\frac{1}{36} = \frac{1}{3} \tau$
Sicilicus	γ	γ	$\frac{1}{48} = \frac{1}{4} \tau$
Sextula	c	υ	$\frac{1}{72} = \frac{1}{6} \tau$
Dragma	*	*	$\frac{1}{96} = \frac{1}{8} \tau$
Emisescla.	ψ	ψ	$\frac{1}{144} = \frac{1}{12} \tau$
Tremissis.	H		$\frac{1}{216} = \frac{1}{18} \tau$
Scripulus.	ff	ff	$\frac{1}{288} = \frac{1}{24} \tau$
Obolus	—	—	$\frac{1}{576} = \frac{1}{48} \tau$
Cerates.	Z	Z	$\frac{1}{1152} = \frac{1}{96} \tau$
Siliqua	∞ L A	}	$\frac{1}{1728} = \frac{1}{144} \tau$
Oboli iii	T		
Calculus	α	α	$\frac{1}{2592} = \frac{1}{192} \tau$
Oboli v.	E		$\frac{1}{2880} = \frac{1}{240} \tau$

Fractions romaines provenant de manuscrits du XIe siècle.

78v

as	decime	decime	doctus	Dusse	Sepant	Sem	Quin
f	fff	fff	ff	ff	f	f	ff
—	—	—	—	—	—	—	—
xii	xi	x	viii	viii	vii	vi	v
ff	ff	ff	ff	ff	ff	ff	ff
cc	cc	cc	cc	c	c	c	c
lxxx	lx	xl	xvi	xc	lx	xl	xx
viii	iiii			li	viii	iiii	
u	u	u	u	u	u	u	u
lxxxi	lxxii	lx	lxxx	xlvi	xlvi	xxvi	xxv
A							
Triens	Quadrans	Sextans	Septans	Octans	Semans	Duella	Sicilia
f	f	f	f	—	f	u	o
—	—	—	—	ff	ff	ff	ff
iiii	iii	ii	is	xx	xii	viii	vi
ff	ff	ff	ff	o gl	p	p	p
xc	lxx	xl	xxx	xl	li	iii	iii
vi	ii	viii	vi	viii	cola	cola	cola
				viii	lxviii	lxviii	lxviii
				f. o. f. o. f. o.	f. o. f. o. f. o.	f. o. f. o. f. o.	f. o. f. o. f. o.
xxiii	xxiii	xii	viii	vi	ii	ii	ii

Les fractions romaines utilisées pour le calcul sur l'abaque
 Extrait du *Liber abaci* de Bernelinus (XIe siècle)
 Bibliothèque de l'Ecole de Médecine de Montpellier. Cote H 491. Folio 78 v.

La numération romaine

Les Romains et les peuples latins qui utilisèrent cette numération n'ont eu de cesse de l'« améliorer », en particulier pour exprimer les grands nombres.

L'application simple du principe additif aux sept chiffres de base : I, V, X, L, C, D et M ne permet pas de noter de grands nombres ou alors pour écrire 98000 par exemple, il faut juxtaposer 98 fois le symbole M.

Très tôt, ils utilisèrent des signes particuliers pour 5000, 10000, 50000, 100000, 500000 et 1000000 dérivés d'un signe archaïque utilisé pour 1000.

1000 était représenté géométriquement par un cercle coupé en deux par un trait vertical, 10000 était noté par le même signe augmenté de chaque côté par un demi cercle, etc.

Les symboles utilisés pour représenter 500, 5000, etc étaient la moitié droite des symboles représentant respectivement 1000, 10000, etc.

De telles représentations se retrouvent dans des ouvrages de 1582 et de 1614 :

Quænam fuerunt notæ Romanæ numeri ?			
I.	1.		
V.	5.		
X.	10.		
L.	50.		
C.	100.		
D.	500.	Quingenta.	
CD.	1000.	Mille.	
CDL.	1500.	Quingenta millia.	
CDLX.	1600.	Quingenta sexcenta.	
CDLXX.	1700.	Quingenta septenta.	
CDLXXX.	1800.	Quingenta octenta.	
CDLXXXI.	1810.	Quingenta octenta et decem.	
CDLXXXII.	1820.	Quingenta octenta et viginti.	
CDLXXXIII.	1830.	Quingenta octenta et triginta.	
CDLXXXIV.	1840.	Quingenta octenta et quadraginta.	
CDLXXXV.	1850.	Quingenta octenta et quingenta.	
CDLXXXVI.	1860.	Quingenta octenta et sexcenta.	
CDLXXXVII.	1870.	Quingenta octenta et septenta.	
CDLXXXVIII.	1880.	Quingenta octenta et octenta.	
CDLXXXIX.	1890.	Quingenta octenta et nonaginta.	
CDLXXXX.	1900.	Quingenta nonaginta.	
CDLXXXXI.	1910.	Quingenta nonaginta et decem.	
CDLXXXXII.	1920.	Quingenta nonaginta et viginti.	
CDLXXXXIII.	1930.	Quingenta nonaginta et triginta.	
CDLXXXXIV.	1940.	Quingenta nonaginta et quadraginta.	
CDLXXXXV.	1950.	Quingenta nonaginta et quingenta.	
CDLXXXXVI.	1960.	Quingenta nonaginta et sexcenta.	
CDLXXXXVII.	1970.	Quingenta nonaginta et septenta.	
CDLXXXXVIII.	1980.	Quingenta nonaginta et octenta.	
CDLXXXXIX.	1990.	Quingenta nonaginta et nonaginta.	
CDLXXXXX.	2000.	Sexcenta.	
CDLXXXXXI.	2010.	Sexcenta et decem.	
CDLXXXXXII.	2020.	Sexcenta et viginti.	
CDLXXXXXIII.	2030.	Sexcenta et triginta.	
CDLXXXXXIV.	2040.	Sexcenta et quadraginta.	
CDLXXXXXV.	2050.	Sexcenta et quingenta.	
CDLXXXXXVI.	2060.	Sexcenta et sexcenta.	
CDLXXXXXVII.	2070.	Sexcenta et septenta.	
CDLXXXXXVIII.	2080.	Sexcenta et octenta.	
CDLXXXXXIX.	2090.	Sexcenta et nonaginta.	
CDLXXXXXX.	2100.	Septingenta.	
CDLXXXXXXI.	2110.	Septingenta et decem.	
CDLXXXXXXII.	2120.	Septingenta et viginti.	
CDLXXXXXXIII.	2130.	Septingenta et triginta.	
CDLXXXXXXIV.	2140.	Septingenta et quadraginta.	
CDLXXXXXXV.	2150.	Septingenta et quingenta.	
CDLXXXXXXVI.	2160.	Septingenta et sexcenta.	
CDLXXXXXXVII.	2170.	Septingenta et septenta.	
CDLXXXXXXVIII.	2180.	Septingenta et octenta.	
CDLXXXXXXIX.	2190.	Septingenta et nonaginta.	
CDLXXXXXXX.	2200.	Octingenta.	
CDLXXXXXXXI.	2210.	Octingenta et decem.	
CDLXXXXXXXII.	2220.	Octingenta et viginti.	
CDLXXXXXXXIII.	2230.	Octingenta et triginta.	
CDLXXXXXXXIV.	2240.	Octingenta et quadraginta.	
CDLXXXXXXXV.	2250.	Octingenta et quingenta.	
CDLXXXXXXXVI.	2260.	Octingenta et sexcenta.	
CDLXXXXXXXVII.	2270.	Octingenta et septenta.	
CDLXXXXXXXVIII.	2280.	Octingenta et octenta.	
CDLXXXXXXXIX.	2290.	Octingenta et nonaginta.	
CDLXXXXXXXI.	2300.	Centingenta.	
CDLXXXXXXXII.	2310.	Centingenta et decem.	
CDLXXXXXXXIII.	2320.	Centingenta et viginti.	
CDLXXXXXXXIV.	2330.	Centingenta et triginta.	
CDLXXXXXXXV.	2340.	Centingenta et quadraginta.	
CDLXXXXXXXVI.	2350.	Centingenta et quingenta.	
CDLXXXXXXXVII.	2360.	Centingenta et sexcenta.	
CDLXXXXXXXVIII.	2370.	Centingenta et septenta.	
CDLXXXXXXXIX.	2380.	Centingenta et octenta.	
CDLXXXXXXXI.	2390.	Centingenta et nonaginta.	
CDLXXXXXXXII.	2400.	Centingenta et decem.	
CDLXXXXXXXIII.	2410.	Centingenta et viginti.	
CDLXXXXXXXIV.	2420.	Centingenta et triginta.	
CDLXXXXXXXV.	2430.	Centingenta et quadraginta.	
CDLXXXXXXXVI.	2440.	Centingenta et quingenta.	
CDLXXXXXXXVII.	2450.	Centingenta et sexcenta.	
CDLXXXXXXXVIII.	2460.	Centingenta et septenta.	
CDLXXXXXXXIX.	2470.	Centingenta et octenta.	
CDLXXXXXXXI.	2480.	Centingenta et nonaginta.	
CDLXXXXXXXII.	2490.	Centingenta et decem.	
CDLXXXXXXXIII.	2500.	Centingenta et viginti.	
CDLXXXXXXXIV.	2510.	Centingenta et triginta.	
CDLXXXXXXXV.	2520.	Centingenta et quadraginta.	
CDLXXXXXXXVI.	2530.	Centingenta et quingenta.	
CDLXXXXXXXVII.	2540.	Centingenta et sexcenta.	
CDLXXXXXXXVIII.	2550.	Centingenta et septenta.	
CDLXXXXXXXIX.	2560.	Centingenta et octenta.	
CDLXXXXXXXI.	2570.	Centingenta et nonaginta.	
CDLXXXXXXXII.	2580.	Centingenta et decem.	
CDLXXXXXXXIII.	2590.	Centingenta et viginti.	
CDLXXXXXXXIV.	2600.	Centingenta et triginta.	
CDLXXXXXXXV.	2610.	Centingenta et quadraginta.	
CDLXXXXXXXVI.	2620.	Centingenta et quingenta.	
CDLXXXXXXXVII.	2630.	Centingenta et sexcenta.	
CDLXXXXXXXVIII.	2640.	Centingenta et septenta.	
CDLXXXXXXXIX.	2650.	Centingenta et octenta.	
CDLXXXXXXXI.	2660.	Centingenta et nonaginta.	
CDLXXXXXXXII.	2670.	Centingenta et decem.	
CDLXXXXXXXIII.	2680.	Centingenta et viginti.	
CDLXXXXXXXIV.	2690.	Centingenta et triginta.	
CDLXXXXXXXV.	2700.	Centingenta et quadraginta.	
CDLXXXXXXXVI.	2710.	Centingenta et quingenta.	
CDLXXXXXXXVII.	2720.	Centingenta et sexcenta.	
CDLXXXXXXXVIII.	2730.	Centingenta et septenta.	
CDLXXXXXXXIX.	2740.	Centingenta et octenta.	
CDLXXXXXXXI.	2750.	Centingenta et nonaginta.	
CDLXXXXXXXII.	2760.	Centingenta et decem.	
CDLXXXXXXXIII.	2770.	Centingenta et viginti.	
CDLXXXXXXXIV.	2780.	Centingenta et triginta.	
CDLXXXXXXXV.	2790.	Centingenta et quadraginta.	
CDLXXXXXXXVI.	2800.	Centingenta et quingenta.	
CDLXXXXXXXVII.	2810.	Centingenta et sexcenta.	
CDLXXXXXXXVIII.	2820.	Centingenta et septenta.	
CDLXXXXXXXIX.	2830.	Centingenta et octenta.	
CDLXXXXXXXI.	2840.	Centingenta et nonaginta.	
CDLXXXXXXXII.	2850.	Centingenta et decem.	
CDLXXXXXXXIII.	2860.	Centingenta et viginti.	
CDLXXXXXXXIV.	2870.	Centingenta et triginta.	
CDLXXXXXXXV.	2880.	Centingenta et quadraginta.	
CDLXXXXXXXVI.	2890.	Centingenta et quingenta.	
CDLXXXXXXXVII.	2900.	Centingenta et sexcenta.	
CDLXXXXXXXVIII.	2910.	Centingenta et septenta.	
CDLXXXXXXXIX.	2920.	Centingenta et octenta.	
CDLXXXXXXXI.	2930.	Centingenta et nonaginta.	
CDLXXXXXXXII.	2940.	Centingenta et decem.	
CDLXXXXXXXIII.	2950.	Centingenta et viginti.	
CDLXXXXXXXIV.	2960.	Centingenta et triginta.	
CDLXXXXXXXV.	2970.	Centingenta et quadraginta.	
CDLXXXXXXXVI.	2980.	Centingenta et quingenta.	
CDLXXXXXXXVII.	2990.	Centingenta et sexcenta.	
CDLXXXXXXXI.	3000.	Centingenta et septenta.	

Romani numeri non progrediuntur ultra decies centena millia illa et cū plura significare uolunt, duplicant rotas ut,

CDLXXXXXXXI. 2000.

CDLXXXXXXXII. 3000.

CDLXXXXXXXIII. 1500. CDLXXXXXXXIV. 1000.

CDLXXXXXXXV. 1000

Extrait de *Pedagogus* de Thomas Freigus, Bâle, 1582.

Romanorum		Numeratio.	
CIC ∞ ∞ ∞	3000.	CIC CCIC ∞ CCIC	9000.
IIII IIIM		CCIC C.C.I.C.C	
CIC IC ∞ IC	4000.	X X CC.I.CC CMC CMC IMI	10000.
V V IC IC IC V IC V M	5000.	CCIC IC CC.I.CC ∞	11000.
IC IC IC ∞	6000.	CCIC IC IC CC.I.CC ∞ ∞	12000.
VII IC IC IC IC IC ∞ ∞	7000.	CCIC IC IC IC CCIC ∞ ∞ ∞	13000.
CIC IC CCIC ∞ ∞ CCIC	8000.	CCIC IC IC CCIC ∞ IC	14000.
		CCIC IC	15000.

Sur le document ci-dessus, d'autres conventions ont été utilisées :

Cette convention, a quelquefois prêté à confusion avec un usage plus ancien déjà utilisé par les Grecs qui surlignait d'un trait les lettres numérales pour distinguer les mots des nombres dans l'écriture alphabétique de ceux-ci.

A noter la curieuse façon de noter 1000 par le signe qui deviendra le symbole de l'infini sur proposition, en 1655, du mathématicien anglais John Wallis.

L'abaque à colonnes ou abaque de Gerbert

A partir du XI^e siècle, des manuscrits disent précisément comment on réalisait ces abaques et surtout comment on calculait. Certains écrits sont de Gerbert, un savant et un pédagogue exceptionnel (en même temps d'ailleurs qu'un politicien habile – il fit, entre autres, élire Hugues Capet et deviendra pape en 999) qui marqua son époque au point que des historiens parlent du XI^e siècle comme du « siècle de Gerbert ». D'autres écrits, plus nombreux, viennent de ses élèves comme par exemple Richer et Bernelinus.

Richer, dans son *Histoire de France* qui va de 888 à 995, indique que pour initier ses élèves, Gerbert « *fit construire par un fabriquant de boucliers un abaque, c'est-à-dire une planche à compartiments. Elle fut divisée sur la longueur en vingt-sept parties, sur lesquelles Gerbert disposa neuf chiffres destinés à exprimer tous les nombres. Il fabriqua, en outre, avec les mêmes chiffres, mille caractères en corne, qu'on intervertissait dans les vingt-sept compartiments de l'abaque pour obtenir la multiplication ou la division de tous les nombres possibles. Ce dispositif permettait de diviser et de multiplier une foule de nombres si rapidement que, vu leur extrême abondance, on réussissait à faire mentalement les opérations en moins de temps qu'on n'en eût mis à les formuler...* ».

Les neuf chiffres que Gerbert écrivit sur les jetons sont les chiffres d'origine indienne qu'il avait découvert avec les sciences arabes lors d'un séjour de trois ans en Catalogne qui faisait alors partie du Duché d'Aquitaine. Ce duché avait une « frontière » commune avec le califat de Cordoue et des échanges de tout ordre ont été nombreux aux marges des deux « empires » chrétiens et musulmans.

Ces jetons qui prirent le nom d'**apices** (apex au singulier) introduisirent ainsi les chiffres dits indo-arabes (d'origine indienne et transmis par les arabes) pour la première fois en Occident. Comme le zéro n'était pas nécessaire, seulement neuf chiffres furent utilisés et c'est ce qui explique que certains manuscrits de l'époque n'aient pas comporté ni même mentionné l'existence du zéro.

Dans son *Liber abaci*, Bernelinus dit : « ... Que la table, préalablement polie de toutes parts avec soin, soit divisée par trente lignes dont nous réservons les trois premières à la distribution des onces et des fractions ... Marquons la première ligne avec l'unité I, la seconde par X, c'est-à-dire la dizaine, la troisième par C, c'est-à-dire la centaine ; la quatrième par l'élément I avec un trait ajouté au-dessus, c'est-à-dire le mille ; la cinquième par X I avec un trait ajouté au-dessus, c'est-à-dire la dizaine de mille ; la sixième par le nombre C I avec un trait au-dessus, c'est-à-dire la centaine de mille. Quant à la septième, qu'on la désigne par le nombre M I, en y ajoutant des traits, c'est-à-dire le mille mille ... ». La dixième colonne, qui est la colonne des milliards, sera marquée M M I avec un trait au-dessus c'est-à-dire le « milies mille milia », dans le manuscrit latin. Les mots : million, milliard viendront bien plus tard. On trouvera, pages suivantes, deux pages du manuscrit de Bernelinus, où l'on peut voir qu'au début du XI^e siècle, on calcule toujours avec les chiffres romains et que l'on connaît l'existence des chiffres indo-arabes. Ces chiffres que l'on trouvera écrits sur les jetons, connaîtront des reproductions très fantaisistes, pendant deux cents ans environ, avant de retrouver les graphies originales avec l'ouvrage de Leonard de Pise : *Liber abaci* qui paraîtra en 1202.

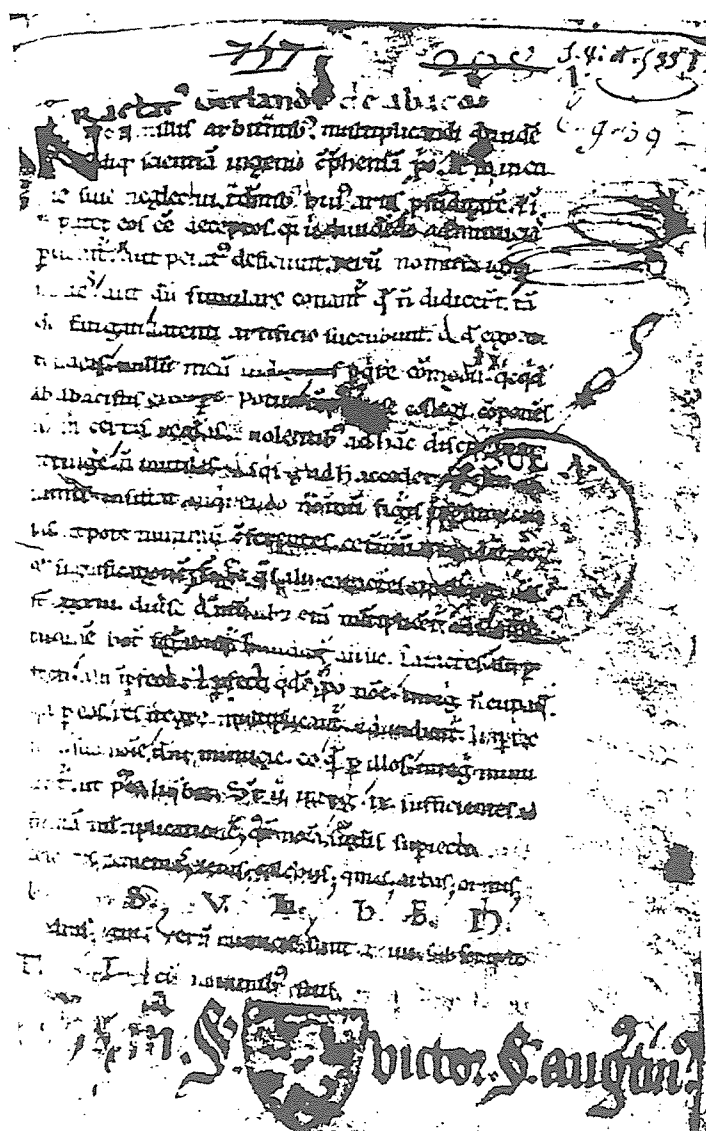
Les trois premières colonnes à droite, de l'abaque ci-contre, sont destinées au calcul avec les fractions. Celles-ci sont notées, probablement comme aide-mémoire, sous la ligne du bas. Leur nom est noté sur la ligne.

La quatrième colonne accueille les unités, la suivante à gauche, les dizaines et ainsi de suite.

La colonne des milliers est notée par un I surmonté d'un trait horizontal qui multiplie par 1000, celle des millions (Mille Mille) par M et I surmontés également chacun par un trait, et ainsi de suite jusqu'à la colonne notée CMMMMMMMI surmontés de traits (à l'exception de C) qui désigne 10 puissance 26. Ce nombre est nommé *centies milies milies milies milies milies milies mille milia*.

Sur la partie du haut de l'abaque, on ne fait plus appel aux chiffres romains mais aux chiffres indo-arabes qui commencent à apparaître en Occident. Ils ne servent pas encore à écrire les nombres (d'ailleurs, le zéro n'est pas mentionné) ; ils sont souvent notés sur les jetons appelés alors **apices**, en concurrence avec les chiffres romains voire grecs.

Apices dans un texte latin de Gerlandus du XIIe siècle



En bas du document ci-contre, on trouve, les chiffres notés aujourd'hui :

9, 8, 7, 6

5, 4, 3

2, 1 :

6 8 V L

6 B M

6 7

Extrait de : De abaco de Gerlandus (XIIe siècle)
Bibliothèque Nationale de France. Manuscrit latin 15119. Folio 1.

La division avec dénomination et différence selon Gerbert

L'algorithme utilisé par Gerbert est aussi performant que celui que nous utilisons aujourd'hui. Il ne s'est pas imposé dans les siècles qui ont suivi, probablement car il était très lié à la pratique du calcul sur abaquas et ce sont les méthodes indiennes de calcul qui seront adoptées en même temps que la numération décimale de position de même origine.

La division se fait en plusieurs étapes ; l'objectif de chacune d'elles est d'obtenir facilement un quotient partiel et un nouveau dividende plus petit que le précédent. Afin d'effectuer des divisions le plus simple possible, on prend pour diviseur, un diviseur provisoire qu'on peut changer à chaque étape : un nombre « rond » (supérieur au diviseur donné), appelé **dénomination**. Pendant les opérations, il faudra tenir compte de la **différence** entre le vrai diviseur et celui utilisé.

La division de 4019 par 87

- 1) Au lieu de diviser par 87, on divise par 100 (dénomination choisie). Mais il faudra ensuite apporter des corrections car on aura trop enlevé au dividende.
- 2) La différence entre 100 et le diviseur 87 est 13.
- 3) On divise 4 019 par 100. Le quotient est **40**.
 $40 \times 100 = 4000$.
On soustrait 4000 de 4019. Il reste 19.
- 4) Comme on a divisé par un diviseur plus grand, on a trop enlevé au dividende au moment de la soustraction ; il faut rendre 40×13 au dividende, soit 520. Le nouveau dividende est $19 + 520 = 539$.

Le processus qu'on vient de décrire est itéré à partir d'un dividende diminué (539 au lieu de 4019). A chaque étape du processus, on obtient un quotient partiel. Le processus s'arrête lorsque le nouveau dividende est inférieur au diviseur. Ce sera le reste de la division. Il suffira alors d'additionner les quotients partiels pour avoir le quotient.

- 5) On divise le nouveau 539 par 100. Le quotient est **5**.
 $5 \times 100 = 500$. On soustrait 500 de 539. Il reste 39. On rend 5×13 au dividende soit 65. Le nouveau dividende est donc $39 + 65 = 104$.
- 6) On divise 104 par 100. Le quotient est **1**.
Le reste est 4.
- 7) On rend $13 \times 1 = 13$ au dividende. $13 + 4 = 17$.
17 est plus petit que 87. **Le reste est donc 17**.
- 8) On additionne les quotients partiels pour avoir le quotient :
 $40 + 5 + 1 = 46$. **Le quotient est donc 46**.

Voilà à quoi pouvait ressembler l'abaque une fois terminée la division de 4019 par 87, selon la méthode de la dénomination de Gerbert. Les chiffres utilisés sont extraits d'un manuscrit latin du XIe siècle.

$\overline{c}$	$\overline{x}$	$\overline{1}$	c	x	1
				8	Λ
				1	5
		2		1	9
			9	7	
			9	5	9
				5	9
			1		2
				1	5
				1	Λ
					1
					9
				2	

		8	7
		1	3
4	0	1	9
	5	2	0
	5	3	9
		3	9
	1	0	4
		1	3
		1	7
			1
			5
		4	0

apicū notā sibi c̄scripserant . ut hec notula
 responderet unitati . I . ista aut̄ binario . 6 .
 t̄cia ū tribus . 5 . q̄rta ū quātinario . 2 .
 hec aut̄ q̄nq . asscribet̄ . C . ista aut̄ senario .
 4 . Septima aut̄ sepienario c̄ueniret . Λ .
 hec ū octo . 8 . ista aut̄ nouenario unge
 ret̄ . 9 . Quidā ū in huius forme descripti
 one litterā alfabeti sibi assumēbant hoc .

Autrement dit

Effectuer la division euclidienne de 4019 par 87, c'est chercher 2 entiers q et r tels que : $4019 = 87q + r$ avec r strictement inférieur à q .

$$4000 + 19 = (100 - 13)q + r$$

Première étape :

$$4000 = 40 \times 100$$

On pose $q = 40 + q'$

$$4000 + 19 = (100 - 13)(40 + q') + r$$

$$4000 + 19 = (100 - 13)40 + (100 - 13)q' + r$$

$$4000 + 19 = 4000 - 520 + (100 - 13)q' + r$$

$$520 + 19 = (100 - 13)q' + r$$

$$539 = 87q' + r$$

Deuxième étape :

On cherche maintenant q' avec un nouveau dividende 539 bien inférieur à 4019.

$$500 = 5 \times 100$$

On pose $q' = 5 + q''$

$$500 + 39 = (100 - 13)(5 + q'') + r$$

$$500 + 39 = (100 - 13)5 + (100 - 13)q'' + r$$

$$500 + 39 = 500 - 65 + (100 - 13)q'' + r$$

$$39 + 65 = (100 - 13)q'' + r$$

$$104 = 87q'' + r$$

Troisième étape :

On cherche q'' tel que $104 = 87q'' + r$

$$100 = 1 \times 100$$

On pose $q'' = 1 + q'''$

$$100 + 4 = (100 - 13)(1 + q''') + r$$

$$100 + 4 = (100 - 13)1 + (100 - 13)q''' + r$$

$$100 + 4 = 100 - 13 + (100 - 13)q''' + r$$

$$4 + 13 = (100 - 13)q''' + r$$

$$17 = 87q''' + r$$

$$q''' = 0 \text{ et } r = 17$$

Le quotient est $40 + 5 + 1 = 46$

Donc $4019 = 87 \times 46 + 17$.

La division de 120 par 11 + 11/12 par Bernelinus (XIe siècle)

	κ	χ	ι	
		1	1	divisores
		1	VIII	differentiae
Dividendi	1	11		
		41		Multiplicat ⁱ p ^{ma}
		1111	VIII	
		secunda turbidari?		Secunda
		11	11	
		1	VI	
		11	1111	
		unitas	secunda	
		1	1	
			VIII	
		1	11	
		1	1	
		11	11	
		VI	VI	

Extrait du *Liber abaci* de Bernelinus. Manuscrit du XI^e siècle.
Bibliothèque de l'Ecole de Médecine de Montpellier. Cote : H.491. Folio 76r.

La division de 120 par 11 + 11/12 par Bernelinus
sur l'abaque avec les chiffres romains
et sa transcription dans notre notation

C	X	1	
	1	1 VIII	XX
1	11		
		VI	
	1111	VIII	5
		11	
	1	VI	5
	11	1111	XX
		1	
	1	11	XX
			XX
		1 1 11 VI	

C	X	1	
	1	1 8	11/12 1/12
1	2	0	
		6	
	4	8	6/12
		2	
	1	6	2/12
	2	4	8/12
		1	
	1	2	9/12
			10/12
		1 1 2 6	

**La division de 120 par $11 + 11/12$
par Bernelinus
selon la méthode de Gerbert
avec les outils symboliques et opératoires actuels**

On prend 20 comme dénomination (diviseur provisoire).
La différence avec le diviseur $11 + 11/12$ est $8 + 1/12$

Le diviseur $11 + 11/12$,
la différence $8 + 1/12$
et le dividende 120 sont placés sur les premières lignes.

- 1) On cherche le quotient de 120 par 20.
C'est 6 qui est placé sur la troisième ligne et aussi sur la dernière qui va enregistrer tous les quotients partiels.
Il faut rendre 6 fois la différence au dividende soit $48 + 6/12$.
- 2) Le nouveau dividende est $48 + 6/12$ qui est placé sur la ligne suivante.
En $48 + 6/12$, il y a 2 fois 20.
2 est placé sur la cinquième ligne et sur la dernière.
Au dividende, il reste $8 + 6/12$, auquel il faut ajouter 2 fois la différence (sixième ligne).
- 2) Le nouveau dividende est alors $8 + 6/12 + 2(8 + 1/12)$ soit $24 + 8/12$.
 $24 + 8/12$ est posé en septième ligne.
En $24 + 8/12$, il y a 1 fois 20. 1 est placé à la ligne suivante et à la dernière.
Reste $4 + 8/12$ auquel il faut ajouter 1 fois la différence soit $12 + 9/12$.
- 4) Comme $12 + 9/12$ est plus petit que 20, on le divise par le quotient $11 + 11/12$.
Le quotient 1 est placé sur la dernière ligne.
Le reste est $10/12$.
- 5) On additionne les quotients partiels : 6, 2, 1 et 1.
Le quotient est 10.

**Le quotient de 120 par $11 + 11/12$ est 10.
Le reste est $10/12$.**

Donc $120 = (11 + 11/12) \times 10 + 10/12$.

L'abaque à lignes

Dès le XIII^e siècle, l'abaque à colonnes a laissé la place à l'abaque à lignes. Pendant cinq siècles, il sera très en vogue chez les commerçants et les marchands, surtout en Allemagne et en France où il ne disparaîtra qu'à la fin du XVIII^e siècle.

Tout au long des XV^e, XVI^e, XVII^e siècle et même dans la première partie du XVIII^e, parurent des livres expliquant le calcul avec les jetons. On peut citer *L'arithmétique par les gects* publié en 1558 par Pierre Forcadet, titulaire de la chaire de mathématiques du Collège Royal; la même année, Jean Trenchant publiait une *Arithmétique ...avec l'art de calculer aux getons* dont les rééditions furent très nombreuses: 1561, 1588, 1602, 1610, 1617, 1618, 1632, 1643 et 1647.

Ci-dessous, la page de titre du livre paru en 1661: *L'arithmétique ou l'art de compter toute sorte de nombres avec la plume et les jettons*. Bibliothèque municipale de Lyon. Cote: 367359.

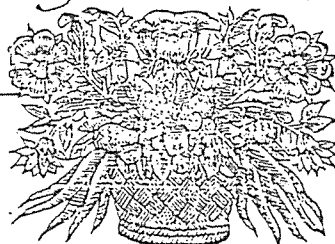
L'ARITHMETIQUE
OU L'ART DE
COMPTER
TOVTE SORTE
DE NOMBRES.
A V E C
LA PLVME ET LES IETTONS.

367359

Par le P. JEAN FRANÇOIS, de la Compagnie
de J E S U S.

QUATRIESME EDITION.

Colleg. Lugdun. St. Trinit. Societ. Jesu
Catal. Inscr. 1710.



A R E N N E S ,

Chez PIERRE HALLAYDAYS, Impr. & Lib.
rue Saint Germain, à la Bible d'Or.

M. DC. LXI.



Autres expositions

Dans leur atelier, Didier Missenard et Jean-Alain Roddier ont présenté des travaux d'élèves sur :

- Le problème de Syracuse.
- Les cinq polyèdres réguliers convexes.
- Le calendrier au fil des âges.
- Les graphes eulériens.
- Les tables alphonsines.
- La numérotation.
- La racine carrée de 2.
- Le nombre Pi.
- René Descartes et les équations du second degré.
- L'Alhambra de Grenade.
- Quelques théorèmes célèbres de géométrie.

Ainsi que des ouvrages anciens de Boulanger (1664), Canuy (1693), Béliador (1725), Deschalles (1753), Mauduit (1756), Mazéas (1776) et Garnier (1794)...

Véronique Chauveau a présenté une version réduite de l'exposition « Femmes en mathématiques » qui a suscité beaucoup de discussions.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Les 182 ouvrages disponibles pendant l'Université d'Eté 2001

Paul-Louis HENNEQUIN

Avertissement:

La liste donnée ici n'est pas à proprement parler une bibliographie car certains ouvrages n'étaient pas disponibles; par ailleurs la classification est arbitraire et beaucoup de titres pourraient être classés dans une autre rubrique. Nous avons précédé d'une astérisque les titres recensés dans PUBLIMATH (publimath.irem.univ-mrs.fr)

1) Dictionnaires et encyclopédies.

* Dictionnaire des Mathématiques, A. Bouvier, M. George, F. Le Lionnais, PUF, 1993.

QU'EST-CE QUE L'UNIVERS ? Université de tous les Savoirs Ed. Odile Jacob

2) Histoire et épistémologie

ESSAIS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES par Jean Itard, réunis et introduits par R.Rashed, Librairie Blanchard Paris 1984 , 386 p.

UNE HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES, Routes et dédales, par A.Dahan-Dalmedico et J.Peiffer, Éditions du Seuil Paris 1986, 314 p.

* LA FABULEUSE HISTOIRE DES NOMBRES, É. Cousquer, Diderot Paris 1998, 260 p.

HISTOIRE UNIVERSELLE DES CHIFFRES, L'intelligence des hommes racontées par le nombre et le calcul, G. Ifrah, Robert Laffont , Paris 1994, 2 tomes, 1042 et 1010 p.

* MATHÉMATIQUES AU FIL DES ÂGES, *textes choisis et commentés* par: J. Dhombres, A. Dahan-Dalmedico, R. Bkouche, C. Houzel et M.Guillemot (Groupe IREM épistémologie et histoire), Gauthier-Villars Paris, 1987, 327 p.

FRAGMENTS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES, brochure APMEP Paris n° 41, 1981, 176p.

FRAGMENTS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES II, brochure APMEP Paris n° 65, 1987, 211 p.

LES MATHÉMATIQUES ARABES (VIIIe -XVe siècles) par A.P.Youschkevitch, Vrin Paris, 1976, 212 p.

HISTOIRE DES SCIENCES ARABES 2. MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE, sous la direction de R.Rashed, Éditions du Seuil Paris, 1997, 433 p.

POUR L'HONNEUR DE L'ESPRIT HUMAIN, les mathématiques aujourd'hui, Hachette Paris, 1987, 298 p.

DEVELOPMENT OF MATHEMATICS 1900-1950, Edited by J. P. Pier, Birkhauser verlag Basel, 1994, 729 p.

NOMBRES ET FORMES D'HIER À DEMAIN, A.M.Marchetti, Editions du choix Argenteuil, 1995, 64 p.

IMAGES, IMAGINAIRES, IMAGINATIONS, Équipe Inter-Irem d'épistémologie, *Ellipses*, 1998

FOURIER Créateur de la physique mathématique, J. Dhombres et J.B. Robert, *Belin*, 1998. *Vuibert*, 1998.

* BOURBAKI, Une société ouverte de mathématiciens, M. Mashaal, *Pour la Science*, Fev-Mai 2000.

* HISTOIRE DE MATHÉMATIQUES ET DE PHYSICIENS, S. Gindikin, *Cassini*, 2000.

* UNE HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES CHINOISES, K. Yabuti, *Belin*, 2000. 172 p.

LA RECHERCHE EN HISTOIRE DES SCIENCES, coordonné par M. Biezunski, *Seuil*.

PRECURSEURS ET NOVATEURS MATHÉMATIQUES , librairie Thomas-Scheler.

ERDOS : L'HOMME QUI N'AIMAIT QUE LES NOMBRES , Paul Hoffman, *Belin*.

* ARITHMÉTIQUE POUR AMATEURS, Marc Guinot, *Aléas*.

- vol.1 Pythagore, Euclide et toute la clique , 1992
- vol.2 Les réserves de Fermat, 1993
- vol.3 ce diable d'homme d'Euler, 1994
- vol.4, Lagrange et Legendre, une époque de transition, 1996
- vol.5, Gauss princeps mathematicorum, 1997
- vol.6 Dirichlet, un homme nouveau, 2001

L'ÉMERGENCE DES MATHÉMATIQUES, Bernard Duvillé, *Ellipses*.

MATHÉMATIQUES PYTHAGORICIENNES ET PLATONNICIENNES, Jules Vuillemin , *Blanchard*. 2001

LES MACHINES ARITHMÉTIQUES DE BLAISE PASCAL : G. Mourlevat, Mémoire de l'Académie de Clermont. 1990

HISTOIRE D'ALGORITHMES : DU CAILLOU A LA PUCE, Interirem *Belin*.

LES ELEMENTS D'EUCLIDE, livre XIII, *Irem de Clermont*,

HISTOIRE DE MATHEMATICIENS ET DE PHYSICIENS , Simon Gindikin, *Cassini*, 2000

MATHEMATIQUES ET LOGIQUE , RETROSPECTIVE ET PERSPECTIVES, Marc Kac, Stanislaw M.Ulam, *Dunod*,1973.

JEUX AVEC L'INFINI , VOYAGE A TRAVERS LES MATHEMATIQUES, Rozsa Peter, *Point-Sciences Seuil*, 1977

3) Philosophie, logique et politique.

PARABOLES ET CATASTROPHES, Entretiens sur les mathématiques, la science et la philosophie, R.Thom, *Flammarion* Paris, 1983, 193 p.

GÖDEL, ESCHER, BACH, les brins d'une guirlande éternelle, version française de J. Henry et R. French, *InterEditions* Paris, 1985, 884p.

L'UNIVERS MATHÉMATIQUE, P.J. Davis et R. Hersh, traduit et adapté par L.Chambadal, *Gauthier-Villars* Paris, 1985, 406 p.

L'EMPIRE MATHÉMATIQUE, P.J. Davis et R. Hersh, traduit par J.B. Grasset, *Gauthier-Villars* Paris, 1988, 336 p.

* LE THÉORÈME DE GÖEDEL, E. Nagel, J.R. Newman, K. Gödel, J.Y. Girard, traduit par J.B. Scherrer, *Éditions du Seuil* Paris, 1989, 186 p.

* PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES ET DE LA MODÉLISATION, N. Bouleau, *L'Harmattan*, 1999.

* TRIANGLE DE PENSÉES, A. Connes, A. Lichnerowicz, M.P. Schutzenberger, *Odile Jacob*, 2000.

* LA PULSATION MATHÉMATIQUE, R. Guitard, *L'Harmattan*, 2000 .

* HOMO MATHEMATICUS, J.P.Boudine, *Vuibert*, 2000.

DEUX ET DEUX FONT-ILS QUATRE ? *Belin*.

* LES MATHS PLAISIR ET NECESSITE, A. Ducroq et A. Warusfeld , *Vuibert*

L'ILLUSION MATHÉMATIQUE, Le malentendu des maths scolaires,S. Gasquet, *Syros* 1997

LA CRISE DE L'ENSEIGNEMENT, M. Legrand, *Aleas*

LE HASARD ET LA NECESSITE, J. Monod, *Seuil*

RENCONTRE ENTRE ARTISTES ET MATHÉMATIENNES, Femmes et Maths,
L'Harmattan

* LA RECHERCHE DE LA VÉRITÉ, M. Serfati et al., *ACL*, 2000.

LOGIQUES, ENSEMBLES ? CATEGORIES, Pierre Augeron, *Ellipses*

pour collégiens et lycéens:

* LES MATHS ET LA PLUME, vol 1, A. et J.C. Deledicq et F. Casiro, *ACL-Éditions* Paris, 1996, 64p.

4) Heuristique.

LES MATHÉMATIQUES ET LE RAISONNEMENT « PLAUSIBLE », G. Polya, présenté par L. Couffignal, traduit par R. Vallée, Gauthier-Villars Paris, 1958, 300 p.

COMMENT POSER ET RESOUDRE UN PROBLEME, G. Polya, traduit par C. Mesnage, Dunod, Paris, 1965.

5) Jeux et curiosités mathématiques.

PROBLÈMES PLAISANTS ET DÉLECTABLES QUI SE FONT PAR LES NOMBRES, C.G. Bachet, sieur de Méziriac, nouveau tirage augmenté d'un avant-propos de J. Itard, librairie Blanchard Paris, 1993, 243 p.

RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES, E. Lucas, librairie Blanchard Paris, tome 1, 1992, 254 p., tome 2, 1979, 245 p., tome 3, 200 p., tome 4, 266 p.

RÉCRÉATIONS ARITHMÉTIQUES, É. Fourrey, édition augmentée d'une étude de J.L. Nicolas, ACL Éditions-Vuibert Paris, 1994, 263 p.

CURIOSITÉS GEOMÉTRIQUES, É. FOURREY, édition augmentée d'une étude de E. Barbin, ACL Éditions-Vuibert Paris, 1994, 430 p.

LA MATHÉMATIQUE DES JEUX OU RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES, M. Kraitchik, Vuibert Paris, 1930, 566 p.

* JEUX 3, jeux pour la tête et les mains, Groupe « jeux et maths », brochure n° 78, APMEP Paris, 1990, 158 p.

* DOUBLE DÉTENTE, défis mathématiques à rebondissements, B. Novelli, Éditions Pole Paris, 1997, 192 p.

JEUX D'ESPRIT ET ÉNIGMES MATHÉMATIQUES, les aventures extraordinaires du Dr Ecco, D. Shasha, traduit par M. Garène, Éditions Odile Jacob Paris, 1995, 193 p.

JEUX D'ESPRIT ET ÉNIGMES MATHÉMATIQUES, codes, mystères et complots, D. Shashua, traduit par M. Robert, Éditions Odile Jacob Paris, 1996, 273 p.

* LES JEUX DE NIM, J.Bouteloup, ADCS Amiens, 1996, 298 p.

* JEUX MATHÉMATIQUES ET MATHÉMATIQUES DES JEUX, J.P. Delahaye, bibliothèque pour la science *Belin* Paris, 1998, 143 p.

LE SECRET DES NOMBRES, jeux, énigmes et curiosités mathématiques, A.Jouette, *Albin Michel* Paris, 1998, 287 p.

* LA GÉOMÉTRIE DE LA CHAMBRE À AIR, 39 mystères mathématiques, J.P. Boudine, Vuibert Paris, 1998, 192 p.

50 ENIGMES MATHÉMATIQUES POUR L'ÉCOLE, M.Criton, *Pôle* 1998, 64 p .

* LES PLUS BELLES FORMULES DE MATHÉMATIQUES, L. Salem, *Cassini*, 1998, 152 p.

* , PLIAGES ET MATHÉMATIQUES D. Boursin et V. Larose, *ACL les éditions du Kangourou*, 2000 , 64 p.

CHAMPIONNAT INTERNATIONAL DES JEUX MATHÉMATIQUES. N° 8, 9, 12, 13, 14, 15 *Pôle*

WARI ET SOLO ; LE JEU DE CALCULS AFRICAIN, A. Deldicq – A. Papoua , *Cedic*

GRILLES LOGIQUES, Alex. Desmarest, *Vuibert*

100 JEUX MATHÉMATIQUES DU « MONDE », E.Busser,G.Cohen , *Pôle* 1999, 158 p.

LES ENIGMES MATHÉMATIQUES DE LEWIS CAROLL, E.Busser, *Pôle* 2001, 128 p.

50 ENIGMES POUR LYCEENS ET + , M.Criton, *Pôle*

50 ENIGMES POUR TOUS, FFJM *Pôle* 1997, 95 p.

52 NOUVELLES ENIGMES MATHÉMATIQUES FACILES, FFJM *Pôle*.1999, 93 p.

LA MATHÉMATIQUE DES JEUX, *Belin*

80 ADDITIONS MYSTÈRES , R; Bloch *Pôle* 2000, 120 p.

140 DEFIS LOGIQUES, *Pôle*, 120 p.

AVEC DES NOMBRES ET DES LIGNES, A. Sainte-Lagüe, *Vuibert*, 1937-2001, 360 p.

LOGIQUE SANS BOSSE, P. Lebrun, *Pôle* 2000, 2x48 p.

OEDIPELAND, *Pôle* 2000

TRESOR DE TONTON LULU, Vol 1 et 2 , *Tangente*, *APMEP*

ESTHETIQUE GEOMETRIQUE, R. Stutz, ?

LE GEOMETRICON, JP. Petit, *Belin*

AH ! LES BEAUX GROUPES, I. Stewart, *Belin* 1982, 72 p.

LA MAGIE DES PARADOXES, M. Gardner, *Belin*

* CRYPTARISMES, H. Berna, *Vuibert*, 1999.

* PALINDROMES, H. Berna, *Vuibert*

6) Compétitions, Rallyes et Problèmes.

* LES 200 PREMIERS PROBLÈMES DE L'APMEP réunis par D.Roux, *APMEP Paris*,
volume I « Arithmétique et Théorie des nombres », n°92, 1993, 150 p.;
volume II « Géométrie », n°93, 1994, 167 p.;
volume III « Combinatoire, algèbre et analyse », n°94, 1994, 188 p.

* MATHEMATIQUES DU KANGOUROU, A. Deledicq et F. Casiro, *ACL éditions-Vuibert*
Paris, 1994, 191 p.

LE TOURNOI MATHÉMATIQUE DU LIMOUSIN, 1987-1995: neuf années d'existence,
1990-1999, 10 années d'expérience au collège, J.P. Borel, M. Clement, M.J. Pestel, *IREM de*
Limoges, 1996, 145 p.

* PANORAMATH96, Panorama 1996 des compétitions mathématiques, sous la direction de
G.Cohen et C.Masson, coédition *CIJM-APMEP-ACL Paris*, 1996, 224 p.

* OLYMPIADES INTERNATIONALES DE MATHÉMATIQUES, Énoncés et solutions
détaillées, années 1988 à 1997, J.P. Boudine, F. Lo Jacomo, R. Cuculière, Éditions du Choix
Marseille, 1998, 219 p.

* SUJETS ET CORRIGÉS 1998, Com. inter-IREM « Rallyes », *Irem de Toulouse*, 1999,
234 p.

* CONCOURS AUSTRALIEN DE MATHÉMATIQUES, Secrets de la résolution de
problèmes au collège et au lycée, W. Atkins, traduit par M.Gonnard, adapté par H. Bareil,
Pole-Archimède-APMEP-CIJM Paris, 1999, 256 p.

* PANORAMATH 2, Panorama 2000 des compétitions mathématiques, sous la direction de
G. Cohen et C. Masson, coédition *CIJM-APMEP-ACL Paris*, 1999, 288 p.

PROBLEMES POUR MATHEMATICIENS, PETITS ET GRANDS, P. Halmos, *Cassini*
2000, 352 p.

MATHEMATIQUES DE TRANSITION, vrai ou faux, R. Shabetai, *Vuibert*

SUPERMATH P. Bornsztein, *Vuibert*, 1999.

HYPERMATH, P. Bornshtein, *Vuibert*, 2000.

MEGAMATH, P. Bornshtein, *Vuibert*, 2001.

LES MATHÉMATIQUES DU CLUB OLYMPIQUE KANGOUROU ? Marc Bachmakov, *ACL- Les éditions du Kangourou* 1998

100 PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES SUIVIS DE 12 AUTRES LAISSES SANS SOLUTION, Hugo Steinhaus, *Gauthier-Villard* 1965

7) Thèmes anciens ou à la mode.

* DESSINER L'ESPACE, ou comment employer Cabri-Géomètre en géométrie dans l'espace, M. Rousselet, *Éditions Archimède Argenteuil*, 1995, 124 p.

LA SYMÉTRIE DU CHAOS, À la recherche des liens entre maths, art et nature, M. Field et M. Golubitsky, *InterEditions Paris*, 1993, 218 p.

LE CALCUL, L'IMPRÉVU, Les figures du temps de Kepler à Thom, I. Ekeland, *Seuil Paris*, 1984, 170 p.

THE BEAUTY OF FRACTALS, Images of complex dynamical systems, H.O. Peitgen, P.H. Richter, *Springer-Verlag Berlin*, 1986, 199 p.

PIERRE DE FERMAT, Textes et documents, présentés par M. Spiesser, *IREM de Toulouse*, 1995, 114 p.

MATHÉMATISATIONS, Augustin-Louis CAUCHY et l'École Française, A. Dahan - Dalmedico, *Éditions du Choix Argenteuil*, 1992, 460 p.

LECONS D'À PEU PRÈS, G. Th. Guilbaud, *Christian Bourgeois Éditeur Paris*, 1985, 235 p.

MATHS EN SCÈNE, EN SEINE, Pour se repérer dans l'exposition Maths 2000, Régionale APMEP de Haute-Normandie Rouen, 1998, 221 p.

* POURQUOI ONT-ILS INVENTÉ LES FRACTIONS ? N. Rouche, *Ellipses*, 1998.

INITIATION À LA CRYPTOGRAPHIE, G. Dubertet, *Vuibert*, 1999.

* HISTOIRE DES CODES SECRETS, S. Singh, *J.C. Lattès*, 1999. 430 p.

* MERVEILLEUX NOMBRES PREMIERS, J.P. Delahaye, *Belin*, 2000. 336 p.

* LES MATHÉMATIQUES APPRIVOISÉES, B. Aubry, *Ellipses*, 2000.

* LEÇONS DE MATHÉMATIQUES D'AUJOURD'HUI, E. Charpentier et al., *Cassini*, 2000.

* L'UNIVERS DES NOMBRES, Yan Stewart, *Pour la Science Belin*, 2000

LES NOMBRES PREMIERS, Gérald Tenenbaum, Michel Mendès-France, *PUF* 1997-2000

* LES MATHEMATICIENS, Yan Stewart, *Pour la Science, Belin*, 1996

ONDES ET ONDELETTES, Hubbard, *Belin*

MATH ET FORMES OPTIMALES, Hildebrand,, Tromba, *Belin*

* LE FASCINANT NOMBRE PI, Delahaye, *Belin*

* EN PASSANT PAR HASARD, G. Pages et C. Bouzitat, *Vuibert*

* LES CARRES MAGIQUES, R. Descombest, *Vuibert*

LA SYMETRIE DANS TOUS SES ETATS, H. Bacry, *Vuibert*

* LOGIQUE, INFORMATIQUE, ET PARADOXES, Delahaye, *Belin*

LA THEORIE DES JEUX, G. Giraud, *Flammarion*

NAVIGATION ASTRONOMIQUE, P. Brassier, *Vuibert*

L'ASTRONOMIE. EN QUESTIONS, F. Drouin, *Vuibert*

ASTROLABE – CARTES DU CIEL, J-Y Tardy, *Edisud*

LES NOMBRES, problèmes anciens et actuels, *Ellipses*

MATRICES, GEOMETRIE, ALGEBRE LINEAIRE, P. Gabriel, *Cassini*

LE CALCUL INTENSIF, *Belin*

LA PHYSIQUE DE TOUS LES JOURS, I. Berkes, *Vuibert* 2000, 376 p.

8) MATH en JEANS

TEMPETES SUR L'ECUREUIL, François Le Lionnais, Bibliothèque pour la Science *Belin* 1980-1981

INTRIGING PUZZLES IN MATHEMATICS AND LOGIC , Stephen Barr, *Dover* 1965

POURQUOI VOS ENFANTS S'ENNUIENT EN CLASSE, Marie-Danielle Pierrelee, Agnes Bauner, *Syros* 1999

LE DEMON DES MATHS, Hans Magnus Enzensberger, *Seuil* 1997

LE DICTIONNAIRE PENGUIN DES CURIOSITES GEOMETRIQUES, David Wells, *Eyrolles*, 240 p.

QUELQUES ASPECTS DES MATHEMATIQUES ACTUELLES, H. Queffelec, C. Sacré, V. Vassallo, *Ellipses* 1998

MATh en JEAN'S- Lycée d'altitude de Briançon, Bilan de l'année 200-2001-08-28

LA FEUILLE A PROBLEMES n°63-64

IMAGES DES MATHEMATIQUES, *Courrier du CNRS*, 1990,

ACTES DU CONGRES MATh en JEAN'S, 1991-1992-1993-1994-1995-1996-1997

9) Dans nos classes.

* EXOS-MALICES, 200 exercices classés et corrigés, 4^{ème}, 3^{ème}, 2^{de}, D. Missenard, ACL éditions Paris, 1997, 160 p.

* ENCYCLOPÉDIE KANGOUROU DES MATHS AU COLLÈGE, A. Deledicq, C. Missenard, ACL éditions Paris, 1998, 192 p.

* MATHEVASION, Exercices et T.P. de maths, seconde, première, terminale, Ph. de Sablet, Mathevasion Californie, 1997, 71 p.

* DÉCOUPAGES MATHÉMATIQUES, F. Dupuis, D. Sonde, *Ed. Archimède*, 1999

* LA DÉMONSTRATION, ÉCRIRE DES MATHÉMATIQUES AU COLLÈGE ET AU LYCÉE J. Houdebine et al. *Hachette*, 1998

ACTIVITES GEOMETRIQUES EN CLASSE DE 6^{EME} AVEC CABRI, *Belin*

* FAIRE DE LA GEOMETIE EN JOUANT AVEC CABRI-GEOMETRE, Roger Cuppens, *APMEP*, 2 tomes 1996 .

* FAIRE DE LA GEOMETRIE SUPERIEURE EN JOUANT AVEC CABRI-GEOMETRE, Roger Cuppens, *APMEP*, 2 tomes 1999

APPRIVOISER L'INFINI, A. Deledicq, *ACL*

* ARITHMETIQUE ; DES RESULTATS CLASSIQUES PAR DES MOYENS ELEMENTAIRES, M. Savin, *APMEP* 2000

ARITHMETIQUE EN TS, *CRDP, Auvergne* 2000

FONDEMENT POUR UN ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE EN TERMES D'ORDRE DE GRANDEUR : LES REELS DEVOILES, *APMEP*

ENSEIGNER LES PROBABILITES, commission inter. IREM

LES STATISTIQUES DANS LE PROGRAMME DE 2^{NDE}, rentrée 2000, *APMEP*

INITIATION AUX STAT DESCRIPTIVES AVEC EXCEL, A. Massoni, *Vuibert*

MATHEMATIQUES DANS LA VIE QUOTIDIENNE

MATHEMATIQUES BUISSONNIERES EN EUROPE

LES MATHS PAR LA RESOLUTION DE PROBLEME, A. Soifer, *Edition du Choix*

PROOFS FROM THE BOOK, Martin Aigner, Günter M.Ziegler, *Springer*

LA QUATRIEME DIMENSION, *Belin*

FLATLAND, Edwin A.Abbott

AU DELA DU COMPAS, *Scuola Normale Superiore*

10) Périodiques.

GRAINE D'ARCHIMÈDE, F. Gutmacher, *ADCS* N° 0 1999

COSINUS , Mensuel depuis novembre 1999. 1, 6, 7, 9, 11, 13-19

TANGENTE, N° HS3, 64/65, 66, HS7, 67, 68, HS8, 69/70, HS9, 74, 75, 76, 77, HS 82
Éditions Archimède Argenteuil, 5 à 6 numéros par an.

QUADRATURE, N°37, 39 , 40 et 41 *Éditions du Choix Marseille*, trimestriel.

REPÈRES IREM, N° 30 à 43, Topiques éditions Metz, trimestriel.

POUR LA SCIENCE, N° 286, mensuel.

LA RECHERCHE, HS 2

MATHEMATICS COMPETITIONS, journal of the World Federation of National Competitions, Canberra, Australie, N° 5/1, 2; 6/2; 7/1, 2; 8/1, 2: 9/1; semestriel..

REVUE DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE, dec 95 et Mars 2000

LES CAHIERS DE SCIENCE ET VIE(avril 2000), l'origine des équations (oct 2000),

DIAGONALES, les cahiers mathématiques du CNED, 4 n° par an depuis 1998, *CNED, Rennes*)

11) Films.

BLAISE PASCAL, sa vie et son oeuvre, CRDP Clermont, 1991, 25 minutes.

* LA NOUVELLE ETOILE DU BERGER, CNRS Audiovisuel, 1995, 29 minutes.

Une sélection d'adresses Internet où trouver de la documentation pour un club mathématiques

Didier MISSENARD

Des outils de recherche

Le moteur de recherche Google : www.google.fr

Le moteur de recherche cartographique Kartoo : www.kartoo.com

L'annuaire Yahoo France : www.yahoo.fr

Un outil de recherche sur les sites académiques de mathématiques :
www.ac-toulouse.fr/math/maths.html

Le site francophone d'information sur les outils de recherche : www.abondance.com

Des signets mathématiques

Les signets mathématiques de la BNF : www.bnf.fr/pages/liens/d3/maths-d3.html

L'anneau des mathématiques francophones : www.ann.jussieu.fr/anneau/

Panoramath (Irem de Lyon) : www2.ac-lyon.fr/enseigne/math/panorama/panorama.html

Quelques Institutions

L'association Animath : www.animath.fr

Le portail ministériel Education.fr : www.education.fr

Le Café Pédagogique : www.cafepedagogique.net

La base de documents Publimath : www.irem.univ-mrs.fr/publimath/

Le site des Irems : www.univ-irem.fr

Le site du Kangourou des mathématiques : www.mathkang.org

Le site de l'association "Math-en-Jeans" : www.mjc-andre.org/pages/amej/accueil.htm

Des Sites de géométrie

Le site de Geoflash : www.geoflashmath.com

Le site de Cabri : www-cabri.imag.fr

Le site de Geoplan : www2.cnam.fr/creem/

The Geometry Center : www.geom.umn.edu

Des Sites d'Histoire des mathématiques

Le site de l'Université St Andrews : www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/

Le site de S. Mehl, Chronomath : chronomath.irem.univ-mrs.fr

EVALUATION A CHAUD DE L'UNIVERSITE D'ETE

Paul-Louis HENNEQUIN

La matinée du vendredi 31 août a été consacrée au compte rendu de chaque atelier et à une séance d'évaluation préparée par un questionnaire.

Nous avons rassemblé ici l'essentiel des réponses (37) à ce questionnaire.

Evaluation rapide de l'Université d'Eté 2001

	Très satisfaisant	satisfaisant	indifférent	décevant	inadapté	trop long	trop court
Ateliers	31	6					13
Tables rondes	3	8	5	12	6	5	
Conférences n° 1	4	14	5	5	13	3	
Conférence n° 2	3	14	5	5	8	2	
Conférence n° 3	4	17	5	1	8	2	
Débat scientifique	27	6				1	
Expositions	19	17	1				1
Bibliothèque	13	21	1	2			

Quelles étaient vos attentes en venant à l'Université d'Eté ?

- Découvrir des actions, des activités ludiques, des méthodes de travail (pour ancrer les mathématiques dans le réel), des idées concrètes pour animer un club et l'alimenter sur la durée, des thèmes pour créer un club dans un petit collège rural.
- Se ressourcer, retrouver du punch, se remotiver pour une nouvelle année.
- Rompre mon isolement, rencontrer des animateurs d'atelier ou de rallye, des collègues, des enseignants dynamiques et enthousiastes, chercher et échanger des idées, des pratiques, un vademecum pour ouvrir un club.
- Me convaincre de ma capacité à ouvrir un atelier.
- Donner un nouveau souffle à mon club.
- Comment faire des mathématiques autrement.
- Cerner où se trouve l'activité mathématique chez les élèves.
- Pratiquer le débat scientifique.
- Trouver des personnes formatrices, devenir formateur.
- Comment mettre les mathématiques à portée d'élèves en difficulté et de publics particuliers.
- Parler des élèves plus que des mathématiques.
- Concrétiser ma participation à MATH en JEANS.
- Connaître ANIMATH.
- Constituer une activité pluridisciplinaire (math-dessin).

Ont-elles été satisfaites ?

- Pas vraiment : 1
- En partie, partiellement : 8
- Entièrement, pleinement, globalement : 27.

Remarques concernant l'emploi du temps et le programme

De nombreux stagiaires auraient souhaité participer à plusieurs ateliers et avoir plus de temps pour des échanges informels ou pour l'élaboration d'un projet personnel, pour la détente. Ils proposent donc de réduire les tables rondes et les conférences.

Tous insistent sur la densité, la variété, la richesse du programme. Certains auraient souhaité un vrai débat sur le débat scientifique.

Le fait positif qui vous a marqué.

- L'accueil excellent
- La disponibilité, le dynamisme, la ferveur des animateurs.
- La diversité des ateliers.
- La variété des sujets abordés.
- L'enthousiasme et la créativité des participants.
- Des échanges formidables dans une ambiance coopérative et studieuse.
- La volonté de partager le goût de l'enseignement des mathématiques.
- La diversité du public où personne ne se sent rejeté.
- Le débat scientifique (nombreuses citations).
- L'exposition de Robert Charbonnier.
- La présence de l'Inspection Générale.
- L'implication de professeurs jeunes au sein de l'IREM de Lille.
- Il existe en France de nombreux collègues désireux de maintenir le niveau mathématique.
- De jeunes collègues reprennent le flambeau.

Le fait négatif qui vous a marqué.

- La faible densité des découvertes.
- La non reconnaissance institutionnelle de notre travail.
- Ne pas pouvoir participer à plusieurs ateliers.
- Ne pas avoir tenu compte des malaises exprimés par une collègue le premier soir.
- La stérilité du débat avec l'Inspection Générale.

S'il fallait résumer l'U.E. d'une phrase, qu'écririez-vous ?

- Lieu de ressources concrètes et d'échanges fructueux.
- C'est super (trop !) de constater que l'on n'est pas les seuls à rencontrer certains problèmes dans notre métier et d'échanger les moyens trouvés par certains pour les résoudre.
- Très motivant – stimulant – dynamisant à reconduire – enrichissant.
- Un foisonnement (bouillonnement) d'idées, de savoirs, de savoir-faire.
- Brainstorming enrichissant.
- Une semaine productive, tant par son apport que par les contacts dans une ambiance conviviale.

- Intense en échanges d'apprentissages.
- Des contacts, encore des contacts, toujours de contacts !
- Courte mais tellement enrichissante.
- Lieu très agréable et convivial pour motiver à faire réussir nos jeunes.
- Comprendre nos difficultés et nous rassurer.
- Une semaine formidable qui redonne courage pour la rentrée.
- Une semaine pour se ressourcer, faire le point sur des approches pédagogiques.
- Convivial, enrichissant, formateur, mais trop dense et frustrant par son foisonnement ; vivier de formateurs généreux et disponibles.
- On y vient, on veut y revenir.
- ANIMATH doit poursuivre la tenue de ces U.E. – A refaire dans deux ans.
- Excellent démarrage d'un projet collectif qui pourrait bien réussir si ANIMATH s'y consacrait pleinement.
- A permis une plus grande ouverture d'esprit.
- Beaucoup d'émulation.
- Ambiance sympathique et agréable.
- Lieu d'échange et temps fort de formation continue.
- Un lieu vacances-entrée intéressant et agréable.
- Très inégal !

Propositions précises pour la mise en réseau des stagiaires.

- Les réseaux doivent être régionaux, basés sur des affinité de personnes et s'articuler sur des clubs complémentaires ou de thèmes voisins.
- Connecter des professeurs ayant les mêmes objectifs et les mêmes préoccupations.
- Faire un site interactif « clubs et ateliers de mathématiques ». Sur ce site les clubs enverraient leurs travaux et consulteraient ceux des autres ; ou y trouverait en particulier l'adresse (électronique et de l'établissement) de tous les clubs existant.
- Faire un forum de discussion, structure libre d'échange et de questionnement.
- Elaborer le projet d'ANIMATH et le structurer.
- Demander une dotation des établissements recensés par ANIMATH.
- Demander un poste de chef de réseau.
- Diffuser la liste des adresses électroniques des participants et animateurs.

TITRE : CRÉER ET ANIMER UN ATELIER DE MATHÉMATIQUES

AUTEUR : Paul-Louis HENNEQUIN (coordonnateur).

EDITEUR : IREM de CLERMONT-FERRAND.

DATE : OCTOBRE 2002.

MOTS CLÉS : Activités - Animation - Ateliers - Clubs - Jeux.

RÉSUMÉ : Document de travail élaboré pendant et après l'Université d'Eté de Saint-Flour (26 - 31 août 2001). Il rassemble une soixantaine d'expériences de clubs, ateliers, activités péri-scolaires et mathématiques dans l'objectif de multiplier les clubs tant en collège qu'en lycée.

Format A4 : Nombre de pages : 227.