Université Blaise PASCAL
I.R.E.M. de CLERMONT-FERRAND

TRIANGLES ISOMETRIQUES

TRIANGLES SEMBLABLES

En classe de seconde

Programme septembre 2000
B. O. du 12 août 1999

IREM

IUFM

avec le soutien de la DESCO

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Complexe scientifique des Cézeaux - 63177 AUBIERE cedex
Tél : 04.73.40.70.98 - Fax : 04.73.40.70.78 - irem@univ-bpclermont.fr

TRIANGLES ISOMETRIQUES

TRIANGLES SEMBLABLES

En classe de seconde

Programme septembre 2000
B. O. du 12 août 1999

Ont collaboré au document :

- J. Chaput
- R. Château
- A. Crouzier
- D. Eynard
- J. Fayolle
- J. M. Lecole
- M. Lopitaux
- J. Mottin
- A. Noirfalise
- M. C. Raimbault
- J. Vallet

SOMMAIRE

PRESENTATION

DU

DOCUMENT

Ce document est issu du travail d'un groupe d'enseignants de lycée qui s'étaient fixés pour tâche d'étudier la mise en œuvre d'une partie des nouveaux programmes de seconde en géométrie ; celle concernant les triangles isométriques et les triangles de même forme.
On trouvera dans la page suivante le libellé des extraits concernés

Les documents d'accompagnement de ces programmes précisent :

- *"le programme propose de s'appuyer d'une part sur les seules notions acquises au collège, d'autre part sur des notions fortement liées à la perception."*
- *"Il faut souligner ici l'effort important entrepris au collège pour différencier le résultat observé du résultat démontré et pour annoncer clairement le statut des divers énoncés : définition, résultat ou théorème admis sur conjecture, résultat ou théorème établi, etc.(cf. document d'accompagnement des programmes de 5^e-4^e). Il importe de garder cet esprit dans le travail conduit en 2^{nde}, en particulier dans ce paragraphe de géométrie."*
- *"les ... points de vue développés ci-dessus (à propos des triangles isométriques et triangles de même forme) répondent à un souci de faire revivre les acquis de collège en évitant les révisions systématiques ; il en est de même de l'invitation à résoudre des problèmes mettant en jeu formes et aires. Il s'agit avant tout de faire réfléchir et travailler les élèves sur des problèmes réinvestissant la totalité des acquis antérieurs (configurations, transformations, vecteurs). Ce sera l'occasion de s'attarder sur l'apprentissage d'une démarche déductive et la maîtrise d'un vocabulaire logique"*

C'est dans cet esprit que les activités proposées dans ce document ont été choisies.
La liberté laissée aux enseignants d'admettre ou de démontrer certains résultats a semblé être une possibilité de différencier le travail dans les classes de secondes souvent très hétérogènes.
De plus l'usage de l'outil informatique paraît tout à fait approprié dans cette partie du programme et dans les perspectives didactiques exposées ci-dessus ; citons aussi à ce propos les documents d'accompagnement :

- *"Lors de la résolution d'un problème géométrique, l'outil informatique permet d'en obtenir rapidement, le plus souvent de façon dynamique et interactive, une représentation très concrète ; des modifications de l'aspect de la configuration mettent en évidence les invariants ou les propriétés à démontrer : la route vers la démonstration est alors ouverte."*

Ce document comporte deux parties, une sur les triangles isométriques, l'autres sur les triangles semblables. L'étude des triangles isométriques est supposée faite pour aborder les activités sur les triangles semblables.

Les fichiers informatiques cités peuvent être chargés sur le site de l'IREM :

wwwmaths.univ-bpclermont.fr

Ils peuvent être ouverts sous géoplan. On trouvera l'ensemble de ce document sur ce site.

Les configurations du plan. Triangles isométriques, triangles de même forme.	Utiliser, pour résoudre des problèmes, les configurations et les transformations étudiées en collège, en argumentant à l'aide de propriétés identifiées. Reconnaître des triangles isométriques. Reconnaître des triangles de même forme. Résoudre des problèmes mettant en jeu formes et aires.	. Les problèmes seront choisis de façon - à inciter à la diversité des points de vue, dans un cadre théorique volontairement limité, - à poursuivre l'apprentissage d'une démarche déductive, - à conduire vers la maîtrise d'un vocabulaire logique adapté (implication, équivalence, réciproque). A partir de la construction d'un triangle caractérisé par certains de ses côtés ou de ses angles, on introduira la notion de triangles isométriques. On pourra observer que deux triangles isométriques le sont directement ou non. On pourra utiliser la définition suivante : "deux triangles ont la même forme si les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre" (il s'agit donc de triangles semblables). On caractérisera ensuite, grâce au théorème de Thalès, deux triangles de même forme par l'existence d'un coefficient d'agrandissement/réduction. Rapport entre les aires de deux triangles de même forme. Pour des formes courantes (équilatéral, demi-carré, demi-équilatéral), on fera le lien avec les sinus et cosinus des angles remarquables. On s'interrogera, à partir de décompositions en triangles, sur la notion de forme pour d'autres figures de base (rectangle, quadrilatère quelconque,...).

PREMIERE PARTIE

TRIANGLES ISOMETRIQUES

A - Introduction - Définitions.

Soit ABC un triangle ; construire, dans chaque cas, l'image de ce triangle ABC par :

- la symétrie centrale de centre O
- la translation de vecteur $\vec{EF}$
- la symétrie d'axe D
- la symétrie d'axe D suivie de la translation de vecteur $\vec{EF}$
- la rotation de centre I et d'angle 60°dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre)

Dans chaque cas, comparer les angles et les côtés du triangle ABC avec ceux du triangle image.
(Figure : annexe 1 et fichier : annexe1.g2w)

A la suite de cette activité, on peut montrer en classe une animation sur la superposition de deux triangles isométriques (figure : annexe 2 et fichier : anim1.g2w).

A retenir :

Définition de deux triangles isométriques, de deux triangles superposables :

Deux triangles sont ***isométriques*** s'ils ont leurs côtés et leurs angles respectivement égaux (égaux chacun à chacun).

Si un triangle A'B'C' est l'image d'un triangle ABC par une symétrie axiale, une symétrie centrale, une translation ou une rotation, ou par une succession de telles transformations, alors il est isométrique au triangle ABC. De tels triangles sont dits ***superposables.***

La première activité ci-dessus a permis de montrer que si deux triangles sont superposables à l'aide de transformations particulières, alors il sont isométriques. On peut faire une démonstration dans le cas général.
On peut aussi démontrer, avec les connaissances de collège, que si deux triangles sont isométriques alors ils sont superposables .

On amène A' sur A par une translation par exemple, puis l'image de B' sur B par une rotation enfin l'image de C' par ces deux transformations est soit confondue avec C soit le symétrique de C par rapport à (AB).
La rédaction complète d'une telle démonstration, bien que n'utilisant que des propriétés familières en collège, pourra être délicate pour certains élèves et de ce fait s'inscrire dans le cadre d'une différenciation des activités. Ceci est typiquement une situation où on peut "*différencier le résultat observé du résultat démontré*" et attirer l'attention de certains élèves, au moins, sur le statut des divers énoncés utilisés.

On peut aussi l'admettre afin d'employer dans la suite indifféremment les qualificatifs "isométriques" et "superposables".

Vocabulaire : sommets et côtés homologues

Sommets homologues de deux triangles superposables ou isométriques :
Si deux triangles ABC et A'B'C' sont superposables et si A vient coïncider avec A' , B avec B' et C avec C' quand on les superpose, A et A' sont dits homologues B et B' sont dits homologues, C et C' sont aussi dits homologues.

Il sera pratique d'utiliser la notation :

A	B	C
E	F	G
H	I	J

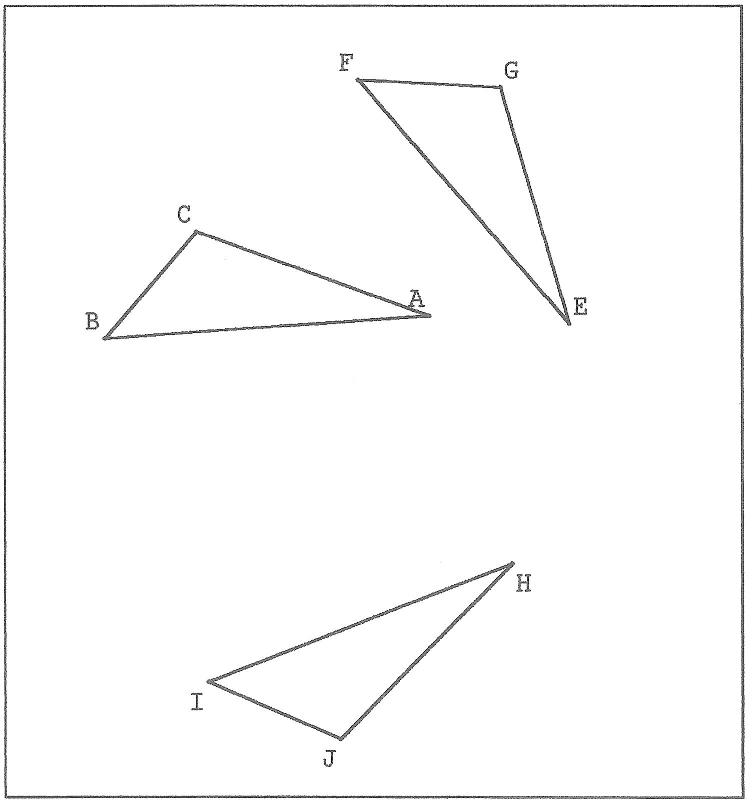
quand les triangles ABC, EFG, HIJ sont isométriques.

Ce tableau permet de voir d'un coup d'œil les sommets homologues, (dans une même colonne), donc les **angles correspondants égaux** ainsi que les côtés correspondants égaux, (ceux dont les extrémités sont dans les mêmes colonnes).

<u>Exemple</u> :

On trouvera dans le fichier : isotri 1.g2w, une réalisation de la figure ci-dessous permettant d'agir sur les points A, B et C, tout en conservant l'isométrie avec les triangles EFG et IJK.

Trouver les sommets homologues des triangles ABC et EFG d'une part, et ABC et HIJ d'autre part.



B - Comment démontrer que deux triangles donnés sont isométriques ?

Exercice 1 :
Soit ABC un triangle, on veut construire avec seulement un compas et une règle non graduée un triangle isométrique à ABC ; quel est le nombre minimum d'informations qu'il faut avoir (mesure de côté ou d'angle) pour réaliser cette construction ?
C'est une version papier crayon.

Autre version de cet exercice : version informatique sous géoplan
En agissant sur les différents points des figures proposées, on pourra percevoir les liens qui les relient.

1. Ouvrir le fichier cas1.g2w, (figure : annexe 3). On a construit un triangle ABC et un segment [A'B'] de même longueur que [AB]. Construire un triangle A'B'C' isométrique à ABC en utilisant les outils laissés disponibles dans le logiciel. Déplacer le triangle A'B'C' pour vérifier qu'il se superpose à ABC.
2. Ouvrir le fichier cas2.g2w, (figure annexe 4). On a construit un triangle ABC et une droite D sur laquelle sont portés deux segments [A'B'] et [A'C''] respectivement de même longueur que [AB] et [AC]. Construire un triangle A'B'C' isométrique à ABC en utilisant les outils laissés disponibles dans le logiciel. Déplacer le triangle A'B'C' pour vérifier qu'il se superpose à ABC.
3. Ouvrir le fichier cas3.g2w, (figure annexe 5). On a construit un triangle ABC et un segment [A'B'] de même longueur que [AB]. Construire un triangle A'B'C' isométrique à ABC en utilisant les outils laissés disponibles dans le logiciel. Déplacer le triangle A'B'C' pour vérifier qu'il se superpose à ABC.

Autre version : jeu à deux élèves :
L'élève n°1 dispose d'un triangle ABC avec les mesures de ses angles et de ses côtés soit six mesures en tout et l'élève n°2 doit dessiner un triangle isométrique au précédent avec comme consigne : « il ne peut demander à l'élève n°1 que trois mesures »

A retenir :

Cas d'isométrie de deux triangles :

Il y a trois cas où je sais conclure que deux triangles quelconques sont isométriques, c'est ce que l'on appelle les ***trois cas d'isométrie*** de deux triangles :

Théorème 1 *: Premier cas* Si deux triangles quelconques ont un côté égal adjacent à deux angles respectivement égaux alors ces deux triangles sont isométriques.

Théorème 2 : *Deuxième cas*
Si deux triangles quelconques ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux alors ces deux triangles sont isométriques.

Théorème 3 : *troisième cas*
Si deux triangles quelconques ont leurs trois côtés respectivement égaux alors ces deux triangles sont isométriques.

Des démonstrations du même type que celle proposée pour démontrer qui si deux triangles sont isométriques alors ils sont superposables, permettent de démontrer que des triangles vérifiant les hypothèses de chacun des trois théorèmes précédents sont superposables.
Les connaissances nécessaires sont celles de collège, néanmoins la mise en forme de ces démonstrations risque d'être difficile pour certains élèves, tout en constituant un excellent exercice de verbalisation de démarches déductives pour d'autres.

Exercice 2 :

Soit deux triangles ABC et MNP. Dire dans chacun des cas ci-dessous si on peut affirmer que les triangles sont isométriques. Si les triangles sont isométriques, préciser les sommets homologues (les longueurs sont données en cm).

a) $BC = 4$; $\widehat{B} = 45°$; $\widehat{C} = 50°$; $MN = 4$; $\widehat{M} = 50°$ et $\widehat{N} = 45°$
b) $BC = 5$; $\widehat{B} = 34°$; $\widehat{C} = 75°$; $MN = 5$; $\widehat{N} = 34°$; $\widehat{P} = 75°$
c) $AB = 6$; $AC = 3$; $\widehat{A} = 57°$; $MN = 6$; $NP = 3$; $\widehat{P} = 57°$
d) $BC = 2$; $CA = 5$; $\widehat{C} = 40°$; $MN = 5$; $MP = 2$; $\widehat{M} = 40°$
e) $BC = 4$; $CA = 5$; $AB = 6$; $MN = 5$; $MP = 6$; $PN = 4$
f) $AB = 7$; $\widehat{A} = 120°$; $\widehat{B} = 32°$; $PN = 7$; $\widehat{P} = 32°$; $\widehat{N} = 120°$
g) $A = 15°$; $B = 135°$; $C = 30°$; $M = 15°$; $N = 30°$; $P = 135°$

Exercice 3

Soit ABC et BCD deux triangles. Dire dans chacun des cas ci-dessous si on peut affirmer que les triangles sont isométriques. Si les triangles sont isométriques, préciser les sommets homologues(les longueurs sont données en cm)

a) $AB = 4$; $AD = 5$; $CB = 5$; $CD = 4$.
b) $BA = BC$; $\widehat{ABD} = 35°$; $\widehat{CBD} = 35°$
c) $BA = BD = BC$; $\widehat{BAD} = 48°$; $\widehat{CBD} = 48°$
d) $DA = BC$; $AB = CD$
e) $\widehat{ABD} = 39°$; $\widehat{ADB} = 51°$; $\widehat{DBC} = 39°$; $\widehat{BCD} = 51°$
f) $\widehat{CBD} = 54°$: $BC = AD$; $\widehat{ADB} = 54°$

C - Et si les deux triangles sont rectangles ; sont isocèles ?

<u>Exercice 1 :</u>
Soit ABC un triangle isocèle en A, M le milieu de [BC], comparer les triangles ABM et ACM.
D'où le théorème :La médiane issue du sommet principal d'un triangle isocèle partage ce triangle en deux triangles isométriques

<u>Exercice 2</u> :
Quel est le nombre minimal d'informations (mesure de côté ou d'angle) que l'on doit donner pour construire un triangle isométrique à un triangle rectangle donné ?

<u>Exercice 3 :</u>
Soient deux triangles équilatéraux, sont-ils isométriques? A quelle(s) condition(s) ?

<u>Exercice 4 :</u>
Quel est le nombre minimal d'informations (mesure de côté ou d'angle) que l'on doit donner pour construire un triangle isométrique à un triangle isocèle donné ?

D - Exercices d'application :

On pourra pour plusieurs des exercices qui suivent demander une démonstration utilisant les cas d'isométrie et/ou les propriétés des transformations et comparer ces solutions.

<u>Exercice 1</u>

Etant donné un triangle ABC, on trace le cercle de centre B et de rayon [BA] ainsi que le cercle de centre C et de rayon [CA].
Ces cercles se coupent en A et en un deuxième point A'.
Démontrer que (BC) est à la fois bissectrice de l'angle $\widehat{ACA'}$ et de l'angle $\widehat{ABA'}$.

<u>Exercice 2</u>

On donne un triangle équilatéral ABC.
Sur les demi-droites [AC), [BA) et [CB), à partir de chaque sommet A, B, C du triangle, on porte respectivement les points A', B' et C' tels que AA' = BB' = CC'.
Démontrer que le triangle A'B'C' est équilatéral.

Exercice 3

On considère un triangle ABC tel que le pied H de la hauteur issue de A appartienne à [BC] et que AH= BC. On mène la demi-droite issue de B perpendiculaire à (BC) située dans le demi-plan ne contenant pas le triangle ABC.
On marque sur cette demi-droite le point D tel que BD = HC.
Démontrer que le triangle ACD est isocèle.

Exercice 4

Quatre demi-droites [Ox), [Oy), [Oz) et [Ot) se suivent dans cet ordre en tournant autour de O de manière que $\widehat{xOy} = \widehat{yOz} = \widehat{zOt} = 30°$
Un cercle de centre O coupe [Oy) en A et [Oz) en B ; un autre cercle de centre O coupe [Ox) en C et [Ot) en D.
Comparer les longueurs AC et BD.

Exercice 5 Exercice à faire avec un logiciel de géométrie dynamique :

ABC est un triangle. On construit extérieurement au triangle ABC les carrés BCGF et ABDE, on trace les segments [AF] et [CD]. I est le point d'intersection de ces segments.

1. Afficher les longueurs AF, CD ainsi que l'angle $\widehat{AIC}$. Déplacer les points A, B, C. Etablir des conjectures.

Démonstration :

2. Prouver que les triangles ABF et BCD sont isométriques. En déduire que AF = CD.
3. Avec une rotation de centre B dont on déterminera l'angle, montrer que les droites (AF) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 6

Une démonstration du théorème de Pythagore (D'après : Eléments de géométrie de Clairaut).
a et b sont deux nombres réels strictement positifs avec a > b.

1. Construire les carrés ABCD et BEFG dont les côtés ont pour longueurs respectives a et b tels que E appartient à [BC] et B appartient à [AG]. Placer les points H et I tels que : H appartient à [AB] et AH = b. I appartient à la demi-droite issue de E contenant C avec EI = a.
2. Prouver que les triangles ADH, CDI, EIF et GHF sont isométriques.
3. Montrer que HDIF est un carré.
4. En comparant des aires, montrer que $DH^2 = AD^2 + AH^2$.

DEUXIEME PARTIE

TRIANGLES SEMBLABLES

A - Introduction - Définitions.

Pour introduire la définition il nous semble important d'insister, dans un premier temps, sur le lien avec la configuration de Thalès, puis de passer à une situation où les deux triangles ne sont pas dans cette configuration.

Activités d'introduction :

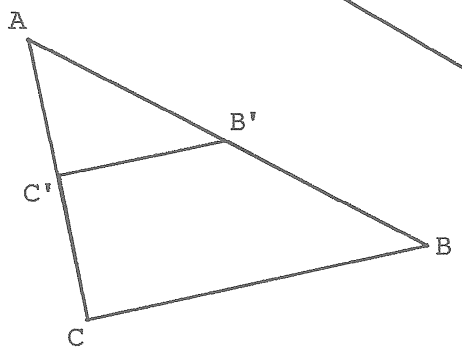
<u>Activité 1 :</u>

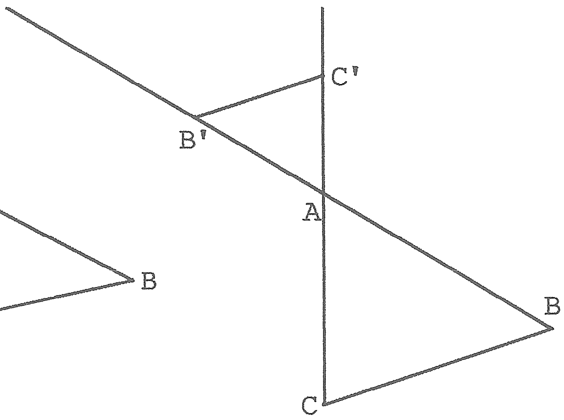
Soit ABC un triangle et B' un point de (AB) tel que B'≠ A.

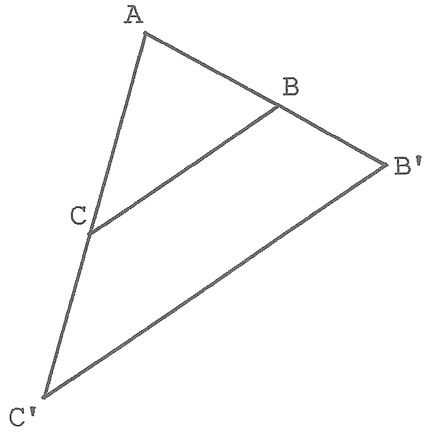
La parallèle à la droite (BC) passant par B' coupe (AC) en C'.

Comparer les angles des triangles ABC et AB'C'.

On envisagera les situations représentées ci-dessous :





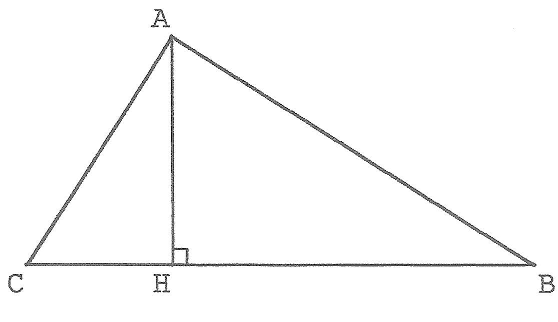


<u>Activité 2 :</u>

Soit ABC un triangle rectangle en A.

Montrer que les angles du triangle ABC sont égaux aux angles du triangle AHC et à ceux du triangle ABH.

H est le pied de la hauteur issue de A.



Définition de deux triangles de même forme ou semblables :

On appelle triangles de ***même forme*** deux triangles dont les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre.

Vocabulaire : deux triangles de même forme sont dits ***semblables.***

On pourra ici faire remarquer que, comme les triangles isométriques sont superposables par effet de successions d'isométries, les triangles semblables seront superposables par application de transformations appelées similitudes qui seront étudiée dans les classes ultérieures.

Remarques :

a) Deux triangles dans la configuration de Thalès sont semblables.

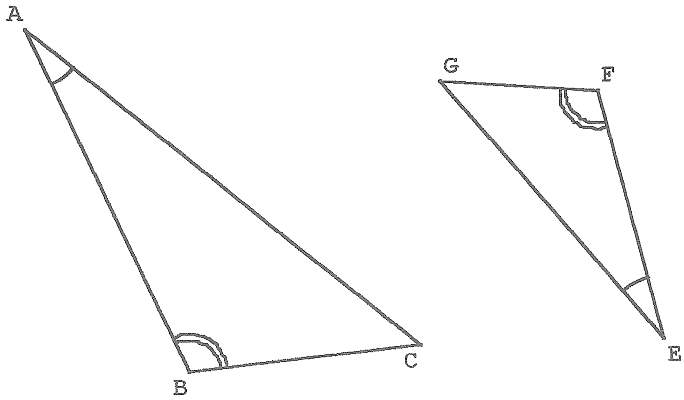
b) Si les triangles T1 et T2 sont semblables ainsi que les triangles T2 et T3 alors les triangles T1 et T3 sont semblables.

c) Deux triangles isométriques sont de même forme (semblables).

d) Pour deux triangles, si on peut trouver deux angles de l'un égaux à deux angles de l'autre, alors ces triangles sont de même forme (semblables).

Démonstration :

On note ABC et EFG les deux triangles et on suppose que $\hat{A} = \hat{E}$ et $\hat{B} = \hat{F}$.



$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ et $\hat{E} + \hat{F} + \hat{G} = 180°$ donc :

$\hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B}$ et $\hat{G} = 180° - \hat{E} - \hat{F}$ et d'après l'hypothèse $\hat{C} = \hat{G}$.

Sommets homologues de deux triangles semblables :

Si deux triangles ABC et A'B'C' sont de même forme, les sommets correspondant aux angles égaux sont dits ***homologues.***

Il sera pratique d'utiliser la notation

A	B	C
A'	B'	C'

quand les triangles ABC et A'B'C' sont semblables, ce tableau permet de voir d'un coup d'œil les sommets homologues, (dans la même colonne), donc les angles correspondants égaux ainsi que les côtés correspondants, (ceux dont les extrémités sont dans les mêmes colonnes), dont on verra dans la suite les propriétés métriques.

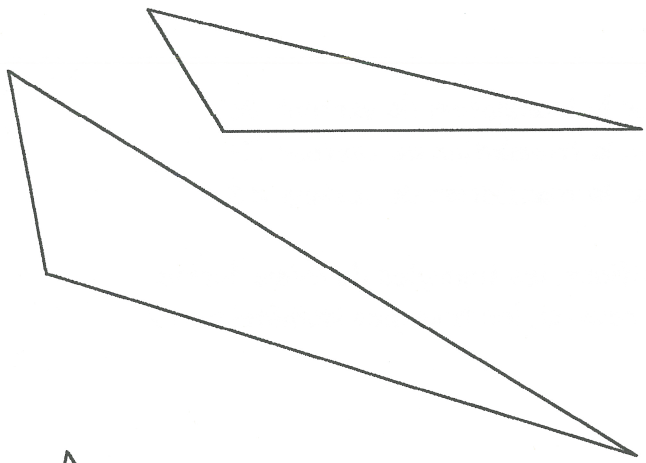
Exercices :

I) Dans chaque cas, ci-dessous, les deux triangles sont semblables.

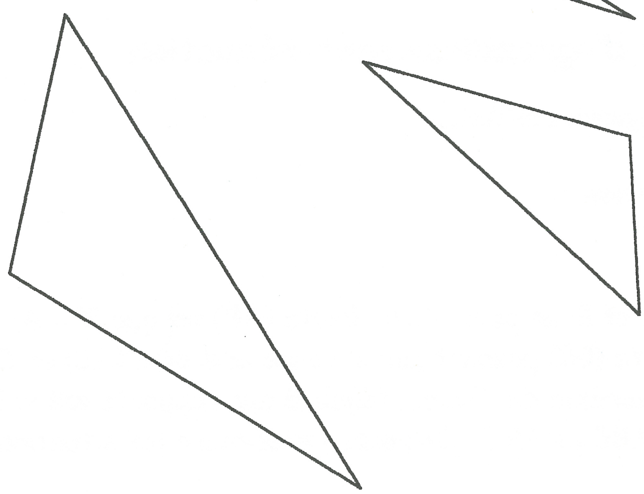
a) Marquez les angles égaux.

b) Nommez les sommets des triangles (A, B, C, A', B', C') de telle sorte que : $\hat{A} = \hat{A'}$, $\hat{B} = \hat{B'}$, $\hat{C} = \hat{C'}$.

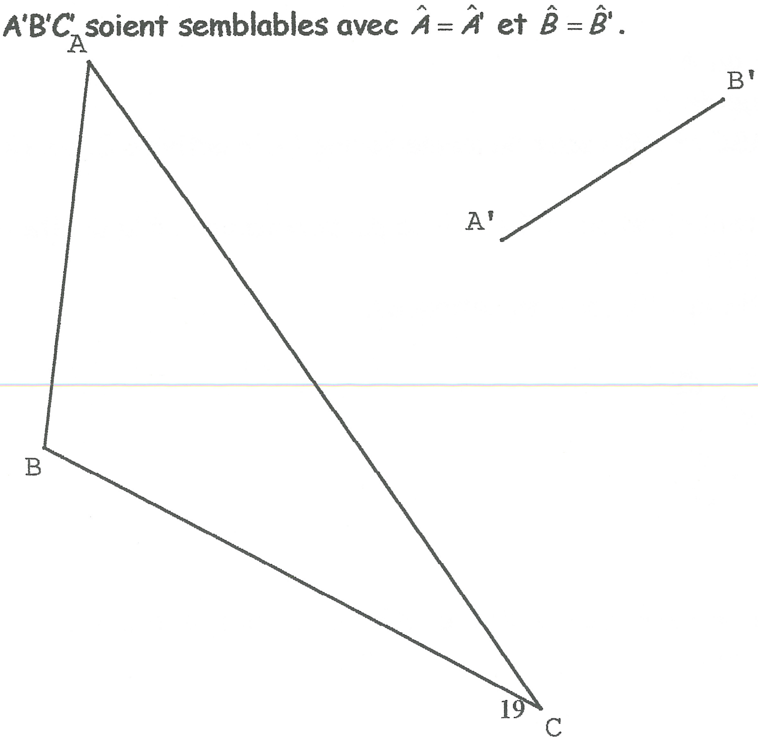
1)



2)



II) On donne un triangle ABC et un segment [A'B']. Placer C' de sorte que les triangles ABC et A'B'C' soient semblables avec $\hat{A} = \hat{A'}$ et $\hat{B} = \hat{B'}$.



Exercices d'application

Exercice 1 :

a) Montrer que deux triangles équilatéraux sont de même forme.

b) Parmi les autres triangles particuliers, existent-ils des triangles de même forme ?

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle.

B' est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

C' est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$.

A' est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

a) Faire une figure.

b) Enumérer, en justifiant, les triangles de même forme.

c) Quels sont, parmi ceux-ci, les triangles isométriques ?

B - Coefficient d'agrandissement-réduction.

Nous repartons de la configuration de Thalès

Activités d'introduction :

Activité 3 :

Soit ABC un triangle et B' un point de la droite (AB) tel que B' ≠ A.

La parallèle à la droite (BC) passant par B' coupe la droite (AC) en C'.

Rappeler, avec le théorème de Thalès, l'égalité des rapports entre les longueurs des côtés des triangles ABC et AB'C'. On pourra reprendre les situations de l'activité 1 de la partie II - A.

Activité 4 :

Soit ABC un triangle rectangle en A.

H est le pied de la hauteur issue de A.

On rappelle que les triangles ABC et ABH sont de même forme (voir activité 2, partie II - A).

Soit K le point de la demi-droite[CA) tel que CK = AH. La perpendiculaire à la droite (CA) passant par K coupe la droite (BC) en I.

a) Prouver que les triangles ABH et CKI sont isométriques.

b) Démontrer que $\frac{CK}{CA} = \frac{KI}{AB} = \frac{CI}{CB}$

c) En déduire que $\frac{AH}{CA} = \frac{BH}{AB} = \frac{AB}{CB}$

Conclusion : Dans les triangles de même forme ABC et ABH on a les égalités des rapports de longueurs établies en c).

Le résultat se généralise :

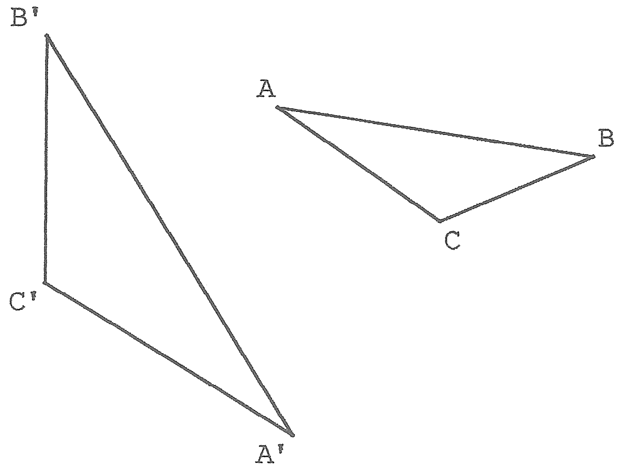
Théorème direct :

Si ABC et A'B'C' sont deux triangles de même forme avec $\hat{A} = \hat{A'}$, $\hat{B} = \hat{B'}$, $\hat{C} = \hat{C'}$

alors $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$ *(on dit aussi que les côtés homologues sont proportionnels)*

La valeur de ce rapport, qui est un **nombre strictement positif**, s'appelle coefficient d'agrandissement-réduction de ABC à A'B'C'.

Démonstration : (sous forme d'exercice)
Construire le point B_1 sur la demi-droite [AB) tel que $AB_1 = A'B'$.
Construire le point C_1 sur la demi-droite [AC) tel que $AC_1 = A'C'$.
a) Montrer que les triangles AB_1C_1 et A'B'C' sont isométriques.
b) Montrer que (B_1C_1) est parallèle à (BC).
c) En déduire l'égalité des rapports.



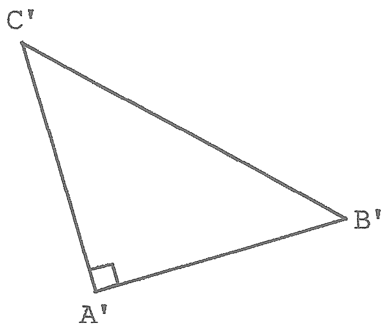
Compléments :

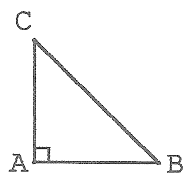
a) Dans quel cas s'agit-il d'un agrandissement ? d'une réduction ?
b) Que peut-on dire des triangles dans le cas d'un rapport égal à 1 ?

Applications à la trigonométrie :

Exemples :

1) ABC et A'B'C' sont deux triangles rectangles isocèles. Ils sont donc semblables.





Soit k le coefficient d'agrandissement-réduction de ABC à A'B'C'

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = k$ donc $A'B' = k\,AB$ et $B'C' = k\,BC$

on a alors $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{kAB}{kBC} = \frac{AB}{BC}$ soit $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC}$

Cette égalité montre que le calcul de sin(45°) ne dépend pas du demi-carré choisi.

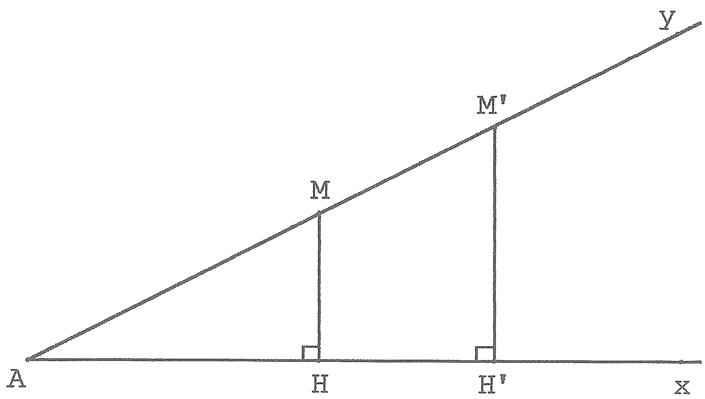
$$\sin(45°) = \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC}$$

On peut réaliser le même travail dans un triangle demi-équilatéral.

2) Considérons un angle aigu $x\hat{A}y$ de mesure α. Soit M et M' deux points quelconques de la demi-droite]Ay) et H et H' leurs projetés orthogonaux respectifs sur la demi-droite [Ax).

a) Vérifier que les triangles AMH et AM'H' sont semblables.

b) En déduire que sin α, cos α, tan α calculés dans le triangle rectangle AMH ne dépendent pas de la position de M sur la demi-droite]Ay).



Exercices d'application

Exercice 1 :

(ABC) est un triangle tel que AC = 9, AB = 5, BC = 6. E est un point de la demi-droite [AB) et F est un point de la demi-droite [AC) tels que $\widehat{ACB} = \widehat{AEF}$ et AE = 4.

a) Justifier que les triangles ABC et AEF sont de même forme.

b) Calculer le coefficient d'agrandissement-réduction de ABC à AEF.

c) Calculer AF et EF.

d) Calculer le rapport des périmètres des deux triangles. Que remarque-t-on ?

Exercice 2 :

Soit un triangle ABC dont les côtés ont pour mesures en mm :

AB = 28 BC = 36 AC = 42

Par le milieu E du segment [AB], on trace une droite qui coupe le segment [AC] en D tel que l'on ait $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$
Calculer AD et DE.

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle. La médiane issue de A coupe le segment [BC] en D. Soit P un point de la droite (AB). La parallèle à la droite (AD) passant par P coupe la droite (AC) en Q et la parallèle à la droite (BC) passant par A en M.

a) Démontrer que les triangles AMP et BDA sont semblables et en déduire l'égalité :

$$\frac{MP}{AD} = \frac{AM}{BD}$$

b) Démontrer que les triangles MQA et DAC sont semblables et en déduire l'égalité :

$$\frac{MQ}{AD} = \frac{AM}{CD}$$

c) En conclure que M est le milieu du segment [PQ].

Théorème réciproque :
Si ABC et A'B'C' sont deux triangles tels que $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$ *(c. à d. ayant leurs trois côtés proportionnels)*
alors ces triangles sont de même forme.

Démonstration : (sous forme d'exercice)

a) Construire le point M de la demi-droite [AB) tel que AM = A'B'.
b) Construire le point N de la demi-droite [AC) tel que AN = A'C'.

On a alors $\frac{AM}{AB} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{AN}{AC}$, en déduire que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

c) Utiliser la propriété de Thalès dans le triangle ABC et montrer que $\frac{MN}{BC} = \frac{B'C'}{BC}$

d) En déduire que MN = B'C'. Que peut-on dire des triangles AMN et A'B'C' ?

e) Montrer que les triangles AMN et ABC sont semblables.
Que peut-on en conclure pour les triangles ABC et A'B'C' ?

Exercice d'application

Dans un quadrilatère convexe ABCD les côtés et la diagonale [AC] ont pour mesures en mm :

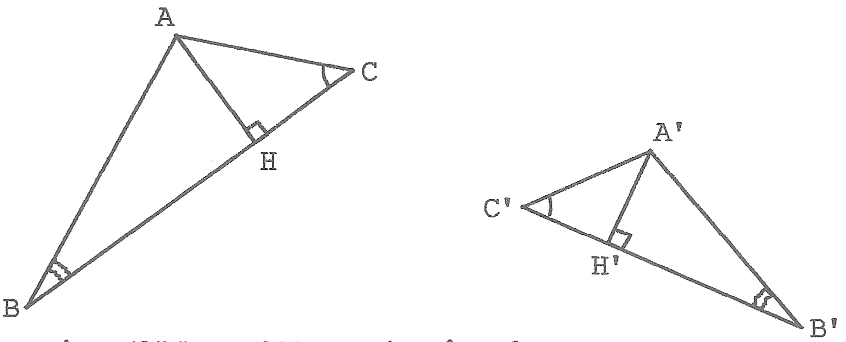
AB = 30 BC = 36 CD = 16 AD = 20 AC = 24

a) Construire ce quadrilatère.
b) Démontrer que les triangles ABC et DAC sont semblables. Indiquer les angles égaux.

C - Aires de triangles de même forme.

Activités d'introduction :

Soit ABC et A'B'C' deux triangles de même forme tels que $\hat{B} = \hat{B'}$ et $\hat{C} = \hat{C'}$. On note k le coefficient d'agrandissement-réduction de ABC à A'B'C'.
H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC et H' est le pied de la hauteur issue de A' dans le triangle A'B'C'.



1) Montrer que les triangles A'B'H' et ABH sont de même forme.
2) En déduire que A'H' = k AH.
3) Exprimer en fonction de k le rapport des aires des deux triangles ABC et A'B'C'.

Théorème :
Si ABC et A'B'C' sont deux triangles de même forme et si k est le coefficient d'agrandissement-réduction de ABC à A'B'C' alors

$$\frac{\textit{aire de } A'B'C'}{\textit{aire de } ABC} = k^2$$

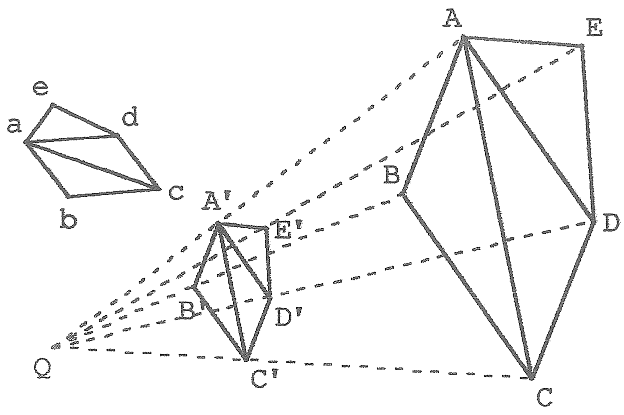
D - Polygones semblables.

Cette notion sera difficile à définir précisément sans recours aux similitudes ou aux homothéties.
On peut, comme le suggèrent les programmes, décomposer les polygones en triangles, la difficulté sera alors de préciser les positions relatives des différentes parties les unes par rapport aux autres.

Définition :
Deux polygones semblables sont deux polygones que l'on peut décomposer, par des diagonales, en un même nombre de triangles respectivement semblables et disposés de la même façon.

Quand deux polygones sont semblables, on pourra parler, comme pour les triangles semblables, de sommets et de cotés homologues, et s'intéresser à la conséquence sur les aires des deux polygones.
On déduit de cette définition que des polygones semblables ont leurs côtés homologues proportionnels et leurs angles homologues égaux.

Cette condition nécessaire pour que des polygones soient semblables est aussi suffisante.
On pourra admettre ce résultat pour trouver des conditions suffisantes pour que les polygones particuliers : parallélogrammes, rectangles, losanges, carrés, soient semblables.
Pour visualiser l'agrandissement ou la réduction on peut, par une animation sous géoplan, par exemple, transformer une des figures par une isométrie rendant les côtés homologues deux à deux parallèles, les deux polygones obtenus étant ainsi homothétiques.

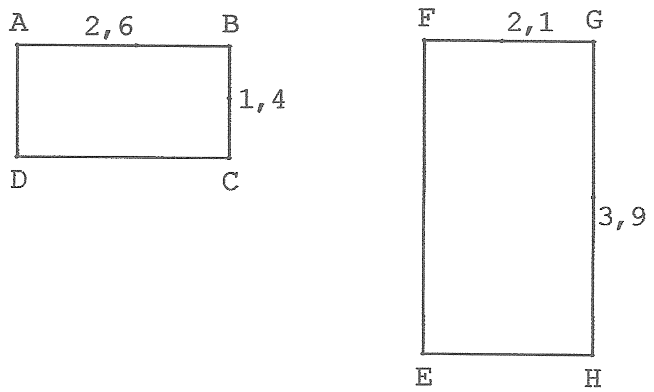


Exercices d'application

Exercice 1 :

ABCD et EFGH sont deux rectangles dont les dimensions sont les suivantes :

AB = 2,6 BC = 1,4 FG = 2,1 GH = 3,9

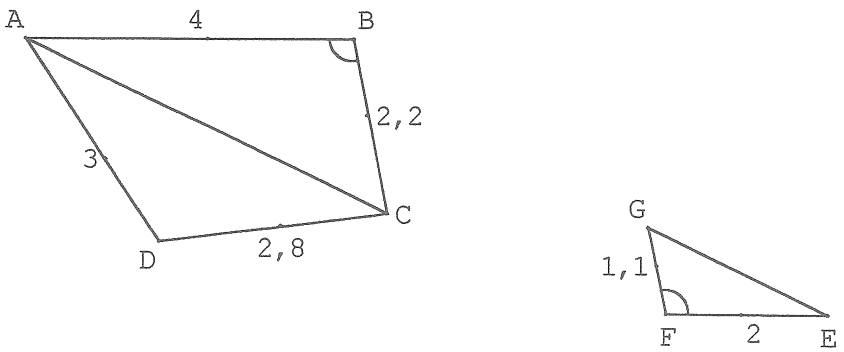


Vérifier que les rectangles ABCD et EFGH sont semblables.

Exercice 2

ABCD est un quadrilatère tel que : AB = 4 BC = 2,2 CD = 2,8 DA = 3

On considère le triangle EFG tel que : GF = 1,1 FE = 2



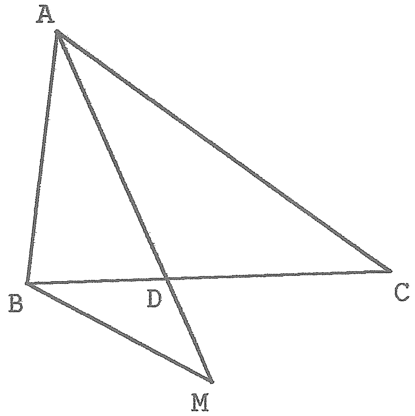
Construire le point H tel que les quadrilatères ABCD et EFGH soient de même forme.

E - Exercices.

Exercice 1

Construire un triangle ABC. D est un point de [BC] distinct de B et de C.
Construire le point M sur (AD) tel que les angles $\widehat{MBD}$ et $\widehat{MAB}$ soient égaux.

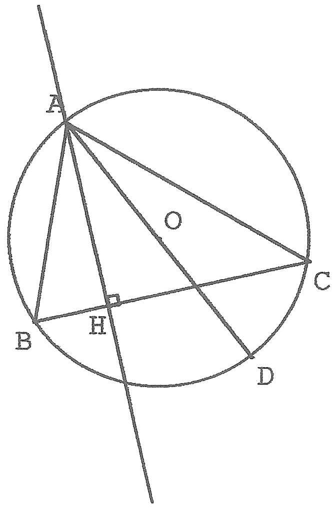
Démontrer que les triangles MAB et MBD sont semblables.
En déduire que $MB^2 = MD \times MA$.



Exercice 2

ABC est un triangle inscrit dans un cercle de centre O. H est le pied de la hauteur issue de A. [AD] est un diamètre.

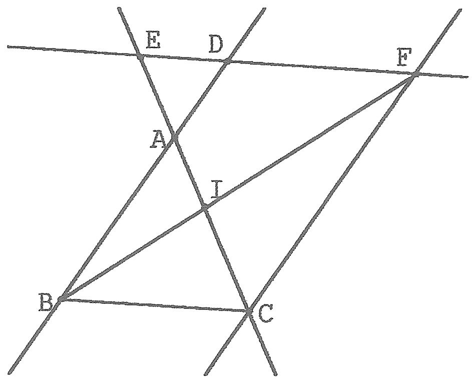
Montrer que les triangles ABD et AHC sont semblables.
En déduire que $AB \times AC = AD \times AH$



Exercice 3

ABC est un triangle ; D est un point de (AB). La parallèle à (BC) passant par D coupe (AC) en E et coupe la parallèle à (AB) qui passe par C en F. la droite (BF) coupe (AC) en I.

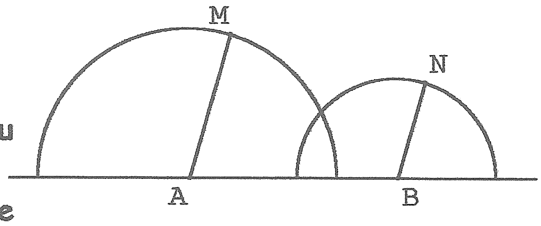
1) a) Montrer que les triangles IAB et ICF, puis ICB et IEF sont semblables.
b) En déduire que $IC^2 = IE \times IA$.
2) Montrer qu'il est possible de choisir D tel que (BF) soit bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$.
3) Montrer que si D est le milieu du segment [AB] alors IC = 2 IE (faire une nouvelle figure).



Pour faire la seconde et la troisième question on pourra construire la figure à l'aide de Géoplan ou de Cabri et faire varier D sur AB.

Exercice 4

Soit deux points fixes A et B. On trace un demi cercle (C) de centre A et de rayon 3 cm et le demi cercle (C') de centre B et de rayon 2 cm situé du même côté que (C) par rapport à (AB). M est un point quelconque de (C) et N est le point de (C') tel que (AM) et (BN) soient parallèles.
On se propose de démontrer que la droite (MN) passe par un point fixe.

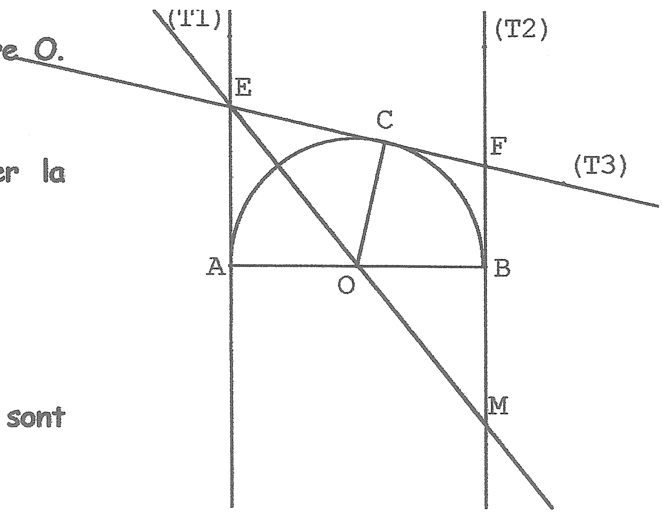


1) Manipulations et conjectures avec un logiciel :
   a- Construire la figure à l'aide de Géoplan ou Cabri.
   b- Faire varier la position de M sur (C). Que constate-t-on pour (MN) ?
   c- On nomme I le point d'intersection de (MN) et (AB). Faire afficher le rapport $\frac{IA}{IB}$. Que devient ce rapport lorsque M se déplace sur (C) ?
2) Démontrer ce que l'on a observé et calculer IA en fonction de AB. On pourra admettre ou démontrer que les droites (MN) et (AB) sont sécantes.

La démonstration demandée risque d'être délicate à mettre en forme. Il peut être utile de détailler la seconde question afin de guider les différentes étapes déductives.

Exercice 5

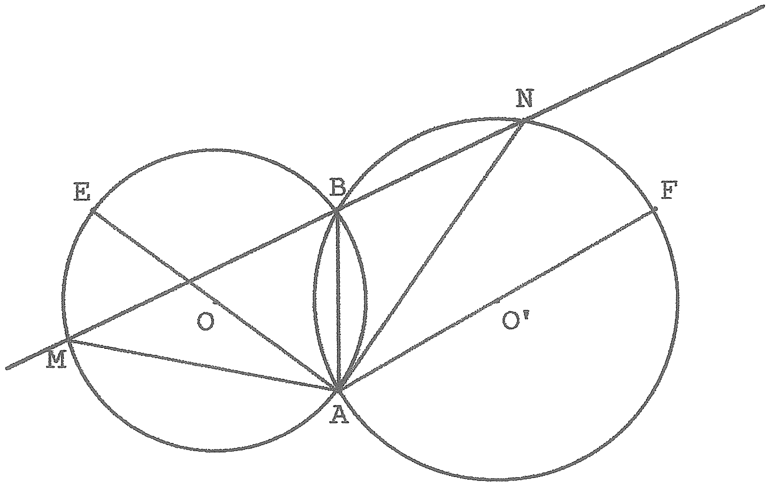
Soit un demi cercle de diamètre [AB] et de centre O.
Construire les tangentes au demi cercle :
(T_1) tangente en A et (T_2) tangente en B.
Placer un point C sur le demi cercle et tracer la tangente(T_3) en C.
(T_3) coupe (T_1) en E et (T_2) en F.
La droite (OE) coupe (T_2) en M.



1) Montrer que EFM est un triangle isocèle.
2) Montrer que les triangles OAE et OCF sont semblables.
En déduire que $OA^2 = AE \times BF$

Exercice 6

[AB] est un segment de longueur 3cm;
(C) est un cercle de centre O , de rayon 2,5cm, passant par A et B ;
(C') est un cercle de centre O', de rayon 3cm, passant par A et B , O et O' sont situés de part et d'autre de (AB).
E est le point diamétralement opposé à A sur (C) et F est le point diamétralement opposé à A sur (C').



1) Que peut on dire des points B, E et F?

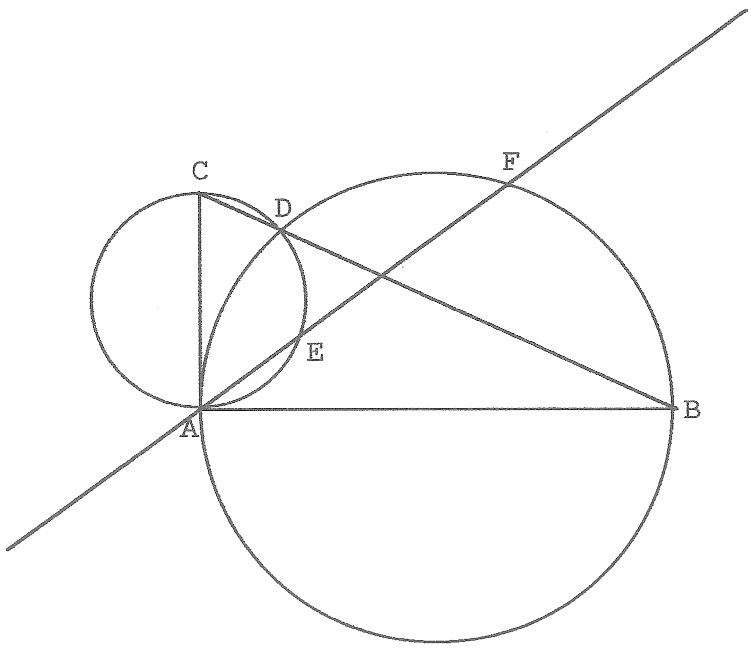
2)Soit M un point de (C), la droite (BM) coupe (C') en N. Montrer que quelque soit la position de M, le triangle AMN reste semblable à un triangle fixe.

3) Quelle position de la sécante (MN) correspond à la plus grande longueur MN?

Cet exercice est particulièrement adapté pour une manipulation préalable avec un logiciel. En particulier dans la troisième question le fait de faire varier la sécante (MN) en faisant afficher la longueur MN permet de faire une conjecture qu'il s'agira de démontrer en utilisant la seconde question.

Exercice 7

ABC est un triangle rectangle en A et tel que AC <AB.



1) Montrer que les cercles (C1) de diamètre [AC] et (C2) de diamètre [AB] se coupent en un point situé sur (BC). Soit D ce point.

2) Une droite passant par A coupe (C1) en E et (C2) en F. Démontrer que les triangles EAC et AFB sont semblables.

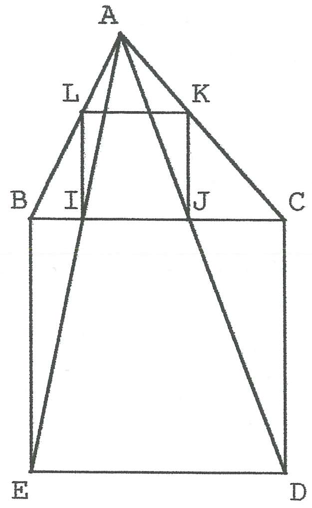
3) Démontrer que les triangles ABC et EDF sont semblables.

Exercice 8

On considère un triangle ABC et le carré BCDE

(AE) et (BC) se coupent en I.

(AD) et (BC) se coupent en J.



1) Montrer que les triangles AED et AIJ sont de même forme. On note k le coefficient d'agrandissement-réduction de AIJ à AED.

2) Les perpendiculaires à (BC) en I et J coupent respectivement (AB) en L et (AC) en K.

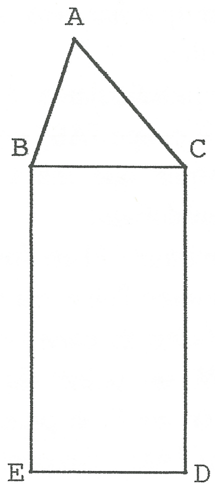
Montrer que les triangles suivants sont de même forme : AKJ et ACD ; ALI et ABE ; puis prouver que les coefficients d'agrandissement-réduction de l'un à l'autre sont égaux à k.

3) Prouver que les triangles ALK et ABC sont de même forme.

4) En déduire que IJKL est un carré.

Exercice 9

On considère un triangle ABC et le rectangle BCDE tel que BE = 2 BC.



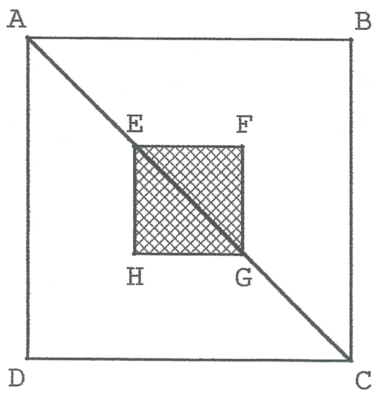
En utilisant la même méthode (voir exercice 8) montrer que l'on peut inscrire un rectangle de même forme que BCDE dans le triangle ABC.

Exercice 10

Soit ABCD un carré de côté a. On place sur [AC] les points E et G tels que AE = EG = GC.

La parallèle à (AB) passant par E et la parallèle à (BC) passant par G se coupent en F.

La parallèle à (AB) passant par G et la parallèle à (BC) passant par E se coupent en H.

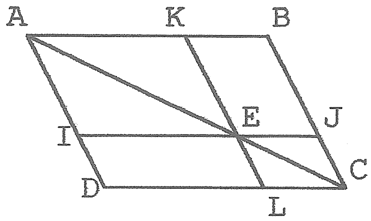


1) Démontrer que EFGH est un carré.

2) Calculer l'aire de EFGH en fonction de a

Exercice 11

ABCD est un parallélogramme. Soit E un point de la diagonale [AC].
La parallèle à (AB) passant par E coupe (AD) en I et (BC) en J. La parallèle à (AD) passant par E coupe (AB) en K et (CD) en L.



1) Montrer que les triangles AIE et ELC sont de même forme.

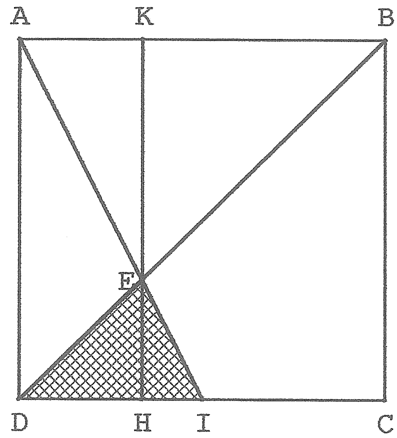
2) Montrer que AKEI et EJCL sont des parallélogrammes de même forme.

3) Comparer les aires des parallélogrammes KBJE et IELD.

Voir note après l'exercice 12.

Exercice 12

ABCD est un carré de coté a.
I est le milieu de [DC] et E est le point d'intersection de [AI] et de [BD].



1) Montrer que les triangles AEB et DEI sont semblables.

2) La perpendiculaire à la droite (AB) passant par E coupe [AB] en K et [DC] en H.

a) Montrer que les triangles AEK et EHI sont semblables.

b) Exprimer EH en fonction de EK.

3) Déterminer l'aire du triangle EDI en fonction de l'aire du carré ABCD.

4) Soit M un point du segment [DC], distinct de D, et F le point d'intersection de [DB] et de [AM]. On pose x = DM.

a) En utilisant un raisonnement analogue à celui des questions précédentes, déterminer l'aire du triangle DFM en fonction de x et de a.

b) Déterminer x pour que l'aire du triangle DFM soit égale à la moitié de l'aire du triangle DEI.

Dans les deux exercices précédents, l'utilisation d'un logiciel de géométrie peut permettre de faire des conjectures en faisant afficher les aires sur lesquelles on travaille quand on bouge les points mobiles.

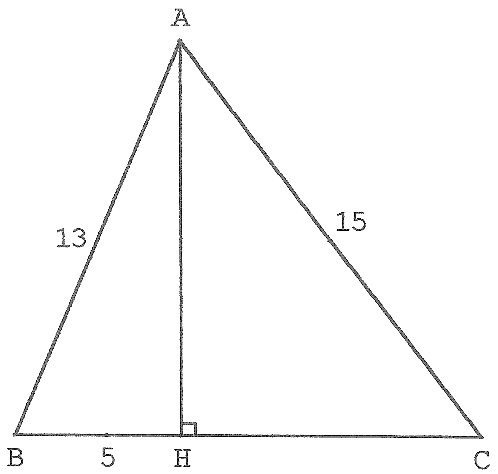
Exercice 13

Soit ABC un triangle tel que :

AB = 13   AC = 15   et   BH = 5

H étant le pied de la hauteur issue de A.

On se propose de construire un triangle EFG, rectangle en F, semblable au triangle AHC et dont l'aire est égale au cinquième de l'aire du triangle ABH.



1) Déterminer les mesures des côtés du triangle AHC.

2) On pose x = FE.

   a) Exprimer FG en fonction de x.

   b) en déduire l'aire du triangle EFG.

3) a) Trouver la valeur de x.

   b) En déduire la mesure des autres cotés du triangle EFG.

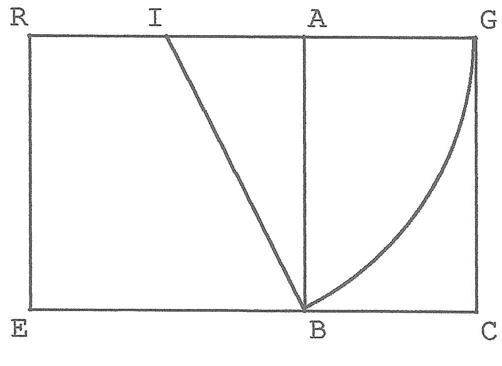
   c) Construire le triangle EFG.

Exercice 14

On considère un carré ABER de côté 1.

I est le milieu de [AR] et G est le point de la demi-droite [RA) tel que IG=IB.

La perpendiculaire à (AR) en G coupe (BE) en C.



1) Calculer IB.

2) a) Calculer GR, GC et BC.

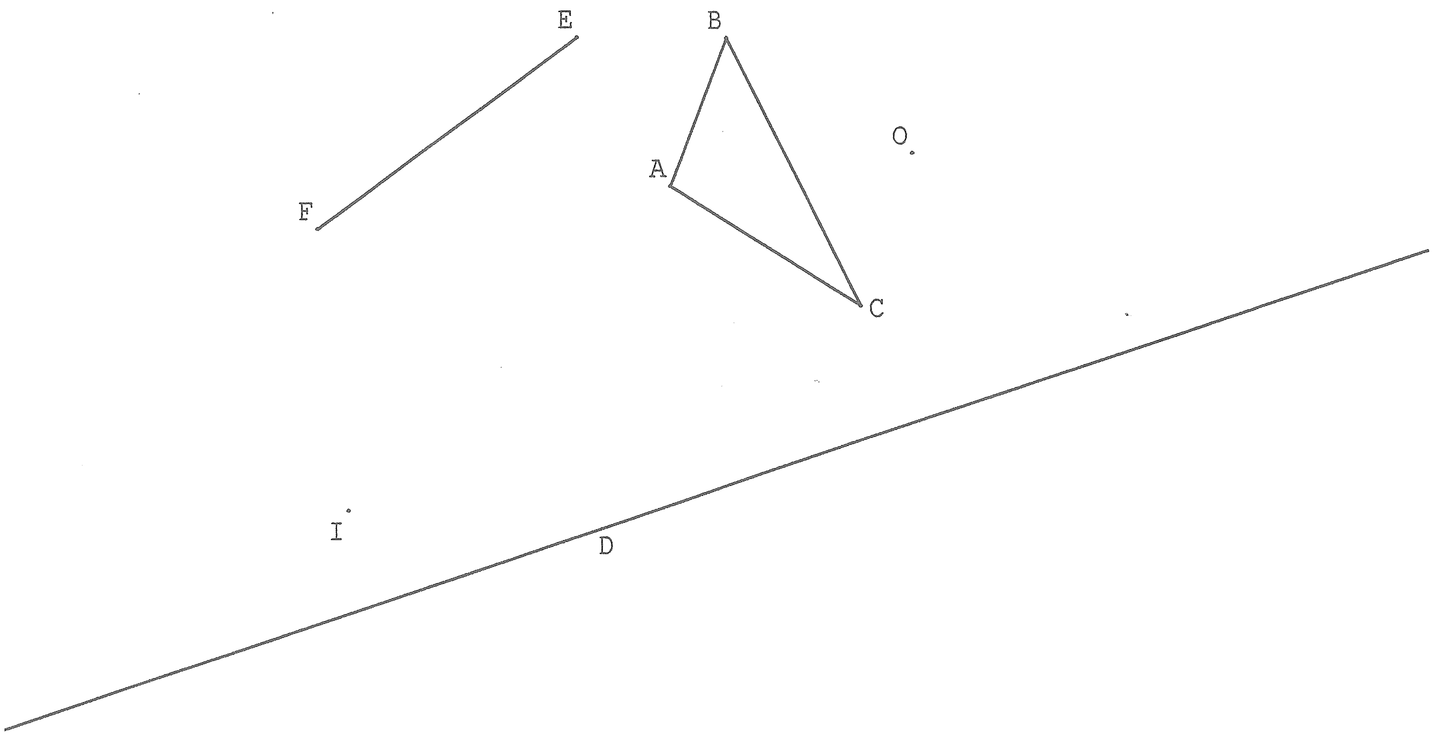
   b) En déduire que les triangles RGC et GCB sont semblables.

3) Montrer que les rectangles GREC et BAGC sont semblables.

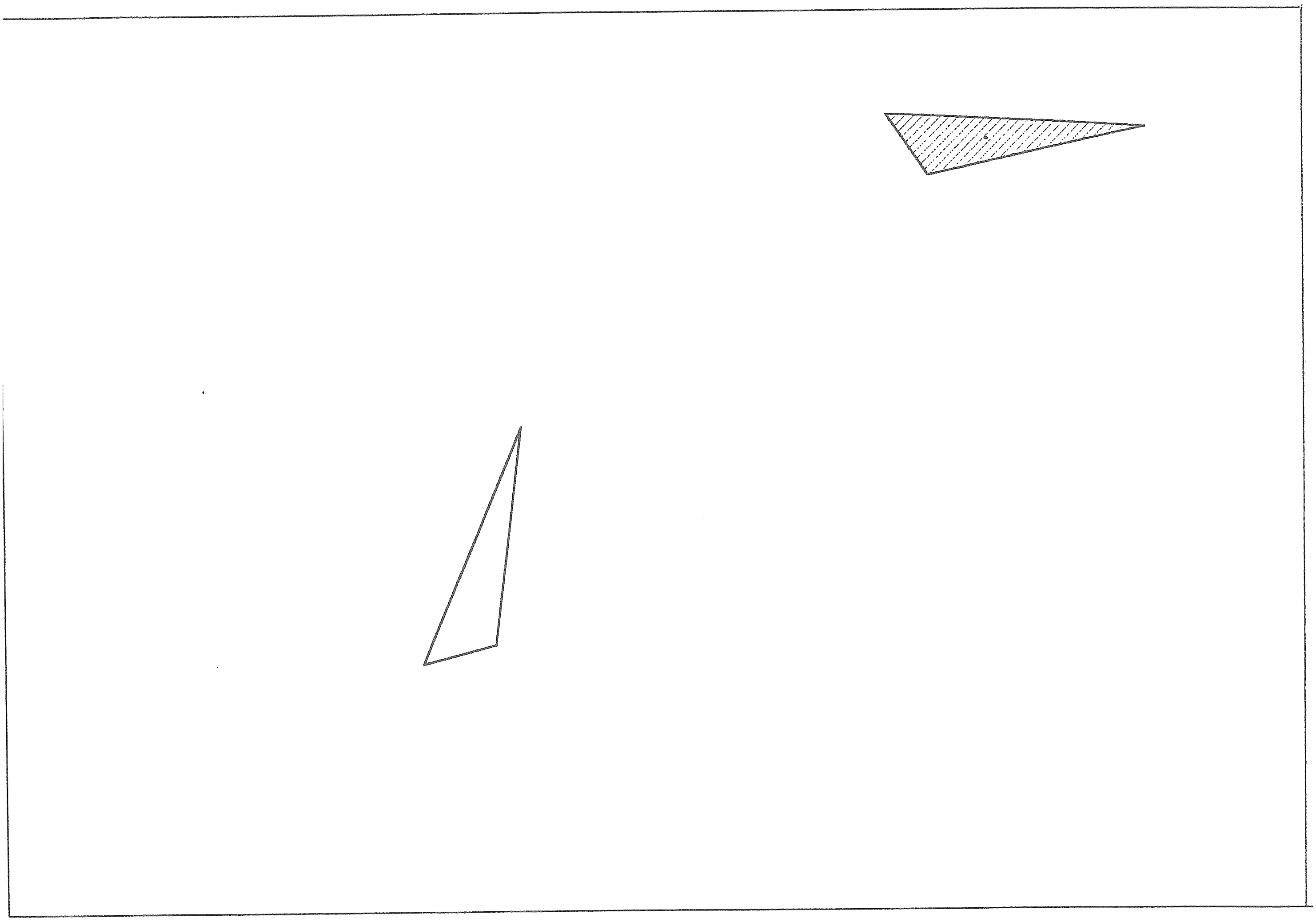
La longueur de GR est égale au "nombre d'or".

Ces rectangles sont des rectangles d'or : pour les tenants d'esthétique traditionnelles tous les rectangles dont les longueurs des côtés sont respectivement proportionnelles à 1 et au nombre d'or constituent une figure géométrique très harmonieuse.

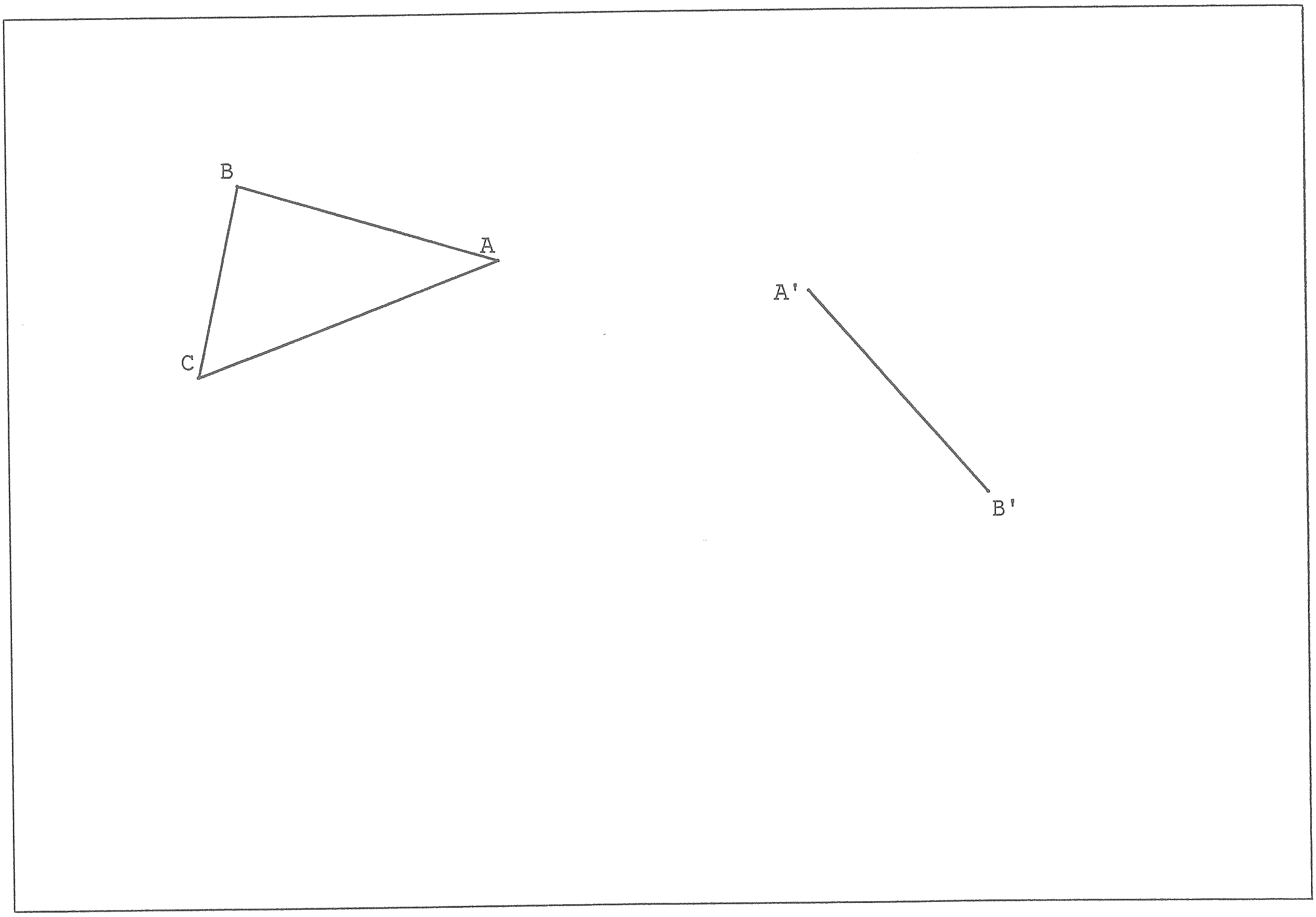
Annexe 1



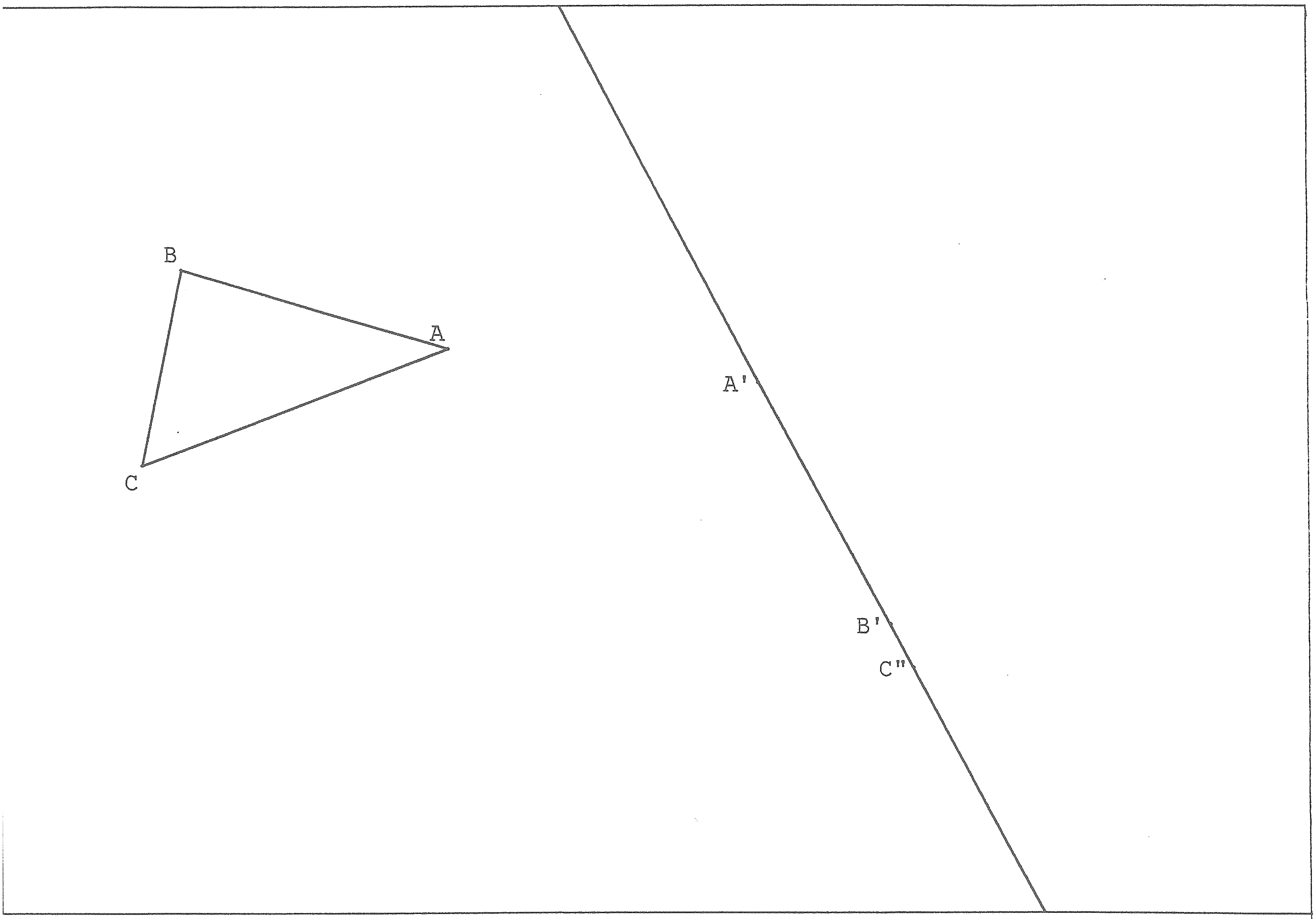
Annexe 2



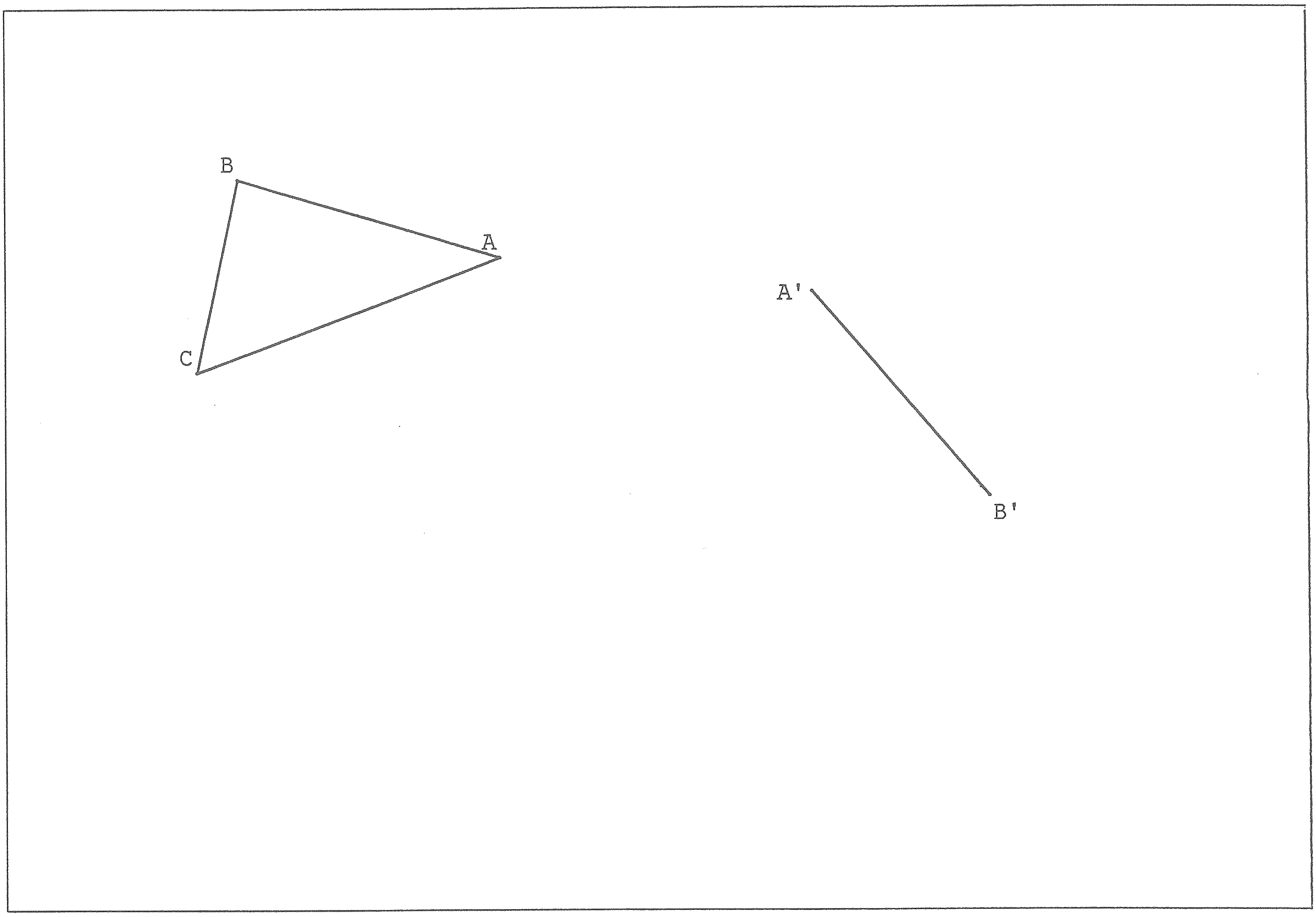
Annexe 3



Annexe 4



Annexe 5



Auteurs : *Groupe Usage de logiciels en lycée de l'IUFM et de l'IREM de Clermont-Ferrand*

Titre : *Triangles isométriques - Triangles semblables.*

Editeur : *IREM de Clermont-Ferrand.*

Date : *septembre 2000.*

Type : *Revue.*

Résumé : *Ce document présente les notions de "triangles isométriques" et de "triangles semblables" conformément aux programmes de seconde applicables à la rentrée 2000. Il s'agit d'un cours et d'exercices utilisant pour certains des logiciels de géométrie. L'ensemble du document et des fichiers utilisables sous géoplan sont téléchargeables sur le serveur de l'IREM de Clermont-Ferrand.*

Mots-clés : *Triangles isométriques*
Triangles semblables
Géoplan
Activités déductives.

Format *A4 : Nombre de pages : 36.*