

LES MATHÉMATIQUES AUTREMENT :

CRÉER ET ANIMER UN CLUB DE MATHÉMATIQUES EN COLLÈGE OU EN LYCÉE

- Actes de l'université d'été -

28 août - 1^{er} septembre 1999

Saint-Flour - Cantal

*** * ***

***Edition coordonnée par : Paul-Louis Hennequin
Université Blaise Pascal - IREM de Clermont-Ferrand***

LES MATHÉMATIQUES AUTREMENT :

*CRÉER ET ANIMER UN CLUB DE
MATHÉMATIQUES
EN COLLÈGE OU EN LYCÉE*

- Actes de l'université d'été -

28 août - 1^{er} septembre 1999

Saint-Flour - Cantal

* * *

*Edition coordonnée par : Paul-Louis Hennequin
Université Blaise Pascal - IREM de Clermont-Ferrand*

REMERCIEMENTS

L'association ANIMATH , les organisateurs, tiennent à adresser leurs remerciements aux institutions et aux personnes qui, par leur soutien actif ont permis le bon fonctionnement de cette université d'été :

- le Ministère de l'Education Nationale de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche qui a accepté l'avant projet,
- l'Inspection Générale de Mathématiques pour son engagement fort dans le projet et sa participation active à l'U.E.,
- le Rectorat de Clermont-Ferrand pour son soutien,
- l'IREM de Clermont-Ferrand pour son soutien à la préparation de l'U.E., à la gestion et à la publication des actes,
- le Lycée de Haute-Auvergne à Saint-Flour pour la mise à disposition de ses salles et de son matériel informatique,
- la Maison des Planchettes pour la qualité de son accueil,
- La Municipalité de Saint-Flour pour sa cordialité et l'accès aux collections ancienne de sa bibliothèque,
- France-Télécom pour les liaisons avec Internet.

- SOMMAIRE -

- Présentation de l'Université d'Eté, *par P. L. Hennequin*.....p. 1
- Liste des animateurs et des visiteursp. 4
- Liste des participantsp. 5

Les ateliers :

- Atelier n° 1 "MATH.en.JEANS et situations de recherche"p. 9
par P. Audin et P. Duchet.
- Atelier n° 2 "les clubs et ateliers comme moyen d'explorer l'univers mathématique
à travers l'histoire, l'expérimentation et les nouvelles technologies" p. 45
par R. Charbonnier et F. Gaudel.
- Atelier n° 3 "Utilisation de jeux du commerce pour faire des mathématiques" p. 91
par N. Toussaint et J. Fromentin.
- Atelier n° 4 "Activités mathématiques en lycée pour initier un club" p. 129
par D. Missenard et J. A. Roddier.

Les tables rondes :

- Première table ronde, *par D. Roux*..... p. 173
- Deuxième table ronde, *par R. Noirfalise* p. 175

Conférences :

- « L'univers des polyèdres du tétraèdre aux polyèdres exotiques », *par J. Brette* .. p. 181
- « Le treizième problème de Hilbert », *par J. P. Kahane* p. 183
- « Les probabilités dans l'industrie », *par P. Bernard*..... p. 189
- « Des outils mathématiques pour les images, de l'analyse de Fourier
à l'analyse en ondelettes », *par Daniel Roux* p. 193
- « Trois activités pour un club », *par Dominique Roux*..... p. 209

Bilan et perspectives, *par P.L. Hennequin* p. 211

Référence bibliographiques :

- Ouvrages disponibles pendant l'université d'été, *par P. L. Hennequin* p. 213
- Une sélection d'adresses Internet où trouver de la documentation pour un club
mathématique, *par D. Missenard* p. 221

Présentation de l'Université d'été

P. L. Hennequin

1) Préparation.

L'association ANIMATH s'est fixé comme objectif le développement des clubs et ateliers de mathématiques dans les lycées et collèges. En complément du travail effectué en classe, ceux-ci permettent aux élèves d'aborder les mathématiques de manière créative et de les ressentir comme source de plaisir et de passion; l'initiation à des problématiques de recherche et à des questions actuelles est un moyen puissant pour développer la motivation et la créativité des élèves. Consciente de l'isolement des clubs existant, l'association décidait de déposer en novembre 98 un avant projet d'Université d'été permettant l'échange des expériences, la mise en commun des réussites, la réflexion sur les contenus et la conduite des ateliers périscolaires et leur articulation avec l'enseignement, une meilleure connaissance des ressources d'Internet.

Le projet se structurait autour d'une équipe d'animateurs comprenant à la fois des professeurs de lycée ou de collège ayant une longue expérience de l'animation d'un club dans des contextes variés, des mathématiciens soucieux d'une présentation attractive de leur discipline et un Inspecteur Général, et bénéficiait du soutien d'associations (S.M.F., S.M.A.I., A.P.M.E.P., MATH en JEANS, C.I.J.M.) et d'éditeurs (Tangente, éd. du Choix, A.C.L.).

Le choix du lieu résultait de plusieurs motifs :

- une situation centrale accessible en une demi-journée par la route ou le train;
- l'hébergement dans un cadre agréable en moyenne montagne pour un prix modéré;
- un lycée très bien équipé sur le plan informatique et ayant un club dynamique;
- la proximité d'un IREM pouvant assurer l'infrastructure du secrétariat et ayant une expérience confirmée de formation d'animateurs de clubs.

L'annonce de l'U.E. paraissait au B.O. Spécial n°2 du 1er avril 1999 (n°31).

2) Programme.

Le travail à l'U.E. s'est articulé autour de :

- quatre ateliers, permettant aux stagiaires de travailler pendant 15 heures en groupes réduits (10 stagiaires et 2 animateurs par atelier) et de réaliser la diversité des approches, des stratégies et des contenus possibles,
- deux tables rondes facilitant le débat public entre tous les participants,
- cinq conférences par des chercheurs universitaires présentant sur des exemples l'activité mathématique,

En outre, les participants étaient invités à exposer leurs réalisations et celles de leurs élèves et à prendre connaissance d'environ 200 ouvrages et périodiques apportés sur place (cf. p.), ainsi que d'une cinquantaine de volumes anciens de la bibliothèque municipale ou de la bibliothèque de Jean-Alain Roddier.

Quelques temps libres en fin d'après midi permettaient la détente et les conversations particulières.

3) Choix des candidatures.

Les formateurs se sont réunis à Paris le 26 mai pour faire plus ample connaissance, préciser le programme et choisir les candidats.

Ils disposaient de 95 dossiers de candidature émanant de pratiquement toutes les académies. Suivant les indications publiées au B.O., ils ont choisi en priorité les 13 enseignants en ZEP et les 15 plus jeunes, rejeté ceux qui avaient classé en premier choix une autre U.E. et ceux qui n'avaient pas respecté les délais. Ils ont pris en compte les motivations des candidats ainsi que l'avis du responsable académique à la formation continue (très varié suivant les académies, d'un simple avis conforme à un classement impératif) ; ils ont ménagé un équilibre entre enseignants et enseignantes des divers cycles et se sont assurés de la représentation du plus grand nombre d'académies.

Finalement 45 candidats ont été retenus dont 42 ont effectivement participé à l'U.E.

4) Déroulement de l'U.E.

Compte tenu de quelques auditeurs libres et passagers, l'U.E. a rassemblé 65 participants. Elle a été ouverte par Marc Fort, Inspecteur Général, et clôturée par Denise Courbon IPRIA .

A- Les ateliers.

Les quatre séances parallèles du samedi après midi et du dimanche matin permettaient à chaque stagiaire de travailler dans chacun des quatre ateliers pour en connaître les thèmes, la démarche, la méthodologie, le matériel. Chaque stagiaire choisissait alors un des quatre ateliers où il travaillait durant les six dernières séances du dimanche après midi, du lundi , mardi et mercredi matin.

1) MATH.en.JEANS et situations de recherche.

Pierre Audin et Pierre Duchet.

2) Les clubs et ateliers comme moyen d'explorer l'univers mathématique à travers l'histoire, l'expérimentation et les nouvelles technologies.

Robert charbonnier et François Gaudel.

3) Utilisation de jeux du commerce pour faire des mathématiques

Jean Fromentin et Nicole Toussaint.

4) Activités mathématiques en lycée pour initier un club.

Didier Missenard et Jean-Alain Roddier.

B - Les tables rondes.

1) Organisation d'un club. (29 aout)

2) Synthèse et perspectives. (1er septembre)

Animé par R. Noirfalise, en présence de l'I.P.R. D. Courbon, le débat a permis à chaque atelier de présenter un bref rapport, et aux participants de faire part de leur satisfaction des contacts établis, de la variété des apports et des situations, de leur voeu de maintenir les relations et de constituer un véritable réseau mais aussi leur regret que l'U.E. ait été aussi courte et le travail aussi intense. A leur demande, J.P. Kahane a

C- Les conférences.

J.Brette : *l'univers des polyèdres du tétraèdre aux polyèdres exotiques.*

Daniel Roux : *Ondelettes et images.*

J.P. Kahane : *le treizième problème de Hilbert, un carrefour de l'algèbre, de la géométrie et de l'analyse.*

P.Bernard : *Probabilités dans l'industrie: quelques exemples.*

Dominique Roux : *Quelques démonstrations sous-jacentes à des activités de club;*

D- Les expositions.

1) J.Fromentin : Puzzles géométriques.

2) J.Fromentin : Affiches sur fond noir.

3) F.Minot : Photomathons.

4) M. Dechoux : Exposition itinérante de la Régionale APMEP de Lorraine.

5) A. et S. Larroche : Epsilon Web.

6) Guillevic : Euclidiennes.

7) A.V.Lefort et P.H. Bonne t: Activités du club du Lycée Audiberti.

8) F. de Lit : activités au collège de Guitres.

9) D. Missenard : la conjecture $3n+1$.

10) D. Missenard : Calendriers au fil des âges.

11) J.-A.Roddier : Les cinq polyèdres réguliers convexes.

12) J.-A.Roddier : La racine carrée de 2.

13) J.-A Roddier : Le nombre Pi.

14) J.-A. Roddier : Les équations du second degré pour René Descartes.

15) J.-A.Roddier : L'Alhambra de Grenade et ses pavages.

16) R. Charbonnier : Petites histoires de calcul.

17) R. Charbonnier : Puzzles (Pythagore, polygones).

18) R. Charbonnier : Construction des racines carrées au compas d'après Mascheroni.

19) R. Charbonnier : Polyèdres.

20) IREM Clermont : Pavages à la Escher

21) F. Gaudel : Exploration mathématique (Pavages, fractales, polyèdres)

22) M Barthelet : Objets Géométriques.

ANIMATEURS

AUDIN Pierre, Palais de la Découverte, Paris, et MATH.en.JEANS,
BERNARD Pierre, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand II,
BRETTE Jean, Palais de la Découverte, Paris,
CHARBONNIER Robert, Collège de Maringues, Puy de Dôme, et IREM de Clermont-Fd,
DUCHET Pierre, CNRS Jussieu et MATH.en.JEANS,
FROMENTIN Jean, Collège de Niort et APMEP,
GAUDEL François, Lycée Bobigny et M.J.C. de Drancy,
HENNEQUIN Paul-Louis, Université Blaise Pascal, Clermont-Fd II et ANIMATH,
KAHANE Pierre, Université Paris XII Orsay,
MISSENARD Didier, Lycée d'Orsay et IREM Paris VII,
NOIRFALISE Robert, Université Blaise Pascal et IREM de Clermont-Fd,
RODDIER Jean-Alain, Lycée de Saint-Flour et IREM de Clermont-Fd,
TOUSSAINT Nicole, Collège d'Aix en Othe et APMEP,
ROUX Daniel, Université Blaise Pascal, Clermont-Fd II,
ROUX Dominique, Inspection Générale de Mathématiques.

VISITEURS

FORT Marc, Inspecteur Général,
PEROL Charles, IREM de Clermont-Ferrand,
COURBON Denise, IPR - IA,
BILGOT Jean-François, Lycée Simone Weil, Le Puy.

PARTICIPANTS

NOM Prénom	né le	Etablissement	adresse	ville	Académie
BAILLOU Annick	19 03 55	Lycée Elie Faure	1, Rue Jules Ferry	33305 LORMONT	BORDEAUX
BARTHELET		Collège		67850 HERRLISHEIM	STRASBOURG
BAVEREL Danièle	10 02 49	Lycée B.Pascal	5, Rue Emmurés	76100 ROUEN	ROUEN
BEN MOUSSA Nathalie	17 10 67	Collège Léo Lagrange	42, Av. Léo Lagrange	76600 LE HAVRE	ROUEN
BONNET Pierre-Henri	19 08 44	Lycée Audiberti	Bd. Pt. Wilson B.P.529	06631 ANTIBES Cedex	NICE
BORDE Pascal	02 06 66	Lycée B.Pascal	36, Av. Carnot	63000 CLERMONT-FD	CLERMONT-FD
BOUYER François	19 06 56	Collège B. Hendricks	B.P. 190	84106 ORANGE Cedex	AIX-MARSEILLE
BRULOIS Jean-Denis	29 11 58	Lycée Louise Michel	70, Av. Jean Jaurès	93000 BOBIGNY	CRÉTEIL
CAPDEVILLE Yvonne	24 01 49	Lycée collège	Esp P.Mendès-France	09200 SAINT-GIRONS	TOULOUSE
CASTELLA Isabelle	13 10 62	Cité Scolaire	75, Av Cavaignac	46300 GOURDON	TOULOUSE
CHABAUD Bernard	22 12 52	Collège Paul Gauthier	58, Av. Elsa Triolet	84300 CAVAILLON	AIX-MARSEILLE
COUSIN Annie	15 09 46	Collège Germinal	Av. du chateau B.P.45	59590 RAISMES	LILLE
DECHOUX Martine	02 02 54	Collège R. Schuman	Langenberg	57470 HOMBURG-HAUT	NANCY-METZ
DEHAYE Renaud	29 06 69	Lycée A.Varognaux	Rue Jean Moulin	54510 TOMBLAINE	NANCY-METZ
DURLEWANGER Jacqueline	18 03 45	Lycée Romain Rolland	21, Rte de Montmorency	95190 GOUSSAINVILLE	VERSAILLES
EMPRIN Fabien	18 07 72	Collège A. de St-Exupéry	Rte de Flavigny	51190 AVIZE	REIMS
EYNARD Danièle	25 07 55	Collège M.de l'Hospital	20, Bd. Desaix	63200 RIOM	CLERMONT
GUIBÉ Marie-Claude	28 01 55	Collège F. Chopin	1, Rue Robert Schuman	77012 MELUN Cedex	CRETEIL
HUGUEL Madeleine	10 01 44	L.P.O. Louise Weiss	Route du stade	68160 Ste Marie aux Mine	STRASBOURG
JULIEN Philippe	05 03 54	Lycée Jeanne d'Albret		78100 St Germain en Laye	VERSAILLES
LACAGE Michel	24 12 56	Collège Marie Curie	Rue des Condamines	34570 PIGNAN	MONTPELLIER
LAROSE Valérie	21 12 62	Collège Les Amonts	Rue de Vendée	91940 LES ULIS	VERSAILLES
LARROCHE Alain	09 10 57	Collège de la Sine	214, Chemin de la Sine	06140 VENCE	NICE
LEFEUVRE Philippe	24 08 55	Collège Alfred de Vigny	13, Route de Brassac	16250 BLANZAC	POITIERS
LEROY Nathalie	22 06 66	Collège de Kerolay	Rue Monistrol	56100 LORIENT	RENNES
LE RU Anne	07 02 56	Collège de Kerolay	Rue Monistrol	56100 LORIENT	RENNES
LETHIELLEUX Claire	13 11 52	Lycée Descartes	3, Rue de la préfecture	37010 TOURS Cedex 1	ORLEANS-TOURS
de LIGT Frédéric	30 04 62	Collège J.Aviotte	Grand-rue	33230 GUITRES	BORDEAUX
MARQUET Jean-Michel	15 01 55	E.R.E.A.	OPME	63540 ROMAGNAT	CLERMONT
MILLEREUX Ingrid	14 12 60	Lycée M.Genevoix	50, Bd de Poitiers	79300 BRESSUIRE	POITIERS
MINOT Francis	02 09 48	Lycée Verlaine	Rue docteur Gobinet	08300 RETHEL	REIMS
MOCCAND Eric	19 06 66	Lycée C. Renouvier	Route de Catillar	63500 PRADES	MONTPELLIER
MOREAU Ludovic	24 05 71	Collège F. Chopin	1, Rue Robert Schuman	77012 MELUN Cedex	CRETEIL
NEGRIER Bénédicte	10 08 70	Collège Victor Hugo	2, Allée Elsa Triollet	93160 NOISY-LE-GRAND	CRETEIL
NOAILLES Jacques	12 02 43	Lycée Montdory	Cité du Pontel	63304 THIERS Cedex	CLERMONT
PONTILLE Marie-Claude	01 11 48	Lycée Saint Exupéry	82, Rue Hénon	69316 LYON Cedex 04	LYON
QUAIN Annick	13 09 50	Collège V. Hugo	2, Allée Elsa Triollet	93160 NOISY-LE-GRAND	CRETEIL
SAINFORT Aude	13 10 57	Collège Anatole France		63360 GERZAT	CLERMONT
SOUNY Françoise	22 03 55	Collège et Lycée d'Amboise	11, Rue Mondésir	44015 NANTES Cedex	NANTES
TAQUET Marianne	10 07 72	Collège M. Javelly	Rue du collège	04500 RIEZ	AIX-MARSEILLE
TAQUET Christophe	30 12 71	Collège M.Javelly	Rue du Collège	04500 RIEZ	AIX-MARSEILLE
VINCENT Pascal	22 11 67	Lycée Ch. de Gaulle	23, Rue Paul Cézanne	56000 VANNES	RENNES
WINISDOERFFER Catherine	20 01 53	Institution St-Jean	3, Rue St-Jean	68000 COLMAR	STRASBOURG
YONNET Patricia	10 11 47	Lycée E. d'Orves	13, Av. E.d'Orves	06000 NICE	NICE

LES ATELIERS

ATELIER N° 1 :

Pierre AUDIN - Pierre DUCHET

"MATH.en.JEANS ET SITUATIONS DE RECHERCHE"

Texte préparatoire envoyé avant l'U. E. à tous les participants.

Le but général de l'atelier est la construction *a priori* d'un projet concret de terrain.

A) Vivre une situation-recherche.

Cette phase concernera tous les stagiaires. Elle vise à sensibiliser à l'activité de recherche et à présenter un dispositif qui permet de l'organiser pour des élèves. Les participants seront eux-mêmes placés en situation de recherche, qui donnera lieu à une mise en commun et une synthèse. La conduite de l'atelier illustrera la démarche "MATH.en.JEANS", dont les caractéristiques seront explicitées (exposé, documents).

B) Comprendre et organiser des situations recherches.

Cette phase ne concernera que ceux qui vont "choisir" notre atelier et donnera lieu à la réalisation d'un projet par les stagiaires; elle permettra

- de "conclure" l'activité de recherche de la première phase et de discuter du dispositif général "MATH.en.JEANS", de ses motivations, de ses adaptations possibles.
- d'approfondir la réflexion sur les situations de recherches (intérêt, fonctionnement, contrôle) et sur leur mise en place effective.

Les stagiaires, à partir de l'étude de travaux et manuscrits d'élèves (principalement réalisés dans "MATH.en. JEANS"), prépareront une contribution à la synthèse finale de l'UE autour de la question :

"L'existence d'un club de mathématiques dans l'établissement favorise-t-il ou handicape-t-il l'enseignement des mathématiques ?".

Trois thèmes de réflexion seront proposés.

B1. Quels apprentissages permet la recherche ?

Les connaissances développées à l'occasion d'une situation de recherche sont peu développées dans la classe usuelle et ont donc du mal à être "institutionnalisées". Il s'agit notamment de savoirs "transversaux" (modélisation, preuve,...) réinvestissables à tous les niveaux de l'enseignement et au delà. Le travail des stagiaires portera sur la capacité des élèves à construire une "théorie mathématique locale", à la fois rigoureuse et intuitive. (voir Exercice 1).

B2. La régulation (gestion) d'atelier :

La présentation de sujets. Les rôles des enseignants et du chercheur. Comment aider les élèves sans faire à leur place ? Comment intervenir sans tuer la recherche ? Comment orienter guider ou contrôler sans corriger ? Comment animer un débat scientifique ? Comment aborder la phase "Congrès" et aider à la rédaction d'articles ?

B3. L'articulation club-enseignement.

Les retombées dans l'établissement, dans la classe. Pistes : Le club comme expérimentation/test d'activités intéressantes, ultérieurement possibles en classe ? La classe comme incitative à la participation à un club ? Mise au point en club d'un travail réalisé en classe ? Tutorat interne à la classe : participation des élèves de club à l'enseignement en classe ? Exposé en classe de travail de club ? Classe "mixte" (travail de type club encadré en classe) . Une place différente pour le cours "traditionnel" ? Un rôle différent ? Exercices ? Élèves en difficulté ?

C) Lectures conseillées avant l'université d'été.

G. Polya, How to solve it, Princeton University Press 1957. (De nombreuses rééditions existent, même en français : "Comment poser et résoudre un problème ?")

Des exercices étaient proposés avant l'Université d'été. Pour les exercices 2 à 7, notre objectif était de faire réfléchir chacun à la nature de l'exercice étudié. L'exercice 1 a été rencontré en situation réelle avec des élèves, son étude était donc préparatoire à l'activité MATH.en.JEANS elle-même. L'exercice 8 n'en était pas un, il servait surtout à permettre de "distancier" pour tous ceux qui auraient "séché" dans les précédents.

1. On cherche les plus longs parcours d'un cavalier sur un échiquier quelconque, en évitant que le cavalier s'arrête deux fois sur la même case. Peut-on prouver que des cavaliers "traceurs" (= qui marquent leur trajet sans pouvoir le croiser ultérieurement) peuvent faire aussi bien que des cavaliers "sauteurs" (= ceux du jeu d'échecs usuel) ?

NB : en attendant d'avoir une solution élégante de Pierre Duchet, voici ce que propose Pierre Audin (sous sa seule responsabilité).

On cherche à relier par un trait continu (la "trace" du cavalier) tous les centres des cases, dans l'ordre de parcours. Ces 64 points sont (par exemple) numérotés de 1 à 64 dans l'ordre de rencontre. On a donc un parcours simple à décrire : de 1 à 64 (ce qui est moins simple, c'est de trouver quel numéro porte chaque point).

De 1 à 2 : il y a 62 points à éviter, mais il n'est pas très compliqué d'aller de 1 à 2 d'un trait continu.

De 1 à 3 : il reste à compléter de 2 à 3 ce qui avait déjà été fait à l'étape précédente. Il y a moyen de tracer un trait continu de 2 à 3 sans rencontrer le trait déjà tracé ni les 62 autres points.

De 1 à 4 : il reste à compléter de 3 à 4 ce qui avait déjà été fait à l'étape précédente. Il y a moyen de tracer un trait continu de 3 à 4 sans rencontrer le trait déjà tracé ni les 62 autres points.

((Je ne suis pas vraiment sûr qu'il faille se référer à la récurrence pour conclure : il n'y a que 63 étapes (voire 64 si on cherche à "boucler" de 64 à 1) et "etc" ne renverrait pas à l'infini, mais au fait qu'il est fastidieux d'écrire 63 paragraphes quasi-identiques, même avec copier-coller.))

etc !!

remarques :

- dans la pratique, ça ne sera pas toujours simple de passer de i à $i+1$ (il risque d'y avoir des tours et des détours) mais il y aura toujours la place de passer pour un crayon d'épaisseur 0 ;
 - à chaque étape il y a beaucoup de choix possibles pour tracer, et cette façon de faire n'est sans doute pas celle qui donne le tracé le plus court ! (sauf accident, ou chance) ;
 - on peut adapter cette façon de faire à un échiquier de n'importe quelle taille, mais aussi de n'importe quelle forme (carré, rectangle ou autre, avec ou sans trous) tant qu'on reste dans le plan et que le cavalier sauteur sait faire le parcours.
-

2. Pour un triangle équilatéral, on considère le cercle inscrit et le cercle circonscrit.

a) calculer le rapport de leurs rayons ;

b) calculer le rapport de leurs aires.

(type classe)

Il vaut mieux traiter d'abord la deuxième question, en remarquant que le cercle inscrit est aussi circonscrit au triangle de côté moitié qui apparaît quand on partage le triangle initial en quatre triangles équilatéraux plus petits. La surface du grand triangle est quatre fois celle du petit, le cercle circonscrit délimitait donc une aire quatre fois plus grande que celle délimitée par le cercle inscrit, et celui-ci a donc un rayon moitié de celui-là. On peut aussi faire des calculs.

3. Quel est le plus petit entier n tel que $n!$ soit divisible par 990 ?

7 9 11 13 15

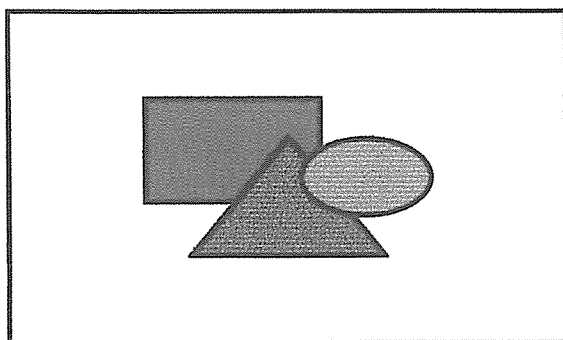
(type Kangourou, proche de la classe)

$990 = 9 \times 10 \times 11$, il ne divise pas $n!$ si $n < 11$ et il divise $n!$ si $n = 11$ ou $n > 11$. La bonne réponse est 11. Il suffit de savoir ce qu'est un nombre premier et de connaître la décomposition d'un nombre en produit de nombres premiers.

4. The incenter of the triangle ABC is K. The midpoint of AB is C_1 and that of AC is B_1 . The lines C_1K and AC meet at B_2 , the lines B_1K and AB at C_2 . If the areas of the triangles AB_2C_2 and ABC are equal, what is the measure of angle CAB ?

(type rallye, traduction approximative :) K est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. Le milieu de AB est C_1 et celui de AC est B_1 . Les droites C_1K et AC se coupent en B_2 , les droites B_1K et AB en C_2 . Si les aires des triangles AB_2C_2 et ABC sont égales, que peut-on dire de la mesure de l'angle CAB ?

Soient $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $b^* = C_2A$, $c^* = AB_2$, $s = (a + b + c) / 2$, r = le rayon du cercle inscrit dans ABC. Pour ne pas alourdir les écritures (surtout en html) je



noterai simplement ABC l'aire du triangle ABC. (La multiplication sera notée $\times$.)

$$AC_1B_2 = ABC \times (AC_1 \times AB_2) / (AB \times AC) = (c^* \times r \times s) / (2 \times b)$$

$$AKB_2 = c^* \times r / 2$$

$$AC_1K = c \times r / 4$$

On a donc $(c^* \times r \times s) / (2 \times b) - c^* \times r / 2 = c \times r / 4$, c'est-à-dire :

$$c^* / b - c^* / s = c / (2 \times s)$$

Donc $(a - b + c) \times c^* = b \times c$. De même, $(a + b - c) \times b^* = b \times c$.

Comme $b^* \times c^* = b \times c$, on en déduit :

$$a^2 - (b - c)^2 = b \times c,$$

$$\text{i.e. } (b^2 + c^2 - a^2) / (2 \times b \times c) = 1 / 2.$$

Or le membre de gauche est $\cos A$, donc $A = 60^\circ$.

remarque : si vous avez compris ce qui se passe à la seule lecture de ces calculs, bravo.

5. Two players A and B play a game in which they choose numbers alternatively according to the following rule.

At the beginning, an initial natural number $n_0 > 1$ is given.

Having known n_{2k} , the player A may choose any $n_{2k+1} @ N$ such that $n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq (n_{2k})^2$.

Then the player B chooses a number $n_{2k+2} @ N$ such that $n_{2k+1} / n_{2k+2} = p^r$ where p is a prime number and $r @ N$.

It is stipulated that player A wins the game if he (she) succeeds in choosing the number 1990, and player B wins if he (she) succeeds in choosing 1.

For which initial n_0 the player A can manage to win the game, for which n_0 player B can manage to win, and for which n_0 players A and B would go to a tie ?

(type olympiades ou concours général, traduction approximative :)

Deux joueurs A et B jouent à un jeu dans lequel ils choisissent des nombres chacun son tour en respectant les règles suivantes.

Pour commencer, un entier naturel $n_0 > 1$ est donné comme valeur de départ.

S'il connaît n_{2k} , le joueur A peut choisir n'importe quel n_{2k+1} dans N à condition que $n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq (n_{2k})^2$.

Puis c'est au tour du joueur B de choisir un nombre n_{2k+2} dans N de sorte que $n_{2k+1} / n_{2k+2} = p^r$ où p est un nombre premier et r est dans N .

On précise que le joueur A remporte le jeu si il (elle) réussit à choisir le nombre 1990, et le joueur B gagne si il (elle) arrive à choisir 1.

Pour quelles valeurs de départ n_0 le joueur A peut-il gagner contre toute défense, pour quelles valeurs n_0 le joueur B peut-il gagner contre toute défense, et pour quels n_0 les joueurs A et B iront-ils au nul ?

Notons W l'ensemble de tous les entiers naturels n_0 tels que commençant avec n_0 , le joueur A puisse s'arranger à gagner le jeu. On a le lemme suivant :

Lemme : Supposons que $m, m+1, \dots, 1990$ sont dans W , que $S < 1991$, et que $S / p^r > m-1$, où p^r est le plus grand facteur de S tel que p soit premier et r dans N . Alors tous les entiers naturels n_0 tels que $n_0 < m$ et $(n_0)^2 > S-1$ sont dans W .

Preuve du lemme : commençant avec un tel n_0 , le joueur A choisit $n_1 = S$. Alors le joueur B doit choisir un entier naturel n_2 obligatoirement coincé entre S / p^r et S , et donc entre m et 1990 . n_2 est donc dans W , et le joueur A pourra s'arranger à gagner. Le lemme est démontré.

Comme $45^2 = 2025 > 1990$, il est clair que tous les n_0 tels que $44 < n_0 < 1991$ sont dans W . Avec $m = 45$ et $S = 420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$, on satisfait les hypothèses du lemme et donc 21, 22, ..., 44 sont aussi dans W . Appliquant à nouveau le lemme avec $m = 21$ et $S = 168$, on obtiendra 13, 14, ..., 20 dans W aussi. Puis 11 et 12 avec $m = 13$ et $S = 105$; 8, 9 et 10 avec $m = 11$ et $S = 60$.

Il ne vous reste plus qu'à prouver qu'en fait, avec n_0 au delà de 1990, A gagne encore, qu'en dessous de 6, c'est B qui gagnera, et qu'avec 6 ou 7, A devra choisir 30 ou 42, que B choisira 6, et que l'un et l'autre refusant de perdre, on aura 30, 6, 30, 6, 30, 6, 30, ... qui conduit au nul.

remarque : html se prête mal aux calculs, il reste à les faire en images, ou à vous les laisser faire ; c'est cette solution qui me coûte le moins d'efforts ...

6. Des personnes résident dans des endroits différents. Où choisir un lieu de réunion afin de minimiser le total des frais de déplacements ?

(type MATH.en.JEANS, recherche "junior")

Voir actes MATH.en.JEANS 1996, pages 271 à 276, article "Distance minimale".

Voir aussi [la présentation de ce sujet dans les actes MATH.en.JEANS 1997](#).

7. Etudier le mouvement de la terre en considérant qu'elle subit les seules influences de Jupiter et du soleil. (Les données numériques nécessaires seront prises dans une encyclopédie, par exemple.)

(type recherche professionnelle)

Si vous êtes en mesure de répondre complètement à ce problème, quelles que soient les données numériques, vous avez résolu "le problème à trois corps", il est urgent de montrer votre réponse à des spécialistes et de publier, ou de procéder comme Andrew Wiles.

8. En venant à cette université d'été :

a) de quoi avez-vous peur ?

b) de quoi avez-vous envie ?

(c'était juste une enquête)

Voir les [réponses des quatre groupes](#) de la phase 1.

Note : les exercices 4 et 5 (et les solutions proposées ci-dessus) sont en fait extraits du même ouvrage : "31st International Mathematical Olympiad, Beijing China 1990", edited by Chinese Mathematical Olympic Committee, (c) 1991 Shandong Education Publishing House (People's Republic of China).

- Première phase -

La première phase consistait à faire prendre connaissance aux participants du contenu de l'atelier. Il y avait quatre groupes, il y eut donc quatre "première phase" dans chaque atelier. "Le" démarrage de la séance prenait pour prétexte la correction des exercices proposés avant l'Université d'été, essentiellement constituée à rassembler les réponses à l'exercice 8 :
En venant à cette université d'été :

- a) de quoi avez-vous peur ?
- b) de quoi avez-vous envie ?

{PRIVATE}peurs	envies
exercices difficulté compétition recrutement jumelage thème ?	-> collègue public élèves en difficulté motivation rôle du professeur dispositif recrutement
Anglais difficulté (pas capable)	donner ouverture aux élèves STT tout public
de rien isolement absence de motivation investissement perso ne pas dominer	des idées pour la classe et pour le club renouvellement des contacts utilité motivation a priori
de rien mauvais sujets pas savoir faire investissement perso	MATH.en.JEANS organisation

Cette première phase a sans doute été vécue sensiblement de la même façon par tous les participants, puisque pour la deuxième phase, les participants venaient en même proportion des quatre groupes : il suffit d'inventer une loi des trop petits nombres biaisés, à partir des

effectifs 4, 2, 3, 3.

Quelques réponses ont pu être données, avec en particulier distribution de quelques exemples de sujets et d'un exemplaire des actes de l'un des congrès MATH.en.JEANS ; un temps a été réservé à la mise en recherche des participants, sur le sujet "Communiquer dans une grille".

- Deuxième phase -

Synthèse du mardi matin :

Travail en petits groupes en 3 étapes sur 2 thèmes successifs :

1. Chacun se fait sa propre opinion sur le problème.
2. Débat sur ce qui a été trouvé en petits groupes et synthèse des travaux du groupe.
3. Synthèse de chaque groupe présentée à l'ensemble des participants à l'atelier.

Premier thème : travail sur la preuve.

Etude de la réponse donnée par un étudiant de DEUG à un problème qui lui était posé.

Questions :

1. Sa preuve est-elle juste ?
2. Quel serait le retour que l'on donnerait à l'étudiant ?

Deuxième thème : travail sur la définition.

On nous propose une feuille sur laquelle il y a plusieurs définitions d'un même "TRUC". Questions :

1. Qu'est un TRUC ?
2. Rédiger la partie d'un cours de maths introduisant cette notion.

TRAVAIL SUR LA PREUVE. Voir le texte proposé à la réflexion des stagiaires.

((Note de PA : vous pouvez consulter ... l'article paru dans les "actes 1997" et aussi <http://www.mathsoft.com/asolve/constant/sofa/sofa.html>))

TRAVAIL SUR LA DEFINITION.

Mercredi matin, dernière séance, durée 1h30 :

La séance a essentiellement consisté à faire le point et à tenter de répondre (groupe par groupe) aux questions restant à chacun : une liste avait été demandée aux stagiaires concernant les questions qui avaient été réglées et les questions qui ne l'avaient pas été, pour chacun. Les "résultats" de cette séance font l'objet de la première colonne, intitulée "stagiaires" dans le menu :

Compte-rendu final de Pierre Audin, 27 septembre 1999.

Le but général de l'atelier était la construction *a priori* d'un projet concret de terrain.

A) Vivre une situation-recherche.

Cette phase a concerné tous les stagiaires.

Elle visait à sensibiliser les stagiaires à l'activité de recherche et à leur présenter un dispositif qui permet de l'organiser pour des élèves. Les participants ont été placés en situation de recherche. Les caractéristiques de la démarche "MATH.en.JEANS" ont esquissées. Répétée en quatre éditions d'une durée de 1h30mn, cette première phase a été éprouvante pour nous, puisqu'elle a été bien sûr trop courte les quatre fois, et nous laissait très insatisfaits. Les stagiaires ont cependant très bien vécu ces "premières phases" qui leur ont permis de choisir "en connaissance de cause" l'atelier qu'ils allaient approfondir. Ils se sont spontanément partagés en quatre groupes d'égale effectif, et, en ce qui nous concerne, les participants de la deuxième phase étaient également répartis dans les quatre séances de la première phase.

B) Comprendre et organiser des situations recherches.

Cette phase n'a concerné que ceux des stagiaires qui ont choisi notre atelier. Elle a donné lieu à la réalisation d'un projet par la plupart des stagiaires, soit par la mise en place concrète d'un club dès la rentrée 1999, soit par la préparation d'une mise en route pour l'année scolaire 2000/2001. Elle a permis :

- de poursuivre l'activité de recherche de la première phase ;
- de discuter du dispositif général "MATH.en.JEANS", de ses motivations, de ses adaptations possibles ;
- d'approfondir la réflexion sur les situations de recherches (intérêt, fonctionnement, contrôle) et sur leur mise en place effective ; tous les stagiaires ont été mis en situation d'élèves, l'un d'eux ayant aussi dû jouer le rôle de l'enseignant en situation de club.

Les stagiaires ont travaillé aussi à partir de l'étude de travaux et manuscrits d'élèves (principalement réalisés dans "MATH.en.JEANS"), de façon à traiter les problématiques suivantes :

1. Quels apprentissages permet la recherche ?

Les connaissances développées à l'occasion d'une situation de recherche sont peu développées dans la classe usuelle et ont donc du mal à être "institutionnalisées". Il s'agit notamment de savoirs "transversaux" (modélisation, preuve,...) réinvestissables à tous les niveaux de l'enseignement et au delà. Le travail des stagiaires portera sur la capacité des élèves à construire une "théorie mathématique locale", à la fois rigoureuse et intuitive.

2. La régulation (gestion) d'atelier :

La présentation de sujets. Les rôles des enseignants et du chercheur. Comment aider les élèves sans faire à leur place ? Comment intervenir sans tuer la recherche ? Comment orienter guider ou contrôler sans corriger ? Comment animer un débat scientifique ? Comment aborder la phase "Congrès" et aider à la rédaction d'articles ?

La question "L'existence d'un club de mathématiques dans l'établissement favorise-t-il ou handicape-t-il l'enseignement des mathématiques ?" n'a été qu'abordée, faute de temps pour mener le programme ambitieux que nous nous étions fixé. Restent posées pour une prochaine université d'été les questions suivantes, qui n'ont été que posées :

Les retombées dans l'établissement, dans la classe. Le club comme expérimentation/test d'activités intéressantes, ultérieurement possibles en classe ? La classe comme incitative à la participation à un club ? Mise au point en club d'un travail réalisé en classe ? Tutorat interne à la classe : participation des élèves de club à l'enseignement en classe ? Exposé en classe de travail de club ? Classe "mixte" (travail de type club encadré en classe) . Une place différente pour le cours "traditionnel" ? Un rôle différent ? Exercices ? Elèves en difficulté ?

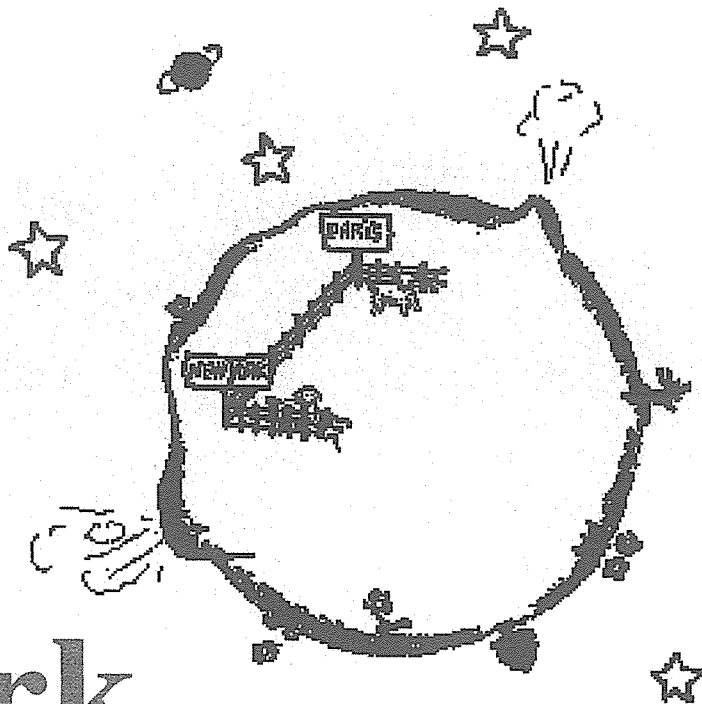
Nous sommes prêts à participer à une future Université d'été qui nous permettrait de centrer l'atelier sur ces questions. Si l'atelier n'a pas cette fois-ci permis d'épuiser toutes nos ambitions, il n'a pas épuisé non plus les participants puisque plusieurs participants passent dans le concret dès maintenant, malgré la proximité entre l'Université d'été et la rentrée scolaire. Les contacts ne sont pas rompus à l'issue de l'Université d'été, grâce au téléphone et au courrier électronique. Un petit réseau (douze participants à l'atelier) s'est donc constitué.

Paris

et

New York

sont-ils les coins d'un carré ?



Dessin M. Pouchain, d'après Le Petit Prince de Saint-Exupéry

Partant de Paris en avion, vous allez tout droit à New York (5000km). Sans vous arrêter, vous tournez d'un quart de tour à gauche. Vous parcourez encore 5000 km et tournez encore à gauche. Vous recommencez : 5000 km, puis à gauche. Vous faites encore 5000 km. Où êtes-vous ?

(méfiez-vous : malgré les apparences, la Terre est ronde !)

La Terre est ronde ... et son espace est fini. Mais la courbure de la surface fait que certaines promenades ne se terminent jamais : imaginez que vous sortiez de chez vous et avanciez devant vous, toujours "tout droit", continuant ainsi sur des milliers et des milliers de kilomètres...

Que se passera-t-il ?

Comment faire de la géométrie sur la Terre ? Sur une sphère, que deviennent objets et figures de la géométrie plane ?

Y a-t-il encore des carrés ? Faut-il trouver de nouvelles règles ?

I Vous pouvez vous lancer dans ce problème en utilisant des oranges, des balles ou des ballons pour y tracer des figures. Vous connaissez quelques principes géométriques concernant des figures simples : droites, segments, carrés, cercles, triangles, etc. Sur une sphère, qu'est-ce qui est pareil, qu'est-ce qui est différent ? Essayez de voir, puis d'expliquer ce qui se passe. Discutez-en.

I Comment faire pour aller tout droit ? Et pour mesurer ? Laissez voguer votre imagination, et méfiez-vous de vos intuitions : ce dont vous êtes sûr n'est peut-être plus vrai sur une sphère ! Si la géométrie habituelle ne marche pas, n'hésitez pas à inventer votre propre géométrie, avec d'autres règles et d'autres mots, que vous trouverez vous-même. Pour être sûr de quelque chose, prouvez-le !

I La devinette suivante peut peut-être vous aider.

Un explorateur capture un ours. Laisant l'ours sur place, il fait 1km vers le sud puis 1 km vers l'est, enfin un 1 km vers le nord. Il se retrouve alors nez à nez avec l'ours qu'il avait capturé, et qui n'a pas bougé ! La question est : de quelle couleur est l'ours ?

Evaluer les aires et les longueurs des champs, trouver son chemin, faire des cartes, construire des routes et des bâtiments... en bref, organiser l'espace de la Terre, tel fut le travail des premiers géomètres de l'Antiquité (et ce métier existe toujours, d'ailleurs). Le mot "géométrie" vient du grec γη («gè»), la Terre, et μετρον («mètron»), mesurer. Euclide (-306 à -283) énonça des règles simples, appelées axiomes, permettant de concevoir et d'étudier les figures planes au moyen du seul raisonnement. Améliorée au fil des temps, l'oeuvre d'Euclide est devenue la "géométrie euclidienne", celle qui est étudiée de nos jours à l'école ; elle s'accorde bien à la croyance ancienne d'une terre plate et à la vision "classique" du monde (qui permet de belles prouesses, comme l'envoi d'une sonde sur Mars...).

Dans les géométries non-euclidiennes, intuitivement, «les droites sont courbes». Découvertes par Gauss, Bolyai, et Lobachevski, dans la première moitié du 19^{ème} siècle, ces géométries furent très contestées. Leur existence, pourtant bien illustrée par la surface terrestre, ne fut vraiment admise que lorsqu'on réussit le tour de force de les imiter parfaitement avec les seuls moyens de la géométrie euclidienne ! [travaux de Hilbert, Klein, Poincaré, au début du 20^{ème} siècle]

De nos jours, ces géométries différentes, auxquelles Riemann (1826-1866) donna un cadre théorique général, sont couramment utilisées pour comprendre les espaces courbes ; une idée essentielle consiste à penser une courbe comme un plus court chemin. Ainsi se représente-t-on le trajet de particules très rapides ou le parcours de la lumière dans l'espace et le temps ou, plus simplement, dans des verres progressifs ou des fibres optiques. Ainsi donne-t-on un sens précis à la question : «notre univers est-il fini ou infini ?». Cette question est étroitement liée à nos conceptions de l'espace-temps et de "sa courbure" ; étudiée à l'aide de mathématiques par les astronomes et les astrophysiciens, elle est toujours ouverte...

Paris et New York sont-ils les coins d'un carré ?

situation-recherche, 14 à 24 séances.



Objectifs

Faire découvrir les finalités de la géométrie (en particulier son rôle de modèle du monde réel) et les principes de son fonctionnement (en particulier le rôle des définitions et des preuves). La recherche peut (re)donner aux élèves le goût de l'étude géométrique.

On pourrait penser qu'une réflexion non-euclidienne puisse semer le trouble dans des esprits encore peu férus de géométrie et qu'une telle étude ne doive pas être abordée avant que les principes de la géométrie plane soient bien intégrés. L'expérience prouve au contraire, qu'en collège comme au lycée, on peut utiliser une situation-recherche de ce type pour une mise en place solide de la géométrie euclidienne et des notions des programmes scolaires.

Prérequis

Point, cercle, sphère, droite, segment, longueur d'un segment, carré.

Concepts en jeu

Espace géométrique et concepts sous-jacents (figure, parallèle, perpendiculaire, nombre réel, mesure (distance, longueurs, aires & sphère, cercle), transformations, dimension (repères...), axiomes). Fonctions (& courbe, surface, continuité, limite...)

Notions problématiques

Carré, angle droit, médiatrice, cercle, inégalité triangulaire, longueur d'un arc de cercle, distance, aires sphériques, π , géodésique, méridiens et parallèles.

Aides possibles

- Quels phénomènes sont liés à la rotondité de la Terre et comment s'en apercevoir ? (noter par exemple, la différence horaire des levers de soleil sur le même méridien entre le nord et le sud de la France).
- Le plus court chemin sur une surface est-il toujours plan ? Exemple du cube, de la sphère. Quelles surfaces ont des géodésiques planes ? Explorer d'autres espaces "courbes" ou "bizarres" (Cylindre, cône, Ruban de Möbius, Tore, selle de cheval, etc.).
- Sur une sphère les triangles sont déterminés par leurs angles ! Sur une sphère de rayon r , l'aire d'un triangle sphérique dont les angles valent a , b et c est $S = (a+b+c-\pi)r^2$, une formule due à Girard, généralisée par Gauss.
- Que devient le théorème de Pythagore sur la sphère ; quelle est l'aire d'un carré sphérique ?
- Constructions sur la sphère : milieu, bissectrice, médiatrice ... ; hauteurs d'un triangle (concurrentes ?)



- 3 Géométrie par les formules.
- 4 Plus court chemin hétérogène.
- 5 Cartographie.
- 6 Le problème du Jardinier.

- Géographie, économie (cartographie, lignes maritimes et aériennes)
- Histoire (le Nouveau Monde, grande découvertes, instruments de navigation...)
- Philosophie (rotondité de la Terre, Copernic, Galilée, concept de modèle...)
- Technologie : conception et réalisation en atelier de boules et de balles, d'instruments de dessins ou de repérage sur les sphères.



CARRÉ, SPHERE,
INVERSION, GÉOMÉTRIE, HILBERT



axiome, conjecture, courbe, espace,
longueur, loxodromie.



Compas, équerre et rapporteur (transparent). Un cordeau peut servir de règle. Mappemonde gonflable du commerce.



[1] D. Gaud, J. Guichard, J.-P. Sicre, J. Souville, *Sur les géométries non euclidiennes, Documents pour travaux interdisciplinaires philo-math.*, Brochure IREM de Poitiers, Juin 1995. (IREM Poitiers : 40 av. du Recteur Pineau, 86022 POITIERS CEDEX, tél. 0549453877).

[2] J.-P. Petit, *Le géométricon*, Belin, Paris, 1991.

[3] J.-P. Petit, *Le trou noir*, Belin, Paris, 1981. +



Courbure des surfaces riemanniennes (formule de Gauss-Bonnet).

Déroulement

La recherche peut avancer dans deux directions distinctes et complémentaires. Soit la géométrie euclidienne est un outil d'investigation de la sphère (point de vue extrinsèque), soit ce sont les principes mêmes de la géométrie euclidienne qui viennent en discussion et on essaye alors de construire une autre géométrie en cherchant de nouveaux principes applicables à la sphère (point de vue intrinsèque). L'interaction entre les deux point de vue est forte et chacun conduit à un réel questionnement sur la démarche scientifique et sur la nature du travail mathématique : les concepts les plus "élémentaires" viennent nécessairement en discussion. Le fait qu'un élève s'écrie « mais alors qu'est-ce que c'est qu'une droite ? Je ne comprends plus rien du tout ! » loin de constituer un échec, atteste au contraire qu'une question essentielle a été comprise et que le processus de prise de connaissance est en bonne voie.

- * Sur l'accompagnement de la recherche et le désir de preuve, voir les commentaires du document *Carré*.

Remarque — La géométrie non-euclidienne de la sphère est peu utilisée telle quelle (elle porte le nom barbare de "géométrie doublement elliptique"). On préfère la géométrie ("simplement") elliptique où les points antipodaux sont identifiés deux à deux (espace appelé "plan projectif").



Modèle de Klein de la géométrie sphérique.

On peut mettre la sphère à plat (projection stéréographique: voir *Inversion*). Le procédé permet de faire de la géométrie sphérique dans le plan, les géodésiques devenant des cercles ! On peut étudier alors de manière systématique les constructions des "segments" (arcs de cercle), des "perpendiculaires" (cercles orthogonaux), des "cercles" (qui sont encore des cercles !!), etc. : l'utilisation de macro-constructions correspondant aux nouvelles constructions de base permet alors d'expérimenter la géométrie sphérique.

Modèle de Poincaré (géométrie elliptique)

Un demi-plan bordé par une droite "horizon" de référence, dans lequel les "droites" sont les demi-cercles centrés sur l'horizon ainsi que les *demi-droites* perpendiculaires à l'horizon et dont l'origine est sur lui.

Un cube

Pour faire de l'ombre il faut seulement de la lumière et un objet lui faisant obstacle. Ainsi se met-on à l'ombre d'un parasol ; lors d'une éclipse de Soleil, la Terre entre dans l'ombre de la Lune... L'ombre est alors volume.

Pour voir une ombre, il faut ajouter un révélateur de sa présence, un écran. Quand le soir tombe, les ombres s'allongent sur le sol ; sous l'éclairage des lampes, l'écran des murs s'ornent de flaques aux contours énigmatiques. L'ombre est alors devenue surface, tâche, silhouette.

Convenons que l'ombre d'un objet sera ce qui est commun aux "ombres-volume" et aux "ombres-surface" : quelle partie de la lumière butera sur l'objet ? Ce qu'il nous importe de savoir, c'est quel rayon de lumière sera arrêté, et quel autre ne le sera pas.

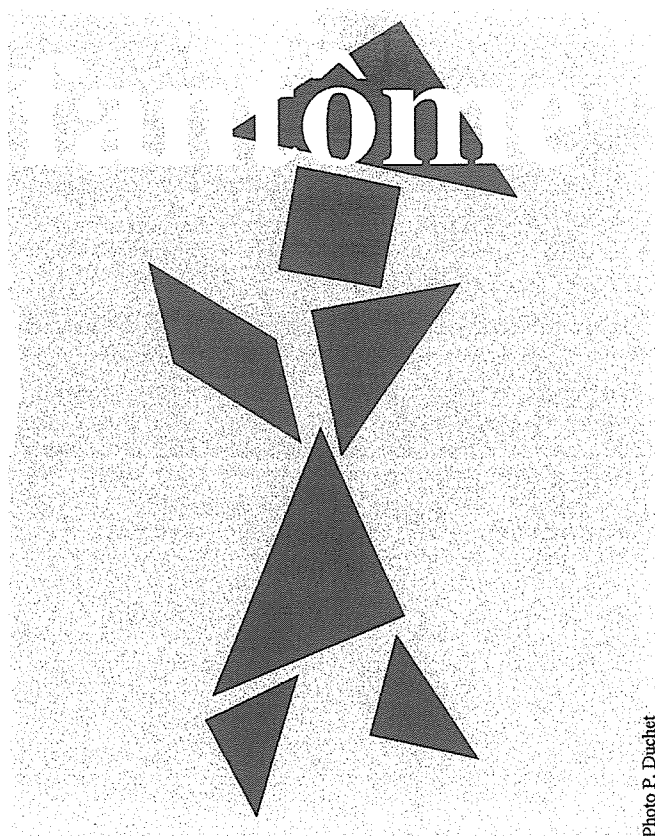


Photo P. Duchet

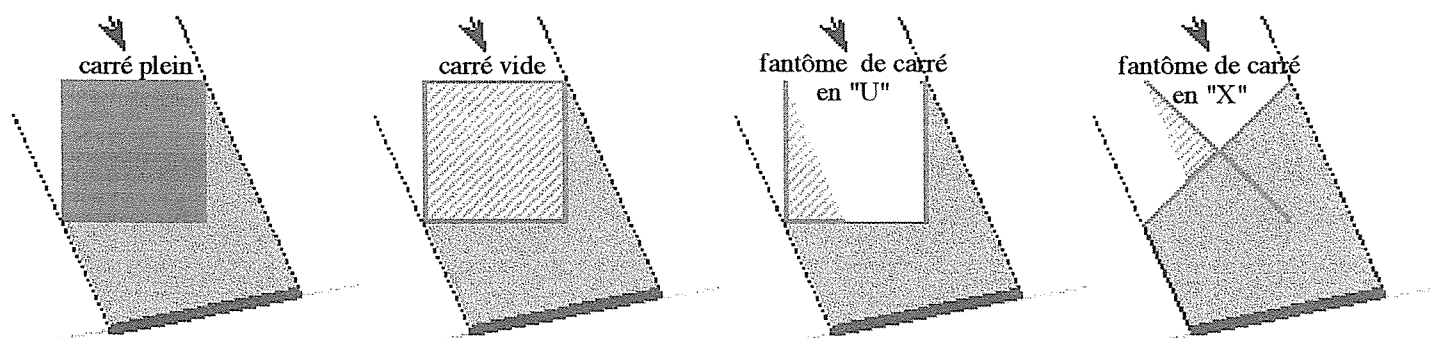
Comment concevoir avec le moins de matière possible un objet projetant la même ombre qu'un cube, quelle que soit la direction de l'éclairage ?

Un objet qui a la silhouette d'un cube, les apparences d'un cube, les contours d'un cube mais qui n'est pas un cube... Ce que nous cherchons à construire c'est un objet qui, en tant qu'obstacle de la lumière, se comporte exactement comme un cube : un fantôme, un leurre. Autant vous rassurer, les mathématiciens cherchent encore une réponse à cette question. Voici quelques pistes possibles.

On peut s'intéresser aux ombres elles-mêmes. Exemple : parmi ces formes planes,



lesquelles peuvent provenir d'un cube ?



L'étude des formes, du point de vue des contours et des ombres, abonde en questions non résolues, comme celle du cube fantôme. Ainsi, physiciens et mathématiciens s'intéressent-ils aux surfaces de contour fixé les plus "tendues" possibles : on en a un exemple physique en plongeant une boucle de fil de fer dans de l'eau savonneuse. Ces "surfaces minimales" apparaissent dans de nombreux domaines (champ de forces en physique, formes de membranes cellulaires, sculptures minimales en architecture...).

Existe-il dans notre espace un solide dont l'ombre peut adopter n'importe quelle forme convexe ? Nul ne le sait. Les études géométriques sur les ombres remontent à l'antiquité. Ne dit-on pas que c'est en observant son ombre que Thalès trouva son théorème ? Le dessin exact des ombres en peinture a marqué la période de la Renaissance. Monge (1746-1818) utilisa deux projections pour décrire "à plat" la position précise d'objets dans l'espace ("géométrie descriptive"). Actuellement beaucoup de techniques d'observation médicale exigent de savoir reconstituer les formes à partir d'ombres, plus ou moins contrastées (rayons X, RMN).

2

Un cube fantôme

situations-recherche (≥ 8 séances)
situations-problème 6 séances
travaux dirigés (collège)
étude dirigée, exercices (Lycée)
TIPE (Classes préparatoires)



Objectifs

Organisation d'une réflexion vaste et argumentative sur un problème ouvert qui paraît pourtant très accessible. Mise en oeuvre de cadres et de procédur

Prérequis

cube, droite, point, physique élémentaire de la lumière.
+ ((surface, fonctions et dérivation, aires courbes))

Concepts en jeu

ensemble, transformation géométrique, direction, plan, angle, bord, surface, tangente, connexité, convexité, mesure, distance, ((différentielles, intégrales)).

Notions problématiques

notions élémentaires de géométrie dans l'espace, perspective, Thalès, contour apparent, séparatrice ombre-lumière, transformations (projections, applications affines), paramétrisation d'une fonction (cf. [3]), inégalité triangulaire, cosinus, arbres, ((aire d'une surface, équations différentielles et intégrales)).

Aides possibles

- Vision d'un corps comme intersection des volumes cylindriques basés sur ses ombres.
- Mise au point sur la lumière et sur l'ombre (projection parallèle vs projection radiale; ombre orthogonale et ombres obliques)
- Rôle de la convexité (points *exposés*), de la connexité.
- Corrélation 2D — 3D. Identification des ombres possibles du cube (+ notion de transformation affine).
- Discussion du cas 2 dimensionnel du triangle (point de Toricelli, cf. fiche [3])
- Le cas du tétraèdre est-il plus simple ?
- Utilisation systématique de certaines caractéristiques de la solution pour 3 points pour le cas des polygones.
- Comment mesurer une aire courbe ?
- Quelle est la forme et l'aire maximale de l'ombre d'un cube obtenu par projection orthogonale ?



- [3] Points à relier.
- [4] Rencontre à moindre coût
- [7] Perspective



- Optique géométrique en physique.
- Littérature : thème de l'ombre.
- Activité vidéo sur les ombres, scénarios
- Technologie: réalisation d'une sculpture minimale ayant l'ombre d'un cube.



Point de Toricelli - Fermat d'un triangle)
voir fiche [2A]



OMBRES, PUIT, DISTANCE



distance, surface.



Cube. Utilisation possible de l'ordinateur comme instrument de mesure des distances.



- [1] Yvonne et René Sortais, *La Géométrie du Triangle*, Hermann, Paris, 1987.
- [2] Ian Stewart, Pour la Science.
- [3] Surfaces minimales dans Les mathématiques C. Mauduit, P. Tchanitchian, Belin, Paris 1993. (?)
- [4] D. Hoffman, W.H. Meeks, Les surfaces minimales ; la caténoïde par les deux bouts, [trad. de l'américain par Line Audin], Quadrature n° 5, 1990, pp. 31-47.



Surfaces minimales.

Déroulement

La modélisation mathématique de l'ombre (comme ensemble de droites orientées, par exemple) est riche d'enseignements. Le rapprochement des point de vue perspectifs et projectifs (contour apparent vs contour projeté) est troublant.

Les pistes possibles suggérées aux élèves sont très indépendantes. L'approche par le calcul différentiel et intégral suppose des prérequis de classes préparatoires. Une recherche de la notion d'aire courbe est intéressante en lycée. La mise à plat du problème, expérimentée en collège (OMBRES) s'avère fructueuse.

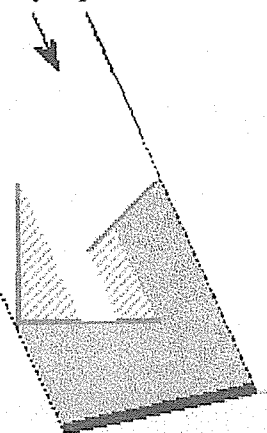
En utilisation pédagogique, le plus intéressant nous semble être le mélange pertinent de cadres différents (géométrique, topologique, logique, numérique, analytique). On verra par exemple dans PUIT la découverte du cosinus comme moyen pertinent de mesure d'un angle et une mise en oeuvre en collège de l'étude graphique d'une fonction.



Ni existence ni unicité d'une solution optimale ne sont assurés.

Les propriétés topologiques de ce que l'on cherche (dimension, mesurabilité, connexité) ne sont pas claires : le champ d'investigation doit être délimité.

On donne ci-contre un exemple de leurre non connexe d'un carré.



Construction des ombres d'un cube.

Après la mise en place de principes de perspective cavalière (cf. [7]), il s'agit d'engendrer systématiquement les formes possibles de l'ombre.

La mise en évidence *automatique* de ces formes, ou (ce qui revient au même !) du contour apparent d'un cube, suppose, plus fondamentalement, la construction de l'enveloppe convexe de quatre points. La mise au point, délicate, de "Cabri-constructions" où les objets finaux sont les sommets de cette enveloppe (les points intérieurs n'apparaissant plus) est un problème logico-géométrique digne d'intérêt.

2^A Points à relier

Des puits de pétrole dans le désert....

Le mètre de pipeline coûte cher...

Où placer les oléoducs et la station de raffinage au moindre prix ?

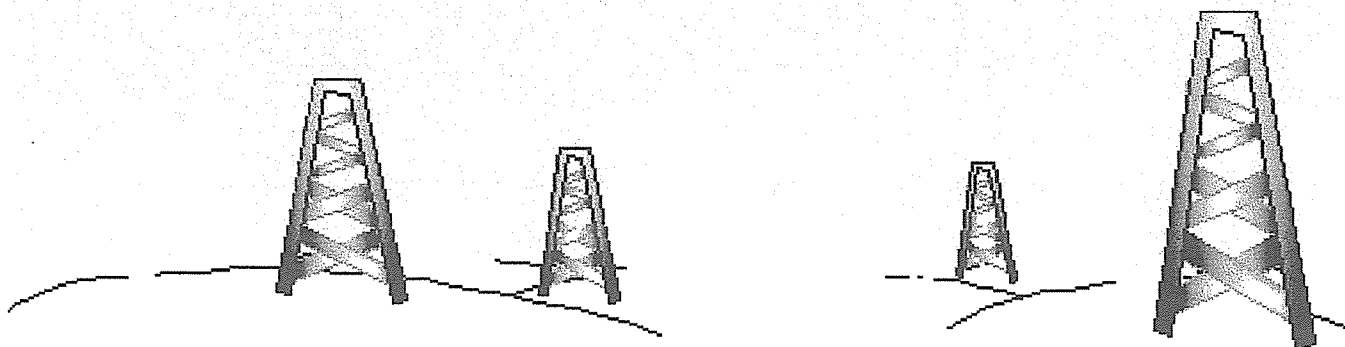
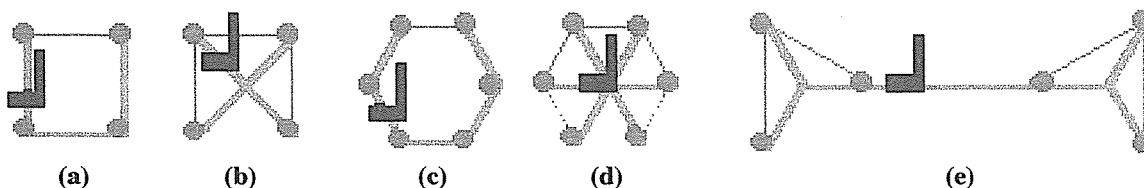


Photo P. Duchet

Comment relier des points par un réseau de lignes le plus court possible ?

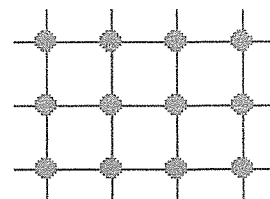
Le problème général, dans le plan ou dans l'espace, fut proposé par le géomètre Steiner dès le début du XX^{ème} siècle et porte son nom.

Faisons quelques essais. On remarque que la position précise de la raffinerie  n'a pas d'influence sur la longueur du réseau cherché : il suffit de la placer sur le réseau.



Pour 4 points en carré, le réseau (b) est plus court qu'en (a). Par contre pour les 6 sommets d'un hexagone régulier, (c) s'avère meilleur que (d). Pour (e), on a placé deux bifurcations au centre des triangles équilatéraux. A vous de voir si on peut faire mieux.

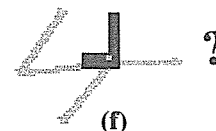
Même pour des points disposés en quadrillage (exercez-vous sur (f)), personne ne connaît actuellement les meilleurs réseaux possibles. Grâce à la puissance des ordinateurs actuels, quelques progrès sont faits chaque année ; *ce sont des remarques très simples* qui ont été à l'origine des améliorations, mais faute d'une idée générale, on collectionne les records sans trouver de solution optimale.



Une solution pour 3 points ou 4 points nous aide-t-elle pour plusieurs points ?

Peut-on trouver les solutions optimales pour 3 ou 4 points, dans le plan, dans l'espace ?

On a un problème voisin, appelé problème de l'arbre minimum, si l'on impose aux bifurcations du réseau d'être situés en des points de base. Cette variante du problème est-elle plus facile ?



(f)

Ce type de problème est courant en Recherche Opérationnelle (étude des réseaux de communications et de transports, planification et optimisation de production). La question "de l'arbre minimum" relève de ce qui est appelé la théorie des graphes (un graphe est un système de chemins entre différents points) ; elle apparaît par exemple si on souhaite réaliser à moindre coût des itinéraires de livraison ou de communication entre des sites donnés en utilisant des routes déjà existantes.

L'étude des arbres, graphes sans circuit fermé, s'avère très fructueuse pour de nombreuses autres situations qui peuvent être modélisées par des graphes : recherche de plus courts chemins, calcul de stratégies pour des jeux à information complète (exemple jeu d'échecs, modèles économiques), installation de systèmes de surveillance ou de sécurité, réalisations d'emploi du temps etc.

2A

Points à relier

situations-recherche (≥ 8 séances)
situations-problème (5 à 8 séances)
travaux ou études dirigés.
exercices (Lycée)



Objectifs

Identification d'informations pertinentes, géométriques ou combinatoires, permettant d'entrer dans une problématique d'optimisation et de preuve. Mise en oeuvre de cadres et de procédures indépendantes.

Mise en oeuvre de techniques fondamentales : preuve, usage de transformations géométriques, inégalités, utilisation de nombres complexes, extremum d'une fonction.

Prérequis

longueur d'un segment.

Concepts actifs

longueur, angle, graphe (réseau), fonction, extremum, combinaison logique de cas.

Savoirs-problèmes

conception d'une preuve géométrique, définition d'une fonction, transformations géométriques, minimum (local vs global), inégalité triangulaire, cosinus, angles sous tendant un arc de cercle, arbre.

Outils

• Une "preuve physique" intéressante à discuter pour le cas de 3 points:

3 fils liés en un point P passent par les sommets A, B, C du triangle et sont tendus par des poids égaux. Quelle

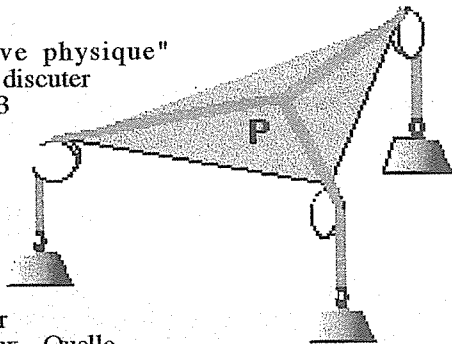
sera la position d'équilibre de P ?

(il s'agit d'une expérience idéale, seule capable de produire une certitude mathématiquement acceptable : les frottements sont nuls, et les fils, de poids nul, sont inextensibles). D'une part, l'énergie potentielle doit être minimale : la somme des hauteurs des poids est donc minimale. Autrement dit, la somme des longueurs des parties verticales des fils sera maximale, donc la somme $PA+PB+PC$, sera minimale. D'autre part, l'équilibre du point P indique que la résultante des forces de traction est nulle. Les trois forces, d'amplitude égale, sont disposées en étoile régulière autour de P avec des angles égaux à 120° . Synthèse : lorsque la position d'équilibre est à l'intérieur du triangle, la somme $PA+PB+PC$ est donc minimum en un point (*point de Toricelli* du triangle) d'où l'on voit chacun des cotés suivant un angle de 120° (*point de Fermat* du triangle).

• Le cas de 4 points de l'espace est très stimulant à discuter. La dispositions des liaisons de l'atome de carbone est-elle la meilleure ?

• Utilisation systématique pour n points de certains des éléments caractéristique de la solution pour 3 points. Aux points de jonctions les angles sont de 120° , ...

• Lavariante "de l'arbre minimum", proposée au élèves est classique en théorie des graphes ; la géométrie joue plus de rôle.



Puits, Distance



arbre, distance, longueur, optimal



Montage physique possible pour 3 points. L'utilisation d'une planche à clous plogée dans un bain savonneux est envisageable.



[1] Yvonne et René Sortais, *La Géométrie du Triangle*, Hermann, Paris, 1987.

[2] Martin Gardner, *Où l'on découvrira comment tendre un filet sur un échiquier et faire des mathématiques en forêt*, Pour la Science n°108, octobre 1986, 107-111.



Théorie des graphes.
Plus court chemin.
Algorithmes polynomiaux.

Déroulement

A la différence du sujet [2] (très similaire pour des points qui sont les sommets d'un polygone ou d'un polyèdre convexe) le réseau cherché ici est *connexe*.

Quelle est la fonction dont on recherche le minimum ? La mise en place d'une paramétrisation est une étape très intéressante du travail : elle permet de donner du sens au concept de fonction. (voir l'exemple de *Puits*).

Quelle que soit la piste choisie, arbre minimum, 3,4 ou n points, il nous semble intéressant de chercher systématiquement à généraliser les arguments fournis. Il serait dommage en particulier de passer à coté de la structure d'arbre.

La focalisation sur un aspect particulier du problème permet de l'utiliser sur une durée plus courte (4 à 6 séances) ou de traiter séparément certains aspects en travaux dirigés.

Le cas des triangles avec un angle supérieur ou égal à 120° propose un changement de registre intéressant dans la démarche de preuve.



L'existence d'une solution optimale n'est nullement évidente, même pour 3 points. On peut la faire admettre (comme conséquence d'un théorème de compacité de l'espace des réalisations acceptables) ou bien, la figure solution étant construite, demander une preuve des inégalités nécessaires (ce qui établit aussi l'unicité lorsque c'est le cas).



[2] Un cube fantôme.

[2^{bis}] Rencontre à moindre coût



• Physique (équilibre de forces, statique)



Recherche du réseau optimum.

On peut l'expérimenter en direct. Un outil intéressant à construire permet le report sur un axe de la somme de longueurs, afin de tester l'évolution de cette somme lorsqu'on modifie la position des points du réseau considéré. L'outil dépend de la structure du réseau envisagé et le va-et-vient entre l'utilisation de Cabri et le travail de conception et de formulation de conjectures évite l'enlisement.

Point de Toricelli, point de Fermat d'un triangle

Cabri est un des moyens de deviner les positions optimum et favorise la découverte de preuves.

Rencontre

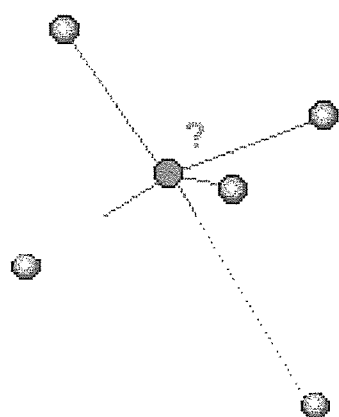
à coût minimum

Les membres d'une association habitent des lieux éloignés et désirent se rencontrer. Où choisir le lieu de rencontre pour que les frais, qui sont à la charge de l'association, soient réduits au minimum ?

Dessin P. Duchet

Plusieurs points étant donnés, trouver un lieu qui soit "le plus proche possible" de tous ces points.

La résolution d'un tel problème dépend évidemment des moyens de communications envisagés et des trajets possibles. Il s'agit aussi de donner un sens précis à l'expression "le plus proche possible".



Envisageons le cas simple où aucune restriction n'existe sur les parcours et où les prix des voyages sont proportionnels à leur longueur. Les points de départ des voyageurs, sont des points A,B,C,... du plan. Un lieu de rencontre optimal sera un point P tel que la somme des longueurs des segments PA, PB, PC, ... soit la plus petite possible. Il revient au même de vouloir que la distance moyenne de P aux points de base soit minimum. Malgré sa simplicité, personne ne connaît de réponse générale à ce problème. Alors ? On cherche ?

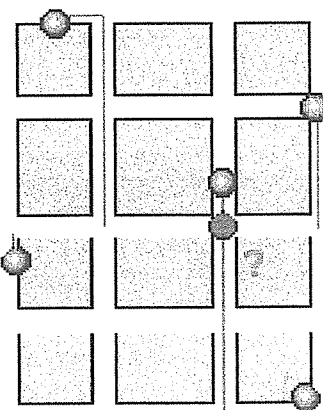
 Y a-t-il une ou plusieurs solutions ? Peut-on les construire simplement, au moins pour un petit nombre de points dans le plan ou dans l'espace ?

 Comment être sûr qu'un point est une position optimale ? En comparant avec une position quelconque ? Éloigner le point P d'une position optimale, même de très peu, doit faire augmenter la somme PA + PB + PC + ... Cette idée de "bouger la position" peut peut-être vous aider.

Bien des variantes de ce problème sont également intéressantes à étudier. En voici deux :

 A Manhattan, quartier Est de New York, les rues sont à angle droit. Les parcours possibles à pied sont alors des lignes "en escalier". Les longueurs sont plus simples à exprimer que dans le plan géométrique ; les New Yorkais évaluent d'ailleurs couramment les distances en nombre de "blocs". De plus, à la différence du plan, le nombre de positions à envisager est fini. Peut-on résoudre notre problème dans ce cas ? Ou plus généralement dans le cas d'une ville quelconque ?

 On peut vouloir trouver un lieu qui soit accessible par tous en un minimum de temps, le prix n'ayant pas d'importance. Un emplacement optimal sera un point P tel que la plus grande des distances PA, PB, PC, ... soit la plus petite possible.



Où installer un centre de distribution de manière à minimiser les frais de livraison ? Où installer une caserne de pompiers pour intervenir n'importe où en temps minimum ? Où installer un central téléphonique ? Les mathématiques utilisées pour tenter de répondre à ces questions dépendent beaucoup des contraintes réelles portant sur les trajets et l'estimation des coûts ; ce n'est pas toujours la somme des distances qui doit être prise en compte.

On rencontre des problèmes analogues lorsqu'on étudie les positions d'équilibre d'un objet soumis à plusieurs forces. Ainsi une bille d'acier repoussée par des aimants pourra-t-elle rester immobile pourvu que l'énergie qui correspond à sa position soit plus basse que celle de toute autre position voisine.

2 B

Rencontre à coût minimum

situations-recherche (≥ 10 séances)
situations-problème (Lycée, ≥ 6 séances)
travaux ou études dirigés (≥ 5 séances)
exercices (Lycée)



Objectifs

Mise en rapport de cadres différents (géométrie, combinatoire, numérique, analytique, algébrique) dans une problématique d'optimisation et dans une démarche de preuve.

Mise en oeuvre de techniques fondamentales : inégalités, utilisation de nombres complexes, extrémum d'une fonction, ((différentiation)).

Prérequis

longueur d'un segment.

Concepts actifs

distance, angle, , configuration géométrique, fonction, extrémum, dérivation.

Savoirs-problèmes

moyenne, conception d'une preuve géométrique ou analytique, minimum d'une fonction, inégalité triangulaire, cosinus, angles sous tendant un arc de cercle, vecteurs, transformations géométriques.

Outils

- Des dispositions particulières des points de base peuvent faire l'objet d'une étude complète: points alignés, sommets d'un polygone ou d'un polyèdre régulier, cas de 3 points, 4 points (plus simple !) ...
- Rôle des symétries.
- Le modèle physique, décrit pour 3 points dans la fiche [2A], se généralise en offrant une piste de recherche intéressante et une reformulation inattendue.
- La recherche du minimum d'une fonction joue un rôle central (voir l'exemple de *Puits*) et peut donner lieu à l'introduction du concept de dérivée, ici pertinent.
- Les nombres complexes peuvent simplifier certaines formulations mais semblent d'un usage limité.
- Une notation fonctionnelle $S(P)=PA+PB+PC+\dots$ est utile.

Variantes

- Si on se restreint à des déplacements dans un réseau de communication fini, un arbre par exemple, ou une ville "à la Manhattan", le problème devient très combinatoire. Une telle variante semble particulièrement intéressante en collège
- Si les coûts sont proportionnels aux carrés des distances, le problème devient un exercice élémentaire de géométrie barycentrique, résolu par la formule de Leibniz.



[2] Un cube fantôme.

[2A] Points à relier

- Physique (équilibre de forces, statique)



Distance, Puits, exercices 1 et 2



distance, longueur, optimal



Montage physique possible.



[1] Yvonne et René Sortais, *La Géométrie du Triangle*, Hermann, Paris, 1987.

[2] Ian Stewart, Le laçage de chaussure, Pour la Science.

[3] R. Ferréol, F. Casiro, Olympiades de mathématiques, concours général, Vol. 5 (1991-1993), Éd. du Choix, Argenteuil, 1994.



Exemples en Recherche Opérationnelle : problématique d'installation d'un centre de ressources.

Déroulement

Un discussion sur la modélisation du problème aide à motiver les élèves. Le fait que le problème soit d'énoncé simple et ouvert donne une grande liberté d'exploration. Sauf limitation précoce à un cas particulier, une étude fructueuse de ce sujet demande du temps.

Si on souhaite profiter au maximum de la richesse des interactions possibles entre les groupes d'élèves et les différents cadres d'étude, il est indispensable de disposer d'une longue durée afin de faire vivre à la fois

- l'étude de cas particuliers, qui favorisent les discussions argumentatives et mettent en oeuvre des techniques,
- l'exploration de pistes qui introduisent ou mettent en place des techniques de large portée,
- la problématique générale, qui suscite la réflexion théorique.

On peut envisager une étude plus rapide en deux temps : une première phase (3 ou 4 séances) permet d'identifier une large panoplie de pistes possibles et de sous-problèmes ou de variantes. Une discussion confrontant ces pistes aux outils a priori disponibles (géométrie élémentaire, expérimentation graphique, vecteurs, nombres complexes, dérivées etc...) permet alors de recentrer l'activité dans une direction précise (source de travaux ou d'études dirigés).



L'existence d'une solution optimale résulte de la continuité de la fonction étudiée et de la compacité locale du plan. Des preuves directes (établissant aussi l'unicité, le cas échéant) supposent la recherche patiente d'inégalités en jouant sur les trois cadres algébrique, géométrique et analytique. L'étude de l'effet de petites variations, bien que très féconde, est rarement envisagée par les élèves. L'idée de compensation liée à la notion de moyenne s'avère, elle aussi, utile.

La variante suggérée du rendez-vous à Manhattan est plus facile à gérer car les élèves ont des moyens simples de valider ou d'infirmer leur conjectures, mais la géométrie euclidienne y est absente !

Recherche des optima.



On peut expérimenter en direct. Le report sur un axe de la somme des distances permet d'en tester la variation. L'émergence de procédures conjecturales semble toutefois limitée au cas de 3 points. (voir [2A]). Le recours à un logiciel graphique de calcul formel (Maple®, Mathematica®) est à considérer.

TRAVAUX DES STAGIAIRES

Annick Baillou / Lycée Elie Faure / rue Jules Ferry / 33305 Lormont Cedex

Projet de Club MATH.en.JEANS pour l'année 1999/2000 : prévision au 01/09/99.

Animateurs : Annick Baillou, Chantal Dauriac, François Thomas.

Jumelage : avec le lycée Montaigne de Bordeaux (Pierre Grihon) ou le lycée Notre-Dame de Bordeaux (Pascale Lespiau) ou ?

Chercheur : ?

Elèves concernés : 2nde, 1ère, Tle

A propos de l'atelier de l'université d'été :

Le travail fait dans l'atelier a complètement répondu à mes attentes

- organisation pratique
- rôle du prof
- rapport à la recherche (élèves)

et même à des questions que je ne m'étais pas posées

- passage à l'écrit
- concrétisation

Je peux donc démarrer un club MATH.en.JEANS sous réserve d'avoir un chercheur à la rentrée.

Je pense que d'autres interrogations se présenteront lorsque j'aurai démarré.

Pour l'instant je crois avoir de bons outils.

Les mathématiques autrement : créer et animer un club de mathématiques en collège et en lycée. Ayant déjà animé en collège un club mathématiques puis un club scientifique, j'avais déjà une expérience d'activités mathématiques faites en dehors de la classe. Nommée au lycée Elie Faure de Lormont (33) qui se trouve en ZEP à la rentrée 98, je souhaitais y faire aussi " des mathématiques autrement ". La création d'un club dès la rentrée 99 répondrait à un certain nombre d'objectifs de notre projet d'établissement mais aussi à un objectif personnel qui est de montrer aux élèves que les mathématiques sont vivantes et qu'on peut en faire pour le plaisir en étant une personne tout à fait " normale ". Une collègue de l'établissement m'a parlé de Math.en.Jeans et m'a aidé à trouver des informations sur ce type de club que je connaissais pas. C'est donc dans ce contexte que je me suis inscrite à l'U. E. .

Je souhaitais y rencontrer des collègues ayant déjà fait ce genre d'expérience en lycée, en particulier pour trouver des réponses à **des problèmes d'ordre pratique** dont la résolution fait qu'un club démarrera ou ne démarrera pas. J'espérais y trouver **des précisions sur l'esprit de la démarche** qui était déjà assez claire pour moi après la lecture que j'avais faite de l'article " De la recherche à la formation : Math.en.Jeans, chercher, comprendre , aimer les mathématiques " paru dans la brochure consécutive au congrès de 97. J'attendais des informations concrètes sur la **place occupée par le professeur dans cette démarche**, je n'avais aucune peur et l'envie d'apprendre tout ce qu'il serait possible d'apprendre, faisant confiance à priori aux animateurs.

Après la visite dans les quatre ateliers proposés à l'U.E., j'ai donc choisi cet atelier qui semblait correspondre à mes attentes (deux des autres ateliers correspondaient à ce que j'avais déjà pratiqué et le quatrième s'adressait davantage au niveau collège).

N'ayant pas reçu la feuille concernant les exercices à étudier avant l'université d'été , je ne les avais pas cherché et cela ne m'a pas manqué ! Quant au livre de Polya " Comment poser et résoudre un problème " dont la lecture nous avait été conseillée, je n'ai commencé à le lire qu'après . Je ne l'ai pas terminé mais ce qui me frappe, c'est que Polya se place dans le cadre d'une classe et que ce livre nous est proposé pour une réflexion sur une activité conduite en dehors de la classe . Peut-être me permettra-t'il d'approfondir la réflexion sur **l'articulation club - enseignement** , réflexion qui n'était peut-être apparemment pas une préoccupation centrale des participants à l'atelier , en tout cas pour moi. Aujourd'hui je réalise que nous n'avons pas abordé suffisamment ce point mais cela ne faisait pas parties de mes préoccupations lors de l'U.E., cela était du domaine de l'implicite : l'activité en atelier ou en club a nécessairement des retombées, j'en ai déjà observé.

Le but général de l'atelier - **construction a priori d'un projet concret de terrain** – était donc bien mon but. Lors de la première phase , quand il nous a été demandé d'indiquer nos " peurs " et nos " envies ", ce qui est apparu comme central pour beaucoup de participants ce sont **les problèmes pratiques** pour démarrer un club " Math.en.Jeans " : dispositif, recrutement, contact, Š . J'ai eu la sensation que ces préoccupations semblaient ne pas intéresser vraiment nos animateurs. Effectivement, cela était éloigné des thèmes de réflexion qui nous avaient été proposés mais je crois que répondre au départ à cela , sans éluder les problèmes qui se posent justement " à priori " sur le terrain, aurait libéré un certain nombre des participants du soucis des contingences pratiques , soucis qui sont réapparus au moment de la conclusion à chaud. Ceci étant, j'ai eu toutes les informations pratiques dont j'avais besoin mais ce que je veux dire, c'est que cela n'est ni le plus simple ni le plus intéressant pour nous mais conditionne l'engagement.

Sur le thème de la **régulation (gestion)d'atelier** , les différentes séquences proposées ont été très enrichissantes car elles répondaient très concrètement à ce qui demeurerait vague pour moi, à savoir : le rôle du professeur dans un atelier Math.en.Jeans et la possibilité d'amener les élèves à pratiquer une démarche de recherche. Je pense que cet apprentissage d'un autre rôle du professeur – qui est aussi un apprentissage pour les élèves – et la pratique de la démarche de recherche – face à un problème où l'élève peut avoir à priori l'impression qu'il ne sait rien faire, et pas seulement en math - peuvent avoir des retombées intéressantes en classe. Les différentes séquences donnaient un éclairage sur **les apprentissages que permet la recherche**.

Comme je l'avais déjà dit en conclusion de l'atelier, le travail fait a complètement répondu à mes attentes concernant l'organisation pratique du club que souhaitais démarrer à la rentrée, le rôle du professeur pour encadrer ce type d'activité et le début de réflexion sur l'apport d'une activité de recherche pour les élèves. Cela a aussi répondu à des questions que je ne m'étais pas posées sur le passage à l'écrit , le compte-rendu, la preuve, la formulation de définitions de notions mathématiques.

Le projet de club Math.en.Jeans dans mon établissement est en bonne voie de concrétisation.

Animateurs : Annick Baillou, Chantal Dauriac, François Thomas
Jumelage : lycée Fernand Daguin à Mérignac (33), Jean-Pierre Guibbaud
Chercheur : Emeric GIOAN, université Bordeaux I
Elèves concernés : 2nde, 1ère, Tle.

Nous démarrons donc début octobre. Ce qui est important pour nous, c'est que nous sommes en contact avec des collègues de Bordeaux qui ont déjà participé à Math.en .Jeans auxquels nous pouvons faire part de nos interrogations et avoir des réponses rassurantes. La cassette vidéo " Math.en.Jeans : l'an 01 " adressée par l'association, la plaquette, les articles d'information et l'affiche que j'ai rapportés de l'U.E. m'ont été très utiles pour la présentation aux collègues de mon établissement et à Jean-Pierre Guibbaud qui a accepté le jumelage de son établissement avec le nôtre.

L'objectif de création d'un atelier est donc pratiquement atteint, des élèves sont déjà prêts à tenter l'aventure avec nous, nous attendons la venue du chercheur , avec lequel le premier contact fût chaleureux, prévue pour le 8 octobre dans notre établissement. L'objectif est maintenant de faire vivre ce club. Ayant constaté que même après l'U.E., nous pouvions compter sur le soutien actif des animateurs Pierre Audin et Pierre Duchet, c'est avec confiance que nous démarrons.

Il serait bien de réfléchir sur ce qu'apportent effectivement les diverses pratiques et réalisations dans les clubs mathématiques, d'analyser à quels besoins ils répondent (de même que les divers concours , rallyes, jeux) et s'interroger sur les mathématiques telles qu'elles sont enseignées aujourd'hui .

Remerciements à tous les organisateurs et animateurs de l'U.E. " Faire des mathématiques autrement " et tout particulièrement à Pierre Audin et Pierre Duchet.

Pascal Borde / (Lycée de Thiers)

Projet de Club MATH.en.JEANS pour l'année 1999/2000 : prévision au 01/09/99.

Je suis TR au lycée de Thiers et donc il m'est difficile d'établir un projet MATH.en.JEANS personnellement car je suis susceptible d'être muté à tout moment.

A propos de l'atelier de l'université d'été :

Toutes les questions que je me posais concernant la réalisation d'un projet MATH.en.JEANS ont trouvé une réponse.

Par contre des questions de 2nd ordre sont encore présentes et ne trouveront sans doute de réponses claires qu'après avoir testé.

- Les élèves ont-ils appris quelque chose ?
- Réinvestissent-ils les démarches dans le cadre scolaire ?
- Ont-ils senti la nécessité de la clarté de la communication et de la rédaction ? Ont-ils changé leur rédaction dans le cadre scolaire ?
- Echanges d'idées et travail de groupe sont bénéfiques. Se mettent-ils à travailler en groupe naturellement après ?
- Ce genre de projet est-il un facteur de réussite plus grand ?

et enfin, plus philosophiquement, "utilité de la formation par la recherche"

- pour l'élève
- pour la société.

Annexe du 30/09/99, Pascal Borde / (Lycée de Thiers)

Je me suis inscrit à cette université d'été car j'avais déjà pensé créer un club de mathématiques mais le manque de temps, d'informations et d'idée avaient jusqu'à maintenant eu raison de cette ambition.

J'ai appris beaucoup de choses lors de cette université d'été. Je me suis tourné naturellement vers l'atelier MATH.en.JEANS car j'ai moi même une formation par la recherche et j'en suis sorti à la fois intrigué et curieux, mais motivé pour tenter l'expérience. Comme je suis TR au lycée de Thiers, il m'est difficile d'établir un projet MATH.en.JEANS personnellement car je suis susceptible d'être muté à tout moment. Aussitôt rentré j'ai donc cherché des collègues susceptibles d'être intéressés.

J'attends actuellement leurs réponses.

Plus particulièrement, à propos de l'atelier MATH.en.JEANS de l'université d'été toutes les questions que je me posais concernant la réalisation d'un projet MATH.en.JEANS ont trouvé une réponse.

Par contre plusieurs questions sont encore présentes à mon esprit. Mais je n'aurai de réponse qu'après avoir essayé et observé....

Les élèves ont-ils appris quelque chose ?

Réinvestissent-ils les démarches de recherche dans le cadre scolaire ?

Ont-ils senti la nécessité de la clarté de la communication et de la rédaction ?

Ont-ils changé leur rédaction dans le cadre scolaire ?

Echanges d'idées et travail de groupe sont bénéfiques. Se mettent-ils à travailler en groupe naturellement après ?

Ce genre de projet est-il un facteur de réussite plus grand ?

et enfin, plus philosophiquement, "utilité de la formation par la recherche"

pour l'élève

pour la société.

En conclusion je dirai que j'ai été séduit par cet atelier et par l'univers des clubs mathématiques en général. Je vois par ce biais des moyens de faire découvrir aux élèves d'"autres manières de faire des mathématiques" et par suite, peut-être de les intéresser aux mathématiques.

En tous cas ce fut une expérience enrichissante, et j'espère mettre en oeuvre rapidement des projets avec ce que j'y ai appris.

Projet de Club MATH.en.JEANS pour l'année 1999/2000 : prévision au 01/09/99.

Animateurs : Jean-Denis Brulois.

Jumelage : avec le lycée français de San Francisco et/ou ?

Chercheur : ?

Elèves concernés : 2nde, 1ère, Tle

Le club MATH.en.JEANS se déroulera le mardi de 16h à 18h.

A propos de l'atelier de l'université d'été :

Questions réglées :

Le choix des sujets

- A faire si possible en association avec le chercheur
- Les sujets doivent être de "vraies" questions
- Les sujets doivent ouvrir sur différents domaines mathématiques

Le rôle du professeur (partiellement réglé)

- Doit laisser la plus grande liberté possible aux élèves
- Doit dynamiser les groupes de recherche sans les guider
- Doit développer sa capacité d'écoute et de compréhension de l'élève

La mise en oeuvre matérielle du projet d'atelier MATH.en.JEANS

Questions à régler :

Le rôle du professeur

Difficultés prévisibles à identifier les sous-problèmes intéressants

Le passage à l'écrit

Difficultés prévisibles à "rentre" dans la logique de recherche de l'élève

Définition du statut de la preuve mathématique

Le club MeJ vient de tenir sa première réunion mardi. Le chercheur (Virginie LASSERRE) est venu présenter à 9 élèves (8 élèves de 2nde et 1 de TS) quatre sujets :

1) Dynamique des populations

((dessin : lapin et carotte))

Combien de couples de lapins obtiendrons-nous à la fin de chaque mois si commençant avec un couple, chaque couple produit chaque mois un nouveau couple, lequel devient productif au second mois de son existence ?

((dessin : silhouette de criquet))

Soit une population de femelles d'insectes qui vérifie les propriétés suivantes :

- aucune ne vit plus de 2 ans, seulement la moitié survit la deuxième année,
- elles ne pondent que dans la deuxième année et font en moyenne chacune n larves viables dont la moitié sont des femelles.

A un instant initial, on décompte 50 femelles de un an et 25 de deux ans. Nous nous intéressons à l'évolution de cette population une année après, deux ans après ...

Prolongement du modèle : ponte dès la première année, survie supérieure à deux ans.

2) La coquille de l'escargot

((dessin : silhouette d'escargot))

Comment modéliser la construction pas à pas de la coquille d'escargot ?

((dessin))

Prolongement du modèle : application au monde végétal.

3) Un sondage ... la poids en fonction de la taille

((dessin : Leonardo da Vinci & Manpower))

Monter un protocole d'enquête afin d'étudier l'évolution du poids en fonction de la taille.

Mots-clefs : précision de la mesure, la représentativité de l'échantillon, nécessité de rajouter des covariables, résumés numériques des observations, données aberrantes ...

Comment peut-on modéliser ces différentes informations ? Que peut apporter un modèle ?

Prolongement : réflexion sur les résultats d'un sondage.

4) Méthodes numériques : recherche d'un extremum

Soit la fonction $f: x \rightarrow x^2 - x - 1$ sur l'intervalle $(-3, 3)$.

((dessin : graphe de f))

Le but est de rechercher le minimum de cette fonction par une procédure pas à pas (itérative ou algorithmique).

Seul outil mathématique disponible : le calcul de la fonction.

Chaque calcul de f en un point a un coût (1 franc). Le but est donc de trouver le minimum en calculant le moins grand nombre de points possibles.

Prolongement : résoudre numériquement " $f(x) = 0$ ".

Le club Mej du lycée Louise-Michel à Bobigny est jumelé avec celui du lycée Jean Jaurès à Montreuil : il commence ses activités lundi 04.10.

Virginie LASSERRE est maitre de conférence à l'Université Paris 5 (Pharmacie) ; elle est bio-mathématicienne et plutôt orientée vers les maths appliquées (à la santé, au sens large).

Pour l'instant le jumelage avec San Francisco n'est pas encore établi.

En conséquence, un des points positifs que j'ai pu retirer de l'université d'été a été de pouvoir mettre en place ce club MeJ dans mon lycée dès la rentrée.

J'espère maintenant que malgré le faible effectif de départ, le club pourra tenir la distance jusqu'au Congrès.

Ceci étant j'ai une certaine confiance en la chose !!!

**Yvonne Capdeville / Lycée-Collège de Couserans
Esplanade Pierre Mendès-France / 09200 Saint-Girons**

Projet de Club MATH.en.JEANS pour l'année 1999/2000 : prévision au 01/09/99.

Pas de club, sauf possibilité de trouver financement et entrée sur projet d'établissement entre prérentrée et rentrée

(Classes : 3ème, 2nde ?, 1ère S ?, 1ère L et TL ?) voir 27/09/99

A propos de l'atelier de l'université d'été : (?)

Projet MATH.en.JEANS pour 2000/2001 :

classes ? ouvert sur collège et lycée si possible

trouver : chercheur, lycée/collège partenaires

Ce qui a été réglé :

- questions matérielles sur l'ouverture d'un club
- ce qu'est la recherche
- ce que ça peut apporter aux élèves (en gros)
- rôle du prof dans l'action MATH.en.JEANS
- mettre en évidence les notions mathématiques connues utilisées par les élèves dans leurs recherches pas forcément reconnues
- plusieurs questions posées par le même chercheur avec 3 élèves maximum qui travaillent sur chaque question

Ce qui ne l'a pas été :

- trouver un chercheur pour avoir 1 problème à proposer. IREM ? CNRS ? anciens profs ? thésard ?
- avec qui se jumeler (comment se fera le choix ?)
- fidélisation ? Calendrier (tenir l'année ?). Horaire ? dans la semaine. Possibilité d'accepter des participants en cours d'année ?
- choix du thème unique ? (risqué car communication entre groupes, sujet épuisé plus vite)

Abandon en cours d'année possible si a un remplaçant -> permet de poursuivre le travail du groupe.

Le congrès est un moment très important. Après le congrès : travail de rédaction ... précisent leurs définitions, les théorèmes. Faire ce retour en arrière les dérange alors qu'ils aimeraient continuer leurs recherches.

Ce qui est difficile sont les 4 ou 5 premières semaines (rôle psy : ne te décourage pas).

La revue Diagonale sur les graphes : propose des problèmes progressifs sur un même thème. 4 revues par an. Existe un support vidéo.

Projet de Club MATH.en.JEANS pour l'année 1999/2000 : au 27/09/99.

De retour de l'université d'été, j'ai parlé à l'administration de la possibilité d'ouvrir un club Maths dans le cadre d'un PAE (les projets PAE lycée n'étant déposés qu'au mois de janvier alors qu'au collège le dépôt se fait en juin) au niveau lycée, et le fait que le projet ne fasse pas partie du projet d'établissement ne paraissait pas un obstacle. Pourtant un collègue ayant l'habitude de travailler sur PAE m'avait confirmé que si le projet PAE n'entrait pas dans le cadre du projet d'établissement il avait peu de chances d'être accepté. Malgré cela, je vais me lancer cette année, pour essayer l'an prochain de mettre en place un projet MATH.en.JEANS.

J'ai préparé un "tract" présentant les activités possibles qui sera distribué à tous les élèves du lycée par l'intermédiaire de leur prof de Maths sur lequel ils indiqueront s'ils désirent ou non participer et les plages horaires qui leur conviendraient (à remettre à leur prof de Maths avant une date fixée). Je pense choisir la plage horaire réunissant l'effectif maximal (avec 1h par semaine cette année), en proposant un travail de recherche (calendriers, un mathématicien, l'évolution historique d'une notion, recherche de problèmes, dallages ...) au choix des participants.

En ce moment, les élèves sont en grève pour des problèmes d'emploi du temps, cours obligatoires non assurés, difficulté de prendre les repas avant 13h pour ceux qui ont cours de 13h à 14h ... et je ne peux donc effectuer mon enquête, qui sera lancée dès que la situation le permettra.

Je pourrais ensuite, si cela vous intéresse, continuer à vous rendre compte de la mise en place de mon projet et de mes observations quant à la façon de le conduire.

A votre entière disposition,

Renaud Dehaye - Lycée Boutet de Monvel - 54 Lunéville

Projet de Club MATH.en.JEANS pour l'année 1999/2000 : prévision au 01/09/99.

non

A propos de l'atelier de l'université d'été : (26/09/99)

Bilan de l'université d'été.

Renaud DEHAYE

Sur le rôle du professeur.

A l'heure de la rentrée où l'on ouvre le B.O pour consulter le programme d'une section ou le nouveau programme allégé transitoire de seconde, on rêve de faire des Maths en Jeans. Pendant l'université d'été de St Flour, on a pu découvrir les bienfaits d'une séance de recherche dans un atelier M.E.J : comprendre un énoncé, créer une définition, construire une conjecture, communiquer dans un groupe. L'intérêt est autant pour le professeur que pour l'élève.

La lecture du livre " Comment poser et résoudre un problème " de G.POLYA, recommandée avant l'université d'été, permet de commencer la réflexion sur le rôle du professeur dans la classe lors d'une séance d'exercices ou de recherche de problème. L'auteur nous donne une méthode pour conduire l'élève vers la solution. Cette lecture a modifié mon comportement dans la classe, mes interventions sont plus mesurées et je donne plus de temps aux élèves..

Dans un atelier M.E.J, le professeur sort de son rôle habituel. Ne connaissant pas la solution du problème posé (ex : ombre d'un cube), il aide l'élève sur la "forme " du travail de recherche : compréhension, expression écrite et orale, construction d'une définition (ex : polyminos) et d'une conjecture (ex : communication dans un réseau).

Installer un atelier M.E.J comporte plusieurs difficultés : trouver un autre établissement, un chercheur et construire un projet. C'est pourquoi je compte sur votre aide pour la création d'un atelier en 2000-2001 dans mon lycée . Ayant hérité de l'option informatique en 1^{er}S cette année, (et donc en TS l'année prochaine), est-il possible de coupler le projet-élève en informatique au bac et un atelier M.E.J ?

Avec mes remerciements.

Jacqueline Dürlewanger - Lycée Romain Rolland
21 route de Montmorency - 95190 Goussainville

Projet de Club MATH.en.JEANS pour l'année 1999/2000 : prévision au 01/09/99.

Anime un club "MATH.en.JEANS" depuis 2 ans. Mon lycée est jumelé avec le lycée Georges Braque d'Argenteuil (95). Je cherche un chercheur qui veuille bien s'occuper de nous.

A propos de l'atelier de l'université d'été : Session Animath 1999

1- Aperçu des 4 ateliers : très intéressant, mais un peu court, voire frustrant. On aurait aimé en savoir plus.

2- Libre choix des ateliers : liberté bien respectée.

3- Travail au sein de l'atelier MEJ :

3.1 placés dans des mini-situations de recherche, on a bien défini ce que devait être le rôle du professeur face aux apprentis-chercheurs :

- attitude non directive
- toujours à l'écoute
- attitude critique, mais constructive, ne négligeant aucune idée nouvelle
- exigeant beaucoup de rigueur dans le passage à l'écrit

Quelques sites Internet (que je n'ai pas encore testés !) nous ont été indiqués pour la recherche de documentation. Mais Internet est-il facilement accessible dans les établissements ?

Une bibliographie, à la portée des élèves nous a été envoyée à notre retour.

3.2 Questions restées sans réponse (mais y-en a t-il une?)

Que faire avec des élèves qui veulent abandonner en cours d'année ou qui cherchent "mollement" ?

Pourquoi le recrutement est-il si difficile? Les mathématiques ne sont-elles plus objet de curiosité ou font-elles vraiment peur ? La faute à qui ?

3.3 Quelle rigueur exiger des élèves lorsqu'on a à utiliser des notions non abordées dans les classes antérieures (dérivées, primitives, convergence.....). N'est-il pas dangereux pour les élèves d'admettre un peu vite des résultats que l'on "sent" ?

4-conférences souvent intéressantes mais parfois déstabilisantes. Sans avoir l'ambition de tout comprendre, on aurait aimé que l'on replace les sujets dans une certaine logique de recherche. Je tiens à remercier tous les organisateurs, et tout particulièrement PLH, pour leur disponibilité pendant cette UE.

**Marie-Claude Guibé - Ludovic Moreau - Collège Frédéric Chopin
1 rue R. Schuman - 77012 Melun Cedex**

Projet de Club MATH.en.JEANS pour l'année 1999/2000 : prévision au 01/09/99.

Animateurs : Marie-Claude Guibé, Ludovic Moreau.

Jumelage : avec l'école "?"

Chercheur : ?

Elèves concernés : collège et primaire (CM2)

A propos de l'atelier de l'université d'été :

Ce que nous avons fait avant l'UE :

- constitution du dossier "Atelier Scientifique"
- contacts pris à la Cité des Sciences et lors d'une réunion de fin d'année MATH.en.JEANS
- contact établi pour le jumelage
- plage horaire dans l'emploi du temps des élèves
- lieu de recherche
- information des élèves, des parents, des profs, de l'administration (Conseil d'Administration), de l'IPR, de l'IDEN

Ce qui reste à faire (dans la pratique) :

- trouver le chercheur
- connaissance des problèmes
- mise en place du calendrier
- bilan d'une année de fonctionnement

Ce qui a été vu et reste à mettre en pratique :

- ce qu'est la recherche
- le rôle du professeur
- le rôle du chercheur
- le passage à l'écrit

Ce qui n'a pas été vu :

- l'attitude des élèves face à une nouvelle façon de travailler
- Quel bénéfice pour les profs et les élèves ?
- rayonnement de l'établissement dans la REP

Pour le jumelage et les coordonnées des personnes participant à l'atelier un dossier a été envoyé à Hervé Grac (courant mai).

**Philippe Julien - Lycée International de Saint-Germain-en-Laye
78100 Saint-Germain-en-Laye**

Projet de Club MATH.en.JEANS pour l'année 1999/2000 : prévision au 01/09/99.

Animateurs : Philippe Julien.

Jumelage : avec un lycée danois et/ou allemand ?

Chercheur : un chercheur danois et/ou allemand ?

Elèves concernés : 2nde, 1ère, Tle

A propos de l'atelier de l'université d'été :

Mon problème : ((savoir)) ((apprendre à)) ne pas être directif avec les élèves

Jusqu'à présent, mon activité en club ressemblait à celle que j'ai en classe : choix des sujets imposé, peu de temps laissé aux élèves pour démarrer, recentrage systématique sur des voies que je sais être bonnes (car j'ai préparé les sujets).

J'en ai conscience depuis longtemps, mais ...

Le seul moyen pour changer est de me lancer dans une activité du type que vous proposez ; après les séances du lundi et du mardi (à l'université d'été) j'ai l'impression que je pourrai tenir ... quelques temps.

Francis Minot - Lycée Verlaine - rue Docteur Gobinet - 08300 Rethel

Projet sur deux années scolaires : prévision au 01/09/99.

1ère année :

- Constituer un groupe d'une douzaine d'élèves (2nde à Term S), lancer une recherche (plutôt courte, de difficulté moyenne) menée par moi pour souder le groupe et se mettre d'accord sur ce qui est attendu (réflexion, preuves à fournir et à transmettre, échanges d'idées, persévérance)
- Se mettre en communication avec un autre lycée et un chercheur par Netmeeting (et Webcamera) pour une recherche plus élaborée
- Participer le plus activement possible au congrès MATH.en.JEANS
- Préparer la seconde année (recherche de financement, autorisations administratives, lycée voisin, ...)

2ème année :

Suivre la voie habituelle d'une recherche MATH.en.JEANS

A propos de l'atelier de l'université d'été : (?)

Jacques Noailles - Lycée Montdory - cité du Pontel - 63300 Thiers

Projet de Club MATH.en.JEANS pour l'année 1999/2000 : prévision au 01/09/99.

non

A propos de l'atelier de l'université d'été :

L'atelier m'a permis de comprendre la démarche de MATH.en.JEANS et de commencer à "l'intégrer" mais c'est relativement "fort" en temps et en esprit nouveau.

J'attendais des réponses sur l'articulation club-enseignement : compatibilité, complémentarité. (Des compte-rendus d'expérience auraient été intéressants.)

Crainte d'une opposition entre travail scolaire et travail en atelier (mais Pierre Audin a répondu !).

Concrètement je vais poursuivre cette année mon "adaptation". J'envisage de créer un jumelage à la rentrée 2000 vraisemblablement avec l'autre lycée de ma ville.

Projet de Club pour l'année 1999/2000 : voir en fin de document.

A propos de l'atelier de l'université d'été :

((J'ai été un peu gênée par le fait que vous présentiez un atelier de recherche sur le seul modèle MeJ, bien que j'en reconnaisse le bon fonctionnement, donc ce que tu peux publier à mon sujet à propos de l'U.E est à peu près ceci :))

- les séances de simulation avec les exercices de recherche ont été très enrichissantes (et même rassurantes : je me suis reconnue dans la situation du professeur embarrassé)

- le rôle du professeur à l'intérieur d'un atelier de recherche est plus clair et celui du chercheur me paraît important d'où mes craintes dans une situation d'absence de celui-ci

- j'ai un peu regretté qu'il n'y ait pas davantage d'échanges à propos d'autres fonctionnements d'ateliers déjà existants

- ce qui me fait toujours peur : l'investissement temps, l'isolement, le choix des thèmes et mon aptitude à pouvoir faire face. Comment tenir face à l'indifférence des collègues dans le lycée? ... et combien de temps ?

ATELIER SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE PROJET 1999/2000

ACADEMIE DE NANTES

ETABLISSEMENT :

Lycée Françoise d'Amboise

N°: 0440158H

BP 51723

44015 NANTES Cedex 1

INTITULE du PROJET

Atelier Scientifique et Technique : Recherche et Mathématiques Appliquées

CONTENU PEDAGOGIQUE

Le projet est établi à partir du bilan de l'atelier de l'année 98/99.

Les travaux de recherche sont menés en lien avec le même partenaire : IMA Angers, chercheurs et étudiants.

Le projet évolue en fonction des attentes des élèves et au fur et à mesure de leurs découvertes. Les élèves du groupe 98/99 veulent poursuivre leur initiation à la recherche appliquée en exploitant les contacts pris avec :

- Le Centre de Recherche Technique de la Poste, pour l'utilisation des probabilités et recherche opérationnelle.
- Le Palais de la Découverte pour les problèmes de numération et d'invariants.
- La SNCF pour les systèmes de numérations, les réseaux et l'optimisation.
- Le CNED pour sa revue Cahiers Mathématiques "Diagonales" et ses émissions interactives.

Septembre - Octobre 99

Prise de contact, constitution d'équipes de travail.

Présentation des premiers problèmes de recherche proposés par les partenaires et par la revue "Diagonales" du CNED.

Démarche :

Analyse du problème

Choix d'une méthode de recherche

Etude d'exemples, de cas particuliers

Expérimentations, simulations, erreurs

Rattachement à une théorie connue ou compléments d'information

Elaboration d'hypothèses

Validation de ces hypothèses

Calcul, démonstration, modélisation

Conclusion en revenant au problème posé

Communication des résultats

Outils informatique : utilisation des systèmes de calcul formel, logiciel DERIVE.

Intervention d'un chercheur sous forme d'une conférence sur un thème lié à la recherche.

Novembre et Décembre 1999

Prises de contact par INTERNET avec des étudiants ou chercheurs de l'Institut de Mathématiques Appliquées pour orienter les recherches et découvrir la notion de compte-rendu de recherche.

Visite du Centre de Recherche Technique de la Poste (Nantes).

Rencontre avec des Ingénieurs en Recherche et Développement.

Présentation des techniques mathématiques utilisables dans l'optimisation des tournées de distribution.

Utilisation des Statistiques et Probabilités pour les logiciels de lecture automatique d'adresses et formulaires (logiciel DocuPost, dépouillement du dernier recensement).

Traitement de l'information, recherche opérationnelle, mathématiques appliquées

Janvier - Février 2000

Déplacement du groupe à ANGERS : Rencontre avec Mr L'Hospitalier, Professeur à l'Institut de Mathématiques Appliquées, et avec des étudiants de 3ème et 4ème années.

Compte-rendu de l'avancée des travaux.

Réponse aux questions (indications de quelques pistes seulement).

Information sur les codages, les systèmes de numérations, la théorie des graphes.

Orientation des recherches à partir des informations acquises.

Mars - Avril - Mai 2000

Déplacement du groupe au Palais de la Découverte, à Paris.

Exposé de l'avancée des recherches par les élèves de l'atelier.

Contact avec les services de logistique de la SNCF (à Nantes).

Participation à une émission de télévision interactive du CNED (à Nantes).

Projets juin 2000

Présentation des travaux aux autres élèves de seconde et aux élèves de troisième.

Autre projet:

Les élèves envisagent de fabriquer eux mêmes des problèmes de logique et numération accessibles à tout public, et veulent aller jusqu'à la production d'un support multimédia pour l'année 2000. (Un groupe d'élève de 3ème s'initie actuellement avec un enseignant pour la partie technique.)

ATELIER N° 2 :

Robert CHARBONNIER - François GAUDEL

Les clubs et ateliers (collège et lycée) comme moyens d'explorer l'univers mathématique à travers l'histoire, l'expérimentation et les nouvelles technologies.

Il existe une grande diversité de clubs mathématiques, l'Université de Saint-Flour l'a bien montré. Ceux dont il s'agit dans cet atelier n'ont pour objectif premier ni la remédiation des élèves en difficulté scolaire, ni l'excellence des meilleurs, bien qu'ils puissent y contribuer. En suscitant l'intérêt des élèves, leur curiosité et leur plaisir de découvrir et d'apprendre, en aidant à leur épanouissement culturel, et en leur permettant de s'affirmer à travers divers modes d'expression, ils peuvent contribuer par contre à modifier leur regard sur la matière étudiée (en l'occurrence les mathématiques), qu'ils jugent souvent comme étrangère et froide (et pourquoi pas aussi sur d'autres matières). Ils peuvent aussi contribuer à l'ouverture sociale et culturelle, à la valorisation des élèves, en dehors du souci de compétition, en laissant à chacun le temps d'explorer, de construire et finalement d'apprendre à son propre rythme.

De quoi s'agit-il ?

Bien que n'ayant jamais travaillé ensemble, nous avons constaté dès la préparation de cette Université d'Été, que nos démarches présentaient d'importants points communs. Les domaines d'étude que nous choisissons satisfont à une double exigence, celle de correspondre à un désir de l'enseignant de travailler un thème qui l'intéresse et celle de présenter pour les élèves une exploration motivante. Utilisant pour cela différents moyens que nous développerons plus loin, nous cherchons des objets mathématiques assez simples pour « parler » aux élèves, ce qui ne représente pas une grande difficulté puisque l'enseignant en non spécialiste de la question, abordera presque nécessairement son objet d'étude par ses aspects directement visibles. Nous proposons aux élèves une autre sorte d'activité que la recherche déductive : une reconnaissance, une sélection, une analyse et une compréhension des formes mathématiques, qu'il s'agisse de documents ou d'objets historiques, de résultats de calculs ou de constructions graphiques. Chaque fois qu'il est marquant, l'aspect esthétique est pris en compte pour son caractère motivant et son intérêt culturel et formateur. Autour des objets

étudiés, des questions se posent qui peuvent motiver des recherches. L'intérêt et le questionnement des élèves suscitent à leur tour l'activité de l'enseignant tout comme leurs difficultés ou leur refus de travailler sérieusement sur certains thèmes. Il est alors nécessaire de chercher de nouvelles idées, de nouveaux angles d'attaque. Il se crée un mouvement d'aller-retour qui n'est pas de tout repos, mais qui est très riche et qui aboutit à un résultat collectif qu'il sera important alors de matérialiser pour le faire partager aux autres. Lorsque les formes de cette concrétisation sont publiques, expositions, animations ou congrès, elles apportent la preuve de la solidité des connaissances acquises, et aussi une dimension humaine et festive.

Ce que nous avons proposé aux stagiaires :

Robert Charbonnier qui anime un atelier en collège a présenté quelques uns des thèmes aussi bien géométriques que numériques qu'il a abordés ces dernières années : les polyèdres (deux approches dans la construction : en papier carton à partir de patrons et en polystyrène avec le filcoupeur de Charles Perol), les polygones réguliers (construction à partir de textes historiques d'Euclide, de Dürer, de Mascheroni, etc.), les puzzles (réalisation ou manipulation pour découvrir des propriétés mathématiques). Il a surtout présenté un travail sur le numérique, travail d'exploration historique sur les nombres et les instruments à calculer qui concerne le calcul sur l'abaque avec les jetons à partir de livres comme *l'arithmétique* de Jean Trenchant 1561, les calculs traditionnels chinois avec le boulier par exemple, et surtout le calcul avec les « réglettes » depuis celles de Neper (1617) à celles de Genaille-Lucas (1885). Il a expliqué le fonctionnement de son atelier ainsi que les méthodes de travail utilisées et a montré l'intérêt de la présentation, dans des expositions publiques animées par des élèves, des travaux qu'ils font à l'atelier pendant l'année. Il a d'ailleurs présenté pour exemple quelques panneaux de différentes expositions réalisées par l'atelier : *Petites histoires de calcul*, *Puzzles (Pythagore, polygones)*, *Construction des racines carrées au compas d'après Mascheroni*, *Polyèdres*.

François Gaudel anime deux ateliers : l'un en lycée avec des élèves de seconde à terminale, et l'autre dans une MJC, avec des élèves de collège actuellement de niveau quatrième, et parfois quelques anciens élèves du lycée. Les activités qu'il a proposé de présenter aux stagiaires portaient sur la génération de fractales sur ordinateur par deux méthodes : les IFS et les I-systems ; l'étude et la réalisation de pavages, périodiques ou non, en utilisant également le langage des I-systems ; les polyèdres (de leur étude à leur réalisation, par exemple par pliages modulaires) ; il a évoqué d'autres thèmes d'activités, autour de noeuds ou de géométries « exotiques ». Il a insisté sur les problèmes pratiques à surmonter pour développer ce genre d'activité (apprentissage et installation de logiciels, recherche d'une documentation et d'une aide éventuelle auprès de personne qualifiées sur le sujet traité). Cette présentation rapide de différents thèmes était illustrée par des éléments d'exposition réalisés par les élèves : objets, panneaux, exposition virtuelle sur le site de la MJC Daniel André. (<http://www.mjc-andré.org>).

Les stagiaires qui se sont inscrits dans notre atelier étaient très motivés pour mettre en place dans leur établissement un club ou un atelier dont la conception était proche de la nôtre. Nous avons travaillé pendant 9 heures avec deux groupes distincts : d'une part, ceux qui avaient envie d'approfondir la question des instruments à calculer et celle des expositions et d'autre part, ceux qui voulaient travailler sur les fractales et I-Systems. Les deux groupes se sont réunis ensuite pour travailler sur le thème des polyèdres.

Atelier animé par Robert Charbonnier

L'atelier s'est consacré à la découverte et à la discussion détaillée du travail mené dans l'atelier que j'anime au Collège Louise Michel de Maringues (63).

J'ai tout d'abord présenté un des thèmes travaillés cette année à l'atelier : un thème numérique et historique où il est question des numérations anciennes et des instruments à calculer que les hommes ont perfectionnés au cours de l'histoire.

Les stagiaires fort motivés se sont appropriés avec enthousiasme l'art de multiplier et de diviser sans efforts avec des baguettes ou des réglettes chiffrées, mais aussi le calcul sur les bouliers chinois et japonais ainsi que l'art de compter sur l'abaque avec les jetons, car d'emblée, ils ont vu l'intérêt de travailler de tels thèmes avec des élèves de collège, et en particulier avec des élèves en difficulté ou peu motivés par les mathématiques.

La discussion qui a suivi ce travail avec les baguettes a été l'occasion de préciser les objectifs et le fonctionnement de l'atelier du collège de Maringues.

Un temps assez long de cette discussion a été consacré à l'intérêt d'une présentation publique du travail fait en atelier et aux problèmes concrets de mise en place d'expositions animées par les élèves.

1. la multiplication avec des baguettes (ou réglettes) chiffrées

1.1 La méthode "per gelosia"

C'est sous ce nom que cette technique était connue en Italie, probablement en référence au nom de certaines fenêtres vénitiennes (jalousies). On la connaît aussi sous le nom de multiplication "par tableau", par "grillage" car elle se présente sous la forme de tableau à cases mi-parties par leur diagonale pour permettre l'écriture du produit de deux nombres à un chiffre. Une partie de la case accueille le chiffre des dizaines, l'autre le chiffre des unités. L'origine de ce procédé n'est pas établie mais on en trouve des descriptions dans les écrits mathématiques non seulement européens mais aussi chinois, indiens et arabes.

En voici un exemple donné par Luca Pacioli qui recense, dans son livre "*La summa de arithmetica...*" paru en 1494 à Venise au moins huit techniques différentes pour la multiplication ayant cours dans l'Italie de la fin du XV^e.

Il s'agit d'obtenir le produit de 987 par lui-même.

Après avoir construit un tableau de 9 cases (3x3) et tracé dans chacune d'elles une diagonale, on écrit les produits des nombres constitués par les chiffres des deux nombres à multiplier. On additionne ensuite les chiffres qui se trouvent dans une bande diagonale et on reporte les retenues (qui ne sont pas inscrites ici). Le résultat est 974 169 qu'il suffit de lire sur deux côtés du carré.

	9	8	7	
7	3 6	6 5	9 4	9
8	2 7	4 6	6 5	6
9	1 8	2 7	3 6	1
	9	7	4	

Ce deuxième exemple est extrait de l'ouvrage *De Mathematicis Rosis* (1 509) de Charles Bouelle. Il s'agit du produit de 144 par 2 324. Le résultat s'affiche en bas à l'extérieur du carré : c'est 334 656. A noter, dans le coin supérieur droit, l'inscription des retenues.

		Multiplicatus				
	0	2	3	2	4	1 1
1	2					1
4	5	1				1
4	5	1				1
	3	4	6	5	6	

1.2 Les baguettes de Neper (1617)

A la fin du XVI^e siècle, les progrès de la science se trouvent entravés par la complexité croissante des calculs à effectuer. John Napier (ou Neper), baron de Merchiston (Ecosse), imagine le calcul logarithmique et en calcule la première table. A la même époque, en 1617, il publie un ouvrage d'arithmétique intitulé *Rhabdologiae seu numerationis per virgulas* dans lequel il expose un procédé proche de la multiplication "per gelosia". Il baptise ce procédé du nom de *rhabdologie*, qui deviendra le terme générique pour désigner tous les modes de calcul basés sur l'utilisation de baguettes chiffrées.

Faciles à fabriquer et peu coûteuses, ne nécessitant pas de connaissances particulières en mathématiques, ces baguettes furent très populaires et utilisées en Europe pendant plus de *deux cent cinquante ans*. Elles furent construites dans des matières plus ou moins précieuses : bois, métal, os ou ivoire, et souvent présentées dans d'élégantes petites boîtes.

Les baguettes sont de section carrée. Sur chacune de leur quatre faces, qui porte un numéro, est gravée une colonne de la table de multiplication qui permet d'éviter son apprentissage par coeur. Pour chaque produit, comme pour la méthode "per gelosia", une diagonale sépare le chiffre des dizaines du chiffre des unités.

1	8	4	7
2	1 6	0 8	1 4
3	2 4	1 2	2 1
4	3 2	1 6	2 8
5	4 0	2 0	3 5
6	4 8	2 4	4 2
7	5 6	2 8	4 9
8	6 4	3 2	5 6
9	7 2	3 6	6 3

Pour multiplier 847 par 6 :

On juxtapose les baguettes 8,4,7 à droite de la baguette fixe graduée de 1 à 9.

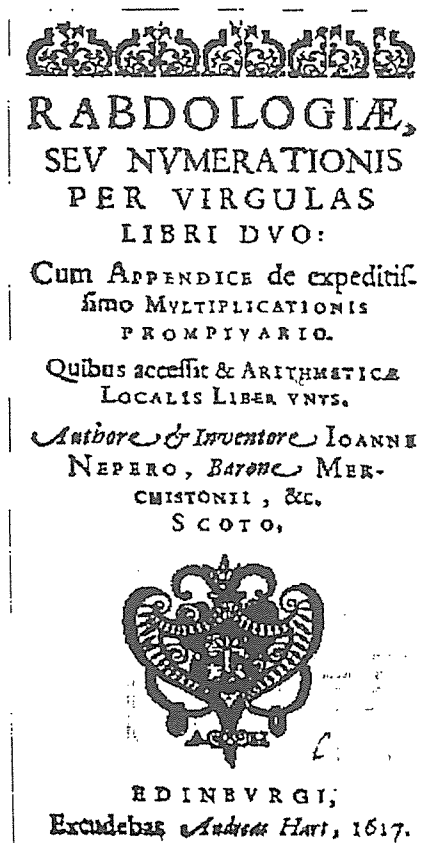
En face du chiffre 6 de la première baguette, se trouvent tous les produits partiels par 6 des chiffres du multiplicande.

Pour obtenir le résultat, il suffit d'ajouter en diagonale le chiffre des dizaines de chaque case au chiffre des unités de la case immédiatement à gauche et de reporter les retenues, s'il y a lieu.

On trouve 5082.

1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0 0	0 2	0 4	0 6	0 8	1 0	1 2	1 4	1 6	1 8
3	0 0	0 3	0 6	0 9	1 2	1 5	1 8	2 1	2 4	2 7
4	0 0	0 4	0 8	1 2	1 6	2 0	2 4	2 8	3 2	3 6
5	0 0	0 5	1 0	1 5	2 0	2 5	3 0	3 5	4 0	4 5
6	0 0	0 6	1 2	1 8	2 4	3 0	3 6	4 2	4 8	5 4
7	0 0	0 7	1 4	2 1	2 8	3 5	4 2	4 9	5 6	6 3
8	0 0	0 8	1 6	2 4	3 2	4 0	4 8	5 6	6 4	7 2
9	0 0	0 9	1 8	2 7	3 6	4 5	5 4	6 3	7 2	8 1

Un jeu de baguettes de Neper (1617).



La couverture de l'ouvrage de Neper
paru en 1617
Rhabdologiae sev numerationis per virgulas
dans lequel il expose la méthode de calcul
avec les baguettes.

gination s'est égarée pour découvrir le secret de la belle lacedémonienne. Mais ce reproche ne doit pas tomber sur la dissertation de Pierre Petit, intitulée *Homeri nepentes*, & imprimée à Utrecht en 1689 in-8°. On y découvrira beaucoup d'esprit & de science, si on se donne la peine de la lire. (D. J.)

NEPER, BAGUETTES ou BATONS DE *offa Neperi*, (*Aarithmet.*) sont un instrument par le moyen duquel on peut faire promptement & avec facilité la multiplication & la division des grands nombres : on l'a appelé ainsi du nom de son inventeur Neper, qui l'est aussi des logarithmes. Voyez LOGARITHMES.

Construction de cet instrument. On prend dix petits bâtons, ou petites lames oblongues faites avec du bois, ou du métal, ou de la corne, ou du carton, ou quelqu'autre matière semblable : on les divise chacune en neuf petits carrés, & chacun de ces petits carrés en deux triangles par la diagonale. *Pl. alb. fig. 11.* Dans ces petits carrés on écrit les nombres de la table de multiplication, autrement appelé *abaque* ou *table de Pythagore* ; de manière que les unités de ces nombres soient dans le triangle le plus à la droite de chaque carré, & les dixaines dans l'autre.

Usage des baguettes de Neper pour la multiplication. Pour multiplier un nombre donné par un autre, disposez les bâtons entr'eux, de telle manière que les chiffres d'en haut représentent le multiplicande ; ensuite joignez-y à gauche le bâton ou la baguette des unités : dans ce bâton vous chercherez le chiffre le plus à la droite du multiplicateur, & vous écrirez de suite les nombres qui y répondent horizontalement, dans les carrés des autres lames, en ajoutant toujours ensemble les différens nombres qui se trouveront dans le même rhombe. Vous ferez la même opération sur les autres chiffres du multiplicateur ; ensuite vous mettez tous les produits les uns sous les autres ; comme dans la multiplication ordinaire ; enfin vous les ajouterez ensemble pour avoir le produit total. Exemple,

Supposons que le multiplicande soit 5978, & le multiplicateur 937 ; on prendra le

nombre 56, qui (*fig. 12. Pl. alb.*) se trouve au-dessous du dernier chiffre 8 du multiplicande, & vis-à-vis du dernier chiffre 7 du multiplicateur ; on écrira 6 ; on ajoutera 5 avec 9 qui se trouve dans le même rhombe à côté ; la somme est 14 : on écrira 4, & on retiendra 1, qu'on ajoutera avec 3 & 4 qui se trouvent au rhombe suivant ; on aura 8, qu'on écrira : ensuite on ajoutera 5 & 6, qui se trouvent dans le rhombe suivant, & qui sont 11 ; on écrira 1, & on retiendra 1, qui ajoutée avec le 3 du triangle suivant, fait 4, qu'on écrira. On aura ainsi 41846 pour le produit du multiplicande par 7 : on trouvera de même le produit du multiplicande par les autres chiffres du multiplicateur, & la somme de ces produits, disposés comme il convient, sera le produit cherché. (E)

Cette opération n'a pas besoin d'être démontrée : si on y fait la plus légère attention, on verra qu'elle n'est autre chose que la multiplication ordinaire, dont la pratique est un peu facilitée, parce qu'on est dispensé de savoir par cœur la table de multiplication, & de se servir des chiffres qu'on retient à chaque nombre que l'on écrit ; en un mot, la multiplication est ici réduite à des additions. (O)

Usage des bâtons de Neper pour la division. Disposez les petits bâtons l'un auprès de l'autre, de manière que les chiffres d'en haut représentent le diviseur ; ajoutez-y à gauche le bâton des unités ; ensuite descendez au-dessous du diviseur, jusqu'à ce que vous trouviez une branche horizontale dont les chiffres ajoutés ensemble, comme on a fait dans la multiplication, puissent donner la partie du dividende dans laquelle on doit chercher d'abord combien le diviseur est contenu ; on puisse donner au moins le nombre qui en soit le plus proche, quoique plus petits ; retranchez ce nombre de la partie du dividende que vous avez pris, & écrivez au quotient le nombre qui est à gauche dans la branche horizontale ; continuez ensuite à déterminer de la même manière les autres chiffres du quotient, & le problème sera résolu. Exemple,

Supposons qu'on veuille diviser 5601386 par 5978 : on fait qu'il faut d'abord savoir combien

combien de fois 5978 est contenu dans 56013. Descendez (*fig. 12. alb.*) au-dessous du diviseur jusqu'à ce que vous soyez arrivé à la dernière tranche horizontale, dont les nombres étant ajoutés comme dans la multiplication, de rhombe en rhombe, donnent 53802, qui est le plus grand nombre au-dessous de 56013 ; écrivez 9 au quotient, & retranchez 53802 de 56013, le reste sera 2211 : descendez 8, & opérez sur le nombre 22118, comme vous avez fait sur 56013, vous trouverez dans la troisième tranche horizontale le nombre 17934, qui est le plus grand au-dessous de 22118 ; écrivez 3 au quotient, & opérez sur le second reste, comme vous avez fait sur le premier, vous trouverez encore le chiffre 7, que vous écrirez au quotient, qui par conséquent sera 937 sans reste. *Chambers. (E)*

On trouve dans l'histoire de l'académie de 1738, une méthode présentée par M. Rauslan, pour faire les multiplications & divisions par de nouvelles baguettes différencées de celles de Neper. Nous y renvoyons le lecteur, en ajoutant que toutes ces opérations sont plus curieuses dans la théorie, qu'utiles & commodes dans la pratique : il est bien plus court de savoir par cœur la table de multiplication ou table de Pythagore, que d'avoir recours, pour chaque multiplication qu'on veut faire, à des baguettes qu'on n'a pas toujours sous la main & dont l'arrangement demande d'ailleurs un peu de temps & d'attention. (O)

NEPETA, (*Géogr. anc.*) ville d'Italie dans la Toscane, dont Tite-Live & Ptolomée parlent ; c'est aujourd'hui la ville de *Népi*, entre Rome & Viterbe. Voyez *NÉPI*.

NEPHELES, f. f. pl. (*Antiq. grecq.*) solennités des Grecs nommées *la fête des gens sobres* ; ce que marque le mot même qui signifie *sobriété*. Les Athéniens célébroient cette fête en offrant une simple boisson d'hydromel au Soleil, à la Lune, à l'Aurore & à Vénus : ils brûloient à cette occasion sur leurs autels toutes sortes de bois, excepté celui de la vigne & du figuier. (D. J.)

NEPHELIUM, f. m. (*Chirurg.*) petite *Tome XXII.*

Les baguettes de Neper vues par l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert (1778).

ENCYCLOPÉDIE,

OU

DICIONNAIRE RAISONNÉ DES ARTS ET DES MÉTIERS,

PAR UNE SOCIÉTÉ DE GENS DE LETTRES.

Mis en ordre & publié par M. DIDEROT, & ensuite à la PORCE
MATHÉMATIQUES, par M. D'ALEMBERT.Tous les jours par la poste.
Tous les jours par la poste.

NOUVELLE ÉDITION.

TOME VINGT-DEUXIÈME.



A GENEVE,

Chez PELLER, Imprimeur-Libraire, rue des Belles Filles.

M D C C. LXXVIII.

1.3 Les baguettes de Roussain (1738)

L'ingéniosité des baguettes de Neper inspira une multitude de variantes, jusqu'au début du XX^e siècle. Ces perfectionnements visaient à rendre plus rapide leur manipulation et à éviter les additions finales et les reports de dizaines.

En 1738, Roussain présente à l'académie des Sciences de Paris une manière de faire les multiplications où il reprend l'idée de Neper mais l'addition diagonale est remplacée par une addition verticale. Voici un extrait de l'*Histoire de l'Académie des Sciences*, année 1738 :

HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES.

ANNEE M. DCCXXXVIII.

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique,
pour la même Année.
Tirés des Registres de cette Académie.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
M. DCCXL.

ARITHMETIQUE.

Cette année M. Roussain a présenté à l'Académie une manière de faire les Multiplications & Divisions Arithmétiques par de petits Bâtons à l'imitation d'une Méthode du Baron Neper. On a trouvé que M. Roussain rendoit cette Méthode plus commode & plus simple, en affermissant ces Bâtons dans un Cadre, & distinguant certaines Bandes de Chiffres par des couleurs, ce qui prévient les erreurs que pourroit produire le dérangement des Bâtons, & a paru fort bien imaginé.

	6	8	7	
1	1	1		
	2	6	4	
1	2	2		
	8	4	1	
2	3	2		
	4	2	8	
3	4	3		
	0	0	5	
3	4	4		
	6	8	2	
4	5	4		
	2	6	9	
4	6	5		
	8	4	6	
5	7	6		
	4	2	3	

Pour multiplier 687 par 4 :

On juxtapose en les encastrant les baguettes 6, 8 et 7.

On repère les produits des chiffres du multiplicande par 4.

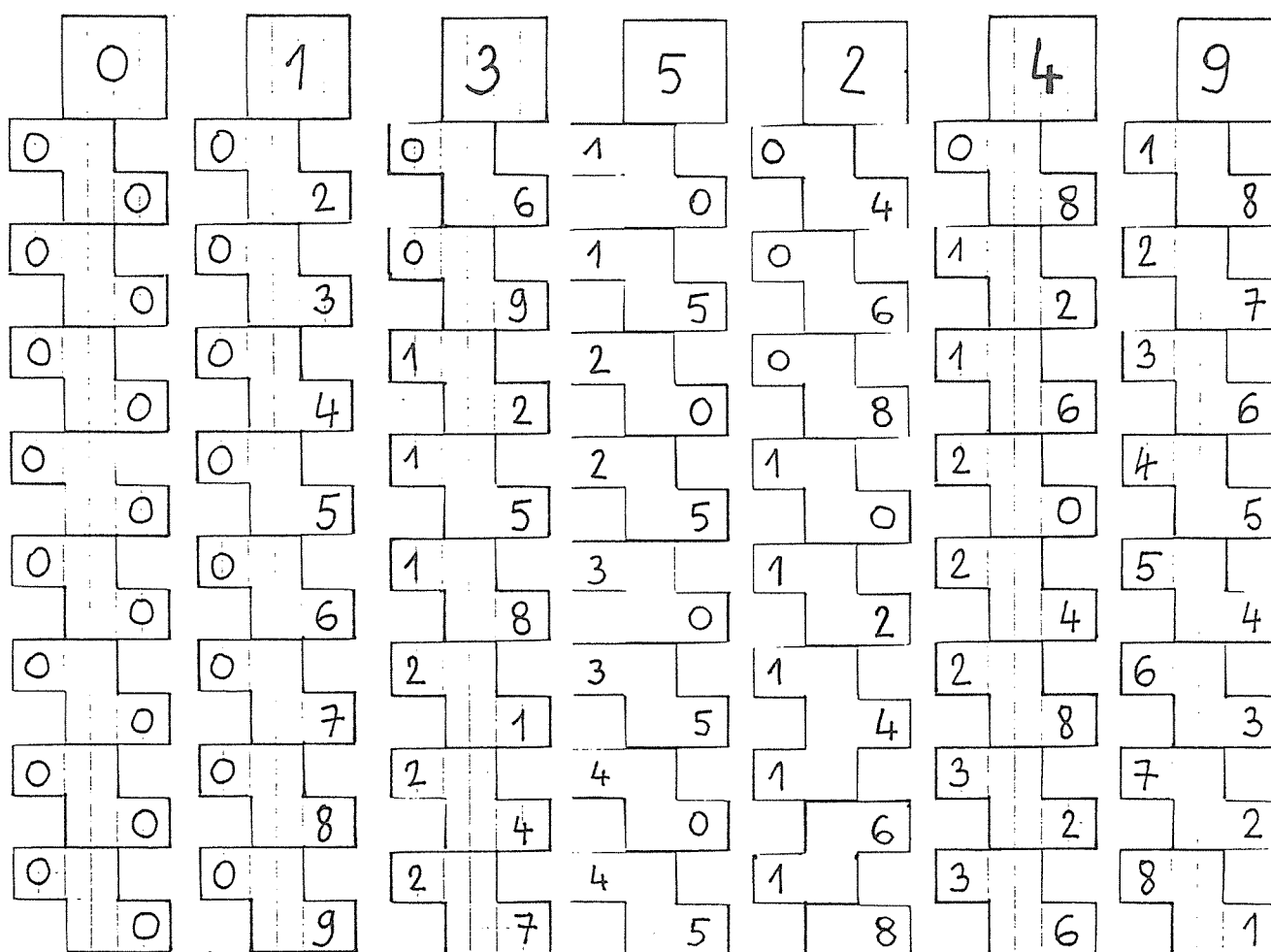
On lit : 2 3 2
 4 2 8

On ajoute les chiffres qui se trouvent l'un sur l'autre.

On obtient : 2 7 4 8

Ce sont les chiffres du produit cherché.

Le produit de 687 par 4 est : 2 748.



Un jeu de baguettes de Roussain (1738).

1.4 Les réglettes multiplicatrices de Genaille et Lucas (1885)

A la fin du XIX^e siècle, un ingénieur aux chemins de fer de l'Etat, Henri Genaille a imaginé et réalisé des réglettes qui suppriment toute opération pour obtenir les produits cherchés. Ces réglettes furent commercialisées par la librairie Belin et semblent avoir eu beaucoup de succès. Elles sont connues sous le nom de Genaille-Lucas. En effet, le mathématicien français Edouard Lucas, connu pour ses ingénieuses récréations mathématiques mais aussi par d'originaux résultats en théorie des nombres a participé à la mise au point de ces réglettes. Il en parle ainsi dans sa "récréation" mathématique parue en 1892 : "Il [Genaille] eu l'idée excessivement remarquable et ingénieuse de remplacer les additions par des dessins très simples qui permettent de lire instantanément tous les produits partiels. La manœuvre de ces réglettes est aussi facile que celle qui consiste à suivre un chemin à travers un labyrinthe, au moyen de mains indicatrices dessinées sur des poteaux placés aux carrefours ; c'est dire que l'on apprend à se servir de ces réglettes en une minute au plus. Nous les avons perfectionnées en ajoutant les quatre faces, comme pour celles de Neper..."

Pour trouver le résultat cherché, il suffit de suivre des "triangles" astucieusement tracés sur des réglettes amovibles dont les numéros correspondent aux chiffres du multiplicande. Ces réglettes sont placées dans une boîte où se trouve aussi une réglette fixe graduée de 2 à 9. Sur les réglettes amovibles, les "triangles" guident le regard du calculateur, de droite à gauche, pour désigner successivement tous les chiffres d'un produit d'un nombre à plusieurs chiffres, par un nombre à un chiffre, sans qu'il soit nécessaire d'effectuer la moindre opération.

	8	4	7
2	0	6	4
	1	7	5
3	0	4	1
	1	5	2
	2	6	3
4	0	2	8
	1	3	9
	2	4	0
	3	5	1
5	0	0	5
	1	1	6
	2	2	7
	3	3	8
	4	4	9
6	0	8	2
	1	9	3
	2	0	4
	3	1	5
	4	2	6
	5	3	7
7	0	6	9
	1	7	0
	2	8	1
	3	9	2
	4	0	3
	5	1	4
	6	2	5
8	0	4	6
	1	5	7
	2	6	8
	3	7	9
	4	8	0
	5	9	1
	6	0	2
	7	1	3
	8	2	4
9	0	2	3
	1	3	4
	2	4	5
	3	5	6
	4	6	7
	5	7	8
	6	8	9
	7	9	0
	8	0	1

Pour trouver le produit de 847 par 6 :

On juxtapose les réglettes amovibles 8, 4, 7 à droite de la réglette graduée de 2 à 9.

On se place à l'intersection de la bande 6 et de la colonne 7.

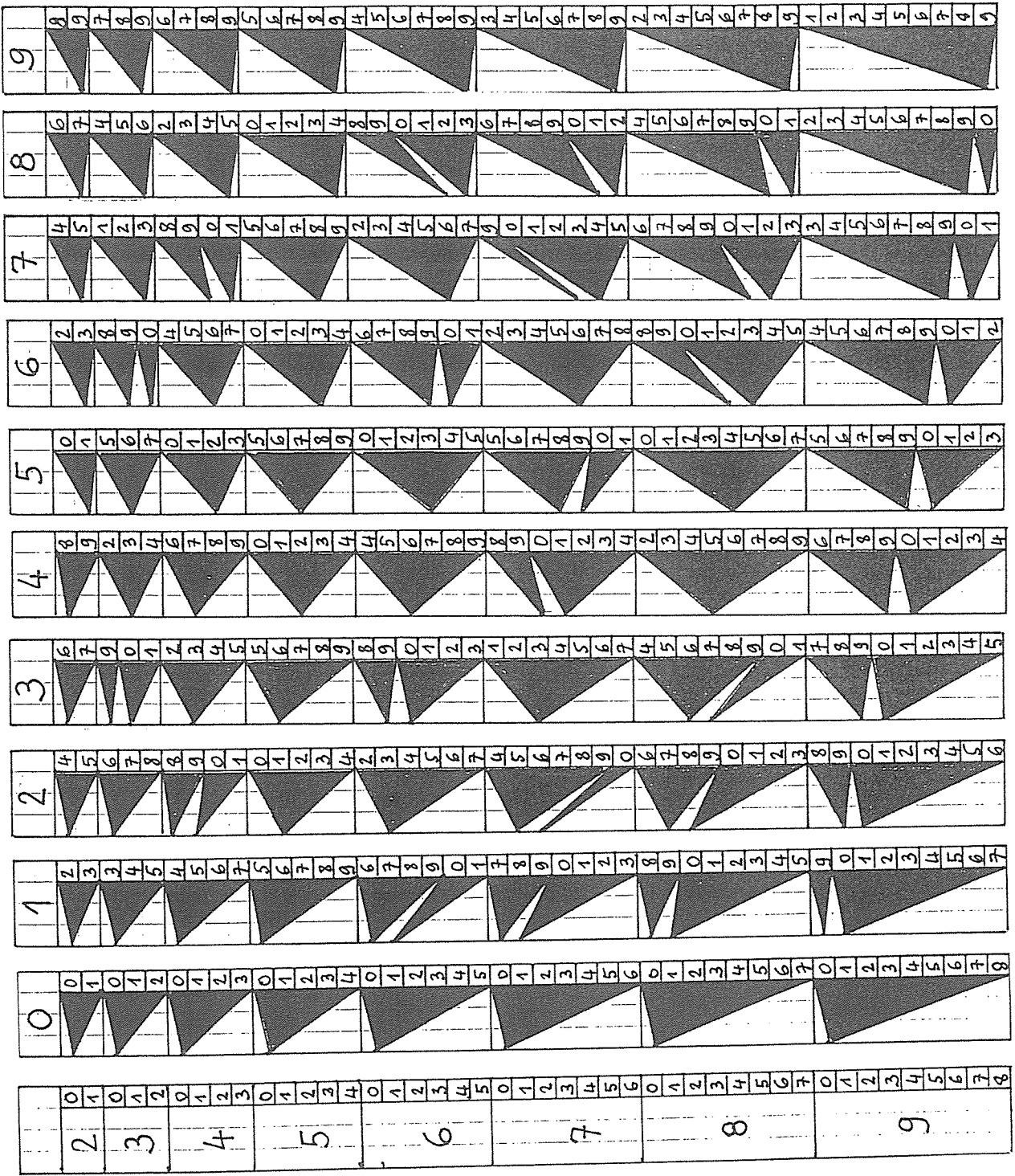
On lit le chiffre situé à la partie supérieure de la base du triangle noir : c'est 2.

Ensuite, il suffit de se laisser guider par la pointe des triangles. On lit successivement 2 - 8 - 0 - 5. Ce sont les chiffres du produit cherché, mais dans l'ordre inverse.

Le résultat est donc 5082.

Pour avoir le produit de 847 par 3, on lit en partant en haut à droite de la bande 7 et en suivant les triangles : 1 4 5 2. Il faut inverser l'ordre des chiffres. Le produit de 847 par 3 est donc : 2541.

Un autre exemple : pour multiplier 847 par 9, on lit les chiffres 3 2 6 7. Le produit de 847 par 9 est donc : 7623.



Un jeu de réglottes multiplicatrices de Genaille et Lucas (1885).

1.5 Les réglettes multisectrices de Genaille-Lucas (1885)

Genaille et Lucas réalisèrent aussi des réglettes multisectrices, réglettes qui effectuent des divisions euclidiennes par des nombres à un chiffre et sur lesquelles on lit directement le quotient et le reste. Comme les réglettes multiplicatrices, elles furent construites en carton et commercialisées par la librairie Belin en 1885 pour un prix modeste, sous forme de petites boîtes de 12 cm x 18 cm x 1 cm. On peut les voir au Musée du Conservatoire National des Arts et Métiers à Paris.

8	5	3	R
4	2	1	0
9	7	6	1
2	1	4	0
6	5	4	1
9	8	7	2
2	1	0	0
4	3	3	1
7	6	5	2
9	8	8	3
1	1	0	0
3	3	2	1
5	5	4	2
7	7	6	3
9	9	8	4
1	0	0	0
3	2	2	1
4	4	3	2
6	5	5	3
8	7	7	4
9	9	8	5
1	0	0	0
2	2	1	1
4	3	3	2
5	5	4	3
6	6	6	4
8	7	7	5
9	9	9	6
1	0	0	0
2	1	1	1
3	3	2	2
4	4	4	3
6	5	5	4
7	6	6	5
8	8	7	6
9	9	9	7
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9

Utilisation des réglettes multisectrices

Pour diviser 853 par 4 :

On juxtapose les réglettes 8,5,3 à gauche de la réglette "R" qui indique le diviseur et donne le reste.

On se place à l'intersection de la bande 4 et de la colonne 8.

*On lit le chiffre situé à la partie supérieure gauche : c'est 2.
Le quotient commence donc par 2.*

*Ensuite, il suffit de suivre les lignes dans leur continuité.
Le deuxième chiffre rencontré est 1, le troisième est 3.
Le quotient est donc 213.*

Le dernier chiffre situé au bout de la ligne est le reste . C'est 1.

Pour avoir le quotient et le reste de 853 par 8 , on lit en partant en haut à gauche de la bande 8 et en suivant les flèches : 1 0 6 5. Le quotient est 106 et le reste : 5.

Un dernier exemple : le quotient de 853 par 9 est : 094 et le reste est : 7.

[illegible]

2. Le travail en l'atelier : un travail ambitieux où se mêlent plaisir et effort.

Ce travail sur les baguettes a été réalisé essentiellement avec des élèves de cinquième et de quatrième. C'est un travail très stimulant car il s'agit de relever plusieurs défis qui semblent ne pas être a priori, à leur portée.

Le premier défi consiste à comprendre leur fonctionnement. Un peu de concentration, quelques calculs, des vérifications à la calculatrice et le principe est vite compris. Mais déjà se pose le problème des multiplications plus complexes : certains arrivent à trouver l'addition de produits partiels mais ne sont pas satisfaits car ils restent dans une logique de résultat à trouver sans passer par des calculs intermédiaires. D'autres trouvent des choses si le multiplicateur est décomposable...

Le deuxième est de réaliser les baguettes. Bien que ce soit à la portée d'un élève de collège, il faut un peu de méthode et de ténacité pour y arriver, mais comme il y a un véritable enjeu, les découragements sont surmontés d'autant plus facilement qu'un travail collectif s'impose : ce sont les échanges, les débats, qui permettent de trouver la solution. Quel plaisir quand on a trouvé ! Et ce plaisir, récompense de l'effort consenti a été augmenté dans notre cas par la présence de l'ouvrier professionnel du Collège, qui s'est intéressé à ce qui se passait à l'atelier et qui a pris sa part de travail. Il a préparé des baguettes en bois et nous les a apportées dans de belles boîtes de présentation.

Le troisième défi et peut-être le plus stimulant pour les élèves est la présentation et l'explication de ce travail aux autres. Le faire sous forme d'exposé en classe est très intéressant mais depuis quelques années déjà, ils ont l'habitude de présenter leur travail sous forme d'ateliers qu'ils animent lors d'expositions au collège ou ailleurs.

Il faut préciser que tous les défis ne sont pas du côté des élèves. En effet, deux au moins sont à relever par le professeur. Le premier est de situer ces baguettes dans un contexte et une histoire pour ne pas les réduire à de simples gadgets du passé. Ce qui signifie pour le professeur d'abord un gros travail de documentation, de lectures, d'exploration et après le partage avec ses élèves de ses découvertes. Ceci offrira à l'atelier des perspectives infiniment riches comme l'étude d'autres procédés de multiplication (la duplication des anciens Egyptiens, la méthode per gelosia, le calcul avec les jetons, ou avec le boulier par exemple), l'exploration d'autres systèmes de numération (binaire, sexagésimal, etc.), la découverte des débuts du calcul mécanique avec la Pascaline, l'évolution des machines, etc. Ainsi, ce petit projet de travail sur les baguettes s'est transformé au fil du temps en un travail ambitieux sur les nombres et les instruments à calculer. Travail sans cesse développé et approfondi.

Le deuxième défi est de mener ce travail avec un soin et une rigueur qui s'approchent le plus possible des méthodes des historiens : nous nous sommes appuyés sur des références solides, des travaux qui font autorité dans les domaines concernés : c'est ainsi que nous nous sommes servis entre autres du travail de J.Ritter pour la naissance du nombre, de celui de l'IREM de Lyon pour les problèmes du papyrus Rhind, du livre de Martzloff pour les mathématiques chinoises, de celui d'Olléris pour la géométrie de l'an Mil. Pour le travail sur le calcul avec les jetons, nous avons utilisé les ressources des grandes bibliothèques. Nous avons ainsi utilisé des livres parus aux XVI^e, XII^e et XVII^e siècles et qui s'adressaient à un public motivé par l'apprentissage de cette technique très utilisée par les comptables et les marchands, etc. (Voir bibliographie).

Nous sommes aussi allés chercher à la source. C'est ainsi que les élèves de l'atelier en visitant les salles égyptiennes du Louvre ont pu étudier la numération hiéroglyphique. En visitant l'exposition : "*La naissance de l'écriture*", à la Bibliothèque Nationale de France, ils ont pu découvrir que le nombre était né en Mésopotamie. Nous avons visité d'autres expositions, comme celle qui présentait les anciennes machines à calculer, etc. La prochaine visite prévue dans l'année est celle des collections du Musée du Conservatoire National des Arts et Métiers pour voir de près les instruments et machines à calculer et découvrir les autres évolutions des baguettes de Neper : elles deviennent rouleaux, disques et sont souvent à la base de machines comme l'*Organum mathematicum* du Père Caspar Schott qui possède des cylindres népériens au lieu des baguettes ou celle de l'Anglais Morland qui a transposé le principe des baguettes dans des disques népériens.

Chaque fois que cela est possible, nous invitons des personnes ressources dont le savoir sur les thèmes que nous traitons possède, au niveau de sa transmission, la valeur irremplaçable d'une parole vivante. En effet, pour les élèves qui ont du mal à travailler sur des textes ou pour ceux que le travail personnel et solitaire rebute, ces personnes sont une aide sérieuse pour avancer, elles introduisent aussi pour tous une autre manière de penser et de voir les choses qui renouvelle et enrichit notre travail.

On le voit, notre travail en atelier se veut ambitieux et exigeant. Il s'y mêle le plaisir et l'effort : plaisir de la découverte après un travail quelquefois acharné dont il faut reconnaître la valeur puisque ce temps d'effort est pris sur celui de la détente normalement prévu entre midi et quatorze heures. Notre atelier ne propose pas d'activités, faciles, "cool", qui seraient des occupations pour élèves désœuvrés et s'opposeraient au vrai travail scolaire prétendument fastidieux. Il ne s'agit pas de divertissement, mais d'une formation de l'esprit, d'une initiation à la recherche. De fréquents aller retours ont lieu entre l'atelier et la classe : des questionnements en classe sont approfondis en atelier et des recherches en atelier fécondent en retour le cours proprement dit.

Ne le cachons pas : ce travail demande beaucoup d'énergie au professeur car il faut que tout élève trouve sa place à l'atelier, depuis l'élève qui commence à prendre goût à faire des maths à l'*accro* qui veut aller plus loin. Mais ces expériences de travail en commun, professeur-élèves, sont génératrices d'enthousiasme et de plaisir partagés du vrai travail intellectuel. Et même s'il y a quelquefois difficultés, douleurs ou crises, c'est le plaisir d'avoir vraiment avancé qui domine. Voici l'explication que je donne au succès de l'atelier et à la constance de la fréquentation tout au long de l'année. C'est là qu'il convient de parler du rôle primordial joué par l'exposition animée par les élèves.

3. La présentation publique du travail fait en atelier : l'exposition



Pour avoir une idée de ce que peut être une exposition animée par des élèves, voici deux photos de l'exposition que l'atelier du collège Louise Michel de Maringues a organisée cette année 2 000 .

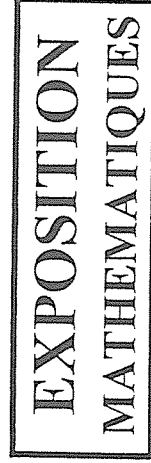
On trouvera dans les pages suivantes le programme de l'exposition, un texte donnant dix bonnes raisons de faire une exposition et le point de vue de deux stagiaires.



3.1 Le programme d'une exposition : l'exposition 2 000 de l'atelier du collège Louise Michel de Maringues

Maringues

Collège Louise Michel
Atelier de mathématiques



31 MARS - 7 AVRIL 2000

avec 10 ateliers animés par
les élèves

61

La naissance du nombre.

Calculs à l'ombre des pyramides

L'art des calculs chinois

En l'an mil

Compter avec des jetons

Calculer avec des baguettes

Petite histoire des machines à calculer

Le cube tronqué

Géométrie et informatique

Les pointus. Puzzles

Les 7 premiers ateliers présentent un travail sur les nombres prévu sur 3 ans : commencé en 1998-1999, il s'est poursuivi cette année et sera approfondi l'an prochain et présenté à l'Expo-Sciences 2001 sous le titre



atelier 1 : la naissance du nombre

Ecrire les nombres sur des plaquettes d'argile comme les babyloniens

Une division vieille de 46 siècles. Écriture cunéiforme. Le système savant babylonien. Tables de multiplication, d'inverses, de triplets pythagoriciens. Mathématiques babyloniennes.

atelier 2 : calculs à l'ombre des pyramides.

Comprendre la multiplication et la division des anciens Égyptiens.

Les textes mathématiques égyptiens. Le Papyrus Rhind. Les nombres en écritures hiéroglyphique et hiératique. La multiplication et la division égyptiennes. Les fractions égyptiennes. Problèmes tirés du Papyrus Rhind.

atelier 3 : l'art des calculs chinois.

Calligraphier les nombres. Calculs avec les baguettes, les bouliers chinois et japonais.

La numération chinoise traditionnelle. Les nombres négatifs. Le système positionnel savant chinois.

atelier 4 : en l'an Mil.

Calculer sur l'abaque de Gerbert.

L'abaque de Gerbert. Les fractions romaines. La première calculatrice de poche : le boulier romain. Géométrie de l'an Mil. L'évolution des chiffres indo-arabes en Occident au Moyen Âge.

atelier 5 : l'art de compter aux jetons

Calculs avec les jetons

d'après "l'arithmétique" de J.Trenchant (1558).

La bataille Abacistes-Algoristes, la "Margarita Philosophica" de Gregorius Reisch (Freiburg 1503). Abaques et tables à calculs. "L'arithmétique ou l'art de compter toute sorte de nombres avec la plume et les jetons" de J.François (1661).

atelier 6 : quand les baguettes simplifient les calculs.

Multiplier et diviser sans efforts avec des baguettes.

La multiplication "per gelosia". Les baguettes de Neper (1617). Les baguettes de Neper vues par l'Encyclopédie de Diderot et D'Alembert. Les baguettes de Roussain (1738). Les règles multiplicatrices et multiseectrices de Genaille et de Lucas (1885).

atelier 7 : petite histoire des machines à calculer

Démonstration de quinze anciennes machines à calculer.

"L'arithmomètre de Thomas de Colmar" (1820), première machine fabriquée en série. "L'Original-Oldner", machine du début du siècle. La

"Brunsviga" (1900) et la "Dactyle". La "Context 10" (Danemark 1950) qui donne les résultats des divisions et des multiplications, chiffre après chiffre. Le "Comptometer de Felt et Tarrant" (1887), machine qui eut un succès considérable jusqu'à la fin des années 1920. La "Mercedes EUKLID DUPLIX", machine électrique à prise momentanée (vers 1905). La "Friden SRH", seule machine au monde permettant l'extraction entièrement automatique de la racine carrée, commercialisée à partir de 1953 au prix d'une 4CV Renault. La "Civita", multiplicatrice mécanique de poche fabriquée jusqu'en 1970, etc. La plupart de ces machines seront présentées par un spécialiste : André Devaux. La numération binaire. L'arithmétique binaire de Leibniz. Comment calculent les ordinateurs ?

géométrie

atelier 8 : le cube tronqué.

Tronquer des cubes en polystyrène avec le filcoupeur de Charles Perol.

Construction de l'angle de coupe. Dessins en perspective cavalière et construction des polyèdres obtenus.

atelier 9 : géométrie et informatique.

Utiliser l'outil informatique pour conjecturer des propriétés et explorer des situations.

Lieux géométriques. Familles de droites et de figures.

atelier 10 : les pointus les puzzles.

Construire des pyramides et des cônes

Manipuler des puzzles pour découvrir des propriétés mathématiques.

3.2 Dix bonnes raisons de faire une exposition de mathématiques animée par les élèves

Le texte qui suit, rédigé pour un autre stage, a servi de base de discussions ; il tente de dire ce qu'une telle exposition apporte aux élèves, au professeur, à l'enseignement des maths, au club et aussi à la vie d'un collège rural.

1 Travail valorisé

L'exposition valorise le travail des élèves : cette mise en valeur de leur production est une reconnaissance de leur travail, de leur personne même. Le travail scolaire de l'année en est marqué. Il n'est plus regardé comme un travail noté par le professeur mais comme un véritable travail intellectuel. Le travail à l'atelier a vocation d'être présenté au public. Aussi, est-ce avec sérieux qu'il est fait et souvent approfondi naturellement. Sont faites aussi, on s'en doute, avec intérêt et application, la rédaction de textes, la réalisation d'affiches, la confection de maquette ou la préparation d'expériences ou d'animations pour présenter un résultat de recherche.

2 Prise d'initiatives

L'exposition donne aussi aux élèves l'occasion de prendre des initiatives : la préparation de l'exposition et son animation demandent beaucoup d'énergie. C'est une période très intense d'activité et de discussion : beaucoup de problèmes se posent et doivent être réglés ; qu'est ce qu'on expose ? Comment l'expose-t-on ? Qui rédige les textes pour présenter les travaux ? Qui installe les ateliers et quand ? , etc. La main d'oeuvre ne manque pas. Les élèves veulent tous participer, y compris ceux et celles qui ne sont jamais venus à l'atelier car, à cette occasion, arrivent sur le devant de la scène ceux qui aiment bouger, qui aiment se rendre utiles, qui aiment faire des projets avec d'autres, les maths ne sont pour certains qu'un prétexte.

3 Expérience partagée

C'est donc une expérience partagée par le professeur avec ses élèves : c'est vraiment un projet commun qu'il s'agit de réussir. On peut même dire que, au fil des années, ce projet est devenu celui des élèves plus que le mien, car je dois avouer que je me serais bien passé parfois de ce travail supplémentaire, mais il n'est pas question pour eux de l'abandonner ; certains d'ailleurs viennent à l'atelier dans la perspective de l'exposition qui constitue un projet très motivant.

4 Animation du collège

Elle crée une animation du collège autour des maths : pendant la durée de l'exposition, la salle où elle se tient ne désemplit pratiquement pas. C'est qu'il y a, entre autres, des enjeux, à essayer de résoudre les puzzles proposés chaque année à la sagacité des jeunes et des moins jeunes, du plaisir aussi à manipuler ou à comprendre, à apprendre des choses nouvelles de la part des camarades. Après les cours, le soir, ce sont les parents et les visiteurs extérieurs, venant quelquefois de loin, qui occupent la salle.

5 Prise de parole

C'est un moment important de prise de parole des élèves : ils aiment parler de ce qu'ils ont fait, surtout lorsqu'ils se sont beaucoup investis. Aussi, est-ce avec beaucoup de plaisir et même de jubilation pour certains, qu'ils prennent en charge leur atelier et il est très intéressant de voir avec quel entrain ils répondent à ceux qui demandent des explications. Pour une fois, ils sont, non plus ceux qui écoutent, mais ceux qui transmettent le savoir qu'ils ont acquis par leur recherche. De plus cette prise de parole est plus conséquente qu'en classe : les échanges nécessairement brefs et encadrés par le professeur laissent la place à des échanges plus nourris

où la parole de l'élève ne se réduit pas à quelques phrases. Une pensée a le temps de s'exprimer. De nouvelles interrogations naissent des questions posées qui nourriront le travail de l'année suivante.

6 Echanges entre élèves

L'exposition favorise la rencontre entre élèves : pendant toute la période où elle est installée, les élèves du collège viennent au moment des récréations, entre midi et 2, pendant les heures de permanence, ou pendant les cours avec leur professeur. Cela favorise les brassages d'élèves et on peut voir, par exemple, des élèves de 5^e donner des explications à des 3^e. Des classes de CM2 viennent aussi visiter l'exposition et c'est l'occasion pour les élèves d'en prendre en charge d'autres plus jeunes ; l'intérêt s'accroît quand ces enfants viennent de la même commune qu'eux, car ils en profitent alors pour leur faire découvrir le collège.

7 Rencontre avec les parents

Elle permet avec les parents une rencontre qui diffère des habituelles rencontres parents-professeurs, toujours plus ou moins directement liées aux résultats scolaires de leur enfant. Les échanges avec les parents portent alors sur les mathématiques comme discipline ou sur les méthodes d'enseignement, sur le rôle de l'Ecole plus que sur les résultats scolaires.

8 Le collège, lieu culturel

Mais elle permet aussi la rencontre avec la famille élargie, les voisins, les habitants de la commune et des communes voisines, des élus, des journalistes. Des habitués viennent chaque année, certains plusieurs fois dans la semaine (des retraités, ...) pour relire des panneaux, poser des questions et quelquefois même des défis, pour apporter des livres, des objets. On se rend compte alors que les mathématiques pour certains visiteurs font partie intégrante de la culture. L'exposition élargit et affirme le rôle culturel du collège. Elle permet aussi de revoir des anciens élèves qui reviennent au collège pour l'occasion. La majorité d'entre eux ont participé à l'atelier les années précédentes. C'est l'occasion de faire le point avec eux sur leur façon nouvelle de voir les maths mais aussi de connaître leur parcours et donc de collecter des informations qui seront utiles pour aider les élèves plus jeunes dans leur orientation.

9 Rencontre avec les collègues

L'exposition favorise aussi la rencontre avec les collègues et les personnels non enseignants de l'établissement mais aussi avec des collègues d'autres établissements. Cela fait naître des discussions sur l'école, sur la pédagogie... Le spectacle d'élèves dont certains sont en échec scolaire, expliquant à d'autres le résultat de leur recherche, remet forcément en cause les représentations restrictives que nous avons d'eux et réchauffe le cœur d'optimisme sur nos capacités à réduire l'échec scolaire. C'est aussi l'occasion de découvrir d'autres pratiques de club ou d'atelier et d'en discuter. S'ébauchent alors des projets de collaboration.

10 Mémoire

Elle constitue enfin une mémoire du travail fait dans l'année : les réalisations (affiches, panneaux, constructions, etc), ne sont pas toutes démontées et récupérées par les élèves. Elles constituent un stock qui servira de matériel pédagogique intéressant pour les années suivantes. Ce qui reste dans la classe de maths, sert de stimulant pour les nouveaux élèves. Elles font travailler leur imagination et suscitent l'appétit, le désir, tout ce que nous avons parfois du mal à réveiller et qui est pourtant essentiel à un bon apprentissage.

3.3 Le point de vue des stagiaires

Nous avons longuement discuté du lien entre le travail fait en atelier et sa présentation publique. Tous les stagiaires étaient vivement intéressés par cette articulation et ont bien vu l'apport déterminant et structurant d'une exposition à la vie d'un club. Voici le point de vue de deux stagiaires :

“ Un (autre) fait a émergé peu à peu de cet atelier, c'est le rôle fondamental que peut jouer la réalisation d'une exposition. Dans le tour de table qui a eu lieu au début de l'Université d'Été, beaucoup de participants déjà impliqués dans l'animation d'un club ont évoqué la difficulté de recruter et surtout de stabiliser un groupe d'élèves. Il semble que peu à peu, les élèves se désintéressent de l'atelier ou du club, n'y trouvant plus leur compte. La réalisation d'une exposition peut être la réponse à ce problème : cela donne un objectif fort au club, dans lequel les élèves s'impliquent, s'affirment, prennent de l'assurance et de la fierté. Robert Charbonnier a développé des arguments (“10 bonnes raisons de faire une exposition”), fruit d'une longue expérience. La clé est peut-être dans le caractère actif de l'exposition : il ne s'agit pas seulement de composer des panneaux que les visiteurs observeront. Chaque panneau invite à l'activité, expliquant le principe et montrant les objets. Au pied de chaque panneau, les objets sont disponibles (boulrier, baguettes, feuilles pliées) et un élève aide les visiteurs à s'en servir. Lors du vernissage d'une exposition, on se rend bien compte de la force que la présence de l'artiste donne à ses travaux. Hors sa présence, le message est singulièrement plus faible, il y a quelque chose de figé, d'éteint. Le même phénomène se produit pour une exposition de mathématiques : la présence d'intervenants réveille la curiosité et l'intérêt, et le public en ressort enthousiasmé. Pour les élèves intervenants, le plaisir est grand de retourner la situation habituelle et de communiquer son savoir aux autres”. François Bouyer, Collège B. Hendricks, 84000 Orange.

Le deuxième point de vue est extrait d'un article à paraître dans *Le Petit Vert* de la Régionale de Lorraine de l'APMEP). Martine Dechoux présente les activités qu'on peut faire avec les baguettes et conclut ainsi : *“C'est une des conclusions des débats qui ont eu lieu au cours de cette Université d'Été : si on veut attirer des élèves en club et les garder, rien ne vaut pour eux le plaisir de montrer à l'extérieur ce qu'ils ont fait, aux copains, aux parents.*

Cette activité permet de confectionner, comme cela a été fait à Maringues, de très beaux panneaux d'exposition, simples, clairs (bel exercice d'expression et de concision où l'aide du collègue de français ou d'histoire peut s'avérer utile) et beaux si on les agrmente de gravures d'époque. Mieux qu'une simple exposition où on défile devant les panneaux, elle permettra aux visiteurs de manipuler aussi, sous la direction éclairée des élèves du club qui animeront les stands.

Elle peut avoir lieu au CDI et vous fournir l'occasion de l'enrichir de quelques livres sur l'histoire des mathématiques. Si l'exposition a plu et qu'elle a permis de créer dans votre établissement une petite animation mathématique pour célébrer l'an 2000, pourquoi ne pas recommencer l'an prochain avec la grande famille des puzzles ou celle plus spectaculaire parfois des polyèdres ?”Martine Dechoux, Collège Robert Schuman, 57470 Hombourg-Haut.

Bibliographie :

CAVEING M., *Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Égypte anciennes*, Presses universitaires de Lille, 1994.

CHABERT J.L. et alii, *Histoires d'algorithmes*, Belin, Paris, 1994.

FRANCOIS J., *L'arithmétique ou l'art de compter toute sorte de nombres avec la plume et les jettons*, Pierre Hallaudays, quatrième édition, Rennes, 1661.

GERBERT L'EUROPEEN, *Actes du colloque d'Aurillac de 1996*, Mémoires de la société « La Haute-Auvergne », 1997.

GODSTEIN C. *La naissance du nombre en Mésopotamie*, "La Recherche" numéro hors série : L'Univers des Nombres, août 1999.

KELLER O. *L'algèbre et le calcul en Égypte antique*, IREM de Lyon.

LE GENDRE F., *L'arithmétique en sa perfection mise en pratique selon l'usage des financiers, banquiers et marchands*, Vignieu, Lyon, 1705, douzième édition.

LUCAS E., *Récréations mathématiques*, tome III, 1892, nouveau tirage, Blanchard, Paris, 1979.

MARZLOFF J.C., *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson, Paris, 1987.

MASCHERONI L., *Géométrie du compas*, Duprat, 17989, nouvelle édition, Monom, 1980.

MARGUIN J., *Histoire des instruments et machines à calculer*, Hermann, Paris, 1994.

OLLERIS A., *Oeuvres de Gerbert*, Thibaud, Clermont-Ferrand et Paris, 1867.

PACIOLI L., *La summa de arithmetica*, ..., 1494, Venise, nouvelle édition 1523.

RICHER, *Histoire de France (888-995)*, Ed. « Les belles lettres », Paris, 1964.

RICHE P., *Gerbert d'Aurillac, le pape de l'an mil*, Fayard, Paris, 1987.

RITTER J., *Mathématiques mésopotamiennes*, 4^e université d'été d'histoire des mathématiques, IREM, Lille 1994.

RITTER J. Mésopotamie : une énigme résolue ? *Courrier de l'UNESCO*, novembre 1993.

TRENCHANT J., *L'arithmétique*, Jove, Lyon, 1661.

Atelier animé par François Gaudel

Le thème choisi par les stagiaires, peu nombreux mais bien motivés portait sur la réalisation de fractales sur ordinateur à l'aide du logiciel Fractint, un logiciel puissant et riche du domaine public, en utilisant le langage des l-systems. Le but était d'arriver à une maîtrise pratique suffisante pour pouvoir lancer une activité de ce type. Le temps imparti s'est révélé court pour répondre à cette exigence. En effet, il a fallu répondre à trois types de questions :

- Une première, d'ordre technique : comment installer les logiciels sur ordinateur de telle façon que les élèves puissent les utiliser de façon commode et interactive ? La portabilité du logiciel utilisé dont la meilleure version fonctionne sous DOS et la grande variété des ordinateurs que l'on rencontre obligent à passer du temps sur cette question qui ne présente cependant pas un grand intérêt. (La version sous Windows de Fractint existe, mais est en fait moins puissante et pratique).
- Une seconde d'ordre mathématique : donner un bagage suffisant sur les fractales (et les pavages car le langage utilisé permet d'en réaliser très facilement) pour que les stagiaires puissent proposer à leurs élèves des recherches intéressantes.
- Enfin et sur cette base, comment utiliser le langage des l-systems pour obtenir tel ou tel type de fractale ou de pavages.

Nous n'avons certainement pas rempli complètement le contrat. Je me propose dans ce qui suit de reprendre ces trois points. Sur le premier, je ne peux m'inspirer que de mon expérience. Pour les deux autres, après une présentation générale des l-systems, je limiterai mon objectif à la présentation d'une partie de ce qu'ont fait mes élèves, en utilisant leurs travaux, en particulier ceux qu'ils ont publiés dans les actes des Congrès Maths en jeans.

1. Le logiciel Fractint et son installation

Ce logiciel peut être téléchargé (il est gratuit) à l'adresse suivante :

<http://spanky.triumf.ca/www/fractint/fractint.html>

Une fois chargé dans un répertoire que l'on aura prévu à cet effet, il convient de le décompacter (il est au format zip).

Il permet de tracer de façon interactive à l'écran ou sur imprimante, plus d'une centaine de types de courbes fractales ou liées à l'étude des systèmes dynamiques. Pour chaque type de courbe, de nombreux choix de paramètres sont proposés. Il est possible également de programmer ses propres courbes de différentes façons. Dans le cadre d'une activité en lycée ou en collège, les l-systems et les IFS offrent des possibilités adaptées au niveau de connaissance des élèves. On ne parlera ici que des l-systems.

Les œuvres des élèves ont la forme d'une suite de petits programmes écrits dans un fichier portant l'extension ".l". pour créer ce fichier, on fait appel à un éditeur. Il est bon de pouvoir passer de l'éditeur à Fractint et réciproquement. Si l'on utilise la version Windows, pas de problème ; mais comme déjà dit, cette dernière est moins satisfaisante à plusieurs égards.

Sinon, on utilisera l'éditeur DOS. Un petit fichier, appelé "fractl.bat" va servir spécifiquement à passer de Fractint à l'éditeur et de l'éditeur à Fractint. Ce petit fichier peut être créé en utilisant n'importe quel éditeur, ou le bloc note de Windows. Il sera mis dans le même répertoire que celui où l'on a placé le programme "fractint.exe"

Exemple de fichier permettant de programmer de façon interactive avec Fractint : programme fractl.bat

```
:1
fractint textsafe=save printer=hp lfile=truc.l video= sf6
pause
edit truc.l
pause
goto :1
```

:1 est une étiquette.

La seconde ligne lance le logiciel Fractint en fixant un certain nombre de paramètres : textsafe=save est une précaution utile qui permet d'éviter des ennuis avec certaines cartes vidéo ; printer=hp permet d'imprimer avec la plupart des imprimantes laser du marché ; lfile=truc.l indique au logiciel qu'il doit chercher le code des l-systems dans le fichier "truc.l" ; video=sf6 fixe une définition de 800x600. Tous ces paramètres peuvent être ajustés en se guidant sur l'aide de Fractint, accessible par la touche F1.

La commande "pause" met l'ordinateur en attente de pression sur une touche lorsqu'on quitte Fractint. Si l'on appuie à ce moment sur ctrl-Pause, on sort et revient à Windows. Si on appuie sur une autre touche, on aboutit dans l'éditeur, et l'on peut travailler directement sur le fichier "truc.l"

Lorsqu'on sort de l'éditeur, on enregistre les modifications apportées à "truc.l" et l'on revient à Fractint : on peut ainsi voir le résultat des modifications apportées.

2. Principe des l-systems

Le plus simple est de reproduire ici un exposé présenté par des élèves du lycée Louise Michel lors du Congrès Maths en Jeans de 1996

Les l-systems

par Virgil Despouy, Liès Fermas, Hermès Leco, Sinicha Mijajlovic, David Quin, Ye Hai-ping, et quelques autres, Atelier « Exploration Mathématique » du lycée Louise Michel de Bobigny.

Enseignant : M. François Gaudel

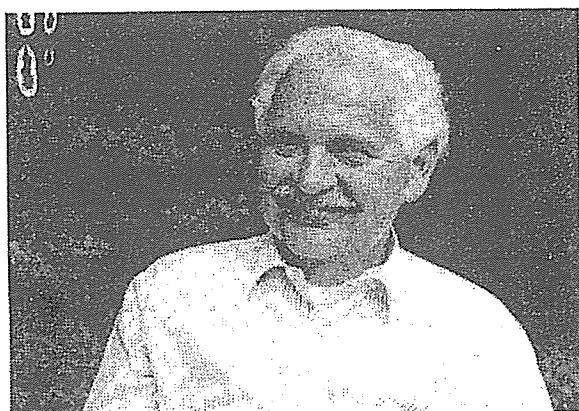
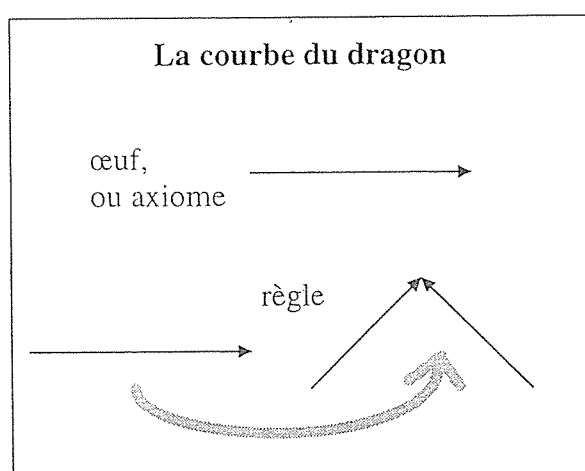


Figure 8.2 : Aristid Lindenmayer, 1925–1989.

En 1968, le biologiste Lindenmayer a inventé une formalisation permettant de décrire la croissance des plantes. Ce type de description est connu sous le nom de l-systems. Il permet d'obtenir non seulement des plantes d'allure fractale, mais aussi des formes très variées, en particulier des pavages et des courbes remarquables.

L'idée de départ est celle d'un « oeuf », qui est soumis à un programme de développement qui s'applique à chacune de ses cellules.

Voici tout d'abord un exemple :



Ici, l'œuf ou axiome est constitué d'une flèche, ou segment orienté, d'une certaine longueur.

La règle, ou programme de développement, consiste à remplacer toute flèche par deux flèches plus petites et perpendiculaires, de la façon suivante :

remplacer toute flèche par :

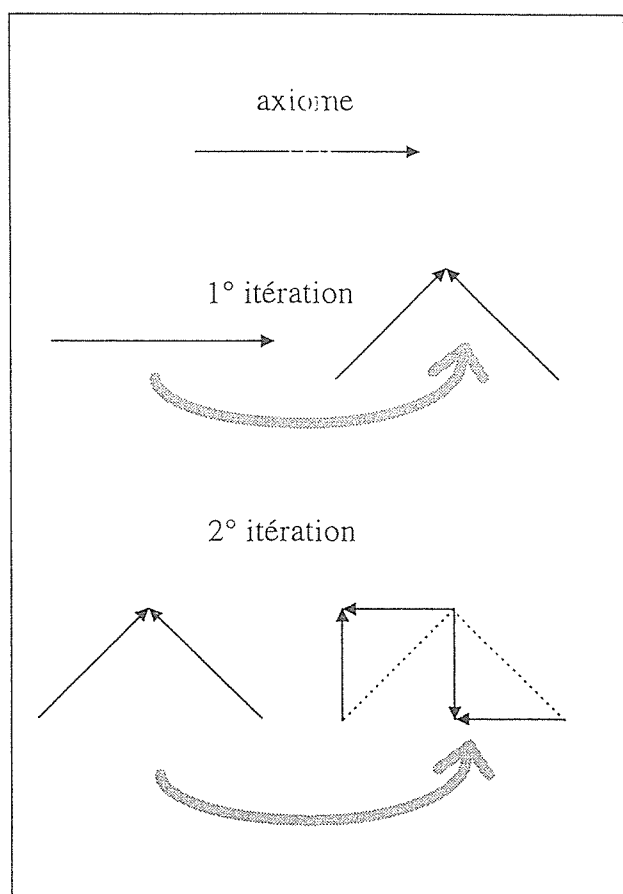
se placer à l'origine de la flèche, dans sa direction et son sens ;

tourner de 45° à gauche, multiplier la longueur par l'inverse de $\sqrt{2}$, et tracer une flèche ;

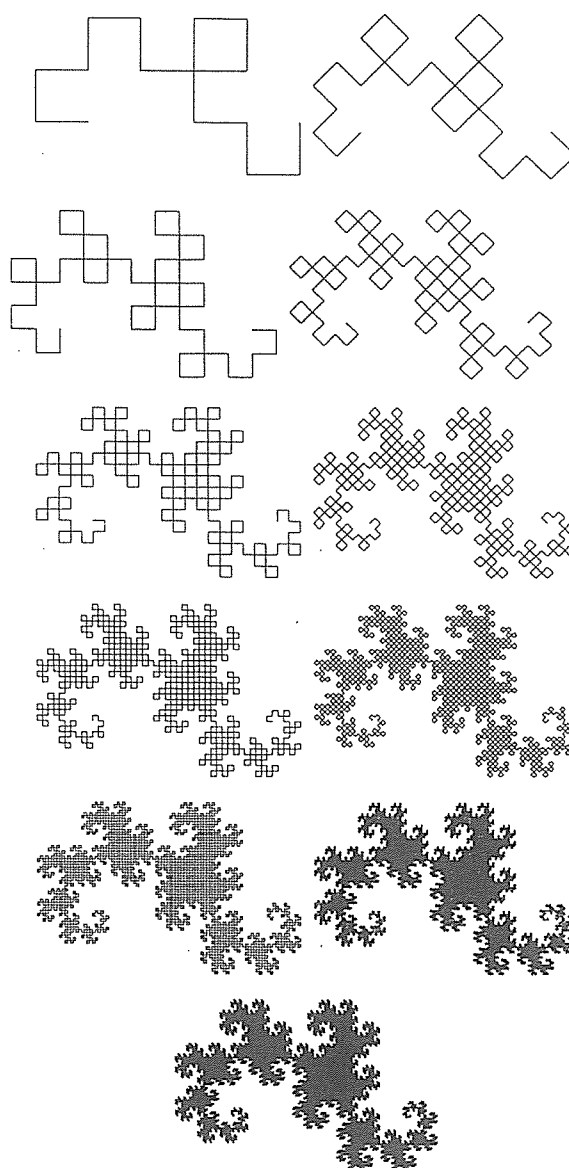
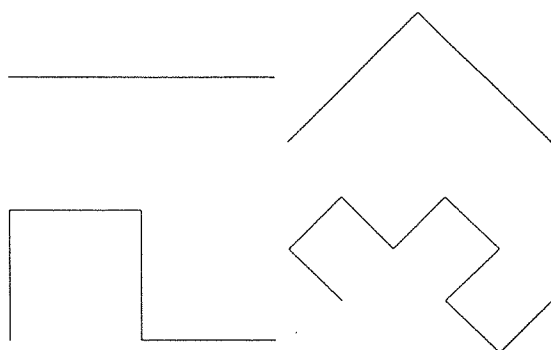
revenir au point de départ, rétablir les valeurs initiales de direction, de sens et de longueur, et avancer d'une longueur de flèche : on se trouve ainsi situé à l'origine de la seconde flèche.

tourner de 135° à gauche, multiplier la longueur par l'inverse de $\sqrt{2}$, et tracer une flèche.

On applique la règle à l'axiome, puis au résultat obtenu, puis à nouveau au résultat obtenu, etc. Chaque étape de ce processus s'appelle une *itération*.



Si nous cessons de matérialiser le sens des flèches par une pointe, nous obtenons la suite de figures suivantes :



Le langage « tortue ».

Pour créer des l-sytems, nous utilisons un langage très simple qui est interprété par le programme FRACTINT. En voici les principales instructions ; *nn* désigne un entier décimal de deux chiffres.

Il faut imaginer que les instructions sont enregistrées par une petite tortue, susceptible d'avancer d'une certaine longueur, dans une direction et un sens donnés, à partir d'un certain point.

angle <i>nn</i>	définit un angle de base : $360^\circ/nn$. Cette instruction n'est donnée qu'une fois, en début de programme.
+	tourner à gauche de l'angle de base
-	tourner à droite de l'angle de base
F	avancer d'une longueur et tracer un segment
G	avancer d'une longueur sans tracer de segment
@ <i>nn</i>	multiplie les longueurs par <i>nn</i>
@ <i>inn</i>	divise les longueurs par <i>nn</i>
q <i>nn</i>	racine carrée de <i>nn</i>
[..]	sauvegarde puis restitue l'état de la tortue : point de départ, longueur, direction et sens.
!	inverse les angles
	demi-tour

On peut obtenir des angles plus précis en utilisant le jeu alternatif d'instructions suivant :

\nn	tourner à gauche de <i>nn</i> degrés
/nn	tourner à droite de <i>nn</i> degrés
D	comme F
M	comme G

Voici, traduit dans ce langage, le programme qui donne la courbe du dragon :

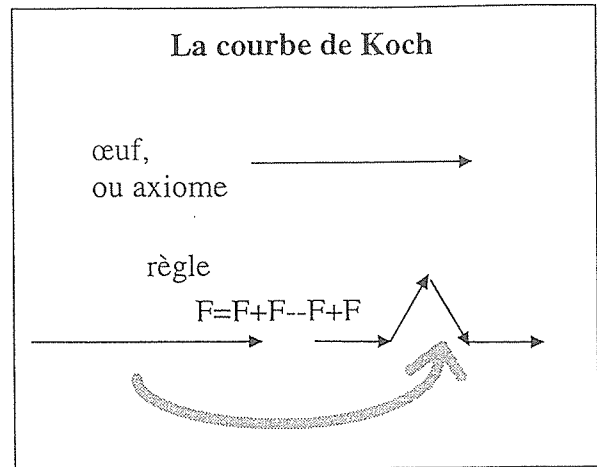
```
Dragon{
  angle 8 ; définit un angle de 45°
  axiom F
  F=[+@iq2F]G[+++@iq2F]
}
```

(Les accolades marquent le début et la fin du programme. Le point virgule permet d'insérer un commentaire)

Voici un second exemple, très connu :

```
Koch{
  angle 6
  axiom F
  F=F+F--F+F
}
```

Ce qui donne :

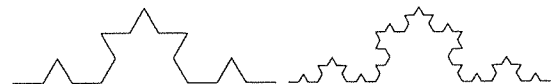


Remarque : en toute rigueur, on aurait dû donner la règle suivante :

$F=@i3F+F--F+F@3$

en effet, à chaque itération, la longueur des segments est divisée par 3. Mais on ne le fait pas car le logiciel se charge d'ajuster la figure obtenue à la taille de l'écran.

Les résultats successifs sont les suivants :



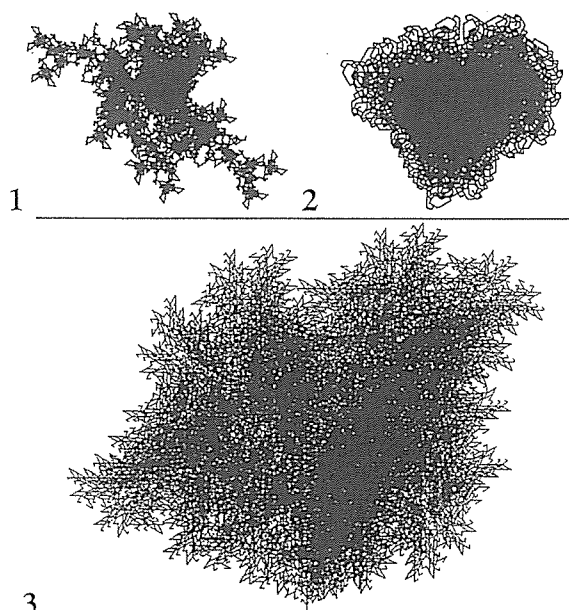
Typologie des figures obtenues

Nous avons créé dans l'année environ deux cent l-systems. Nous avons essayé de les classer ; nous avons également essayé

d'obtenir des formes précises (en particulier des arbres). Pour finir, nous avons travaillé sur les pavages

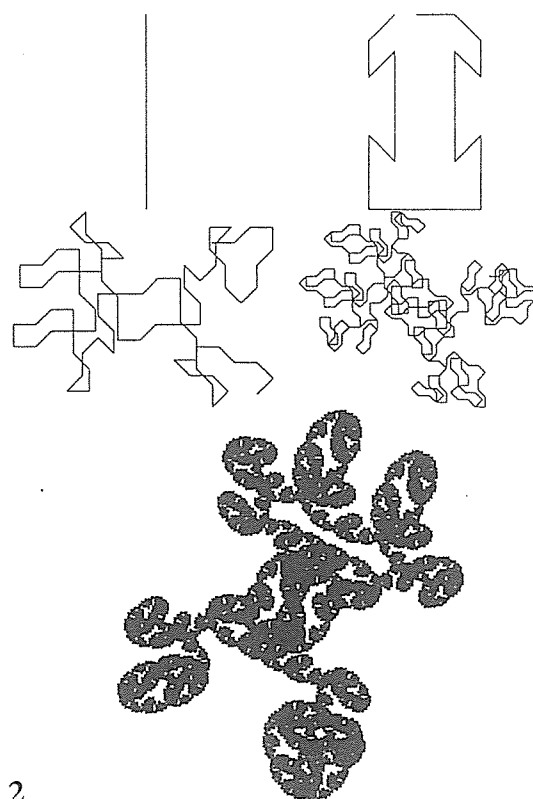
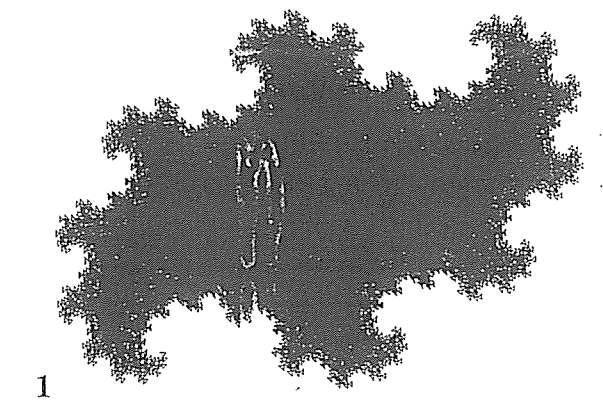
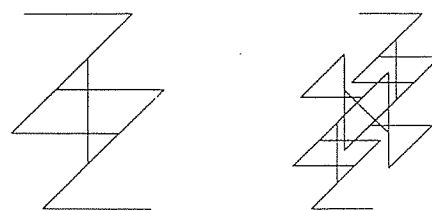
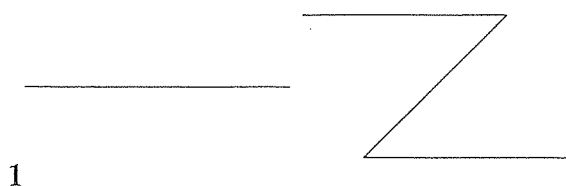
- Premier type (le plus fréquent) : la **paille de fer** :

Exemples :

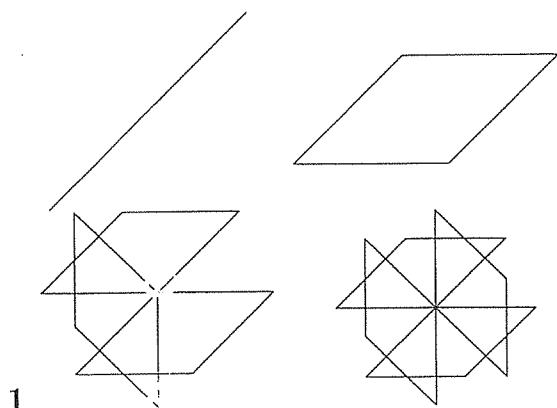


Ce type de figure est très facile à obtenir : il suffit que la règle soit faite un peu au hasard avec beaucoup de segments et de changements de direction. Parfois, on établit une règle qui transforme un segment en une forme voulue à l'avance (un zig-zag, une chaise, etc.), et l'on est très déçu à l'arrivée car on n'obtient rien d'autre qu'une paille de fer, c'est à dire un gribouillage qui finit par remplir tout une partie de l'écran.

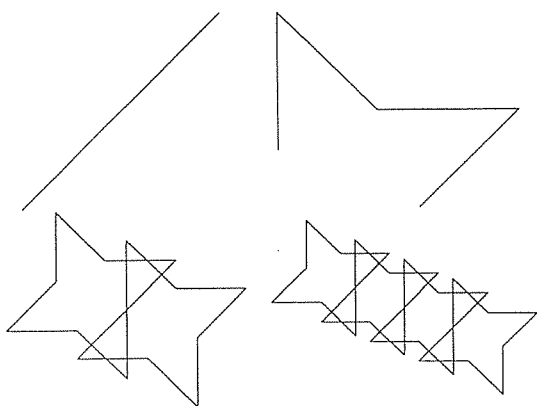
- Cependant, certaines pailles de fer évoluent vers une **forme possédant un contour défini** : c'est le cas des deux exemples qui suivent.



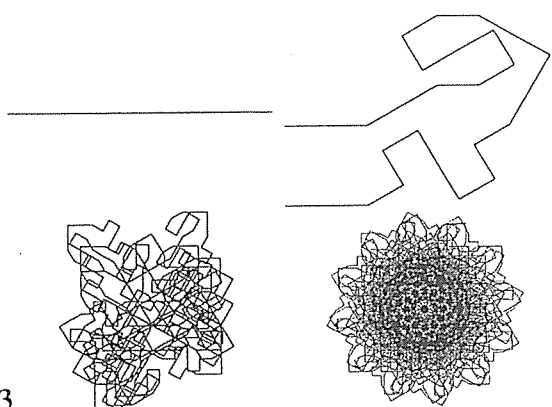
- Il arrive également qu'après un nombre fini d'étapes on obtienne un dessin, ressemblant généralement à une rosace, et **qui n'évolue plus** (quoique certains segments puissent être tracés plusieurs fois). En voici des exemple :



1



2



3

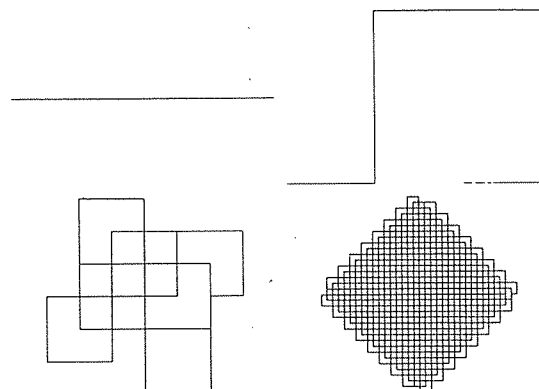
Nous avons pu dans certains cas comprendre pourquoi la figure obtenue se répétait indéfiniment : c'est ainsi ce qui se passe lorsque :

- Tous les angles sont obtenus à partir d'un même angle de base, $360^\circ/nn$, où nn est un entier positif.
- L'axiome de départ est F
- Au bout d'un nombre fini d'étapes, F est transformé en une courbe polygonale fermée : la tortue revient à son point de départ en ayant seulement changé de direction.

- Les seules instructions utilisées sont F, + et -.

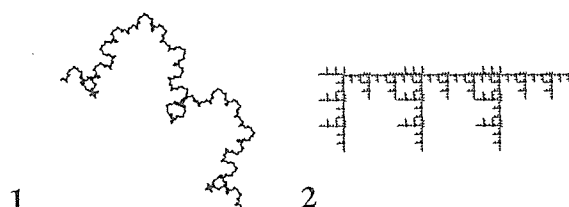
Nous n'avons pas fait de démonstration écrite de cette propriété. Il serait intéressant d'étudier d'autres possibilités.

Nous avons également obtenu des **pavages simples** : comme le quadrillage ci-dessous.



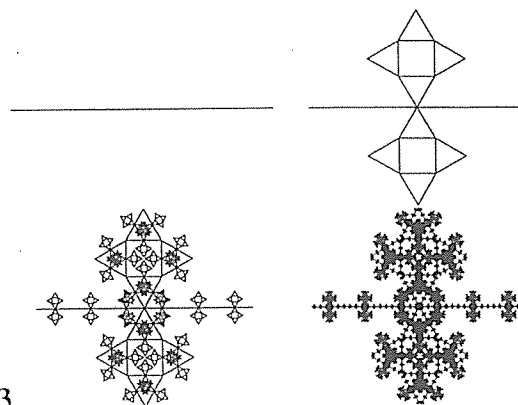
Les carrés ne vont en s'amenuisant qu'à cause de la dimension réduite de l'écran ou de la feuille. Tout point du plan serait à l'intérieur du pavage au bout d'un nombre suffisant d'étapes.

- Enfin, nous avons obtenu des formes du type **côte de Bretagne**, et aussi des **parures de bijoux**.



1

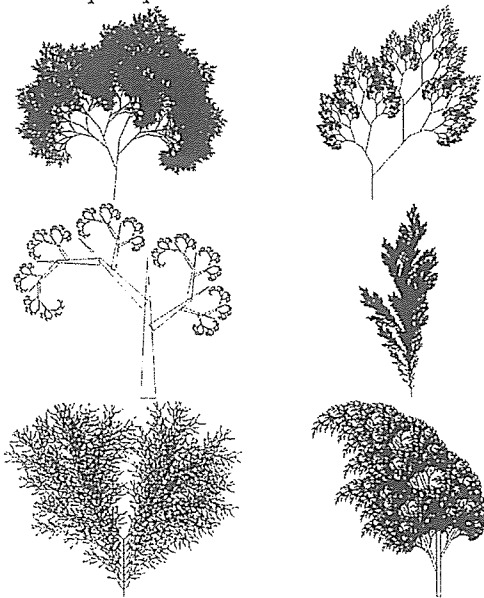
2



3

Comment planter un arbre...

Nous avons fabriqué de nombreux arbres.
En voici quelques uns.



Nous allons voir comment réaliser le dernier de ces arbres.

Pour cela, nous utilisons le langage alternatif avec /, \, d et m, plus souple d'emploi, car il permet de choisir des angles d'un nombre quelconque de degrés.

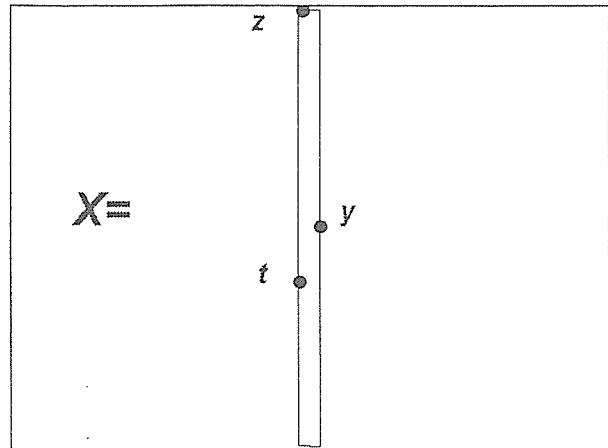
La première étape est de réaliser le tronc de l'arbre grâce à ce langage. Dans ce tronc, on va inclure des « bourgeons », à l'aide des lettres y, z, t qui sont neutres pour le langage utilisé. Ces bourgeons, lors de l'itération suivante, seront transformés en un autre « tronc » sur le tronc initial (en fait, une branche).

Par exemple, soit X l'axiome. La règle de base consiste à transformer la lettre X en notre tronc et ses bourgeons. Voici cette règle.

$X = @i40d\backslash 90@40dy\backslash 90@i20d@20z\backslash 90dt\backslash 90@i40d@40$

Ce qui se traduit : avancer en traçant d'un quarantième d'unité, tourner à gauche de 90°, rétablir l'unité de longueur initiale, avancer en traçant d'une unité, bourgeon y, tourner à gauche de 90°, etc.

Ceci donne le tronc suivant :



Expliquons maintenant les bourgeons : le bourgeon y est défini de la façon suivante :

$y = [\backslash 180@i2m\backslash 60X]$

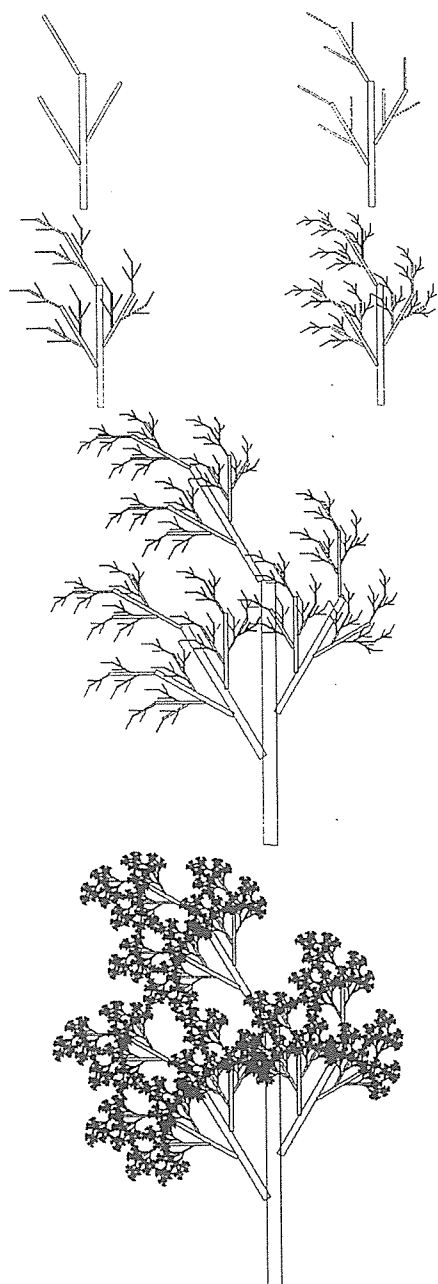
ce qui signifie : sauvegarder l'état de la tortue, tourner de 180° (demi-tour), diviser l'unité de longueur par deux, avancer sans tracer (on se trouve alors au milieu du tronc, à droite, comme sur la figure ci-dessus), tourner de 60° à gauche et tracer un tronc (qui sera réduit de moitié puisque l'unité de longueur a été divisée par 2), restaurer les paramètres de la tortue.

Lorsque cette instruction sera réalisée, un branche inclinée d'une demi-longueur va pousser à droite du tronc.

Finalement, le programme est le suivant :

```
arbre{
angle 8 ; instruction obligatoire mais qui ne
;sert à rien
axiom X
y=[\180@i2m\60X]
z=[/150@i2X]
t=[\180@i3m/60@q3X]
X=@i40d\90@40dy\90@i20d@20z\90dt\90
@i40d@40
}
```

Et voici les résultats :



3. Quelques utilisations des l-systems

Nous venons de voir comment planter un arbre avec des "l-systems". On peut utiliser ce langage pour faire beaucoup d'autres choses.

Réalisation de pavages périodiques

Le programme permettant de réaliser un pavage périodique aura la forme générale suivante :

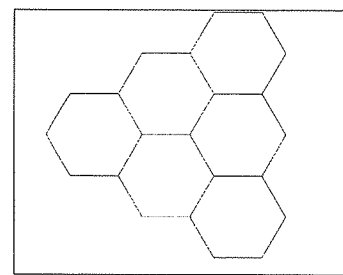
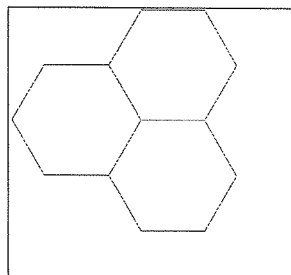
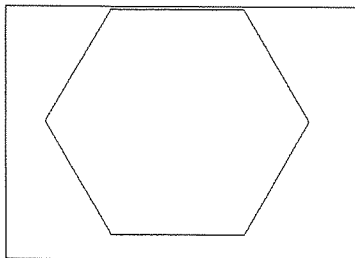
```
Nom du pavage{  
  Angle nn  
  Axiom X      ; (X n'a aucune signification graphique, pas plus que Y ou Z)  
  Y=figure de base  
  X=[Y][translation1 X][translation2 X]  
}
```

Et en voici un exemple simple :

```
Ruche{  
  Angle 6      ; définit un angle de 60°  
  Axiom X  
  Y=F+F+F+F+F+F ; définit un hexagone régulier  
  X=[Y][G+G-X][G-G+X]  
}
```

Les translation sont représentées par des mouvements de la tortue : G+G- et G-G+ ; ces mouvements sont effectués le long des côtés de l'hexagone ; il est important que la tortue se remette dans la direction initiale à l'issue du trajet : les "+" et les "-" s'équilibrent.

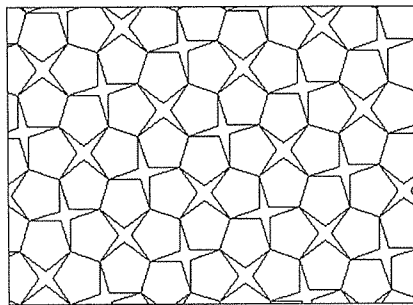
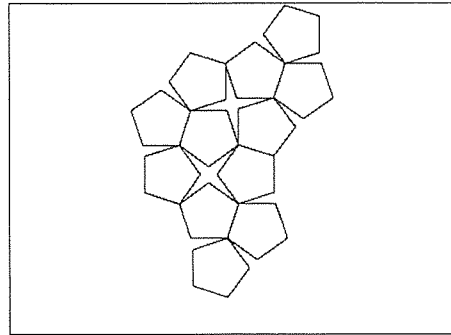
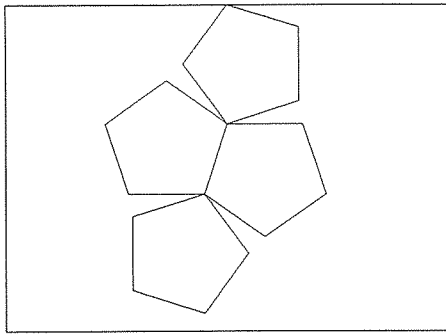
Voici le résultat :



Etc...

Remarque : à l'étape zéro, X n'étant pas une instruction, l'écran reste vide ; à l'étape 1, X est remplacé par Y, mais Y n'est pas encore remplacé par F+F+F+F+F+F, donc là encore rien n'apparaît. On voit donc ci-dessus les étapes 2, 3 et 4.

Voici un pavage périodique un peu plus compliqué :



```
penta{
  angle 20
  axiom x
  z=[f++++f++++f++++f++++f]
  y=[zg--z-!z!+++++++g---z]
  x=[y][g++++g---g++++g|g++++x][g---g----g+++g++++x]
}
```

Remarque : l'emploi de majuscules ou de minuscules est indifférent.

Pour alléger l'écriture, on a ajouté une étape au cours de laquelle on définit la figure "z" qui n'est autre qu'un pentagone. La figure de base, qui subit les translations est composée quant à elle de quatre pentagones. C'est avantageux pour y voir clair et raccourcir le programme. Cependant le résultat ne sera pas totalement satisfaisant car les translations déjà présentes (les lettres "g") avant que z et y ne soient remplacées par des tracés effectifs, prennent inutilement de la place sur l'écran, rendant le résultat visible trop petit.

Le programme suivant est moins lisible mais plus efficace :

```
penta2{
  angle 20
  axiom x
  x=[[f++++f++++f++++f++++f]g--[f++++f++++f++++f++++f]-
    ![f++++f++++f++++f++++f]!+++++++g---[f++++f++++f++++f++++f]][g---g----
    g+++g++++x][g++++g---g++++g|g++++x]
}
```

A noter qu'à partir de "x=..." et jusqu'à la fermeture du dernier crochet, tout doit être tapé sur une seule ligne.

Voici un autre exemple de pavage périodique qui, de plus, illustre bien la façon dont on peut travailler.

mosaïque

par Mlle Massoumeh Fotovat (1^{er}S) du
lycée Louise Michel de Bobigny (93)
(Atelier Exploration Mathématique).

enseignant :
M. François Gaudel

On est parti d'un pavage extrait du livre
« Tilings and patterns » (Grünbaum et
Shephard, ed. Freeman)

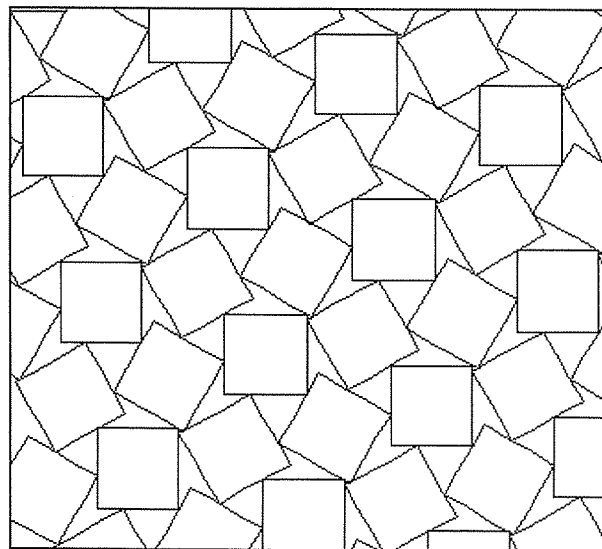


fig. 1

Ce pavage nous a paru difficile à analyser et à construire. Il est constitué de carrés auxquels on fait subir des rotations de $2\pi/3$, mais il n'admet pas de symétrie de rotation. Il est périodique : on peut l'engendrer par translation à partir d'un choix de trois carrés entourant un polygone (il y a six tels triplets), ou d'une « roue » de sept carrés, avec recouvrement (il y a trois telles roues) (*fig. 2*)

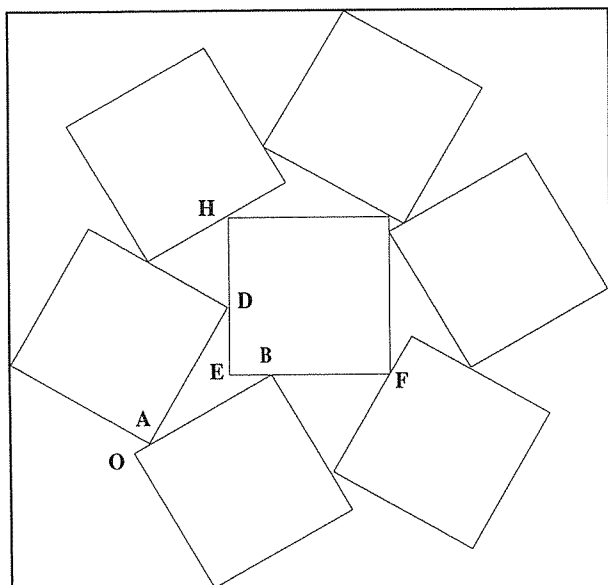


fig. 2

La figure précédente comporte six types de polygones interstitiels, tous différents, dont trois triangles équilatéraux et trois quadrilatères. Nous avons essayé de calculer les différentes longueurs. Nous avons rapidement constaté que plusieurs possibilités existaient, et choisi l'un des côtés de triangle équilatéral. Sachant que $OB = 3$, nous avons pris $OA = 0,2$.

On a prolongé (BE), qui coupe (AD) en C. La hauteur issue de C dans le triangle ACB, a pour pied le point K. (fig. 4)

ACB est un triangle isocèle car les deux angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont égaux à 30° . Il devient alors facile de calculer successivement :

$$\begin{aligned} AK &= 1,4 \\ AC &= AK / \cos(30^\circ) \cong 1,6165 \\ CD &= 3 - AC \cong 1,3835 \\ CE &= CD \times \sin(30^\circ) \cong 0,6917 \\ EB &= CB - CE = AC - CE \cong 0,9248 \\ DE &= CD \times \cos(30^\circ) \cong 1,1981 \\ DH &= 3 - DE \cong 1,8019 \\ BF &= 3 - EB \cong 2,0752 \end{aligned}$$

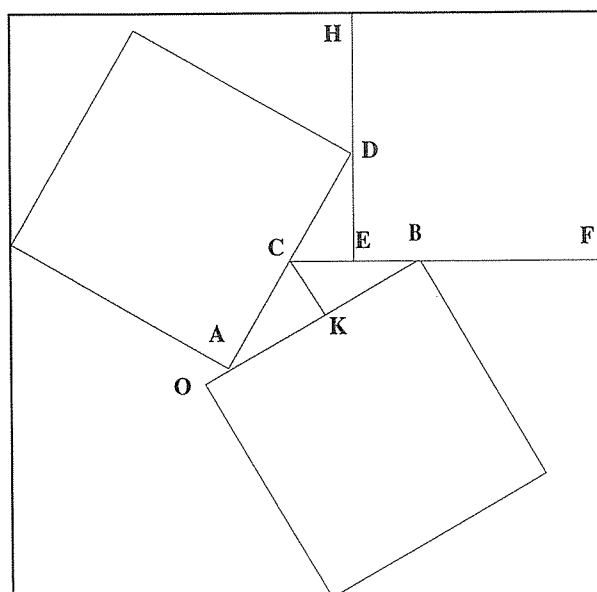


fig. 4

En fin de compte, il est clair que trois longueurs seulement sont indispensables, la donnée de l'une déterminant les deux autres : ce sont les longueurs des côtés des trois triangles équilatéraux, à savoir OA, BF et DH.

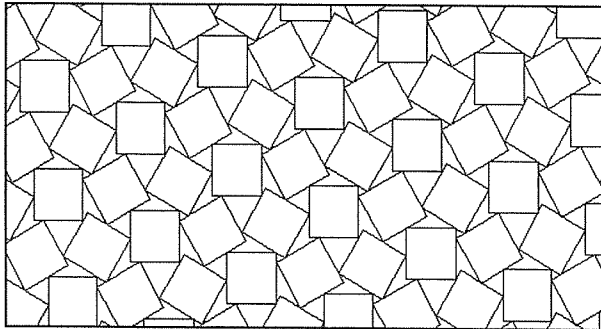
Le principe du programme est le suivant :

```
mosaïque{
angle 12 ; (pour 30°)
axiom X
Y= le carré central
Z= [Y][rotation1Y] [rotation2Y]
..[rotation6Y]
; (Z est donc la « roue » de 7 carré)
X=[Z][translation1X][translation2X]...
; (trois translations sont nécessaires
pour obtenir un pavage en forme de
losange)
}
et le voici tel qu'il a été réalisé :
mosaïque{
angle 4
axiom x
y=b/90b/90b/90b
z=[y][ae@0.2m@i0.2\120y][aea\150@0.9
248me@i0.9248y][aeae@2.0752m\120@i
2.0752y][aeaeae@1.1981m\150@i1.1981y
]/[150@1.8019m@i1.8019ey][a/210@2.8
m@i2.8ey]
```

```

x=[z][ae@0.2m@i0.2\30a\90@1.8019m/3
0@i1.8019x][\30@1.1981m@i1.1981\90a\
90/30@0.9248m@i0.9248eaex][ae@0.2m
@i0.2\120@0.2m@i0.2\30a\90@1.8019m/
120m/30@i1.8019x]
e=/90
a=mmm
b=ddd
}

```



Remarques (du professeur) :

L'activité s'est réellement déroulée comme indiqué dans ce compte-rendu : l'élève a beaucoup tâtonné avant de trouver une méthode qui lui a permis de réaliser effectivement le pavage. On aurait pu y arriver plus simplement :

L'utilisation du jeu d'instruction alternatif n'apporte pas grand chose ici puisque tous les angles sont des multiples de 30°.

Prendre le côté du carré égal à 3 au lieu de 1 alourdit inutilement le programme et les calculs de l'ordinateur

En prenant comme figure de départ un triplet de carrés, le programme est nettement plus court.

Au lieu de choisir la longueur OA, il vaut mieux choisir AC, que l'on posera par exemple égal à "x" ;

Les deux seules longueurs dont on a besoin sont alors :

$$EB = \frac{3x-1}{2} \quad \text{et} \quad DE = (1-x) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ce sont les côtés de deux des triangles équilatéraux. Le troisième, OA a la valeur :

$$OA = 1 - x\sqrt{3}$$

Il s'ensuit que x peut prendre des valeurs

comprises entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

On peut lire les valeurs de EB et DE sur un tableau à l'aide d'une calculatrice :

AC=x	EB	DE
0,33333	0	0,57735
0,35774	0,0366	0,55622
0,38214	0,07321	0,53509
0,40654	0,10981	0,51395
0,43094	0,14641	0,49282
0,45534	0,18301	0,47169
0,47974	0,21962	0,45056
0,50415	0,25622	0,42942
0,52855	0,29282	0,40829
0,55295	0,32942	0,38716
0,57735	0,36603	0,36603

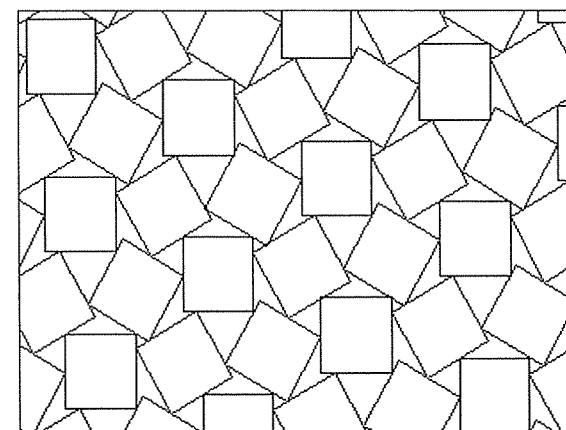
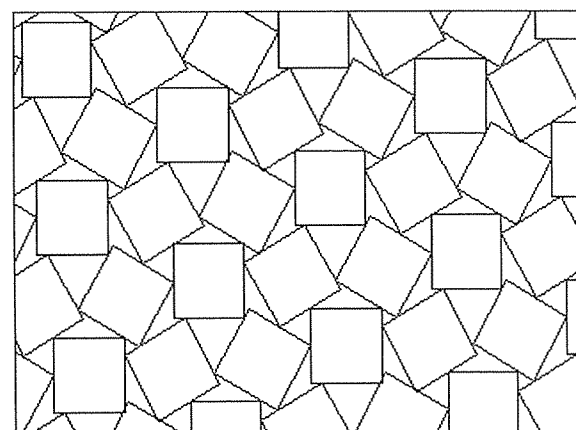
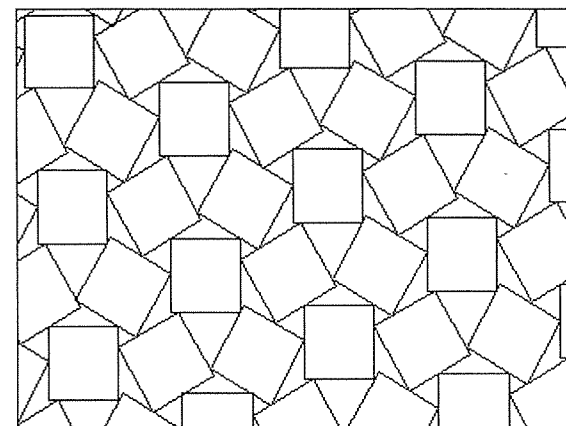
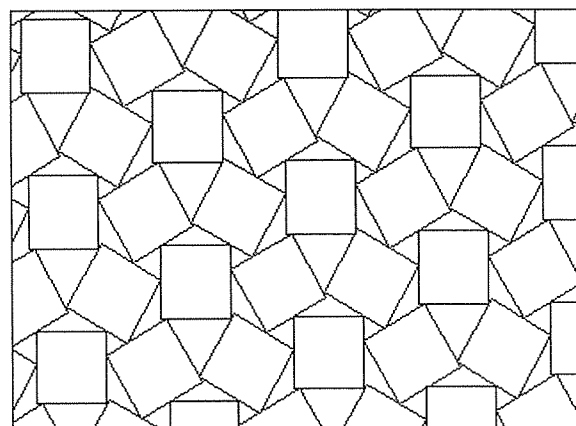
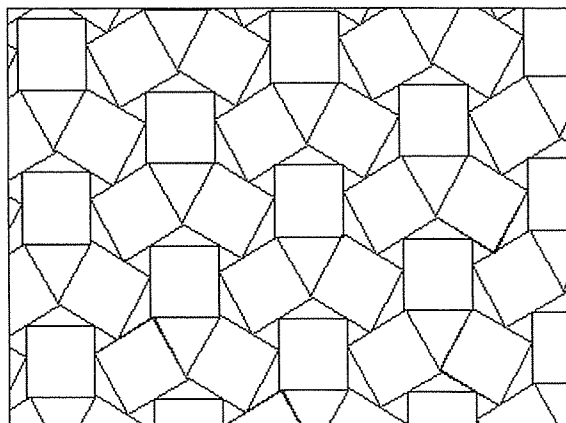
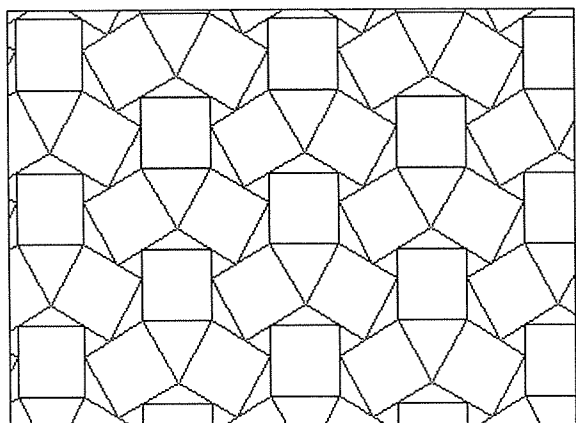
Voici un exemple de programme :

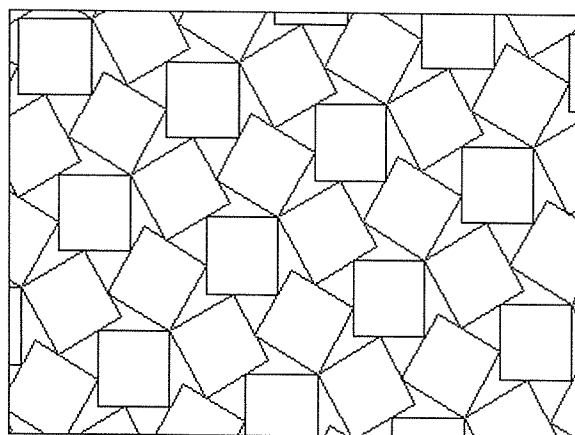
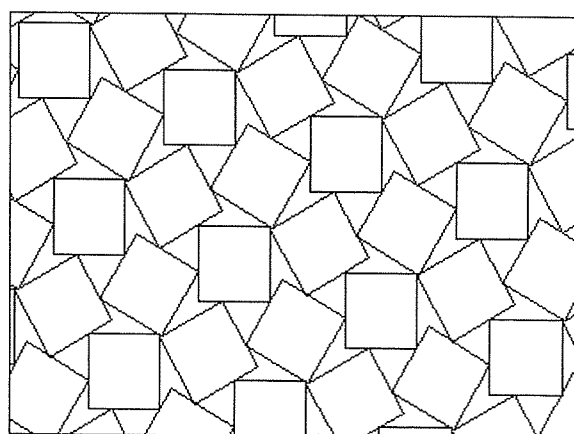
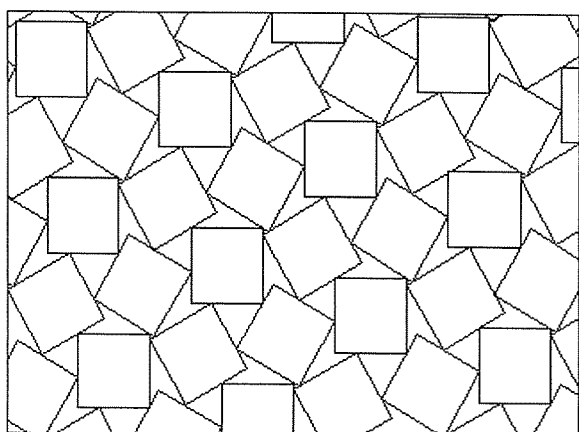
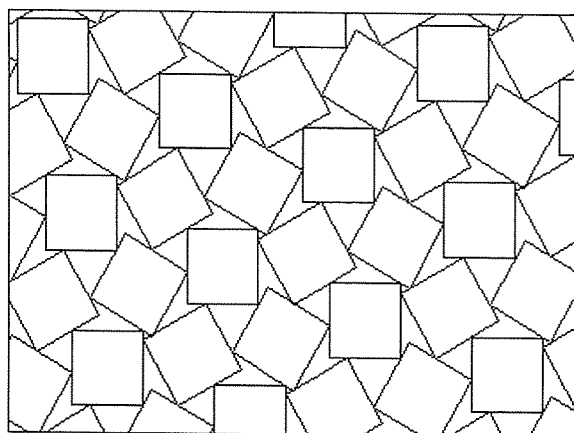
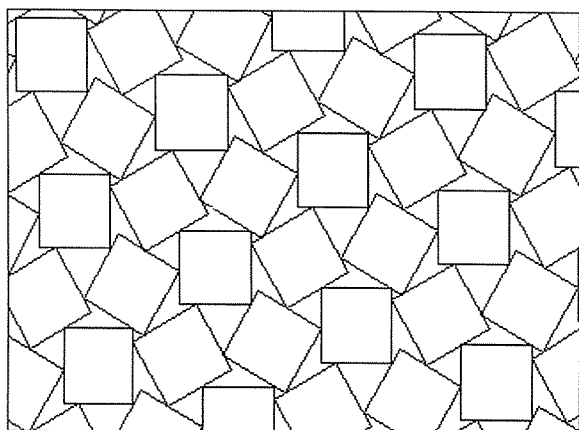
```

Mosaïque court{
angle 12
axiom x
y=[f+++f+++f+++f]
z=y[@.18301g--
!@i.18301y][+++@.47169g@i.47169++y]
x=z[g@.18301++g@i.18301---g--
@.47169g@i.47169+++x][@.18301g@i.1
8301--g---@.47169g@i.47169++g+++x]
}

```

et quelques résultats en faisant varier x selon le tableau précédent :

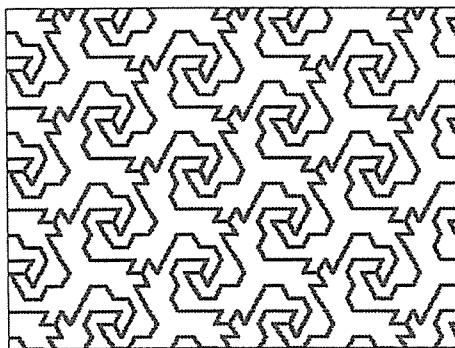
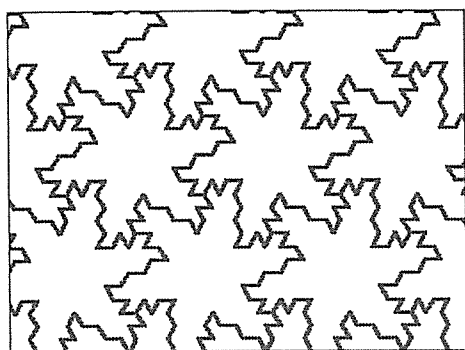
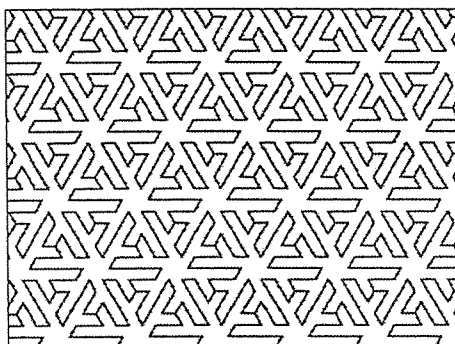
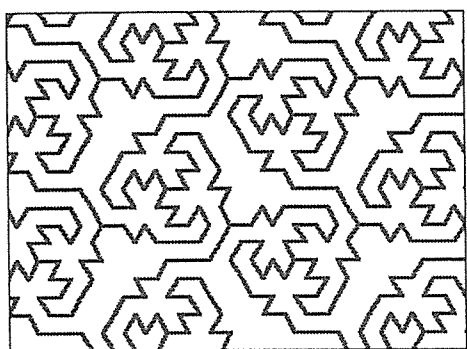
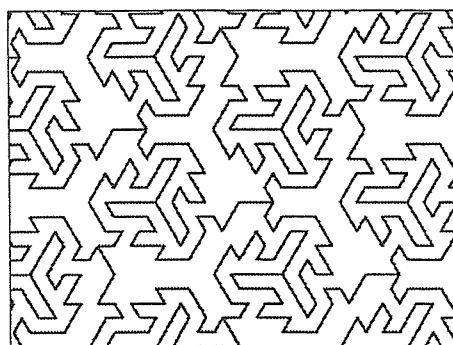
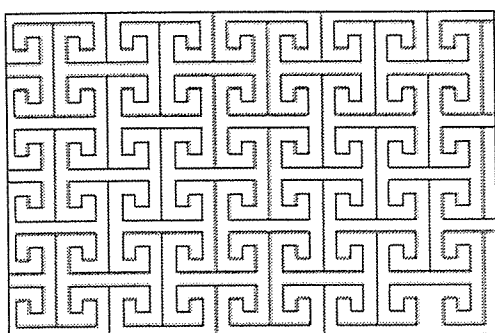




remarque : un problème intéressant est d'étudier la densité de ces pavages si l'on suppose que les carrés ont une masse égale à un et que le reste est constitué de "trous". On peut utiliser par exemple l'aire du parallélogramme constitué à partir de deux vecteurs de translation. On trouve un trinôme du second degré en x , strictement monotone sur l'intervalle considéré.

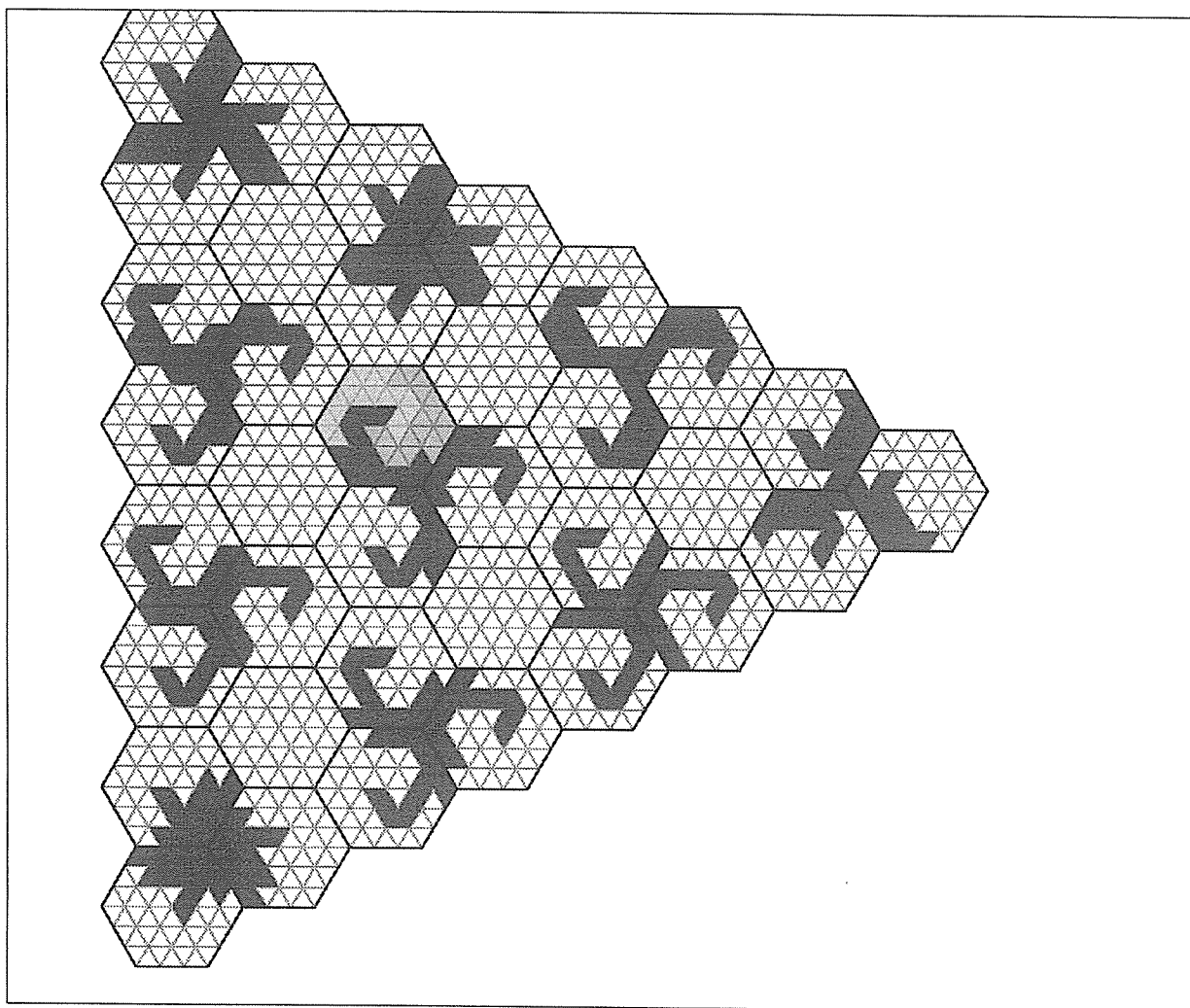
Pavages périodiques imbriqués

Nous nous sommes posé le problème de réaliser des pavages périodiques imbriqués présentant des symétries intéressantes. Nous dirons qu'un pavage monohédral (c'est à dire dont tous les pavés sont isométriques) est périodique imbriqué s'il est périodique, et si un pavé ne peut être enlevé ou ajouté à un pavage partiel par translation dans le plan. En voici quelques exemples :



Nous avons trouvé des méthodes permettant de fabriquer de tels pavages très facilement (sur cette base, on peut, à condition de préparer un matériel adapté, organiser des animations en direction du primaire).

L'une des méthodes consiste à partir d'un pavage hexagonal régulier, et à découper chaque hexagone en trois parties présentant une symétrie d'ordre 3 autour du centre que l'on recolle ensuite par trois. Sur la page suivante on peut voir une feuille comportant des hexagones subdivisés en triangles équilatéraux et un certain nombre de pavés réalisés par cette méthode.



Sur l'un des hexagones, on a laissé les trois formes symétriques, de façon à illustrer la méthode employée.

Voici le programme pour le pavage correspondant :

```

Imbric{
Angle 6
Axiom x
Y=f++f-f--f+f++ff+f+f--f++ff+ff--      ; un tiers du contour
Z=[yyy]                                     ; le pavé de base
X=Z[ggg+ggg-x][ggg-ggg+x]
}

```

Dans une activité avec des élèves très jeunes, on peut travailler sur du papier préparé à l'avance (hexagones et triangles) et ne faire écrire que la deuxième ligne du programme. Ce n'est pas si simple : en effet il faut reconnaître sa gauche de sa droite, et savoir compter les virages !

Pour finir sur ce thème des l-systems (sans l'épuiser loin de là), voici un exposé présenté en 1997 par une élève sur les "rep-tiles" ; un sujet bien intéressant, que nous avons approfondi les années suivantes quand nous nous sommes intéressés aux pavages non périodiques.

les rep-tiles

par Mlle Séverine Moreau, Ter S du lycée
Louise Michel de Bobigny (93)
(Atelier « Exploration mathématique »)

Enseignant : M. François Gaudel

Pour construire des **pavages non-périodiques**, on peut avoir recours à la méthode des « **rep-tiles** ». Le principe des rep-tiles est de paver une figure de base avec elle-même, mais les images, à l'intérieur, doivent toutes être de même taille. Pour cela, il suffit de faire subir des similitudes de même rapport à la figure de départ.

Tout d'abord, nous allons définir une similitude : c'est une transformation composée d'une homothétie et d'une rotation ou d'une symétrie axiale, c'est-à-dire que l'image de base est rétrécie ou agrandie puis tournée ou réfléchi (ici, l'image est évidemment rétrécie). Ainsi on arrive à paver parfois une figure.

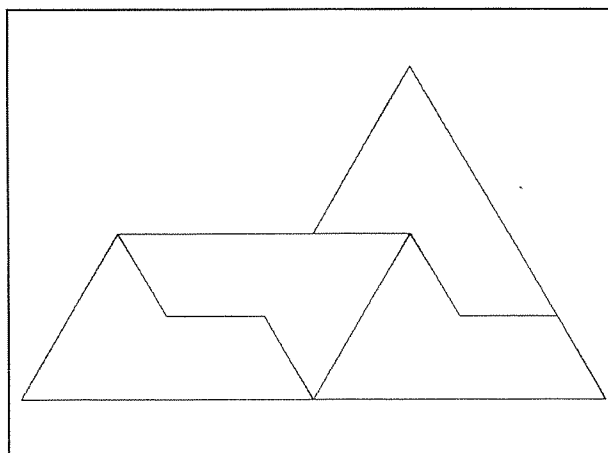


fig. 1

Ici, les quatre similitudes sont composées à partir d'homothéties de rapport $1/2$, c'est-à-dire que l'on a divisé les longueurs par deux.

Nous allons maintenant traduire la méthode des rep-tiles en langage tortue. La formule générale des rep-tiles est :

```
rep-tiles{  
  angle nn  
  axiom X  
  X=[figure de base][similitude1 X]  
  [similitude2 X]...  
  F=  
}
```

On définit un angle de base ; l'axiom donne la chaîne de lettres à l'étape 0. Comme X n'a aucune signification graphique, l'ordinateur ne dessine rien.

A l'étape 1, X est transformé en [figure de base], c'est à dire la suite des lettres correspondant à ce dessin.

Les crochets qui suivent permettent à la deuxième étape d'obtenir toutes les figures modifiées par les similitudes. Ce principe est alors itéré.

Enfin « F= » permet de supprimer tous les tracés de l'étape antérieure (F signifie « tracer un segment »). Ces tracés ne servent plus à rien puisqu'ils sont remplacés par ceux des figures plus petites).

A partir de l'exemple de la figure 1 (appelé « le sphinx »), voici la figure obtenue (fig. 2) après une seconde itération, puis une troisième (fig. 3) :

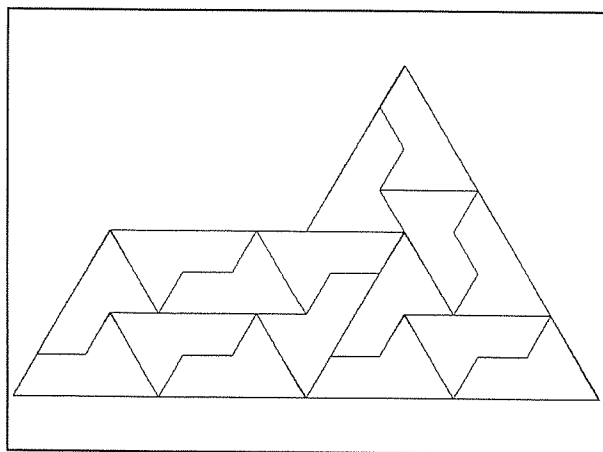


fig.2

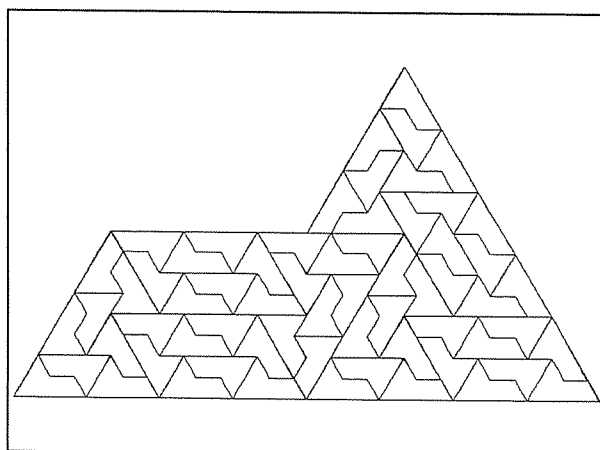


fig.3

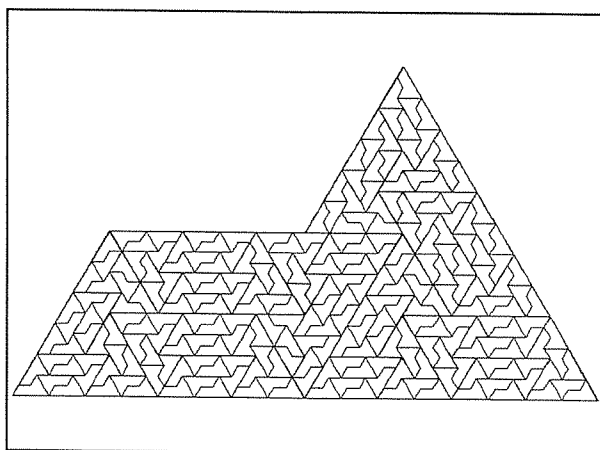


fig. 4

Voici quelques exemples : à chaque fois, on a représenté le résultat après une, puis plusieurs étapes.

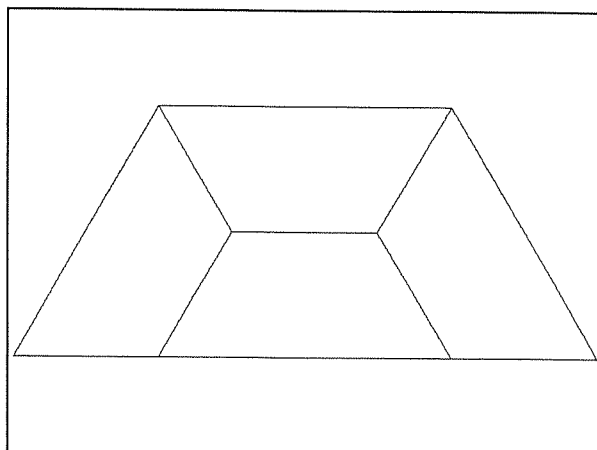


fig. 5

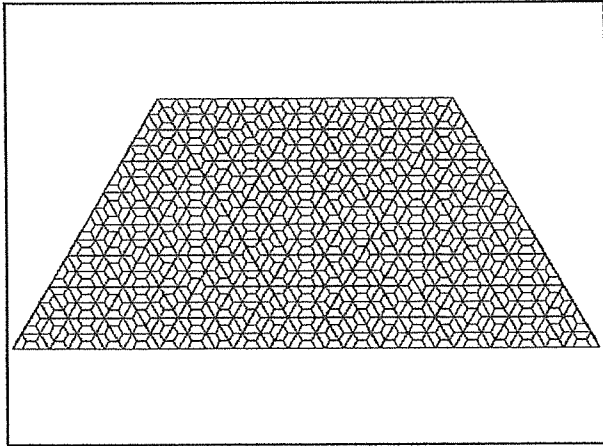


fig. 6

Sauriez vous reconstituer la méthode de construction des rep-tiles suivants ?

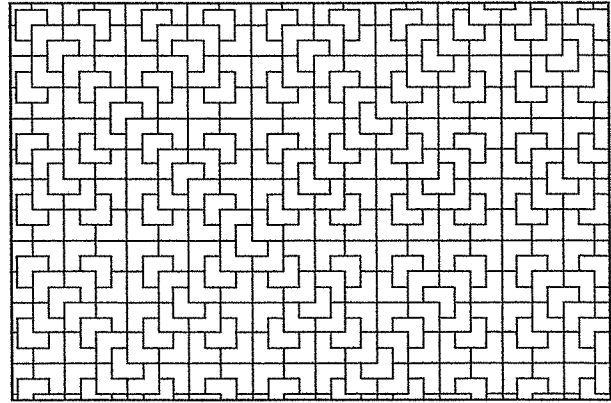


fig. 9

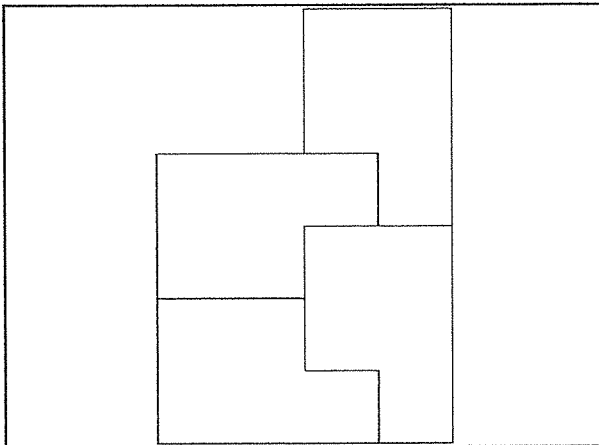


fig. 7

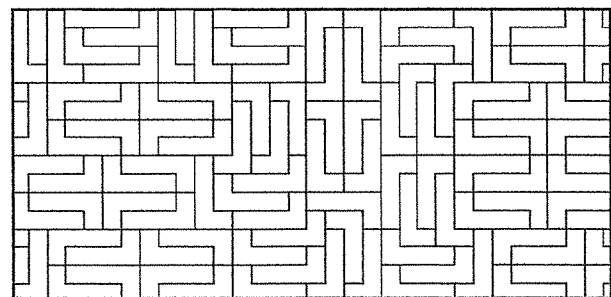


fig. 10

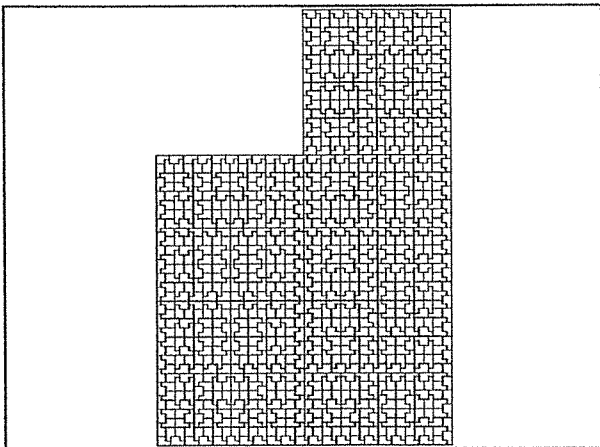


fig. 8

4. Pliages modulaires de polyèdres

Les polyèdres constituent un thème d'activité et d'étude captivant, en lui-même et pour un atelier ; la conférence de Jean BRETTE en a montré de nombreuses facettes. J'ai eu la chance de bénéficier de ses conseils dans ce domaine, ce qui m'a permis de monter quelques activités autour de la formule d'Euler et de polyèdres particuliers. Se pose alors toujours le problème de la réalisation de ces polyèdres "en vrai".

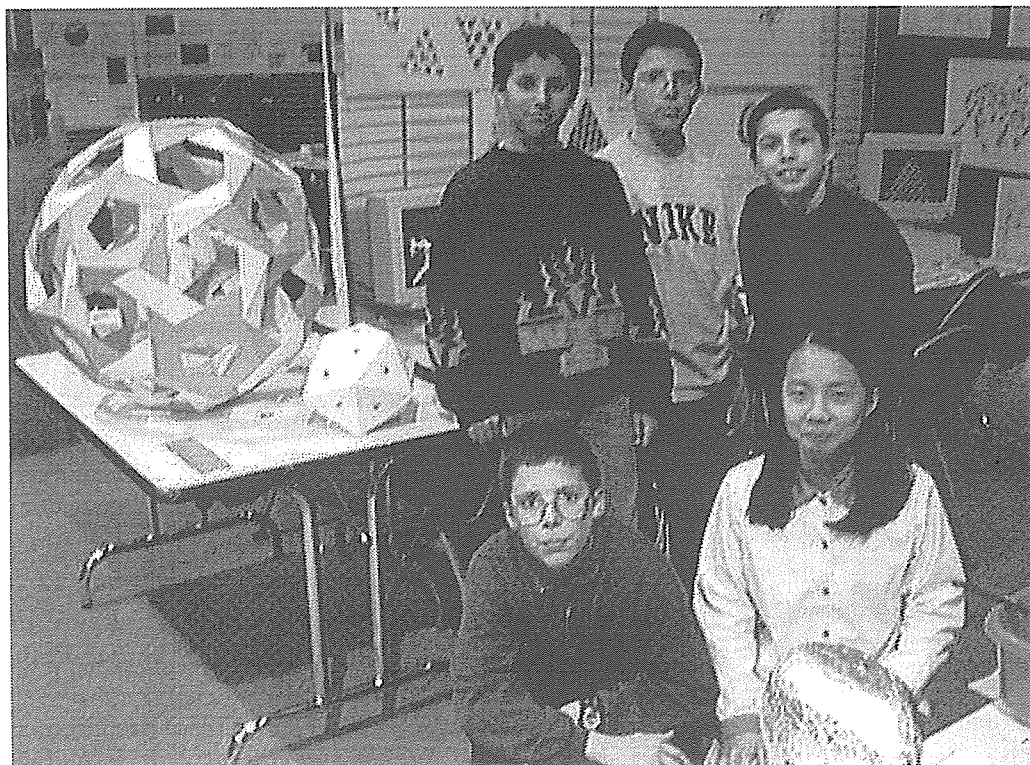
Diverses méthodes et conseils pratiques ont pu être donnés aux stagiaires, et de nombreux polyèdres étaient exposés. Charles Pérol nous a présenté son "filicoupeur", une machine ingénieuse et passionnante, facile à réaliser, et qui permet de découper de façon précise le polystyrène. La leçon n'a pas été perdue puisque suivant les plans qui nous ont été donnés, la MJC Daniel André en possèdera bientôt un, et il ne serait pas étonnant que d'autres stagiaires aient suivi le même chemin.

Pour ma part, j'ai présenté lors de la partie développée du stage une méthode que j'ai découverte sur Internet (et dont certains stagiaires avaient déjà entendu parler) et qui consiste à réaliser des pliages modulaires. Cette méthode s'applique à des polyèdres dont toutes les arêtes sont égales. Chaque arête est constituée d'une feuille de papier rectangulaire pliée en trois selon la méthode qui sera indiquée plus bas. La réalisation d'un dodécaèdre régulier d'environ 25 cm de haut (qui tient sans colle) est chose relativement aisée. Le soin et la patience à apporter au pliage exigent des élèves de milieu de collège.



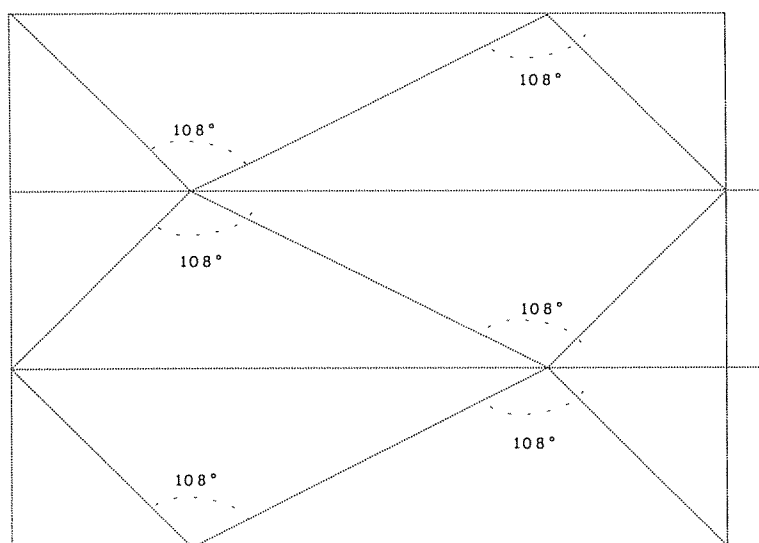
La réalisation de l'icosaèdre tronqué, plus connu sous le nom de ballon de football peut constituer un thème intéressant. La formule d'Euler, tout à fait accessible à des collégiens, permet de démontrer assez facilement que tout polyèdre constitué d'hexagones et de pentagones réguliers (ceci pour qu'il y ait trois faces par sommet), comporte nécessairement 12 pentagones, et que donc c'est le cas du ballon de football qui, par ailleurs comporte également 20 hexagones (nombre maximal dans les mêmes conditions). La réalisation de ce polyèdre sous forme de pliage modulaire est spectaculaire (environ 90 cm de haut). L'usage de colle est obligatoire, et il est conseillé d'utiliser deux couleurs de

papier distinctes pour les deux types d'arêtes (pentagone-hexagone ou hexagone-hexagone).

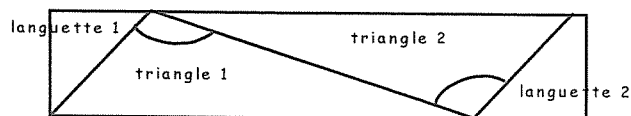
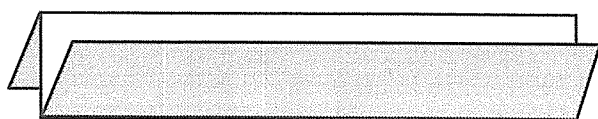


Principe des pliages modulaires :

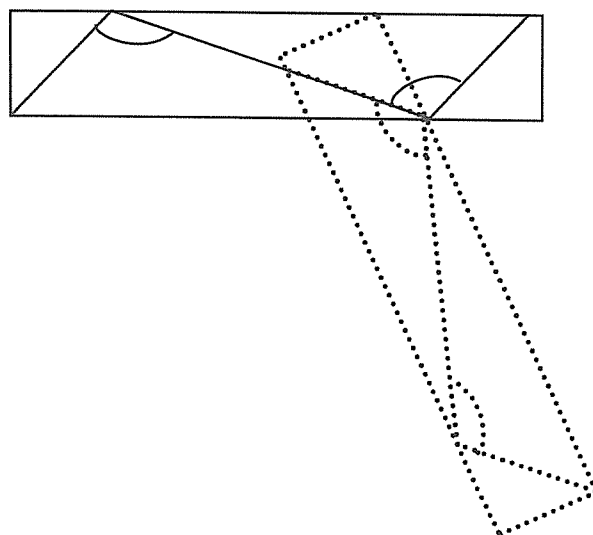
Ci-dessous en format réduit, la feuille qui peut servir de base pour la réalisation d'un dodécaèdre : les faces en sont des pentagones réguliers d'angles au sommet égaux à 108° . Il est commode de prétracer les plis comme sur le dessin ci-dessus. Une bonne photocopieuse permet ensuite de proposer des modules prétracés en nombre suffisant. Naturellement, il faut prendre garde à ce que les pointillés soient tournés vers l'intérieur du polyèdre au moment du montage.



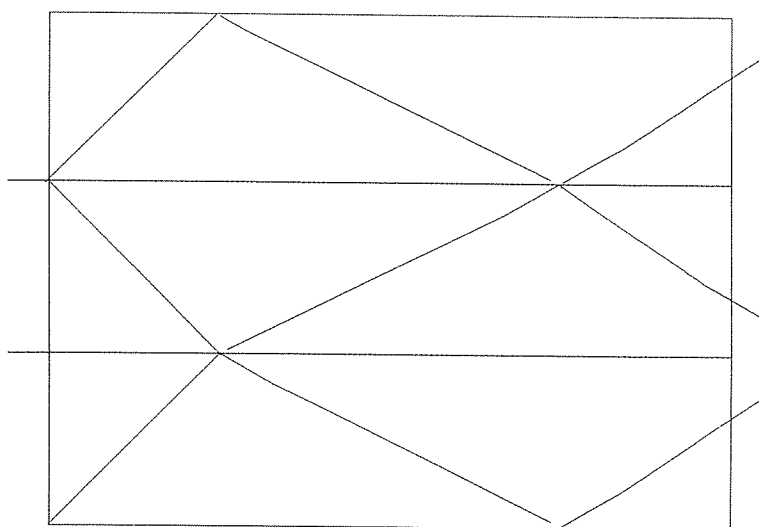
On plie la feuille découpée en trois :



Puis, on pré-plie les languettes (que l'on peut éventuellement couper pour les rendre moins volumineuses, et également le long du côté commun aux deux triangles ; et l'on assemble les modules comme indiqué sur le dessin : la bande en pointillé est insérée à l'intérieur de la bande en trait plein.



Le côté commun aux triangles constitue l'arête proprement dite et doit donc être de longueur constante. Seuls les angles varient, selon les polygones qui constituent les faces. Par exemple la feuille ci-dessous donnera une arête adjacente à un pentagone d'un côté et un hexagone de l'autre.



On peut trouver des éléments sur les pliages mathématiques sur les sites suivants :

<http://www.cs.utk.edu/~plank/plank/origami/origami.html>

<http://people.delphi.com/vvann/index.html>

<http://www.ics.uci.edu/~epstein/junkyard/origami.html>

<http://shimura.math.berkeley.edu/~helen/origami.html>

Chacune des ces pages ou chacun de ces sites renvoie lui-même à plusieurs liens...

ATELIER N° 3 :

Nicole TOUSSAINT - Jean FROMENTIN

“ Utilisation de jeux du commerce pour faire des mathématiques ”

Présentation de l'atelier

Objectifs généraux

Que ce soit en classe ou en club, les jeux peuvent être un moyen motivant de faire des mathématiques, soit par l'utilisation directe de ces jeux pour aborder ou faire fonctionner des notions mathématiques, soit par une étude mathématique de ces jeux.

Qu'on utilise ces jeux en classe ou en club, on poursuit le même objectif : faire des mathématiques. Mais les modalités d'utilisation sont différentes.

En classe, l'enseignant a une priorité pédagogique liée au programme : activités de découverte ou d'introduction d'une notion, activités d'entraînement, de réinvestissement... De ce fait, la nature et l'utilisation du jeu doivent répondre à ces objectifs pédagogiques. Les activités utilisant les jeux doivent donc être bien ciblées d'un point de vue pédagogique et bien "cadrées" pour les élèves car il est tentant pour eux de se détourner de l'activité proposée pour s'amuser avec le matériel du jeu. C'est pourquoi, avant de lancer l'activité elle-même, il faut donner le temps aux élèves de découvrir le matériel et de l'utiliser librement pour qu'ils puissent mieux se tenir ensuite à l'activité proposée. Mais que l'activité plaise ou non, l'élève est tenu de la faire.

En club, en revanche, les élèves sont volontaires et l'animateur a la priorité de les intéresser. Ce dernier n'est donc pas tenu de respecter un quelconque programme ou une quelconque progression et les élèves sont aussi plus libres vis-à-vis des activités proposées qu'ils ne sont pas obligés de mener à terme. De plus, contrairement à l'utilisation en classe, les activités de club ne sont limitées ni dans leur contenu, ni dans le temps ; les élèves peuvent donc les reprendre à leur gré, surtout celles concernant les puzzles, divers casse-tête ou des études mathématiques de jeux.

Une difficulté importante qu'on rencontre est le manque de motivation de beaucoup d'élèves, le refus de l'effort. On observe même des moqueries vis-à-vis des "bons élèves" ou de ceux qui fréquentent le club mathématique : "*C'est mal vu d'être intello !*". La fréquentation d'un club peut être due aussi aux "avantages" liés aux clubs : priorités au réfectoire, se retrouver entre copains autour d'une table pour discuter tranquillement, être à l'abri des intempéries... ! Aussi l'animateur doit-il s'ingénier pour retenir ces élèves dont la motivation essentielle n'est pas de faire des mathématiques, et les amener à s'intéresser à une activité. C'est aussi pour cette raison qu'il ne faut pas abuser de l'utilisation des jeux en classe pour que le jeu ne devienne pas un pensum, qu'il reste ludique et pour ne pas en dégoûter les moins motivés.

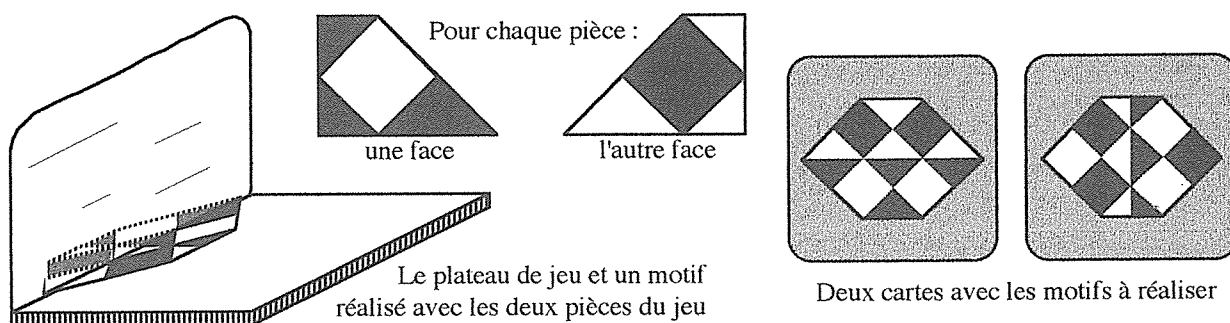
Voici, par domaine, une description sommaire d'un certain nombre de jeux ou de matériels pouvant donner lieu à des activités en club. Certains jeux ont été présentés dans la brochure JEUX 5 de l'APMEP avec des fiches d'activités pour un travail en classe ; nous les signalerons au moment opportun.

Symétries

Le miroir est bien sûr étroitement lié à la notion de symétrie axiale (symétrie plan). C'est sur son utilisation que reposent les quatre jeux suivants.

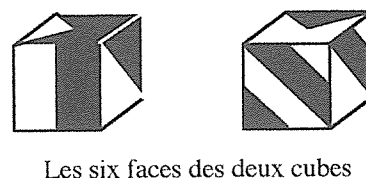
Réflexion

Ce jeu est présenté dans la brochure JEUX 5. On en propose une fabrication car il ne se trouve plus dans le commerce. Il s'agit de reconstituer des motifs bicolores avec deux pièces ayant la forme d'un trapèze rectangle, pièces identiques et réversibles, et un miroir. La moitié du motif doit être réalisée avec les deux pièces, l'autre moitié est dans le miroir.



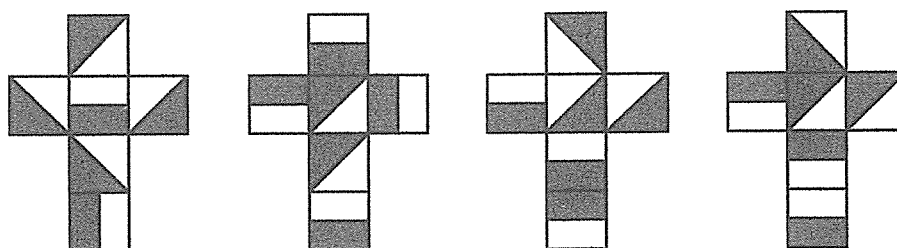
Jeu du miroir

Basé sur le même principe que le précédent, ce jeu utilise deux cubes identiques dont les faces supportent des éléments de motif. Il s'agit de réaliser, avec un miroir, les motifs complets carrés proposés sur des cartes.



Jeu des flèches

Poser les 4 cubes (développements ci-contre) sur un miroir pour qu'avec l'image dans le miroir, vous ayez l'illusion d'un cube entier (2 x 2 x 2).

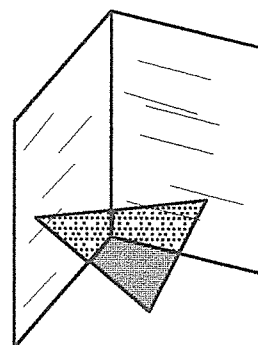


1ère partie : Sur chaque face du cube entier obtenu avec le miroir, doivent apparaître des flèches claires.

2ème partie : Sur chaque face du cube entier obtenu avec le miroir, doivent apparaître des flèches foncées.

Miroir de PIKY

Deux miroirs reliés par un de leurs côtés sont posés perpendiculairement au plan de la table. Avec des figures colorées placées entre les deux miroirs et en faisant varier l'angle dièdre des miroirs, on peut réaliser divers polygones (réguliers, étoilés...) et des figures variées par réflexion dans les miroirs. Ce jeu (matériel) permet d'étudier les symétries et les angles des polygones.



Kaléidoscope

Cette activité est basée sur le principe du kaléidoscope. Sur un réseau triangulaire à mailles assez serrées, on dessine un réseau triangulaire plus large correspondant à la base triangulaire d'un kaléidoscope. On colorie l'un des triangles de motifs divers et on reproduit ces motifs par symétrie dans les autres triangles.

Combis et mini-combis

Ce puzzle formé de 5 carrés de 2×2 , 10 rectangles de 2×1 et 9 carrés de 1×1 (Combis) ou de 4 carrés de 2×2 , 8 rectangles de 2×1 et 4 carrés de 1×1 (mini-combis) est décrit dans la brochure JEUX 5 de l'APMEP. Des fiches d'activités sur les transformations du plan, dont les symétries axiale et centrale, et sur les fractions y sont proposées pour la classe. Ces fiches peuvent bien sûr être utilisées aussi en club avec des prolongements heuristiques.

Aires et périmètres

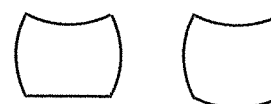
Patrons d'un cube

Cette activité décrite dans JEUX 5 propose deux activités :

- Réaliser, en juxtaposant les 11 patrons du cube, une figure de périmètre minimum,
- Avec les 11 patrons du cube, réaliser une chaîne fermée de telle sorte que la zone intérieure à cette chaîne ait une aire maximum.

Curvica

Ce jeu de juxtaposition réalisé à partir de 24 carrés dont les côtés sont "bombés", "creusés" ou droits est un excellent matériel pour faire fonctionner les concepts d'aire et de périmètre. Dans la brochure JEUX 5 où ce jeu est présenté, une fiche propose un classement des pièces en fonction de leur aire et de leur périmètre. Des pièces ont même aire mais des périmètres différents, même périmètre mais des aires

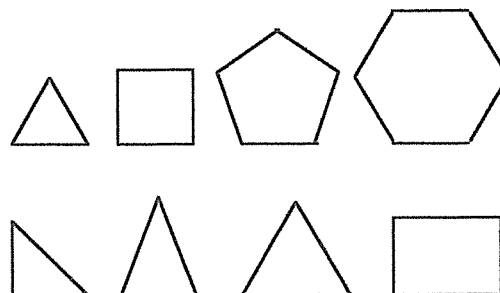


différentes ou même aire et même périmètre. Dénombrement, classements logiques, fabrication des pièces, réalisation de figures (des napperons), autant d'activités qui peuvent être faites en club à partir de ce jeu.

Polydron.

Ce matériel comprend divers polygones qu'on peut fixer par leurs côtés pour réaliser en particulier des polyèdres. Les côtés de ces polygones n'ont que deux longueurs. De ce fait, une activité intéressante est de comparer les aires des différentes pièces d'une même famille (triangles particuliers, quadrilatères particuliers) par une simple utilisation des formules d'aire : superposition de deux pièces, juxtaposition de côtés de même longueur et comparaison des hauteurs associées. Ce matériel permet aussi de faire des assemblages de polygones dans le plan, et en particulier, à partir d'un assemblage donné, trouver d'autres assemblages ayant un périmètre plus petit mais une aire plus grande ou un périmètre plus grand mais une aire plus petite.

La planche ci-contre montre les figures de base de ce matériel. Il y a aussi un octogone. Les grands côtés du triangle isocèle et du rectangle ont la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle isocèle. Cette même longueur est utilisée pour les côtés du grand triangle équilatéral. On devine que l'étude des figures qu'on peut réaliser avec ce matériel dans le plan ou dans l'espace occasionne de nombreux calculs sur les racines carrées.

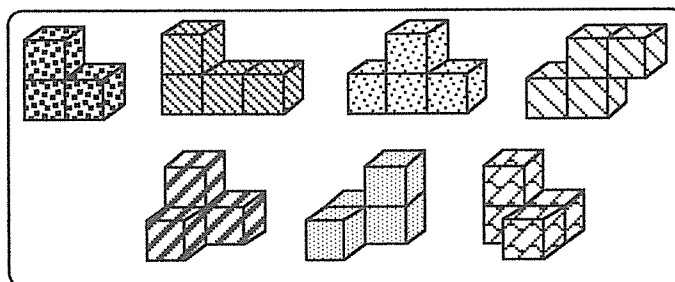


Espace

Les trois jeux et activités présentés ici figurent dans la brochure JEUX 5 de l'APMEP.

Cube Soma

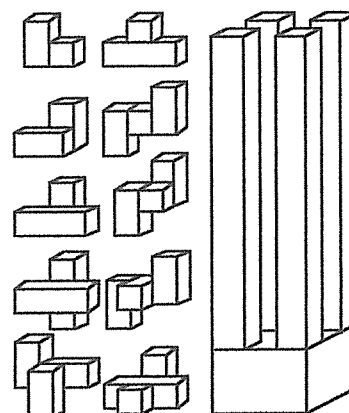
On peut définir les pièces de ce jeu comme étant tous les assemblages non parallélépipédiques de 3 ou 4 cubes. Partant de cette définition, on peut les faire découvrir et les réaliser avec, par exemple, des cubes emboîtables. Ce jeu est la source de nombreuses activités sur les volumes pour la classe de Sixième.



Les nombreuses figures à réaliser à partir de ces 7 pièces peuvent être cherchées en club. La brochure JEUX 5 en propose quarante.

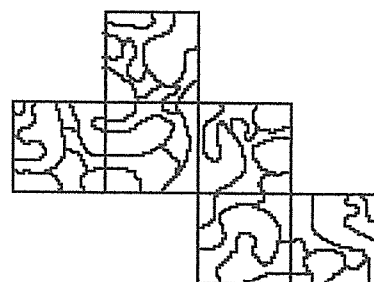
Tour infernale

Ce casse-tête comprend 10 pièces obtenues par assemblage de cubes qu'il faut disposer entre les quatre montants de la tour sans laisser de vide. Les fiches d'activités proposées dans la brochure JEUX 5 développent plus particulièrement la vision des objets dans l'espace : reconnaissance des pièces réelles à partir de leur dessin en perspective sous différents points de vue, reconnaissance des trois projections (ombres) de chacune des pièces. L'activité peut être prolongée en classe, mais surtout en club, par la réussite du casse-tête.



Patrons à colorier

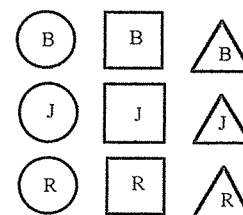
Cette activité de coloriage oblige à faire correspondre mentalement sur le patron les bords des faces adjacentes d'un solide, ici un cube. Deux zones ayant une partie de frontière commune doivent être de couleurs différentes. On peut aussi se donner le défi d'utiliser seulement 4 couleurs. La brochure JEUX 5 propose un patron de cube, un de parallélépipède, un de prisme à base triangulaire et un de pyramide à base carrée, chacun sur une feuille au format A4.



Logique - dénombrement

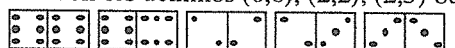
Logix

Ce jeu édité par Mondia au Québec comprend neuf jetons : 3 disques, 3 carrés et 3 triangles, de couleurs bleue, jaune ou rouge, et une grille carrée de neuf cases. Il s'agit de disposer ces jetons sur la grille en respectant des indices visuels fournis sur des cartes-problèmes. Les 62 cartes-problèmes sont réparties sur 5 niveaux de difficulté (trèfle, carreau, cœur, pique et joker). Les premiers niveaux sont accessibles dès le CP, et un élève de lycée se prendra facilement au jeu sur les derniers niveaux. Un professeur de mathématiques se réglera.



Dominos-boîte de rangement

Cette activité consiste à replacer les 28 dominos classiques sur une grille 7x8 en faisant correspondre les points des dominos avec ceux de la grille. La brochure JEUX 5 propose 24 grilles comme la grille ci-contre, au format des dominos les plus courants, et 4 grilles où les points des dominos sont dessinés. Les dessins des points donnent des renseignements supplémentaires, ce qui rend cette activité accessible à des élèves du primaire. Par exemple, les configurations du style ci-après ne peuvent pas recevoir les dominos (6,6), (2,2), (2,3) ou (3,3) :



^A 1	6	2	2	2	6	2	3
2	5	5	6	5	3	4	2
0	3	1	6	5	4	4	4
6	4	0	4	4	0	6	1
0	3	5	0	3	1	5	1
2	3	6	3	0	1	2	5
4	0	0	1	1	6	5	3

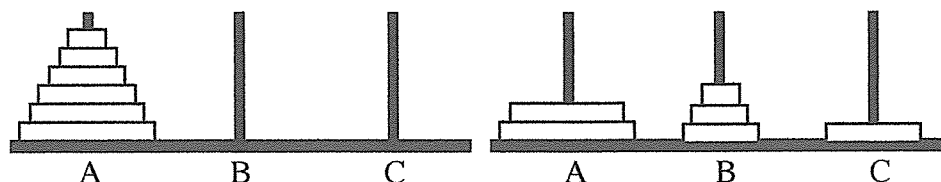
Cette activité développe des qualités d'ordre, de méthode, d'observation, de mémorisation et bien sûr de logique. Par exemple, pour la grille ci-dessus, on peut observer que le double zéro ne peut être placé qu'à un seul endroit (ligne du bas, à gauche) et qu'alors le (4, 2) va obligatoirement dans le coin à gauche, même s'il y a d'autres (4, 2) dans la grille. On peut aussi remarquer que le (3, 5) ne peut pas être placé ailleurs que dans l'une des deux positions de coin en bas et à droite de la grille. Pour cette activité, le joueur a intérêt à classer les dominos pour pouvoir les trouver facilement.

Tour de Hanoï et Spin-out

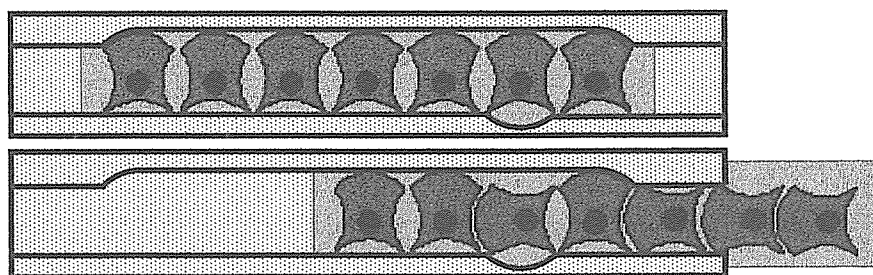
Ces deux casse-tête sont basés sur le même principe que le baguenaudier.

Pour la tour de Hanoï, il s'agit de transporter les disques de la tige A sur la tige C en prenant un seul disque à la fois et en ne posant un disque que sur un plus grand que lui.

Le dessin ci-contre donne la position initiale et une position intermédiaire des disques.



Pour le Spin-out, Il s'agit de sortir la navette de son fourreau. Pour cela il faut mettre à l'horizontale les "clapets" tous "verticaux" dans la position initiale (premier dessin).



On ne peut changer la position d'un clapet qu'à l'endroit où il peut tourner complètement et à condition que le clapet qui est juste à sa droite soit vertical (voir le deuxième dessin).

Ces deux casse-tête nécessitent un analyse rétrograde : le clapet de gauche du Spin-out et le grand disque à la base de la Tour de Hanoï jouent le même rôle ; il faut organiser les mouvements des clapets de droite ou les déplacements des plus petits disques dans le but de tourner le clapet de gauche ou de transférer le disque du bas. Une fois ces deux casse-tête maîtrisés, on peut proposer aux élèves de trouver le nombre minimum de déplacements des disques ou de la navette en fonction du nombre de disques ou de clapets.

Qui est-ce ?

Dans ce jeu pour deux joueurs, qu'on trouve très facilement dans le commerce, il s'agit pour chacun de découvrir le personnage tiré au hasard par l'adversaire en posant, l'un après l'autre, une seule question à laquelle l'adversaire ne peut répondre que par oui ou par non. Les caractères de différenciation sont le sexe, le port de lunettes, de chapeaux, la couleur des yeux, des cheveux, l'existence de barbe, de moustache...

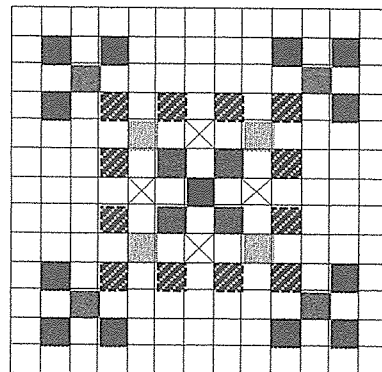
Un deuxième niveau du jeu consiste à tirer deux personnages et à trouver ces deux personnages dans les mêmes conditions, une seule question à la fois avec oui ou non pour toute réponse.

Ce jeu a été repris dans la brochure JEUX 5 avec un objectif pédagogique. Deux activités, l'une géométrique et l'autre numérique, sont proposées. Pour la première, les personnages ont été remplacés par des figures géométriques assez riches (existence de cercles, de triangles, de quadrilatères, de côtés de même longueur, perpendiculaires...) et pour la deuxième par des expressions numériques différentes de plusieurs nombres (écritures à virgule, fractionnaire...). La conception des jeux de cartes dépend du niveau auquel on s'adresse.

Frises évolutives.

Dans cette activité il s'agit de colorier des cases d'un réseau (carré, triangulaire, hexagonal) en suivant les règles suivantes :

- la règle de "naissance". À partir d'une case "mère", on décide quelles cases constitueront les générations successives. Sur la frise ci-contre, la "mère" origine est la case noire et la règle de "naissance" est : colorier les cases adjacentes par un sommet à la case "mère". Ainsi la case origine ■ donne naissance aux quatre cases ■ qui constituent la première génération.



- Les cases d'une même génération sont d'une même couleur.

- Une "fille" ne peut pas avoir deux "mères". Ainsi, sur le dessin ci-dessus, les cases marquées d'une croix ☒ ne font pas partie de la deuxième génération (cases ■) et ne sont donc pas coloriées.

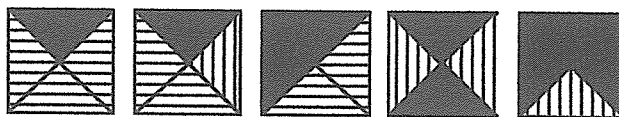
Malgré les contraintes liées au respect des règles, cette activité fait appel aux initiatives et à la créativité de l'élève : le choix de la règle de naissance (cases adjacentes par un sommet, par un côté, en alternance par un côté et un sommet, d'après le déplacement du cavalier du jeu d'échecs...), le choix des couleurs et le choix du réseau (carré, triangulaire, hexagonal). Cette activité demande beaucoup d'attention et de patience.

Quarto, Quads

Le Quarto est un jeu d'alignement et le Quads un jeu de blocage. Ils sont très intéressants d'un point de vue ludique. Mais les pièces de ces deux jeux de société ont la particularité d'être conçues logiquement. Ainsi, ils peuvent donner lieu à une petite activité de logique ou de dénombrement suivant qu'on fait découvrir la logique à partir des pièces ou qu'on veut faire trouver les pièces à partir de leur logique.

Les pièces du **Quarto** sont construites sur quatre caractères : la couleur (noir ou blanc), la taille (petit ou grand), la forme de la base (rond ou carré), leur sommet (plein ou creux). Il y a donc 2^4 pièces différentes.

Les pièces du **Quads** sont des carrés construits de la manière suivante. Chaque carré est partagé en quatre zones par ses deux diagonales. Pour les pièces "noires", les zones sont soit noires, soit hachurées horizontalement ou



verticalement. Les pièces "grises" sont construites de la même manière, noir devenant gris. Mais le jeu ne comporte pas toutes les pièces possibles. On peut donc, après l'avoir remarqué, les chercher. Il s'agit de la pièce dont les quatre zones sont noires (resp. grises) et des pièces ne comportant pas de zones noires ou grises et dont les hachures sont de directions différentes.

Trioker, 24 carrés, Triminos, Carrés de Mac-Mahon, Curvica

Tous ces jeux de juxtaposition sont conçus avec la même logique.

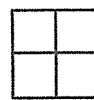
Les pièces du Trioker et du Trimino sont des triangles partagés en trois zones, chacune pouvant être de quatre couleurs différentes.



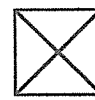
Trioker



Trimino



24 carrés

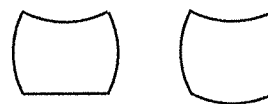


Carrés de
Mac Mahon

Les pièces des 24 carrés et des carrés de Mac Mahon sont des carrés partagés en quatre zones, chacune pouvant être de trois couleurs différentes. Les couleurs sont portées par les sommets (Trioker et 24 carrés) ou par les côtés (Trimino et carrés de Mac Mahon). Ces quatre jeux contiennent chacun 24 pièces différentes. Le casse-tête consiste à réaliser des figures en juxtaposant les pièces et en respectant la règle : deux côtés adjacents doivent avoir les mêmes couleurs.

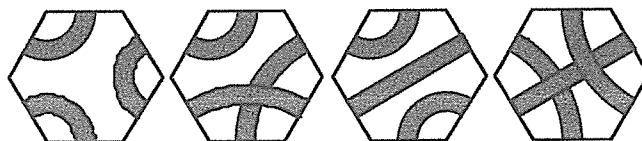
Comme les jeux précédents, ces casse-tête permettent de proposer une activité de logique ou de dénombrement suivant qu'on fait découvrir la logique à partir des pièces ou qu'on fait trouver les pièces à partir de leur logique.

Le Curvica, déjà présenté dans le thème "Aires et périmètres" a été conçu avec la même logique. On considère toutes les formes possibles qu'on peut réaliser en "bombant", "creusant" ou laissant droits les côtés d'un carré. Ces trois formes de contour correspondent aux trois couleurs des côtés des carrés de Mac Mahon, mais la règle de juxtaposition n'est plus l'identité puisqu'à "bombé" correspond "creusé".



Tantrix

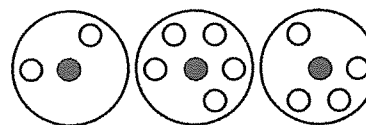
Le Trantrix est un jeu de circuit et peut être joué en solitaire et jusqu'à 4 joueurs. Les pièces du jeu sont hexagonales et comportent tous les liens possibles entre les côtés pris deux à deux.



Les circuits, sur une même pièce, sont de trois couleurs différentes prises parmi quatre. Combien y a-t-il de pièces différentes ?

Dodécaron

Ce casse-tête comprend tous les disques qu'on peut obtenir en perçant de 1 à 6 trous sur les sommets d'un hexagone régulier intérieur au disque. Un trou central



permet d'enfiler les disques sur une tige. Des bâtonnets de hauteur "3 épaisseurs de disques" doivent combler tous les trous. Deux bâtonnets ne peuvent être immédiatement l'un au dessus de l'autre. Combien y a-t-il de disques ? combien y a-t-il de bâtonnets ?

Jeux numériques

Trio

Ce jeu édité par Ravensburger est présenté dans la brochure JEUX 5. L'un des 51 jetons portant les numéros de 0 à 50 est tiré au sort. Le premier qui trouve dans la grille un trio correspondant au nombre tiré gagne le jeton. Le nombre cherché doit être obtenu en multipliant deux nombres parmi les trois alignés et en ajoutant ou soustrayant le troisième. Par exemple, 25 est obtenu par les trios signalés sur la grille ci-contre. Les grilles sont fabriquées en disposant au hasard 49 pions allant de 1 à 9.

4	4	6	8	7	1	5
4	1	8	2	7	6	3
9	6	6	1	3	2	5
3	1	7	4	9	6	3
6	5	7	2	5	4	9
7	1	2	3	8	4	8
2	5	5	2	3	9	8

Campus

Édité par Parker, mais plus commercialisé, ce jeu est présenté dans la brochure JEUX 5. Le matériel comprend deux dés et deux grilles dans lesquels on dispose au hasard et nombres visibles 36 jetons portant des numéros de 1 à 24 sauf les 17, 19, 21 et 23. Trois jetons portent une étoile. À son tour, chaque joueur lance les deux dés et retourne sur sa grille les jetons de son choix de telle sorte que la somme des nombres des jetons retournés soit inférieure ou égale au total des points des dés. Si on obtient un double, on double les points des dés.

			14	13	★
12			1		
	★	2		11	
7	24	9	8		
	6		5		★

S'il reste sur une ligne, une colonne ou une grande diagonale un seul jeton non retourné, avec éventuellement une (ou des) étoile(s), on retourne le jeton et éventuellement les étoiles. Cette règle rend ce jeu très stratégique. Elle permet des réactions en chaîne qui font tout l'intérêt de ce jeu.

Pythagore

Ce jeu repose sur la connaissance des tables de multiplication ; son utilisation en classe en est donc un bon entraînement. Suivant le niveau, on peut se contenter d'une grille de 10 sur 10. Un premier joueur tire 3 pions au hasard et les place sur la grille, dans des cases de son choix, en respectant les tables. Suivant le nombre de joueurs, chacun tire alors de 10 et à 20 pions. Chaque joueur, à son tour, pose un pion sur une case adjacente par un côté à une case déjà remplie en respectant les tables de multiplication. Placer un pion sur une case hachurée (un nombre carré) permet de rejouer. Le gagnant est celui qui, le premier, a posé tous ses pions sur la grille.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												12
2								16			22	24
3						18	21	24	27			36
4					20	24	28	32				
5				20		30						
6		18	24	30								
7		21	28									
8		16	24	32								
9			27									
10												
11		22										
12	12	24	36									

Triolet, Mathable (ou Ma+hix)

Ces deux jeux de plateau se trouvent dans le commerce. Il ne nous est pas possible, ici, de les présenter complètement. Nous en donnons une description sommaire qui, nous l'espérons, sera suffisante pour comprendre l'esprit du jeu.

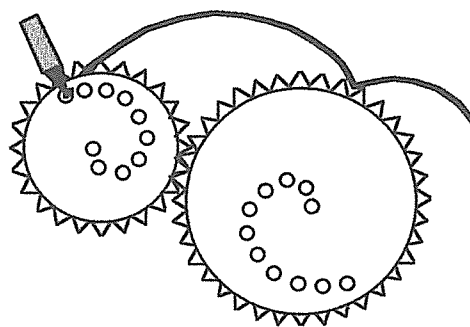
Le Mathable est proche du Scrabble, les lettres étant remplacées par des nombres et les mots par des résultats d'opérations. Des cases marquées d'un $+$, d'un $-$, d'un $\times$ ou d'un $\div$ obligent à faire l'opération indiquée pour pouvoir y mettre un nombre. D'autres cases doublent ou triplent le nombre posé.

Le Triolet comprend des jetons portant les nombres de zéro à 15 et deux jetons portant une étoile qui peut remplacer n'importe quel nombre. On ne peut pas aligner plus de trois jetons et le total d'un alignement de trois jetons (un trio) doit être égal à 15. Ainsi, la somme de deux jetons adjacents doit être inférieure ou égale à 15. Les points des jetons posés sont comptabilisés dans les alignements horizontaux et verticaux où ils figurent. Le joueur qui fait un trio marque 30 points (le double des points des jetons) et s'il fait un triolet (la somme des 3 jetons de sa réglette est égale à 15 et les 3 jetons peuvent être posés en une seule fois sur le plateau) il obtient une bonification de 50 points.

Spirograph.

Ce jeu, un grand classique des jeux du commerce, est décrit dans la brochure JEUX 5. Des roues dentées dont les numéros correspondent à leur nombre de dents permettent de tracer des épicycloïdes plus ou moins prononcées suivant qu'on met le crayon dans un trou plus ou moins près du bord de la roue mobile, celle qui tourne autour de la roue fixe. Si le nombre de dents de la roue mobile est un diviseur du nombre de dents de la roue fixe, la courbe se referme au bout d'un tour et le nombre de boucles de la courbe est le quotient des deux nombres.

Ce jeu permet donc d'aborder les notions de division euclidienne, de multiple, de diviseur, de PGCD et de PPCM ainsi que de fractions.



Compte rendu d'activités de l'atelier

[Un prof' qui joue, c'est du sérieux !]

Après quatre séances "marathon", le samedi après-midi et le dimanche matin, durant lesquelles les animateurs ont présenté les activités mathématiques décrites dans le document précédent (l'heure et demie était un peu juste pour présenter tout ce qui était prévu), 13 stagiaires ont choisi de travailler sur le thème de cet atelier pour les jours restants.

Ils ont en général consacré la première séance à prendre davantage connaissance des jeux présentés dans la première phase (d'autres jeux étaient aussi à leur disposition) et des activités mathématiques proposées à partir de ces jeux (base essentielle de ce travail : la brochure n° 119 de l'APMEP « Jeux 5 »).

Pendant les deux séances suivantes, ils ont, individuellement ou en groupes, choisi un jeu ou un thème et tenter d'imaginer des fiches d'activités destinées aux élèves à partir de ce jeu ou sur ce thème, leur objectif étant aussi bien un futur travail en classe qu'en club mathématique. Selon les jeux et selon le niveau auquel on destine l'activité, on peut en effet concevoir les deux possibilités d'utilisation.

Certains stagiaires avaient "rendu" leur travail à l'issue de l'U.E. D'autres ont préféré le "mûrir" encore un peu et ont remis leur copie un mois plus tard. Qu'importe ! L'essentiel était que tous repartent avec des projets, ce qu'ils ont très bien décrit dans leurs préparations.

Leurs réactions ont été en général très positives sur les séances de l'atelier - *[j'ai découvert pendant trois jours le plaisir de jouer, de perdre ou de gagner, de sécher sur l'Âne rouge, de défier une collègue sur Logix, de me battre sans perdre patience avec Spin-out, de faire une partie de Mathable avec Jean-Pierre Kahane...]* - et les collègues ont très vite dépassé cette première approche des jeux ; leurs projets ont pris forme petit à petit :

- *[Quels apprentissages mathématiques le jeu permet-il ? Quelles articulations avec l'enseignement dérouille-t-il ?]* : questions posées par une stagiaire dans son compte rendu.

- *[Je suis venu chercher de nouvelles idées pour redynamiser mon club qui existe depuis 20 ans... Je vais proposer cette année des jeux utilisant le calcul mental : Mathable, Campus, Fraction dont l'intérêt pédagogique, particulièrement pour les élèves en difficulté, est flagrant... Comme complément aux exercices du style des concours mathématiques, le fichier Évariste (brochure APMEP n° 98) remplacera des fiches trop connues des élèves... Je suis venu chercher des idées et je repars avec de quoi renouveler totalement la structure du club. Bien sûr, je ne changerai pas tout, mais il y aura une bouffée d'air frais !]*

- *[Dans leur majorité les élèves qui viennent jouer sont en échec scolaire et je voudrais profiter de leur intérêt pour introduire quelques activités mathématiques liées à ces jeux. Pour l'année à venir, j'envisage de consacrer une des deux heures hebdomadaires à explorer avec la partie la plus motivée du groupe ce qui s'intitulera : "le dessous des cartes". Le choix du sujet à étudier est essentiel car tous les jeux ne se prêtent pas à une recherche abordable par des élèves. La quantité de jeux présentés... m'ont permis d'affiner ce projet.]*

- Une collègue enseignant en Lycée professionnel a comme projet de réaliser une partie du programme de mathématiques à partir de jeux (construction et utilisation) pour remotiver les élèves :

[* *Dépôt périodique des jeux construits au CDI avec initiation des élèves volontaires.*

* *Organisation d'une journée par trimestre avec un intervenant extérieur et avec des collègues des autres disciplines.*

Buts :

* *Favoriser la motivation des élèves qui reprennent par le jeu des notions où ils étaient en échec.*

* *Développer l'esprit d'équipe dans les constructions avec prise de responsabilité.*

* *Développer des stratégies dans le jeu en essayant de les expliquer aux autres tout en les appliquant.*

* *Valoriser la classe vis-à-vis de l'établissement.*

* *Créer une dynamique au niveau des collègues de l'établissement.]*

Dans les pages suivantes, on peut trouver, par ordre alphabétique des auteurs, les "productions" des stagiaires ou groupes de stagiaires :

- **Utilisation d'un jeu sur les fractions** (*Isabelle Castella et Annie Cousin*)

- **Avec des carrés et des triangles** (*Frédéric De Ligt*)

- **Autour de l'Awélé** (*Fabien Emprin*)

- **Intégrer les jeux à caractère mathématique en classe et les diffuser dans tout l'établissement**
(*Valérie Larose et Nathalie Ben Moussa*)

- **Création d'une activité mathématique de type Club** (*Nathalie Leroy et Anne Le Ru*)

- **Création du club** (*Annick Quain*)

- **Variations sur le jeu "Trio"** (*Aude Sainton*)

- **Le Jipto** (*Christophe Taquet*)

- **Exploitation de jeux en club mathématique au lycée** (*Pascal Vincent*)

Utilisation d'un jeu sur les fractions

Isabelle Castella et Annie Cousin

Présentation du jeu.

LES FRACTIONS

Le jeu de découverte des fractions

Editeur : BSM Intercontact, 54 Bd de Verdun, 92400 Courbevoie

Généralités.

Nombre de joueurs : de 1 à 4 joueurs.

Age : de 5 à 10 ans.

Durée du jeu : 30 minutes.

Contenu de la boîte :

a) 32 fractions de disque.

2 pièces de $\frac{1}{2}$ (rouge) ;

6 pièces de $\frac{1}{6}$ (vert) ;

3 pièces de $\frac{1}{3}$ (bleu) ;

8 pièces de $\frac{1}{8}$ (jaune) ;

4 pièces de $\frac{1}{4}$ (marron) ;

9 pièces de $\frac{1}{9}$ (noir) .

b) 2 dés : l'un portant sur ses faces : $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ (chaque fraction deux fois), l'autre portant sur ses faces : $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{9}$ (chaque fraction deux fois).

c) une fiche cartonnée sur laquelle on a dessiné deux cercles, par exemple de 5 cm de rayon, destinés à recevoir les pièces du jeu.

But du jeu : Constituer des disques à l'aide de fractions de disque.

Règle du jeu.

Afin de se familiariser avec les fractions, l'enfant peut jouer en trois temps.

Premier temps :

On distribue une fiche cartonnée à chaque joueur. On n'utilise que le dé portant les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$.

Le joueur jette le dé, lit la fraction, choisit la pièce correspondant au jet et la pose sur un des disques de la fiche cartonnée.

Le jeu se poursuit dans le sens des aiguilles d'une montre.

Si le dé indique une fraction impossible à utiliser, le joueur peut, soit placer la pièce sur l'autre disque de la fiche cartonnée, soit passer son tour.

Le jeu continue jusqu'à épuisement des pièces.

Quand un joueur a 2 disques incomplets sur la fiche cartonnée, il peut, lorsque c'est son tour, interchanger les pièces (un seul échange à chaque tour), pour former un disque complet.

Le gagnant est celui qui possède le plus de disques complets, ou le plus de pièces mises en place.

Deuxième temps :

On joue de la même façon qu'au premier temps mais cette fois-ci avec uniquement le dé portant les fractions $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{9}$. Même règle du jeu, même résultat.

Troisième temps :

On distribue une fiche cartonnée à chaque joueur. Cette fois, on utilise les deux dés.

Le joueur jette les dés et peut choisir :

- soit des pièces correspondant aux dés.

- soit des pièces différentes mais donnant le même résultat.

Exemple : Les dés indiquent $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{8}$, le joueur peut choisir :

1 pièce marquée $\frac{1}{2}$ et 1 pièce marquée $\frac{1}{8}$,

ou 2 pièces marquées $\frac{1}{4}$ et 1 pièce marquée $\frac{1}{8}$,

ou 4 pièces marquées $\frac{1}{8}$ et 1 pièce marquée $\frac{1}{8}$,

ou 1 pièce marquée $\frac{1}{4}$ et 3 pièces marquées $\frac{1}{8}$

et ainsi de suite.

Le résultat est le même que dans les précédentes versions.

Prolongation du jeu

On peut continuer à jouer en défaisant les disques construits.

À l'aide du dé portant les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$, on enlève la pièce correspondant au jet du dé, ou des pièces différentes, mais donnant le même résultat (exemple : $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$).

Le gagnant est celui qui a enlevé le plus grand nombre de pièces.

Remarques.

Ce jeu peut être fabriqué et utilisé par :

- les élèves des classes primaires ;
- les élèves de SEGPA ;
- les élèves de collège en grande difficultés.

Quelques idées d'utilisation en club de mathématiques.

1. Les différentes façons d'obtenir l'unité.

En solitaire, il s'agit de former un disque entier avec les pièces de jeu et de trouver le plus grand nombre de possibilités.

2. Les différentes façons d'obtenir une fraction.

À partir d'une pièce de jeu, chercher les assemblages de pièces qui peuvent la remplacer ; par exemple, $\frac{1}{2}$ peut être remplacé par 2 pièces de $\frac{1}{4}$, par 4 pièces de $\frac{1}{8}$ et ainsi de suite...

3. Les aires.

Regrouper les pièces suivant leurs aires, puis les ordonner.

4. Complément de matériel.

On peut compléter le matériel avec 5 pièces de $\frac{1}{5}$, 10 pièces de $\frac{1}{10}$, 20 pièces de $\frac{1}{20}$ et un troisième dé portant sur ses faces les fractions $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{20}$, puis reprendre les activités précédentes.

Chaque activité pourra faire l'objet d'une affiche présentant les découvertes et faisant apparaître les notions mathématiques correspondantes sous forme d'égalités, d'inégalités, d'additions ...

Une transformation possible du jeu pour accentuer les difficultés.

- On ajoute au matériel une série de cartes portant des fractions de valeur strictement supérieure à 1 et inférieure ou égale à 2, ainsi que du papier et des crayons pour les calculs en cas de besoin.
- Chaque joueur tire une carte. Les règles de tirage des pièces restent celles du troisième temps, mais le but pour chaque joueur est d'égaliser ou de s'approcher le plus possible de la fraction écrite sur sa carte par valeur inférieure ou supérieure.
- Le gagnant est celui qui obtient la valeur de sa fraction ou s'en approche le plus possible.

Remarque : Cela suppose d'être en mesure de comparer, d'additionner et de soustraire des fractions de dénominateurs différents.

Avec des carrés et des triangles

Frédéric de Ligt

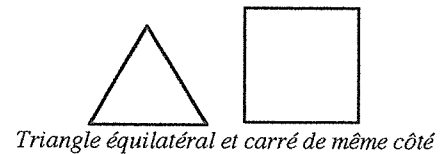
Préambule

J'anime depuis trois ans un club "Jeux de stratégie" au collège J. Aviotte (ZEP) à Guîtres en Gironde. Ce club rencontre depuis sa création un franc succès avec des effectifs variant de 30 à 40 élèves. Deux séances hebdomadaires d'une heure chacune, permettent à ceux qui le désirent d'y participer.

Dans la majorité, les élèves qui viennent sont en échec scolaire, et je voudrais profiter de leur intérêt pour ce club pour introduire quelques mathématiques liées à ces jeux. Ainsi, l'une des deux heures hebdomadaires sera consacrée, avec le groupe d'élèves les plus motivés, à explorer un thème qui s'intitulera "le dessous des cartes", où il s'agira de créer et de réaliser des jeux de stratégie.

Préparation

Afin de faciliter le démarrage de l'activité, les élèves auront à leur disposition la forme des pièces qu'ils devront utiliser :



L'assemblage de ces pièces est assez riche pour susciter leur curiosité ; ils auront ensuite à imaginer soit des casse-tête, soit des jeux à deux joueurs. Il faudra qu'ils fixent les règles, le support, la quantité de pièces à utiliser, les modifications à apporter à ces pièces (la couleur par exemple) ; et quand le résultat sera satisfaisant, ils réaliseront eux-mêmes leurs jeux et les présenteront aux autres élèves (sous forme de tableaux), ainsi que les notions mathématiques qu'ils ont dû utiliser pour y parvenir.

Voici, à titre d'exemple, un jeu créé pendant l'Université d'Été.

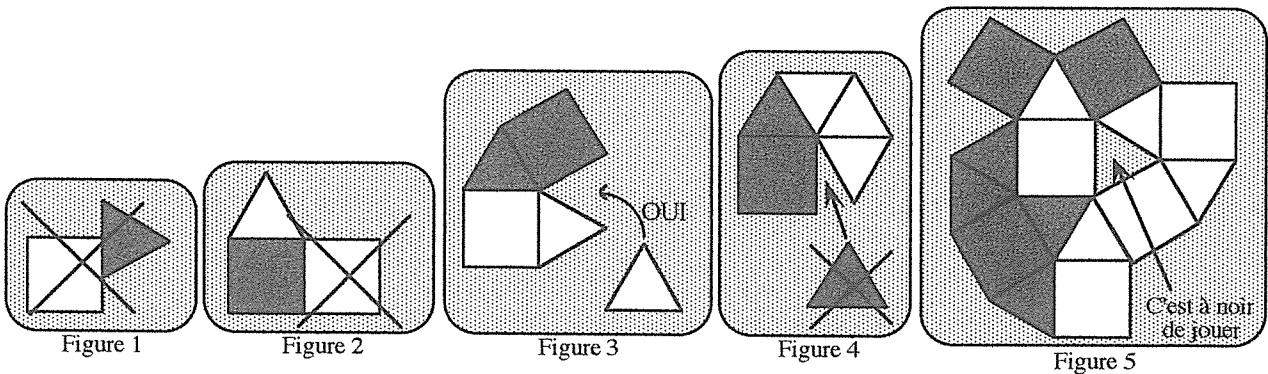
Nombre de joueurs : 2

Matériel : 12 carrés noirs, 12 carrés blancs
18 triangles noirs, 18 triangles blancs

Chaque joueur dispose de 30 pièces, l'un ayant les noires et l'autre les blanches.

But du jeu : Entourer une pièce ou un groupe connexe de pièces de l'adversaire.

Déroulement de la partie : Blanc commence en posant un triangle et chaque joueur joue, à son tour, une pièce de sa réserve sur un ou plusieurs côtés adjacents (figure 1 interdite) de l'ensemble déjà formé, à condition qu'un carré ne soit pas accolé à un carré déjà posé (figure 2) et que la pièce posée ne recouvre pas une partie du jeu (figure 4).



Fin de partie : l'un des joueurs qui réussit à cerner par tous ses côtés une pièce ou un groupe de pièces accolées de l'adversaire a gagné.

Si toutes les pièces ont été posées sans qu'il y ait de gagnant, alors la partie est déclarée nulle.

Cas particulier :

Un trou peut se former et l'on a le droit d'y jouer en respectant les règles précédentes. Ainsi, (figure 5) noir peut poser un triangle, et blanc a perdu car les 5 côtés de sa zone sont en contact avec les noirs. Le triangle noir est par ailleurs entouré de pièces blanches ; mais c'est noir qui vient de jouer, c'est donc noir qui gagne.

Remarques

On peut aussi imaginer de faire réaliser aux élèves des casse-tête ou des jeux à deux joueurs avec les 24 carrés de Mac Mahon et des triangles équilatéraux tricolores (il y en a 11) que l'on mêlerait. Il faudrait examiner le nombre de pièces de chaque type à utiliser.

On peut encore créer un jeu de dominos numérique constitué de ces deux formes. Il y a *a priori* de nombreuses variations possibles se basant sur les principes de jeux existants.

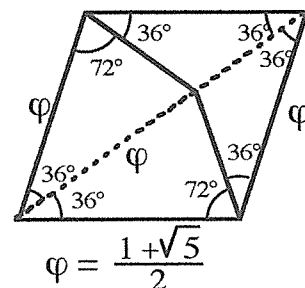
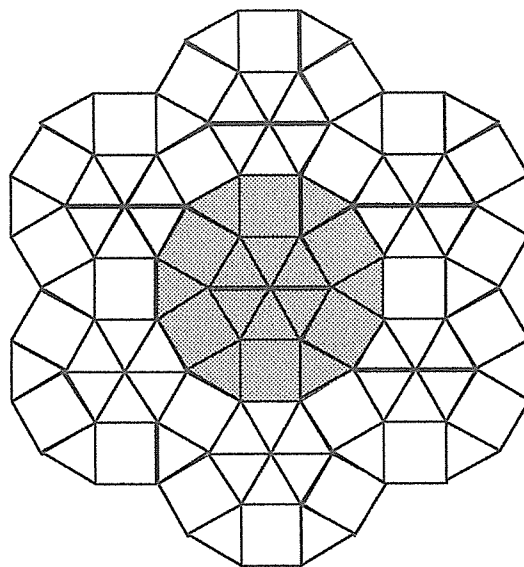
Aspects mathématiques

Il serait intéressant de parler de pavages qui utilisent différents polygones réguliers. Ceux qui sont homogènes (au nombre de 11), c'est-à-dire qu'autour de chaque sommet il y a le même nombre de polygones de même forme, ceux qui ne sont pas homogènes et qui sont en nombre illimité. En effet, tous les polygones qui apparaissent dans ces pavages peuvent être décomposés à l'aide des deux seules pièces de l'activité.

Ce travail est l'occasion de calculs sur les angles et les fractions. De plus, les élèves pourront découvrir et réaliser de jolis motifs géométriques.

Prolongements

On peut aussi explorer les possibilités de jeux avec les deux pièces permettant les pavages de Penrose, par exemple.



Autour de l'Awele

Fabien Emprin

Objectifs

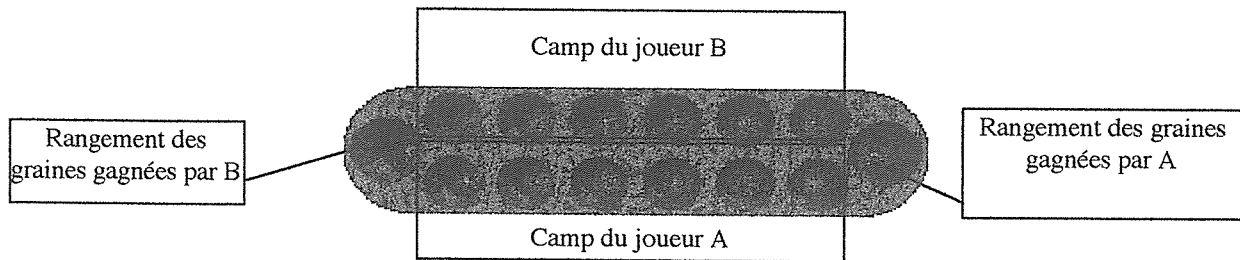
Utilisation de l'AWELE pour :

- ↳ Développer le calcul mental et les procédures additives chez l'élève de façon ludique.
- ↳ Développer la réflexion, l'organisation et l'étude exhaustive de cas.
- ↳ Favoriser la démarche scientifique par conjecture / vérification.
- ↳ Étudier des stratégies de jeux grâce aux jeux arrêtés.

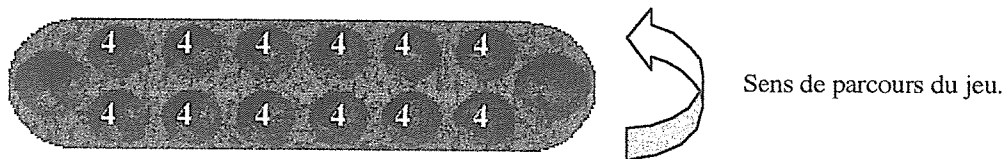
Une première approche : les règles et le jeu

Il nous paraît judicieux de présenter le jeu et les règles pour faciliter la lecture de la suite.

- 1) Constitution du jeu : une planche à 12 trous et 48 graines.

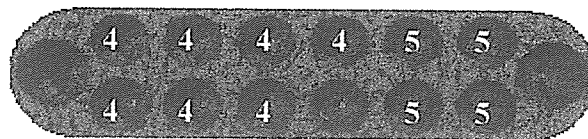


- 2) Début du jeu : 4 graines par case



- 3) Chaque joueur, à son tour, prend la totalité des graines qui sont dans une des cases de son camp et les sème (il met **une graine** dans chaque case qui suit la case de prise jusqu'à épuisement des graines). Attention ! « On ne sème jamais sous ses pieds » : autrement dit, on ne remet jamais de graine dans la case de départ, même si on fait plus d'un tour.

Exemple :



- 4) Règle de prise : Il y a deux conditions à remplir :

Condition 1 : la dernière graine posée tombe dans le camp adverse.

Condition 2 : la dernière graine posée tombe dans une case où il y avait 1 ou 2 graines (2 ou 3 avec celle que vous posez).

Quand les deux conditions sont remplies, on gagne les graines de la case où l'on termine, puis on examine la case précédente ; si elle remplit également les deux conditions, on ramasse les graines de cette case, et ainsi de suite. Quand on a ramassé tout ce qu'on peut, c'est à l'adversaire de jouer.

Attention ! Il est interdit « d'affamer l'adversaire » : il est interdit de faire un coup qui ne laisse aucune graine à l'adversaire ou de ne pas faire un coup qui ne lui donne pas de graine s'il s'est démuné.

- 5) Le gagnant est celui qui a plus de 24 graines ou plus que son adversaire si le jeu est bloqué.

Utilisation du jeu : Quelques propositions

- ↳ En club jeu.
- ↳ Tous les niveaux à partir de la grande section de maternelle.
- ↳ Avec des élèves en difficulté.
 - Les règles sont simples et facilement mémorisables.
 - Les stratégies sont de type + et – et permettent un travail de calcul mental “ indolore ”.

De plus, le jeu est facile à fabriquer avec une boîte de 12 œufs et 24 haricots blancs par exemple.

Nos propositions

1) Des petits problèmes de calcul :

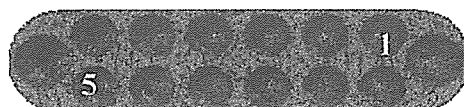
- ↳ Combien puis-je ramasser de graines au maximum en 1 coup ?
- ↳ Combien faut-il de pions pour faire un tour ?
- ↳ Est-il possible de faire deux tours ? et plus ?

2) Petit problème pour analyser (en reculant les coups) :

Est-il possible de finir le jeu (au dernier coup prendre toutes les graines et ne plus avoir de graine) ?

3) Problème d’AWELE comme les problèmes d’échecs.

- ↳ Prendre 2 graines à l’adversaire en 6 coups en partant de la situation ci-dessous. C’est à A de jouer.



4) Questions de réflexion pour des activités de recherche.

- ↳ Peut-on inventer un codage des coups de l’AWELE (comme pour les échecs) ?
- ↳ Peut-on inventer d’autres règles de prises (les tester ; évaluer leur intérêt) ? D’ailleurs il y a des variantes des règles selon les pays.
- ↳ Peut-on faire varier d’autres paramètres, nombre de cases et de graines par exemple ?
- ↳ Peut-on encore prendre des pions quand il reste 3 graines ? 4 ? 5 ? ou sommes-nous condamnés à tourner ...
- ↳ Peut-on programmer un AWELE électronique ? Comment envisager la représentation du jeu en machine ?

Propositions de réponses

Le problème n°3

X est la case de départ

° est une graine

1)

				°	X
X	°	°	°	°	°

2)

			°	X	
	°	X	°°	°	°

3)

		°	X		
	X	°	°°	°	°

4)

	°	X			
		X	°°°	°	°

5) choix a) choix b)

°	X			°	X
			X	°°	°°

a)

°					°°
				X	°°°

b)

	°			°°	°
				°°	X

Problème n°2

L	K	J	I	H	G
A	B	C	D	E	F

On décide de repérer les cases ainsi.

0)

					○
					○

Voici une possibilité pour finir le jeu.

C'est au joueur A de jouer.

-1)

○○○					○
○	○○	○			○

Le joueur B a donc gagné toutes les graines de

A, B, C, D, E. Il ne peut être parti que de L.

Il avait le choix entre bouger G ou L, le gain de L étant supérieur à la perte possible, il doit jouer L.

-1)

○○○○○					○
○	○○	○	○○	○	○

Ce cas est impossible : sinon, A n'aurait pas joué.

Quand A joue, il crée une case vide.

Donc pour -2) L est à 1,2,3 ou 4 graines.

-2)

○○○					○
○	○○	○○		○	

Ici on prend L à 3 par exemple. Le coup seul de A est

un coup perdant de 8 billes. C'est impossible.

On considère que les joueurs jouent pour gagner donc le seul -1) possible est :

-1)

○					○
○					○

Pour que le -2 soit plausible.

-2)

○					○
○				○	

La fin revient alors à un choix du joueur A.

Il a aussi la possibilité de continuer à tourner.

Dans le cas choisi, la fin du jeu est possible mais dépend donc de la volonté des joueurs.

On se doit aussi d'examiner les possibilités de fin :

0)

				○○	○
					○○

C'est au joueur A de jouer.

Pour -1) on évalue la plausibilité en examinant les possibilités de gain de chacun des joueurs.

Après examen, il semble qu'il n'est possible de finir le jeu que si on se trouve dans une situation de gain équitable pour l'un et pour l'autre joueur ; sinon les joueurs ont tout intérêt à contrecarrer les plans de l'adversaire.

Intégrer les jeux à caractère mathématique en classe et les diffuser dans tout l'établissement.

Valérie LAROSE et Nathalie BEN MOUSSA

Lorsque pour une raison ou une autre il n'est pas possible d'animer un club jeu dans un établissement scolaire il existe cependant un moyen de faire jouer beaucoup d'élèves de l'établissement sur des jeux à caractère mathématique par l'intermédiaire du CDI et du documentaliste. Cette expérience est déjà mise en place dans un collège ZEP et zone sensible de l'académie de Versailles.

Modalités

- Un jeu est proposé à toute une classe qui le résout avec son enseignant.
- Ce jeu est ensuite mis en libre service au CDI.
- Tous les élèves du collège et de la Segpa y ont accès pendant leurs heures libres.

Plus précisément :

Le jeu peut être totalement cherché en classe ou bien faire l'objet d'un devoir à la maison. Dans ce cas, on peut demander à l'élève de rendre une copie détaillant les étapes de leur recherche avec les échecs constatés (sous forme d'une narration de recherche par exemple).

En classe, les élèves qui ont résolu l'énigme exposent leur(s) solution(s), ceux qui ont échoué leur(s) blocage(s) ; les élèves travaillent alors la maîtrise de l'argumentation orale, apprennent à écouter et échanger des idées.

Un petit groupe d'élèves volontaires va diffuser ce jeu au CDI.

Pour cela ils doivent créer en plusieurs exemplaires une affiche publicitaire pour informer les autres collégiens, rédiger une règle du jeu de façon claire et fournir les pièces nécessaires au jeu. Ils doivent également expliquer au documentaliste le jeu avec sa règle, ses solutions, ses stratégies.

Pendant une durée à déterminer en fonction du jeu (de une semaine à un mois), le jeu est mis à disposition des élèves présents au CDI qui peuvent tenter de le résoudre. Le documentaliste valide la ou les réponses et récompense les élèves (friandises...).

Les jeux proposés

- On y joue seul (pour ne pas gêner le documentaliste).
- La règle du jeu doit être simple et rapide à comprendre (favorise l'autonomie).
- Les puzzles, les pavages, les découpages connaissent un grand succès (ils permettent une validation par l'élève lui-même).

Bilan de cette expérience

Fierté des élèves qui ont fourni le jeu au CDI.

Remotivation d'élèves en difficulté.

Respect du matériel mis à disposition au CDI.

Tous les élèves de l'établissement sont concernés.

Liberté de participer.

Développement de l'autonomie des élèves.

Remarque :

Ces jeux peuvent être également utilisés dans le club maths du collège, s'il en existe un.

Interdisciplinarité

Français : utilisation de la langue écrite et orale.

- Lire une règle pour savoir faire.
- Rédiger pour d'autres élèves.
- Argumenter ses recherches.

Technologie, arts plastiques :

- Fabrication des pièces des jeux.
- Soins et précision.

Quelques exemples

Exemple n°1 tiré de la brochure APMEP de Lorraine "objets mathématiques"

Matériel fourni : 12 octaèdres et 24 tétraèdres de même arête.

Panneau avec le dessin en perspective cavalière d'un tétraèdre et d'un octaèdre pour les élèves n'ayant pas encore vu ces volumes en classe.

Défi n°1 : avec 1 octaèdre et 4 tétraèdres construire un tétraèdre à l'échelle 2

Défi n°2 : avec 6 octaèdres et 8 tétraèdres construire un octaèdre à l'échelle 2

Défi n°3 : avec 4 octaèdres et 11 tétraèdres construire un tétraèdre à l'échelle 3

Travail réalisé en classe de 4^{ème} ou de 3^{ème} sur ce jeu :

- Patrons et constructions des volumes.
- Notion d'échelle (longueur, surface, volume).
- Calculs de volumes.
- Généralisation du défi n°3 pour une échelle supérieure.

Exemple n°2 tiré de la brochure APMEP de Lorraine "objets mathématiques"

Matériel fourni : 5 losanges avec un angle de 36° et 5 autres losanges ayant un angle de 72° ; les 10 losanges ont la même longueur de côté.

Panneau décrivant un décagone régulier ; un support en forme de décagone.

1 miroir pour l'autocorrection.

Défi n°1 : Remplir le support avec les losanges.

Défi n°2 : Compter les axes de symétrie.

Défi n°3 : Remplir le support de façon à obtenir une figure ayant 5 axes de symétrie.

Défi n°4 : Remplir le support de façon à obtenir une figure ayant un seul axe de symétrie.

Défi n°5 : Remplir le support de façon à obtenir une figure n'ayant aucun axe de symétrie.

Travail réalisé en classe de 6^{ème} ou de 5^{ème} sur ce jeu :

- Losanges.
- Angles, (constructions, angles adjacents).
- Axes de symétrie.

Création d'une activité mathématique de type Club.

Nathalie Leroy et Anne Le Ru

Thème : Jeux et manipulations mathématiques

Objectif

Proposer aux élèves un lieu où les mathématiques sont palpables, vivantes, jolies, leur donnant envie à eux aussi de manipuler, comprendre, réfléchir, réaliser, anticiper... (objets, jeux, livres...). Nous espérons que ce travail aboutira à la réalisation de petits jeux de société et d'un jeu, plus conséquent, réalisé en commun.

Dans tous les cas, l'exposition des élèves clôturera l'année du club.

Structure

** Atelier à "dominante manipulatoire"*

- Coloriage de treillis (itération de procédés)
- Coloriages de patrons de cubes (entraînement à la vision dans l'espace) et prolongements :
 - Nombre maximal de couleurs nécessaires.
 - Dénombrement des patrons du cube.
 - Construction d'un jeu de pentaminos. Prolongement : construction de sa boîte.
 - Réalisation de polyèdres avec différents matériaux et différentes techniques (origami, polystyrène, bristol, fil de fer...). Prolongement : réalisation d'un plateau de jeu du type "Trivial Pursuit" qui, refermé, serait un polyèdre.

** Atelier à "dominante ludique"*

Des jeux sont proposés en libre service, sélectionnés par nous lors de l'Université d'Été pour recouvrir les domaines numériques (Loto, Bâtons de Neper...), géométriques (Tangram et divers puzzles...) et logiques (problèmes...).

À noter

- En filigrane de ces activités, une préparation au concours Kangourou et, prolongement possible, la réalisation d'une épreuve pour les parents et les professeurs.
- Possibilité d'utiliser l'ordinateur pour les réalisations et recherches.
- Les prolongements envisagés ci-dessus ne seront entrepris que sur initiative propre des élèves, toute autre initiative étant bienvenue.
- La "boîte à questions" du "Trivial Pursuit" sera alimentée au cours des diverses activités.

Effets attendus

Les activités proposées et la réalisation finale de l'exposition développeront des qualités de soin, de méthode, de prise d'initiative, d'entraide, et le travail en équipe, sans oublier l'esprit de citoyenneté (installation et rangement, respect et gestion du matériel mis à la disposition des élèves).

Les élèves animant eux-mêmes l'exposition apprendront à présenter un travail, à s'exprimer, à communiquer aux autres (enfants et adultes) le plaisir que cette activité leur a procuré.

En particulier, les élèves en difficulté seront valorisés aux yeux des autres : apparaître sous un jour différent, particulièrement aux yeux des professeurs, peut provoquer un changement positif d'attitude, grâce à une prise de confiance.

En apportant un éclairage inhabituel sur notre discipline, on peut espérer changer le regard des autres disciplines, des élèves, des parents, de l'administration sur les mathématiques.

Création du club Eureka

Annick Quain

Une Université d'Été qui tombe à pic.

Depuis 2 ans, ma collègue anime un club de dessins géométriques et l'an dernier, sur un panneau du couloir de mathématiques, j'affichais toutes les semaines deux énigmes (une pour les 6^{ème} et 5^{ème}, une autre pour les 4^{ème} et 3^{ème}). Contrairement à ce que l'on craignait, aucune affiche ne fut déchirée, bien au contraire, devant ce panneau il y avait souvent un attroupement, et nous étions poursuivies pendant les récréations et les interclasses par les élèves tentant une réponse (le premier avait droit à une sucette...)

Le succès de ces deux tentatives nous a donné envie d'ouvrir un club proposant plusieurs activités, et l'université d'été arrivait à point.

De plus, cette année je prends en charge les 4^{ème} AS et les 3^{ème} d'insertion ; je recherche donc des activités plus ludiques pour les faire progresser et je me suis inscrite à l'atelier 3.

Pendant la première matinée, j'ai fait l'inventaire des jeux qui me semblaient intéressants pour notre club et qui répondaient à l'objectif que l'on s'était fixé. Choix qui n'est pas facile vu la diversité de ce qui nous est proposé. Il m'a fallu résister aussi à l'envie de jouer pour moi-même. Je me suis tournée surtout sur les jeux mathématiques. La deuxième demi-journée, j'ai papillonné d'un jeu à l'autre, tentant de me faire une idée du jeu, de son intérêt et de sa répercussion sur nos élèves. Cette demi-journée m'a laissé un goût d'insatisfaction, peut-être du fait de cette liberté à aller d'un jeu à l'autre juste pour jouer. J'ai déploré le fait de n'avoir pas de matériel pour essayer de construire certains jeux. Il faudrait peut-être prévoir pour une prochaine session, du carton... pour que l'on puisse repartir avec des productions. Car d'une part, le fait d'avoir passé beaucoup de temps à jouer m'a donné mauvaise conscience, j'avais l'impression de n'avoir pas été productive ; il est vrai qu'en général les stages sont plus "théoriques" ; d'autre part, il y a des exemples des jeux à fabriquer que l'on a envie de mettre rapidement en pratique. La troisième demi-journée m'a servi à organiser toutes les informations et à préparer un premier inventaire de jeux nécessaires pour démarrer le club.

Voici le projet de club que cette Université d'Été nous a aidé à mettre en place.

Projet du club Eureka.

Trois animateurs : professeurs de mathématiques dont deux ont participé à l'Université d'Été (atelier 3 et 4)

Horaires : Le mardi de 12 h 30 à 13 h 30. Ouverture pour la fin septembre (NDLR : Ce club a effectivement ouvert le 5 octobre dernier).

Adhérents : Le club est ouvert aux élèves ayant cotisé au FSE et à tout le personnel.

Les inscriptions se font tout au long de l'année, pour une période minimum allant jusqu'aux vacances suivantes.

Objectifs : D'une part, réconcilier les élèves avec les mathématiques et leur en faire faire par une approche moins traditionnelle ; d'autre part développer leur concentration, leur réflexion et leur logique. Cette autre approche, faisant appel à des compétences moins techniques d'un point de vue mathématique, devrait permettre de revaloriser certains élèves.

Fonctionnement : Plusieurs ateliers seront proposés aux élèves :

- Jeux d'observation , de réflexion et de logique.
- Jeux numériques.
- Dessins géométriques et coloriage logique.
- Puzzles géométriques.
- Constructions de polyèdres et Pentaminos.
- Résolutions d'énigmes.
- Études des différents "outils de calcul" dans l'histoire : bouliers, bâtons de Nepper, réglettes de Genaille...
- Ordinateur en "libre service" avec le logiciel Géoflash.

Certains jeux seront construits par les élèves.

En fin d'année, une exposition et des portes ouvertes sont prévues

(les modalités de mise en œuvre seront définies au cours de l'année).

Moyens : Matériels divers de papeterie, photocopies, jeux du commerce, boîtes de rangement, une armoire.

Financement : 1000 F par le Foyer Socio-Éducatif.

Contenu de chaque atelier.

• ***Jeux d'observation, de réflexion et de logique :***

- * **Logix** : Jeu de réflexion et d'observation.
- * **Set** : Jeu de cartes ; observation des formes, couleurs, nombres, textures, permet différents niveaux de difficulté et se joue à plusieurs. Développe la concentration et l'observation.
- * **Jeu des 7 familles géométriques** : Jeu distribué par un collège corse.
Permet d'acquérir le vocabulaire géométrique.
- * **Jeu de dominos (Boîtes de rangement)** : Développe la concentration et la logique.
Différents niveaux de difficulté.
- * **Qui est-ce ?** : Possibilité de transformer ce jeu du commerce en jeu d'observation géométrique grâce aux fiches de la brochure "Jeux 5" de l'APMEP. Développe la concentration et l'analyse de figures.
- * **Carrés de Mac Mahon et Quads**. Développent l'observation et la concentration.

• ***Jeux numériques :***

- * **Campus** : Se joue à 2 ; basé sur l'addition, il oblige à développer des stratégies originales.
- * **Triolet** : Se joue à plusieurs. Jeu de nombres croisés qui fait intervenir l'addition (recherche d'un total de 15), et la réflexion.
- * **Pythagore** : Jeu sur les tables de multiplication ; se joue à 2. Possibilité de simplifier le jeu (tables jusqu'à 10). Permet de réviser les tables.
- * **Mathable** : Jeu sur les opérations ; se joue comme le Scrabble.
- * **Loto mathématique** : Développe la rapidité de calcul.

- **Dessins géométriques et coloriage logique :**
 - * Dessins géométriques à partir des livres de Jocelyne et Lysiane Denière (Éditions Kim-Dunkerque).
 - * **"Frises évolutives"** : coloriage sur différents réseaux (carré, triangulaire, hexagonal). Développe la réflexion et la logique pour appliquer la règle de passage d'une génération à l'autre.
 - * **Coloriage de patrons** à partir d'un minimum de couleur : développe la perception de l'espace.
- **Puzzles géométriques :**
le Tangram, l'Œuf magique, le Cœur brisé, le Brise-croix. Développent l'observation, la patience, et la réflexion ;
- **Résolution d'énigmes :** énigmes prises dans le fichier Evariste de l'APMEP, et dans différents livres achetés à la librairie Tangente.
- **Jeux de symétrie :**
"Réflexion" ou "Jeu du miroir". Développent l'observation et la réflexion intellectuelle. Font fonctionner la symétrie axiale.

Le fichier "Jeux 5" va nous permettre de fabriquer certains des jeux : Campus, Puzzles géométriques, Pentaminos, Pythagore, carrés de Mac Mahon... pour commencer. La création de ces jeux va développer chez nos élèves leurs compétences géométriques et permettre de revaloriser certains.

Les autres ateliers de ce club sur la fabrication de polyèdres, le boulier et autres "calculatrices" sont développés dans l'atelier 4 de ces actes.

N.B. On peut trouver certains jeux comme Logix et Set à la librairie " MOT à MOT " à Paris 12^{ème}, rue Dugommier (M° Dugommier), librairie qui vaut le détour. C'est une véritable caverne d'Ali Baba pour ce qui est des jeux développant la concentration , la réflexion...

Variations sur le jeu “ Trio ”

Aude Sainfort

Règles de base du jeu

Ce jeu est également décrit, avec plus de détails, dans la brochure “Jeux 5” (n° 119) de l’APMEP.

C’est un jeu de calcul numérique qui, avec un peu de patience, de colle, de carton et une bonne paire de ciseaux, se fabrique à moindres frais.

En voici les règles de l’éditeur (Ravensburger) :

Matériel :

50 jetons ronds

49 jetons carrés portant des nombres de 1 à 9

Préparatifs du jeu :

On dispose au hasard, faces visibles, les 49 jetons carrés en les disposant en forme de carré 7 x 7.

Les 50 jetons ronds sont placés face cachée à côté du carré. Ils forment une “ pioche ”.

But du jeu :

Gagner un maximum de jetons ronds en trouvant le plus rapidement possible des TRIO.

6	9	7	4	3	6	2
2	3	1	8	5	2	1
4	5	5	4	7	5	8
9	7	6	7	2	1	6
1	3	4	8	3	5	3
5	8	8	7	9	4	4
9	2	1	6	3	2	6

Un TRIO, c’est 3 chiffres alignés côte à côte (horizontalement, verticalement ou en diagonale) qui permettent, avec une multiplication et une addition ou une multiplication et une soustraction, d’obtenir la valeur indiquée sur le jeton. Exemple : Pour un jeton de valeur 32, on peut repérer dans le carré ci-dessus plusieurs TRIO :

$$5 \times 7 - 3 = 32 \quad ; \quad 6 \times 5 + 2 = 32 \quad ; \quad 5 \times 8 - 8 = 32.$$

Déroulement du jeu :

Un joueur pioche un jeton rond et le pose face visible. Tous les joueurs tentent de trouver un TRIO. Le premier qui en repère un remporte le jeton. Un autre jeton rond est retourné et le jeu se poursuit ainsi de suite... Le carré reste en place pour toute la partie.

En règle générale, il existe un TRIO dans la grille. Si, au bout de 5 minutes, personne n’en a trouvé, le jeton est mis de côté.

Fin du jeu :

Le premier joueur qui obtient 10 jetons a gagné ! Les plus courageux peuvent décider de jouer avec tous les jetons. Le gagnant est alors le joueur qui possède le plus de jetons.

Version pour les plus jeunes :

Il ne faut prendre que les jetons numérotés de 1 à 20. La multiplication est supprimée.

Exemple : le pion 6 a pour TRIO : $9 - 1 - 2$; $3 + 1 + 2$; $8 - 6 + 4...$

Variantes possibles du jeu

Il est facile d'imaginer plusieurs variantes de ce jeu adaptées à la progression des connaissances numériques des collégiens. Tous les exemples qui suivent sont tirés de la même grille carrée que ci-dessus.

- Niveau 1 Ne sont autorisées que les soustractions et les additions : + et x.
exemple : 32 n'est pas "faisable" ; $8 - 3 + 5 = 10$.
- Niveau 2 Comme dans la règle de l'éditeur
- Niveau 3 Les quatre opérations sont autorisées : + , - , x et ;
exemples : $6 : 3 + 5 = 7$; $9 \times 2 : 3 = 6$ et, pourquoi pas, $7 : 2 \times 6 = 21$
- Niveau 4 Les quatre opérations et l'usage des parenthèses sont autorisés.
exemples : $(9 + 1) \times 4 = 40$; $(8 - 3) : 5 = 1$; $9 - (8 - 7) = 8$.

Pour augmenter le champ des possibilités et des difficultés, on peut :

- numéroté des jetons ronds de 1 à 100, voire à 200.
- numéroté des jetons ronds de - 50 à 0.
- numéroté des jetons carrés de - 9 à 0 en plus.
- se fixer un temps donné et déclarer vainqueur le joueur ayant trouvé le plus grand nombre de solutions.
- superposer plusieurs des suggestions ci-dessus.

Quels apprentissages pour l'élève ?

- + Qualités générales requises :**
- * concentration
 - * observation
 - * vivacité

+ Apprentissages plus spécifiquement mathématiques développés :

- * Vision dans différentes directions du plan : le jeu oblige à dépasser les simples compétences de lecture horizontale de gauche à droite ou verticale de haut en bas.
- * Maîtrise des quatre opérations : révision des tables de multiplication en 6ème (mes élèves en ont besoin, pas les vôtres ?). Par exemple : $4 \times 7 \times 3 = ?$
- * Mise en œuvre des priorités opératoires dans une expression numérique parenthésée ou non. Par exemple : $6 \times (7 - 2) + 6 \times 7 - 2$.
- * Acquisition d'automatismes de calcul mental incontournables.
- * Découverte de nouveaux "champs" de nombres.
Exemples : en 6ème : $1 + 5 - 8$, ça fait combien ?
en 5ème : $2 + 8 : 3$, quesako ?

Exploitations possibles du jeu

En voici deux qui semblent intéressantes :

- En classe entière

Séance de calcul mental de 5 à 10 minutes.

En entrant en classe, le professeur écrit au tableau ou projette une grille toute faite (voir “Jeux 5”) du type de la première page et annonce un nombre, par exemple 32.

Les élèves ont cinq minutes pour trouver au brouillon, sans poser d’opérations, le plus grand nombre possible de solutions. Les solutions sont validées ou invalidées collectivement.

- En club

* Fabrication de jetons carrés et ronds géants.

* Sur un panneau avec 49 “scratches”, une disposition du type de celle de la figure 1 est proposée et un jeton est affiché. Une boîte aux lettres est placée à proximité du panneau. Les élèves ont toute une semaine, par exemple, pour “poster” et proposer le plus grand nombre possible de solutions sur une fiche nominative. En fin de trimestre, le joueur ayant gagné le plus grand nombre de jetons gagne... un jeu de TRIO par exemple !

Conclusion

Dans la version du niveau 4, combien proposez-vous de solutions pour l’obtention de 32 ?

J’en trouve six : $5 \times 7 - 3$; $5 \times 8 - 8$; $6 \times 5 + 2$; $9 \times 4 - 4$; $8 : 1 \times 4$; $(9 - 1) \times 4$.

Et vous ?

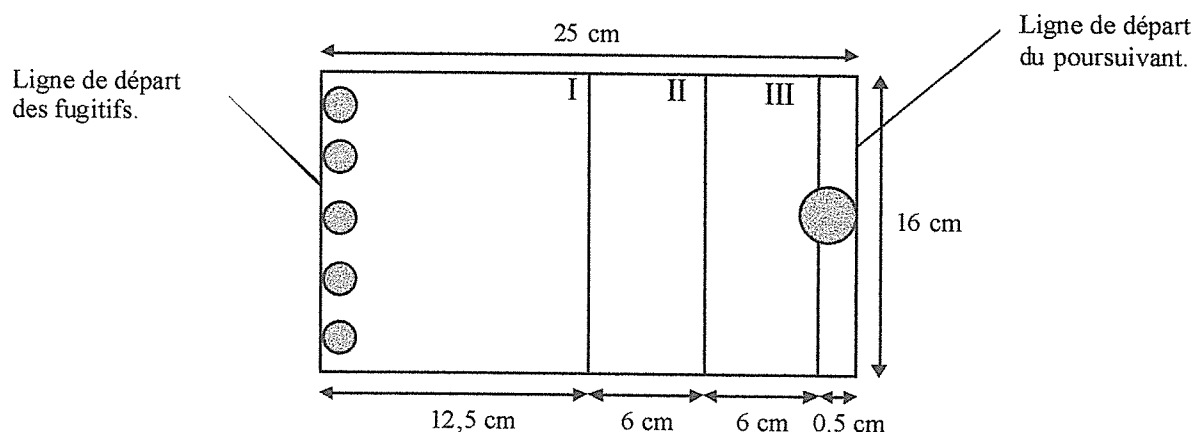
Le Jipto

Jeu de poursuite pour deux joueurs

Christophe Taquet

Matériel

* Un plateau de jeu



* 2 jetons pour le poursuivant (de diamètre 2,7 cm)

* 6 jetons pour les fugitifs (de diamètre 1,6 cm)

But du jeu

Les fugitifs doivent franchir un maximum de lignes, le poursuivant doit les en empêcher. Le jeu se déroule en deux manches, les joueurs inversant les rôles.

Déplacements

Chaque joueur dispose d'un pion de réserve (R). Pour déplacer un pion (P) du plateau de jeu, on dispose à côté de celui-ci le pion (R) puis on ôte le pion (P) qui devient alors pion de réserve. Les déplacements peuvent se faire dans toutes les directions.

Capture

Le poursuivant peut capturer un fugitif en le touchant. Un pion capturé est sorti du jeu et marque le nombre de points correspondant aux lignes franchies.

Déroulement du jeu

Le joueur ayant les fugitifs commence à déplacer tous ses pions. Le joueur ayant le poursuivant se déplace à son tour. Le jeu s'arrête lorsque tous les fugitifs ont été capturés ou ont franchi la ligne d'arrivée. Le vainqueur est celui qui a totalisé le plus de points à l'issue des deux manches.

Remarque

Ce jeu est particulièrement riche par l'infinité des situations possibles. Il oblige à anticiper constamment les déplacements, d'où une nécessité d'apprécier correctement les longueurs (diamètres des jetons). A noter aussi l'utilisation de cercles tangents lors des déplacements.

Exploitation de jeux en club Mathématique en Lycée

Pascal Vincent

Objectifs : A travers l'analyse de jeux , amener les élèves à se poser des questions sur la fabrication du jeu ou sur les stratégies à adopter.

Problèmes de dénombrements

Questions suggérées

Combien de pièces différentes peut-on construire en respectant les contraintes fixées lors de la construction du jeu ?
 Peut-on généraliser les paramètres ?
 Des contraintes différentes peuvent-elles produire des jeux équivalents ? (Notion de bijection entre les ensembles de pièces de deux jeux).

Exemples d'applications

a) Jeu "Quarto" :

Chaque pièce possède quatre caractéristiques offrant chacune deux possibilités :
 Couleur (blanche ou noire) - Hauteur (haute ou basse) - Forme (ronde ou carrée) - Dessus (pleine ou trouée).
 On peut constituer ainsi $2^4 = 16$ pièces différentes.

b) Jeu "Set" :

Chaque carte possède quatre caractéristiques offrant chacune trois possibilités :
 Forme (rectangle, ovale, haricot) - Couleur (violet, vert, rouge) - Trame (plein, grisé, vide) - Nombre de dessins (un, deux, trois).
 On peut constituer ainsi $3^4 = 81$ pièces différentes. Pour de jeunes joueurs, on peut supprimer une caractéristique, ce qui réduit le nombre de cartes à $3^3 = 27$.

En généralisant à p caractéristiques offrant n possibilités, on obtient n^p pièces différentes.

c) Jeu "Carrés de Mac Mahon" :

Sur des carrés sont découpées 4 zones, coloriées chacune avec une "couleur" choisie parmi 3 possibilités.
 Lors du problème de dénombrement, on peut mettre en parallèle plusieurs notions :

- * Choix de p couleurs à attribuer à n zones : A_p^n
- * Symétries laissant invariant le carré (ici uniquement les rotations car on ne retourne pas les pièces).

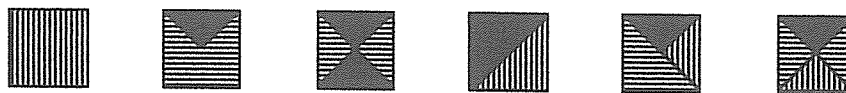
Proposition de tableau d'analyse :

Type de pièce							
Rotations laissant la forme colorée invariante	4	1	2	1	1	1	R_i
Choix des couleurs	$A_3^1 = 3$	$A_3^2 = 6$	6	6	$A_3^3 = 6$	6	C_i
Rotations permutant les couleurs	0	0	2	1	0	1	P_i
Nombre de pièces	3	6	3	3	6	3	N_i

On peut envisager de chercher une formule permettant d'obtenir N_i à partir des caractéristiques de la pièce : R_i , C_i et P_i .

Si les permutations échangent 2 couleurs, $N_i = \frac{C_i}{2^{P_i/R_i}}$.

d) Jeu "Quads" :



Proche du jeu précédent : sur des carrés, sont découpées quatre zones, coloriées avec 2 couleurs (joueur blanc ou joueur noir) et 2 types de hachures, "horizontale" ou "verticale".

Les deux couleurs n'apparaissant pas simultanément, on a en fait deux jeux de 1 couleur et 2 hachures. Ci-dessus, quelques pièces du joueur noir.

On peut mettre les pièces du Quads en bijection avec les Carrés de Mac Mahon à condition de positionner toujours de la même façon les cases "de couleur" (voir ci-dessous pour celles qui n'ont qu'une case "de couleur". On peut associer une autre couleur à chaque type de hachures. On constate alors qu'il manque dans le jeu une pièce sans hachure et cinq pièces sans couleur.



Mais cette bijection ne convient pas dans le cadre du jeu car le fait de tourner une pièce d'un quart de tour revient à échanger deux couleurs du fait du changement d'orientation des hachures.

Problèmes de stratégie

Alignements ou carrés

Certains jeux sur damiers consistent à réaliser des alignements, d'autres à réaliser des carrés.

Si l'on se place sur un damier de 4×4 :

Nombre d'alignements :
 horizontaux : 4
 verticaux : 4
 diagonaux : 2
 soit au total : 10 alignements

Nombre de carrés :
 2 sur 2 : 9
 3 sur 3 : 4
 4 sur 4 : 1
 $\sqrt{2}$ sur $\sqrt{2}$: 4
 $\sqrt{5}$ sur $\sqrt{5}$: 1
 soit au total : 19 carrés

Poids stratégique des cases

On indique pour chaque case le nombre d'alignements ou de carrés auquel elle participe :

Alignements			
3	2	2	3
2	3	3	2
2	3	3	2
3	2	2	3

Carrés			
3	4	5	3
5	7	7	4
4	7	7	5
3	5	4	3

Une telle étude est très utile par exemple pour le jeu d'alignement "Puissance 4", pour le Quarto (alignements au premier niveau et carrés au deuxième niveau de jeu).

Les tableaux mathématiques de Jean Fromentin

*Spirale dorée, Escargot de Pythagore, Carrélos, Tétraquadri,
Carrés en série, π -color, Pythagorescence*

Ces tableaux mathématiques ont été imaginés, réalisés et mis sous verre par Jean Fromentin qui les avait apportés à l'U.E. Les stagiaires ont alors demandé un dossier permettant de les fabriquer pour eux-mêmes. Les stagiaires participant à l'atelier 3 ont déjà reçu ce dossier.

Ces tableaux peuvent décorer agréablement une salle de classe et bien sûr y apporter un environnement mathématique. Les élèves peuvent les réaliser en club mathématique, et apprendre à cette occasion des mathématiques. Une telle activité développe aussi le travail en équipe et des qualités de soin, de précision, etc.

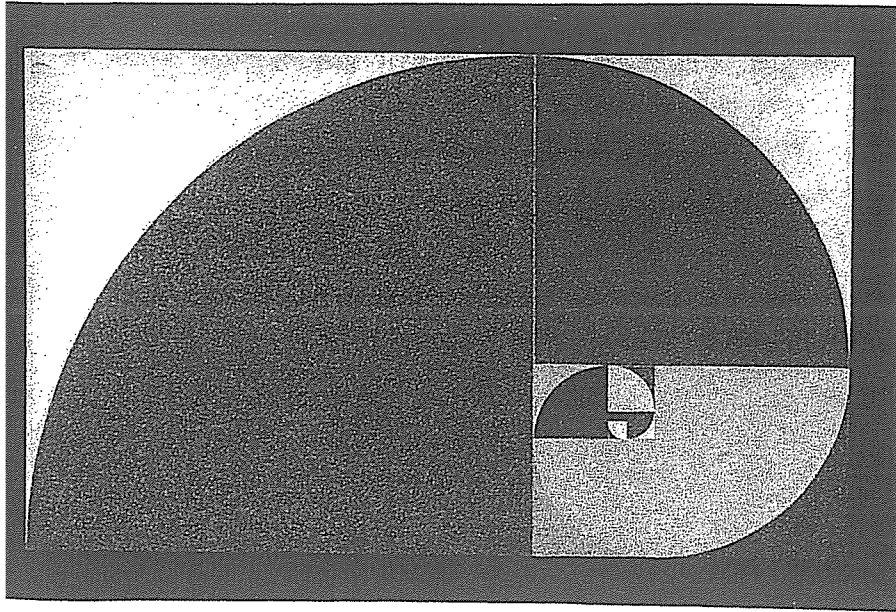
Ces tableaux sont au nombre de 7, mais on peut en imaginer d'autres ! Ils sont réalisés sur fond noir au format 50 cm x 65 cm.

Certains correspondent à des «classiques» : Escargot de Pythagore, Spirale dorée. Ils nécessitent moins de description et d'explications pour des professeurs de mathématiques que d'autres qui sont plus originaux.

6 de ces tableaux ont été repris par "ACL, les éditions du Kangourou" dans une série intitulée "Art et Maths 2000" et envoyés aux établissements inscrits dans un délai très court au concours Kangourou. Ils sont disponibles au format A3 sur papier glacé.

"ACL, les éditions du Kangourou", 12, rue de l'épée de bois, 75005 PARIS

La spirale dorée



Le rectangle d'or se prête bien à cette spirale qui peut donner une idée de l'infiniment petit et de l'infiniment grand...

Une particularité du rectangle d'or est que si l'on "découpe" le carré de côté le petit côté du rectangle, le rectangle "restant" est un rectangle d'or. D'où les carrés successifs que l'on voit apparaître sur la composition et la spirale correspondante formée de quarts de cercles successifs.

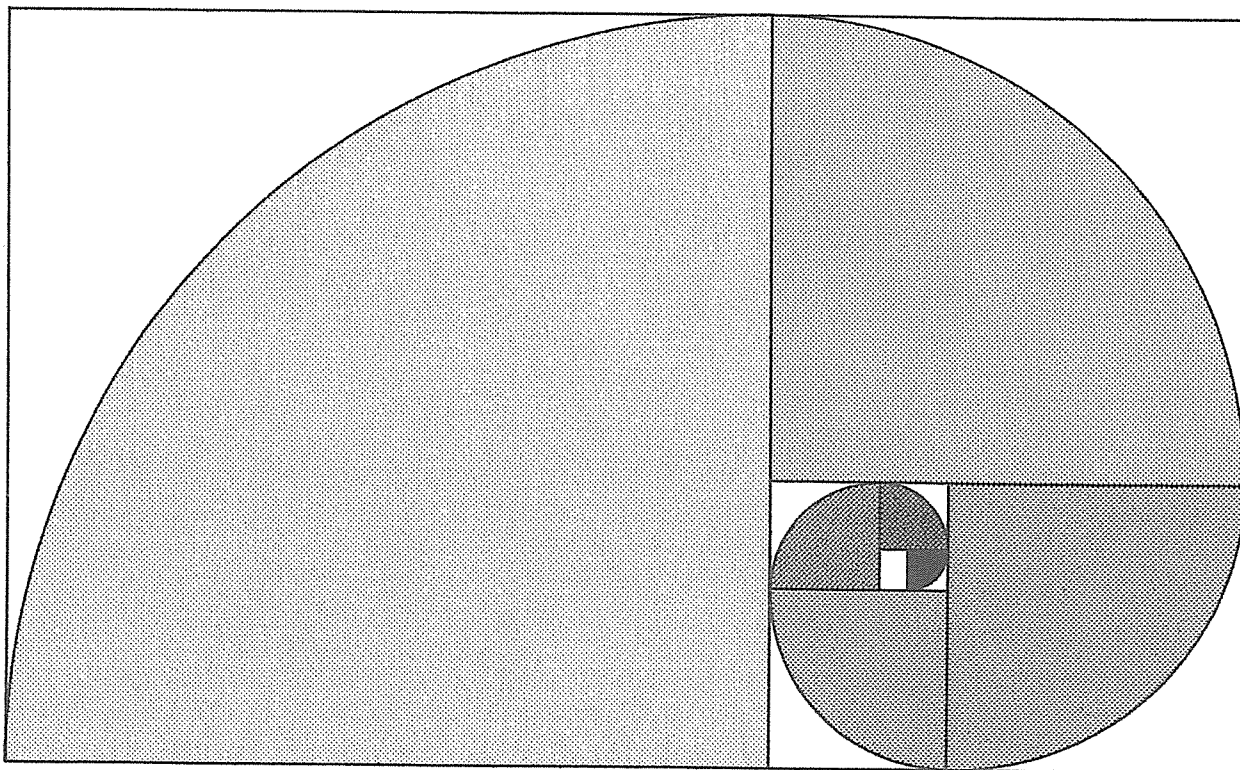
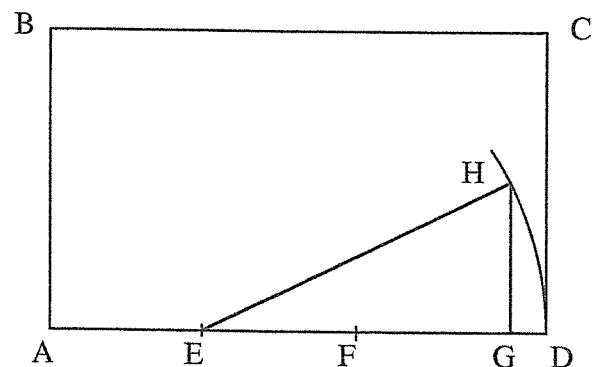
Construction du rectangle d'or :

1°) $AB = 1$

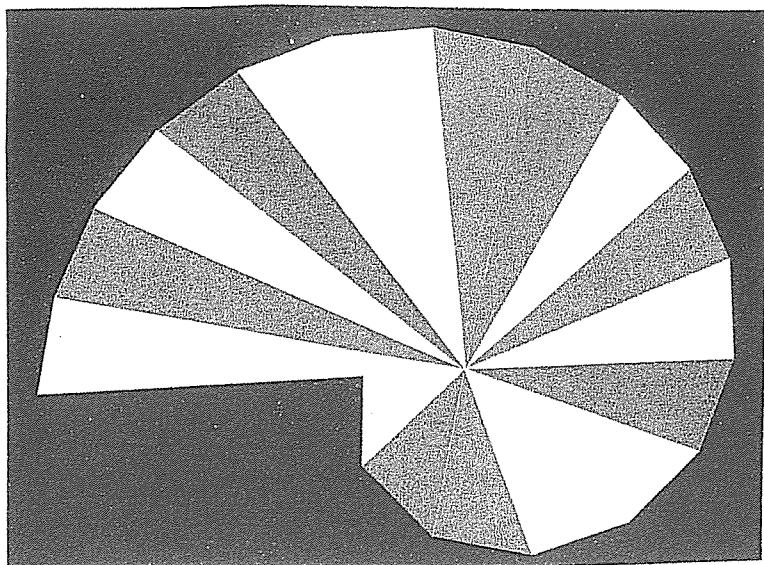
2°) $AE = EF = FG = GH = 1/2$

3°) $EH = \frac{\sqrt{5}}{2} = ED$

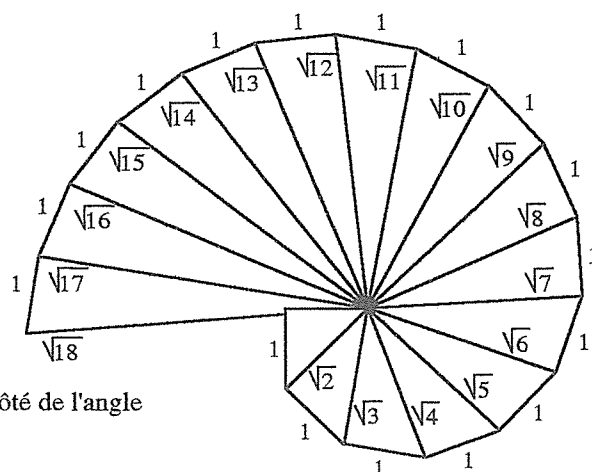
4°) $AD = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$



L'escargot de Pythagore

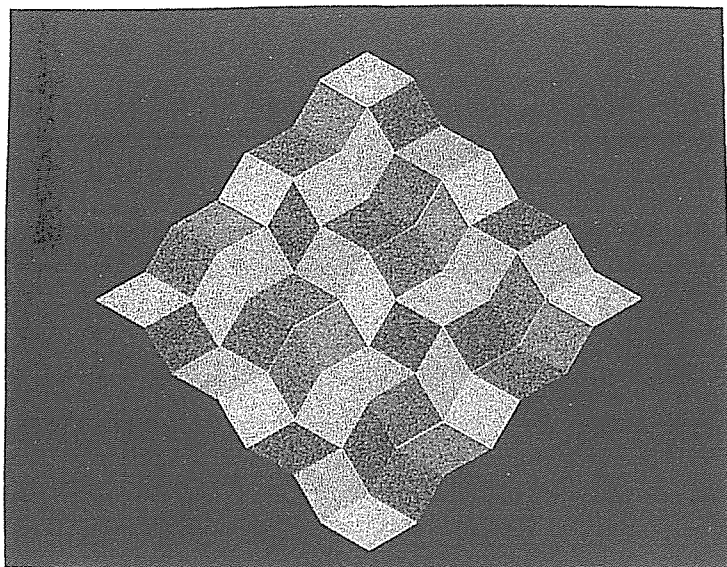


Un classique du programme de Quatrième puis de Troisième pour la construction géométrique des racines carrées des entiers successifs.



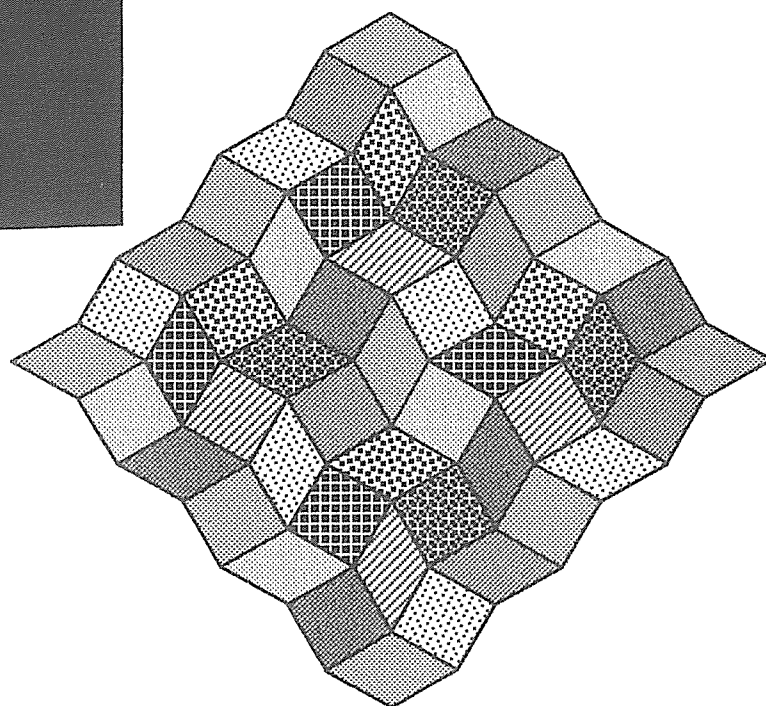
Tous les triangles sont rectangles et l'hypoténuse du triangle T_i est un côté de l'angle droit du triangle T_{i+1} , l'autre côté de l'angle droit étant toujours 1.

Carrélos

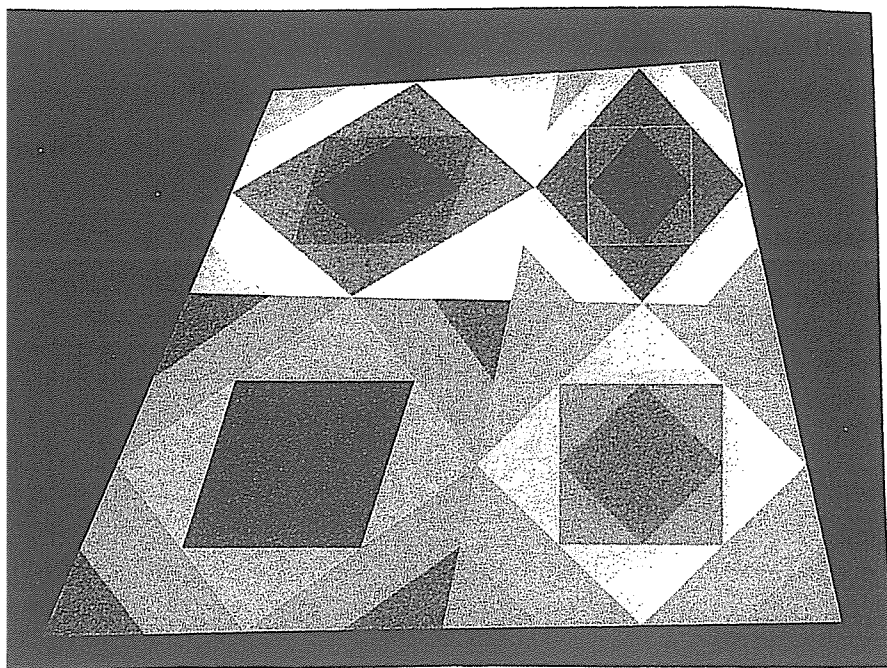


Deux formes seulement pour faire un "patchwork" du plan : des carrés et des losanges (Carrélos) ayant des côtés de même longueur, les losanges étant formés de deux triangles équilatéraux.

Neuf couleurs qu'on retrouve dans tout assemblage de 3×3 "carreaux, ce qui permet d'obtenir sur chaque "ligne" deux suites périodiques : sur les formes (période 2) et sur les couleurs (période 3), donc une période de 6 sur les formes colorées.



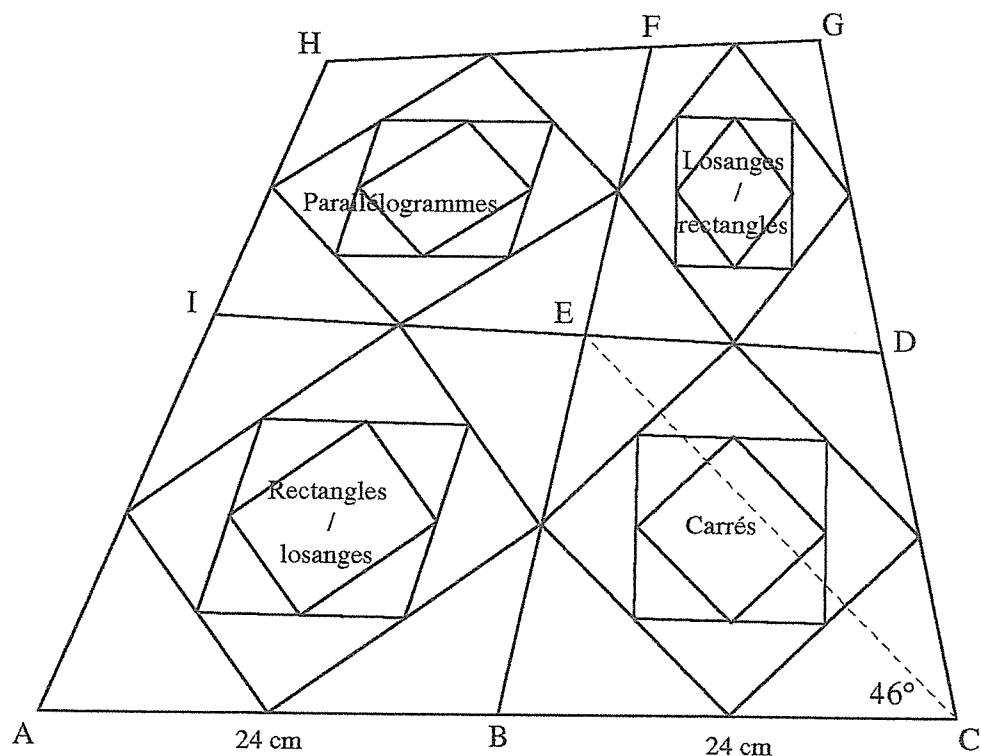
Tetraquadri



Cette composition montre quatre quadrilatères pas tout à fait quelconques dont l'assemblage forme un quadrilatère ... "quelconque".

En joignant les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque, on obtient un parallélogramme dit de "Varignon" (EFHI). La démonstration est classique en Quatrième. Si on donne aux diagonales du quadrilatère certaines propriétés supplémentaires, on obtient alors des parallélogrammes particuliers :

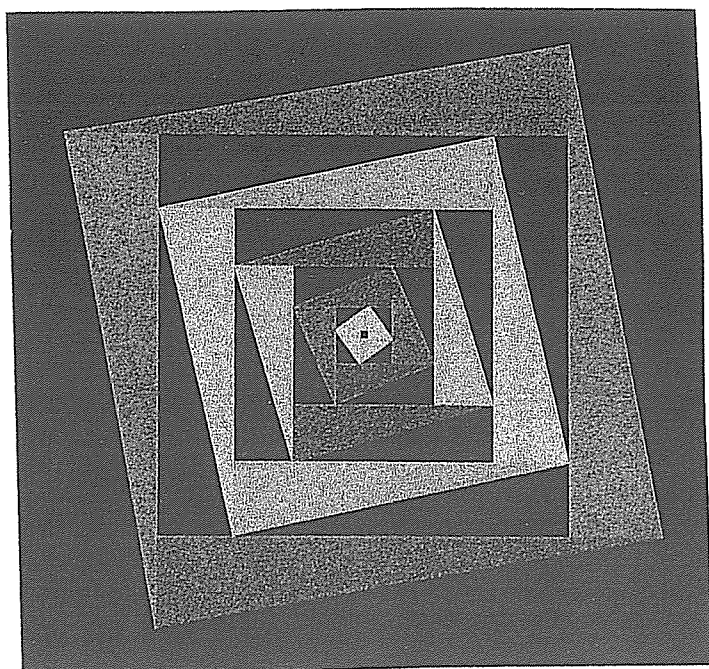
- avec des diagonales perpendiculaires, on obtient un rectangle (ABEI) ;
- avec des diagonales de même longueur, on obtient un losange (DEFG) ;
- si les diagonales possèdent les deux propriétés précédentes, on obtient un carré (BCDE).



Programme de construction :

- 1) $AB = BC = 24 \text{ cm}$ et $\widehat{BCE} = 46^\circ$;
- 2) $CE = BD = 28 \text{ cm}$ et $(CE) \perp (BD)$;
- 3) $(AE) \perp (BI)$, I étant l'intersection de la perpendiculaire à (AE) passant par B avec (DE) ;
- 4) $DF = EG = 20 \text{ cm}$;
- 5) H est l'intersection de (GF) avec (AI).

Carrés en série



Cette composition avait été reprise par les auteurs de la collection «Pythagore» pour un exercice qu'ils avaient nommé "les carrés de Jean Fromentin" dans la leçon sur le théorème de Pythagore.

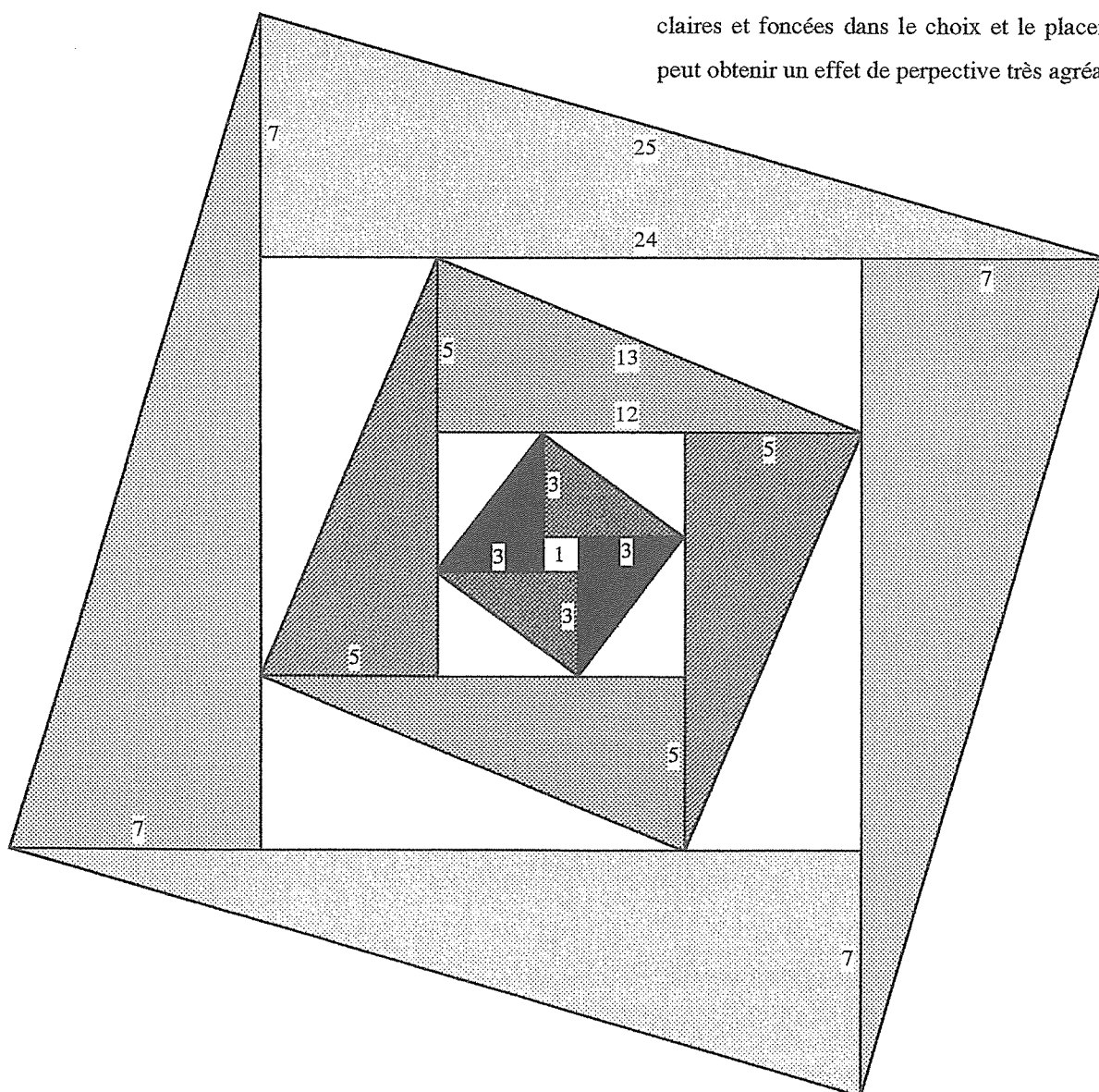
La construction est basée sur des triangles rectangles "pseudo-isocèles", c'est-à-dire des triangles rectangles dont la différence entre l'hypoténuse et un côté de l'angle droit vaut l'unité.

Ainsi, lorsqu'on prend comme unité le côté du carré central, les triangles successifs ont pour côtés :

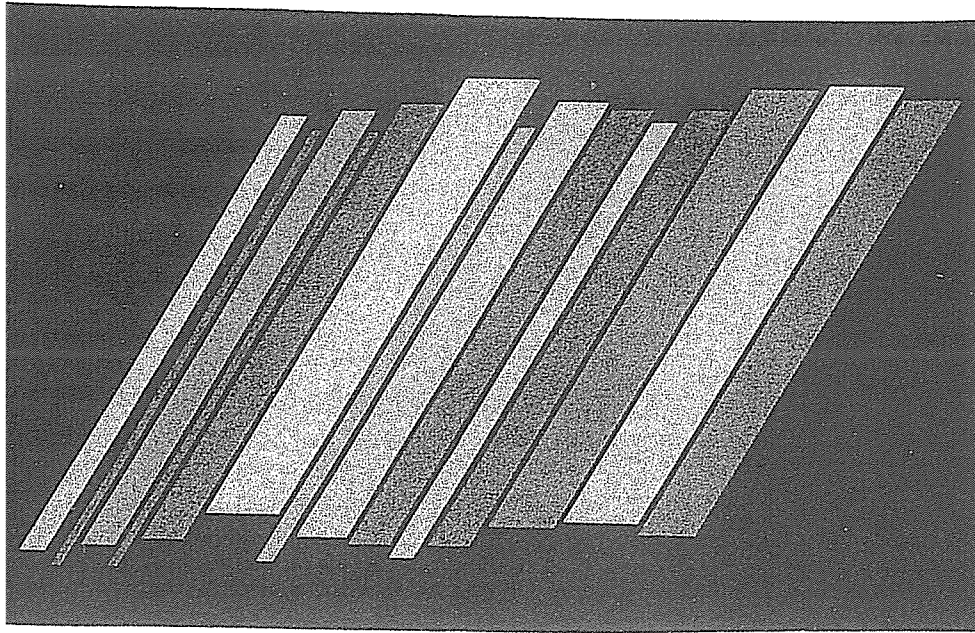
3-4-5 ; 5-12-13 ; 7-24-25 ; 9-40-41 ; 11-60-61 ; 13-84-85 ;
15-112-113 ;...

Les petits côtés des triangles sont les impairs successifs. Sur une feuille au format A4, on ne peut dépasser le quatrième triplet, mais on peut aller beaucoup plus loin sur une affiche.

En jouant sur les couleurs et surtout en jouant sur les tonalités claires et foncées dans le choix et le placement du papier, on peut obtenir un effet de perspective très agréable à l'œil.

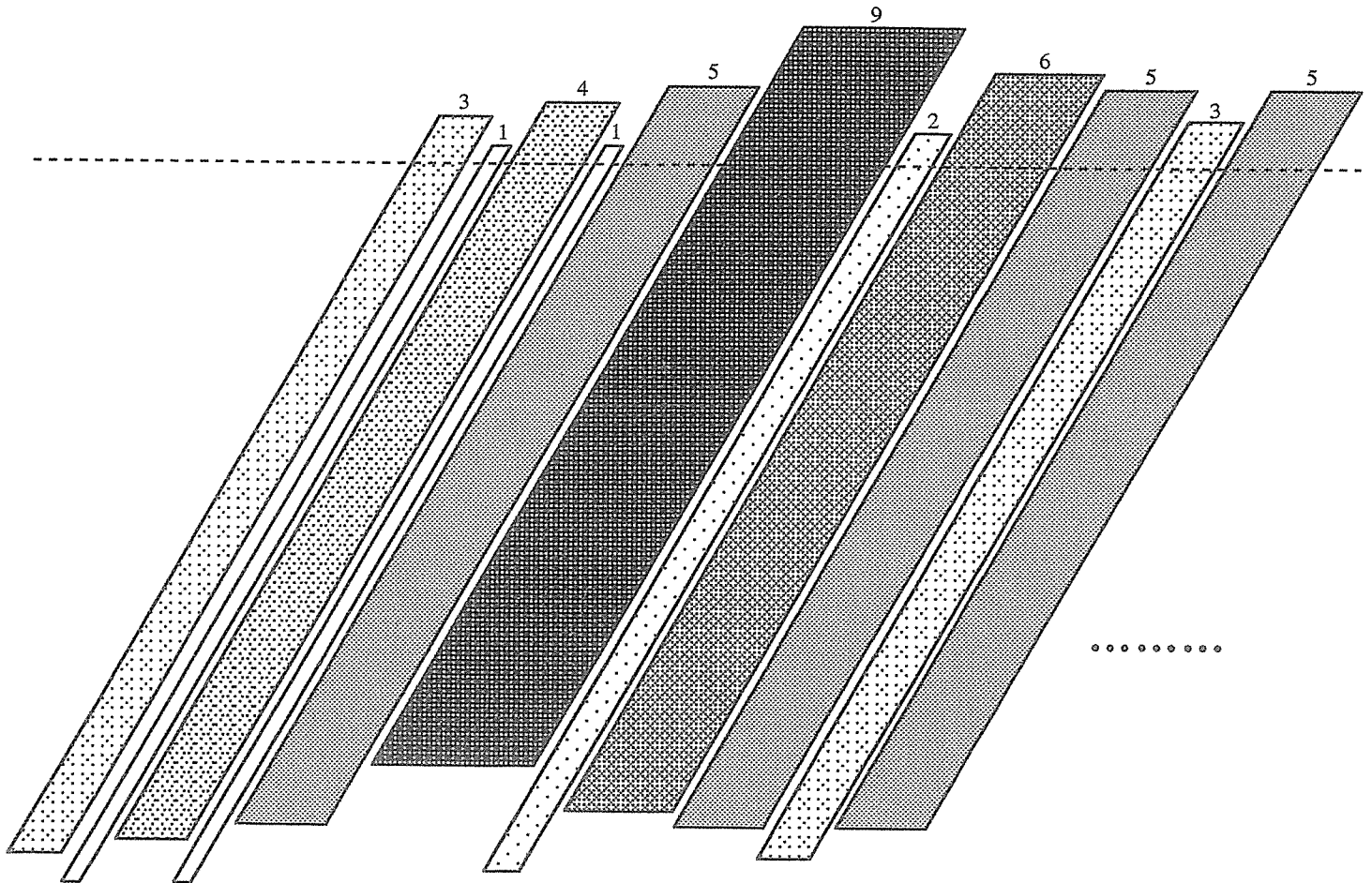


π -color



Pas évident de reconnaître une représentation du nombre π dans cette affiche !

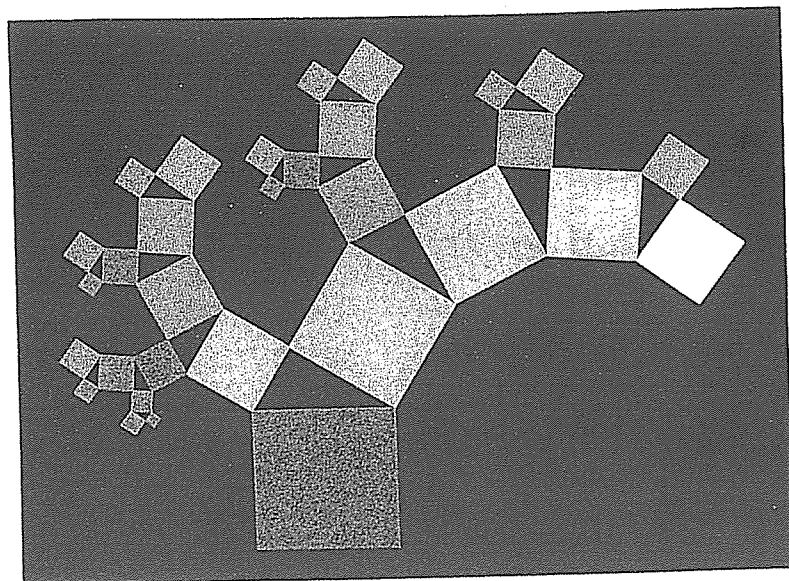
Les grands côtés des parallélogrammes ont tous la même longueur et les petits côtés ont, dans la même unité, une longueur égale au "chiffre" représenté. D'autre part, ils sont décalés verticalement par rapport à une ligne fictive (en pointillés sur le dessin), de telle façon que ce sont des losanges qui "débordent" de cette ligne.



Remarques :

- il est possible de faire varier à sa guise les angles (ici, inclinaison de 30° par rapport à la verticale) des parallélogrammes selon le format souhaité de l'affiche et on peut faire figurer autant de chiffres que l'on veut !
- Dans la représentation en "noir et blanc" ci-dessus, le grisé d'un parallélogramme est égal, en pourcentage, au carré du "chiffre" représenté par le parallélogramme. Par exemple, le parallélogramme "3" a un grisé de 9 %, le parallélogramme "6" a un grisé de 36 %.

Pythagorescence



Le triangle ABC rectangle en A est un demi-rectangle d'or : le rapport des côtés AB et AC est égal au nombre d'or φ . $\frac{AC}{AB} = \varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1,618$

Nous ne rappelons pas ici les propriétés du nombre d'or ; le lecteur pourra consulter les livres spécialisés sur le sujet.

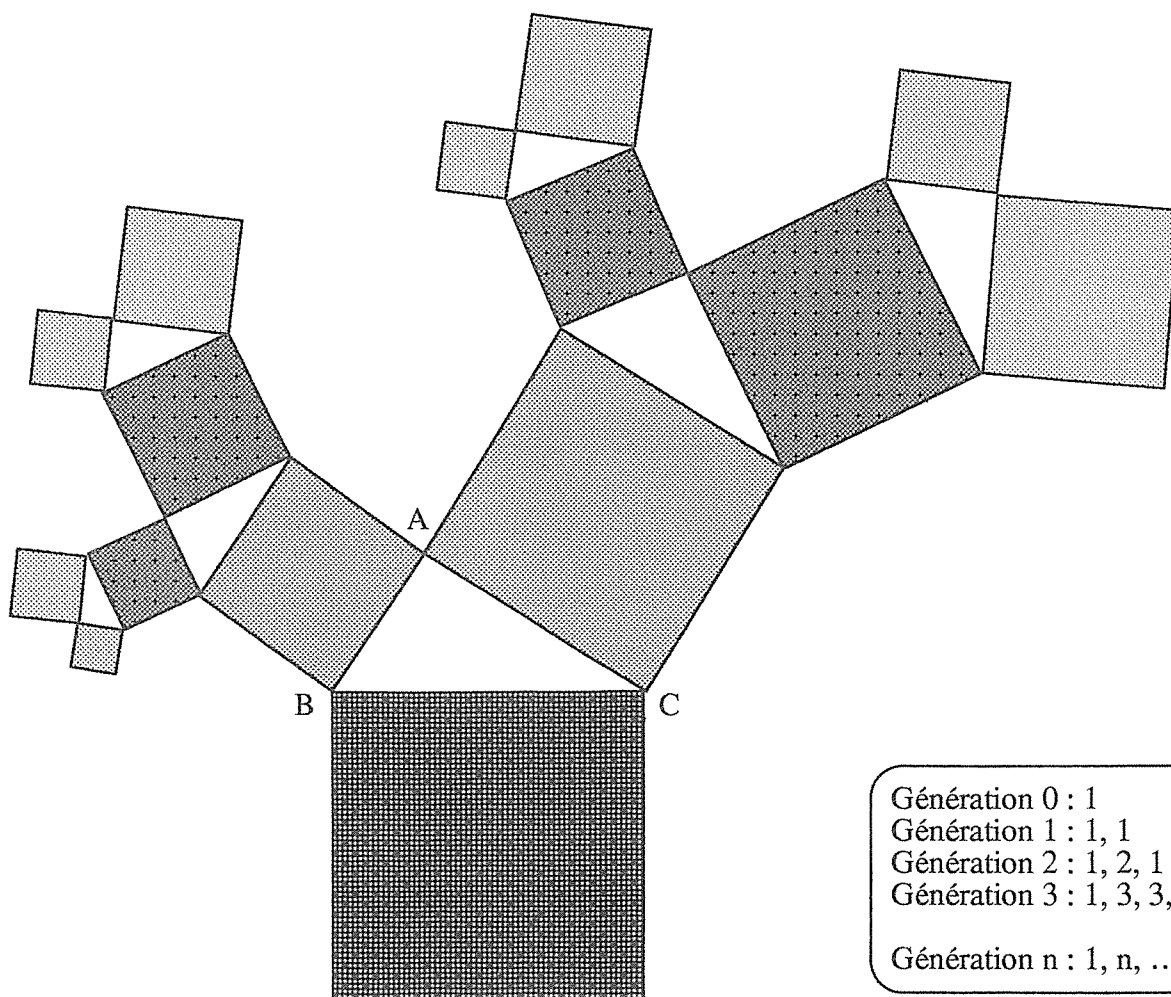
Le côté AB de la composition étant égal à 6 (cm), les deux autres côtés sont : $AC = 6\varphi$ et $BC = 6\sqrt{\varphi + 2}$.

Le grand carré de base est la "génération 0".

Son côté vaut $6\sqrt{\varphi + 2}$. Les deux carrés de côtés respectifs AB et AC sont ceux de la "génération 1".

Les carrés des générations successives (0, 1, 2 et 3) ont été représentés ci-dessous d'une même trame. La somme des aires des carrés d'une même génération est toujours égale à l'aire du carré de génération 0.

Dans une même génération les carrés de même dimension sont dénombrés par les coefficients binomiaux (voir l'encadré ci-dessous).



Génération 0 : 1
 Génération 1 : 1, 1
 Génération 2 : 1, 2, 1
 Génération 3 : 1, 3, 3, 1
 Génération n : 1, n, ... C_n^p ... n, 1

ATELIER N° 4 :

Didier MISSENARD - Jean-Alain RODDIER

"Activités mathématiques en lycée pour initier un club"

L'activité mathématique en club est une pratique que nous menons à bien depuis de nombreuses années dans nos établissements respectifs. Cette expérience nous conduit à avancer quelque idées générales qui peuvent aider d'autres professeurs à créer leur propre club.

I - Les clubs mathématiques : Variété, intérêts.

Une simple lecture de la liste des clubs mathématiques répertoriés par ANIMATH, montre à l'évidence une très grande variété au niveau des intitulés des clubs.

Ces intitulés recouvrent des contenus, des élèves, des démarches souvent très différents.

Ce bref constat étant fait, il apparaît difficile d'y trouver une unité, et l'intitulé : club mathématique est un raccourci pratique pour un constat simple : c'est un lieu où l'on fait, de son propre gré, des mathématiques pour son plaisir !

Quelque soit l'activité menée au sein d'un club, l'expérience montre que c'est certainement sur la relation aux mathématiques que le club a le plus d'intérêt. Le fait de se trouver dans un contexte élève/professeur/savoir différent de celui que l'on trouve en cours, rend légitime l'existence du club. Cette affirmation mérite des explications.

En ce qui concerne l'élève :

Il est placé la plupart du temps dans une situation de confiance, il vient de son propre chef au club, et il sait que le travail qu'il effectue ne va pas être évalué par une note.

Le facteur temps n'influe généralement pas sur l'activité, et l'élève n'est pas soumis à la pression de réaliser un travail donné en un temps donné.

Les mathématiques qui lui sont proposées, sont présentées la plupart du temps sous forme de problème ; on y fait en sorte que l'élève s'approprie progressivement les questions posées (c'est lui qui mène progressivement les recherches, élabore une stratégie,...).

L'élève est ainsi placé dans une posture positive par rapport aux mathématiques. Il est amené à communiquer mathématiquement bien davantage qu'en cours : on va l'inciter au questionnement, au débat, à la prise de parole.

Il semble tout de même important que l'activité de l'élève au sein du club lui permette de réinvestir les mathématiques qu'il a déjà rencontrées en classe, cela afin de ne pas déstabiliser son parcours scolaire, le club ne devant sans doute pas être une séance de module "plus", ni la révélation d'un "manque" dans le cours. Il est sans doute utile de créer des "ponts" entre ce qui est vu en club et ce que l'élève apprend en cours : "il n'y a pas 36 mathématiques...".

En ce qui concerne le professeur :

L'étude qui va être menée avec les élèves doit, c'est un conseil de prudence, avoir été préalablement sérieuse par le professeur. À cette condition, l'animateur trouvera dans le club un moyen de réunir sa passion des Mathématiques et son goût pour l'enseignement.

En ce qui concerne le savoir mathématique :

Le club de mathématique est un lieu privilégié pour aborder un thème qui ne peut être traité en cours, soit parce qu'il est interdisciplinaire, ou trop transversal, ou bien parce qu'il fait appel à des moyens non disponibles en classe (documentation, informatique, Internet,...). Certains pourraient croire, à cause du mot club, que l'activité mathématique y sera plus ou moins vague, il n'en est évidemment rien ! Un club véhiculera aussi une image fidèle des mathématiques, avec des "valeurs" centrales telles que l'exactitude, la rigueur des calculs et des raisonnements, l'incitation à la recherche, l'obstination dans une certaine mesure... et le plaisir de comprendre (l'effet "ah ah"...). Le club sera l'opportunité de créer des ouvertures mathématiques qui s'inscriront naturellement dans la culture de l'élève.

II - Club mathématique et contenu mathématique

Notre expérience de "responsable de club" nous montre que des activités de club mathématique peuvent être menées dans pratiquement tous les domaines des mathématiques, que ce soit à travers des thèmes portant sur la géométrie pure, sur la géométrie analytique, sur le dénombrement ou les probabilités,... ou plus généralement sur des thèmes transversaux aux mathématiques.

Voici quelques exemples de thèmes qui peuvent être développés en club :

Un classique : Les pavages.

Niveau : Collège ou lycée

Objectifs : En collège, présenter les figures géométriques et des transformations du plan.

En lycée, introduire ou utiliser la composée de transformations, les groupes paveurs.

Contenu :

1) Aspect historique :

Étude de la Science arabe.

Présence musulmane en Espagne de 711 à 1492

Étude de l'Alhambra de Grenade.

Les pavages d'Escher.

2) Étude géométrique des pavages :

Mise en évidence de transformations du plan : translation, rotations, réflexion, symétrie glissée (Lycée).

Les 17 configurations possibles.

3) Réalisation de pavages :

Avec support papier.

Avec des moyens informatiques : cabri-géomètre, CD-ROM.

Moyens techniques:

- 1) Informatique : visites de sites Internet.
- 2) Calculatrices TI-92
- 3) Diapositives ou films sur l'Alhambra.

Pluridisciplinarité :

- 1) Avec l'Histoire et géographie : Etude de l'Espagne musulmane.
- 2) Avec l'Espagnol : découverte de l'Alhambra.

Intérêt pédagogique :

- 1) Travail de remédiation sur les transformations du plan.
- 2) Initiation à la composition des transformations.
- 3) Construction de figures géométriques.
- 4) Découverte de Cabri Géomètre.

Un projet plus "traditionnel": La racine carrée de 2.

Niveau : 3^{ème}, 2^{nde}, 1^{ère}.

Objectif : Présenter le concept d'irrationalité et mettre en œuvre des algorithmes de calcul pour déterminer les premières décimales de $\sqrt{2}$

Contenu :

- 1) Aspect historique :
Les mathématiciens grecs
La découverte des irrationnels.
- 2) Aspect recherche de décimales.
La dichotomie
La méthode de Héron d'Alexandrie
Les fractions continues.
- 3) Aspect programmation.
Notion de boucles
Étude avec des suites numériques (en 1^{ère}).

Moyens techniques:

- 1) Programmation de calculatrices.
- 2) Logiciel imagiciel sur les suites.
- 3) Site Internet.

Intérêt pédagogique :

- 1) Notion d'irrationalité, périodicité des décimales d'un rationnel.
- 2) Distance entre deux nombres.
- 3) Égalité entre 2 nombres et calculatrices.
- 4) Programmation : les boucles, tests d'arrêt, compteur.

Pluridisciplinarité:

- 1) Histoire et géographie (la Grèce Antique)
- 2) Français (ou philosophie). Platon (Timée)

Un projet plus "ambitieux" : Descartes et les équations du 2nd degré.

Niveau : 2^{nde} ou 1^{ère}.

Objectifs : Présenter une méthode de résolution des équations du second degré exposée par Descartes dans "La Géométrie".

Contenu :

- 1) Aspect historique : vie et œuvre de René Descartes
- 2) Présentation du texte extrait de "La géométrie".
- 3) Étude des figures géométriques données par Descartes.
- 4) Résolution à partir de graphiques.

Moyens techniques:

- 1) Informatique : Cabri, TI-92.
- 2) Utilisation de calculatrices graphiques.
- 3) Sites Internet, CD-ROM.

III - L'atelier : "Activités mathématiques en Lycée pour initier un club".

Le point de départ de notre atelier a été la présentation de différentes expositions réalisées dans le cadre de clubs mathématiques en Lycée, sur des thèmes aussi bien classiques (la Racine carrée de 2, les Polyèdres réguliers,...), que plus inattendus (le problème de Syracuse, la Géométrie de Descartes,...).

Notre intention constante a été :

- de montrer le cheminement vécu de la recherche bibliographique à la mise en place d'une exposition attractive;
- de faire le tour de façon plus ou moins exhaustive des moyens que l'on peut utiliser pour rendre la recherche attractive, en utilisant tant des livres anciens (17^{ème} et 18^{ème}), ouvrages du CDI, de l'IREM, des CRDP, ou manuels scolaires, que des moyens liés à l'informatique (logiciel, CD-ROM), aux calculatrices, à l'audiovisuel (film vidéo, Diapositives), ou aux nouvelles technologies (adresses de sites Internet, moteurs de recherche);
- de mettre en exergue la gestion des élèves au sein du club, le professeur en effet qui veut initier un club doit savoir en particulier que la motivation des élèves ne va pas être forcément uniforme, qu'il faudra peut-être encadrer plus ou moins une partie des élèves, que très souvent les élèves en grande difficulté sont plus intéressés par l'informatique que par le support papier,...

IV - Club mathématique et base documentaire.

Les bibliothèques des IREM, des CRDP peuvent aider à la construction d'une activité en club, certains IREM disposent de sites Internet à la fois riches et faciles à utiliser (IREM d'Aix-Marseille, IREM de Toulouse). Les actes de colloque Inter-IREM sont des documents qui offrent des articles d'excellente qualité, susceptibles eux aussi d'être des sources d'idées de thèmes pour les clubs.

Nous terminerons en précisant, qu'il peut être utile d'allier, dans l'activité d'un club, à la fois une ouverture sur l'avenir (utilisation de logiciels), et une perspective historique (textes anciens). Citons à ce titre quelques phrases écrites par Rivard dans son abrégé de Mathématiques (1765) :

"L' 'estime que l'on fait généralement des Mathématiques, a introduit depuis quelques années dans l'Université de Paris, l'usage d'en expliquer les Eléments dans la plupart des classes de philosophie. Les professeurs, les mieux instruits de cette science & de ses avantages, ont reconnu sans peine que cette partie de la Philosophie ne méritoit pas moins attention que la Logique & et la Physique: ils ont vu que les Mathématiques étoient une véritable Logique-pratique, qui ne consiste pas à donner une connoissance seche des regles qui conduisent à la vérité, mais qui les fait observer sans cesse; & qui, à force d'exercer l'esprit à former des jugemens & des raisonnements certains, clairs & méthodiques, l'habitué à une grande justesse.

En effet, rien n'est plus propre que l'étude de cette Science, pour fixer l'attention des jeunes Etudiants, pour leur donner de l'étendue d'esprit, pour leur faire goûter la vérité, pour mettre de l'ordre & de la netteté dans leurs pensées, ce qui est le but de la Logique. S'il y avoit encore quelqu'un qui n'en fût pas persuadé, il pourroit s'en convaincre par ces courtes reflexions. Les signes que les Mathématiques emploient, les lignes sur-tout, & les figures dont se sert la géométrie, arrêtent la légèreté de l'imagination en frappant les yeux; elles tracent dans l'esprit les idées des choses qu'il veut apercevoir; elles surprennent & attachent ainsi son attention; souvent la preuve d'une proposition dépend de quantité de principes: l'effet n'est-il pas alors obligé d'étendre, pour ainsi dire, la vue avec effort, afin de les envisager tous en même tems.

La vérité est difficile à découvrir dans ces Sciences; mais aussi elle semble vouloir dédommager ceux qui la cherchent, de leurs peine, par l'éclat d'une vive lumière dont elle charme leur entendement, & par un plaisir pur & sans mélange dont elle pénètre l'ame. A force de la voir & de l'aimer on se familiarise avec elle, & on s'accoutume à remarquer si-bien les traits lumineux qui l'annoncent & la caractérisent toujours, qu'on est bien-tôt capable de la reconnaître sous quelque forme qu'elle paroisse, & de distinguer en toute matiere ce qui ne porte pas son empreinte...."

Annexes

Liste des expositions présentées dans le cadre de l'atelier

Le Problème de Syracuse
 Les Cinq polyèdres réguliers Convexes
 Le Calendrier au fil des âges
 La racine carrée de 2
 Le nombre PI
 Les équations du second degré par René Descartes
 L'Alhambra de Grenade

Liste des ouvrages anciens

Usage du Compas de proportion par Garnier 1794
 Les éléments d'Euclide par Dechalles 1753
 Introduction à l'écriture Sainte par Lamy 1693
 Traité de la Sphere du Monde par Boulanger 1664
 La logique ou l'art de penser Auteur non mentionné 1730
 Nouveau cours de Mathématique par Bélidor 1725
 Le spectacle de la Nature Tome 5 Auteurs non mentionnés 1756
 Eléments d'Arithmétique, d'Algèbre et de Géométrie par Mazéas 1776
 Introduction aux sections coniques par Mauduit 1756

Liste des CD-ROM

Escher Interactif (Éditions du Chêne)
 Descartes construire la connaissance (Éditions Espace Mendés France)

23 THEMES DE RECHERCHE POUR DEMARRER UN CLUB MATHÉMATIQUE

Didier Missenard

Ce recueil rassemble une série de thèmes "de recherche" qui peuvent fournir un stock d'activités pour démarrer un club de mathématiques en lycée (et, partiellement, en collège).

Ces thèmes m'ont été inspirés par des sources diverses : le bulletin de l'APMEP, "Pour la science" (où figurent d'excellentes rubriques de jeux mathématiques, P.P. Delahaye ayant pris la succession de M. Gardner), "La Recherche", "Tangente" et divers documents comme, par exemple, les excellents "Trésors de Tonton Lulu" (éditions Archimède), ou de nombreux livres issus chaque année du "Kangourou des Mathématiques".

Tous ces thèmes ont été proposés à des élèves, souvent en club, parfois en devoir de recherche en classe (avec un bon délai et des échanges fréquents) : c'est la plupart du temps le document destiné à la classe qui figure ici, car les thèmes proposés en club le sont le plus souvent oralement, et le questionnement, venant de préférence des jeunes, n'a évidemment pas à être ordonné au départ. Les questions figurant sur ces textes sont seulement destinées à permettre d'orienter le travail de club dans le cas où les élèves n'auraient pas d'idées.

Du point de vue du niveau, ces thèmes ont été proposés à des élèves de lycée (seconde et première) où de collège (pour ceux d'entre eux qui ne nécessitent pas trop de technique). Beaucoup d'entre eux ne font pratiquement pas appel aux connaissances mathématiques que les élèves ont acquises à l'école : cela présente l'avantage de mettre tous les jeunes, bons en maths ou pas, au même niveau de départ. Ces activités leur montrent aussi, et la multiplicité des mathématiques, et la possibilité qu'ils ont d'accéder à des résultats mathématiques relativement récents, sans grandes connaissances préalables. Beaucoup de ces thèmes font référence à l'Histoire des Mathématiques : ce n'est, bien sûr, pas un hasard.

Une évolution s'est fait jour récemment relativement au travail des élèves sur ces thèmes : c'est la banalisation des accès Internet. Depuis un an ou deux, en effet, les élèves disposent d'une documentation mathématique bien plus accessible qu'auparavant, ce qui modifie considérablement ce type d'activité, où l'aspect "recherche documentaire" peut désormais prendre beaucoup plus de place. L'intérêt du travail des élèves qui trouvent des éléments sur Internet est alors de comprendre ce qu'ils lisent, et de l'exposer à leur tour, ce qui, à mon sens, est un travail qui, s'il est différent de la recherche "pure", est intéressant aussi et permet en particulier de motiver des jeunes "de niveau moyen".

J'espère que ces quelques idées permettront d'alimenter utilement un club mathématique : pour moi, l'intérêt principal d'une telle structure est de permettre à des jeunes *de pratiquer les mathématiques de manière active*, ce que ne génère guère en général, le travail en classe, et de contribuer à *inscrire cette discipline dans sa culture*.

Les jeunes citent souvent (avec l'Education Physique...) les mathématiques comme leur matière préférée : hélas, cette préférence va s'amenuisant avec les années. Puissent les clubs mathématiques contribuer à éviter que la classe de mathématique ne les éloigne des mathématiques !

1. Autour de la suite de Fibonacci

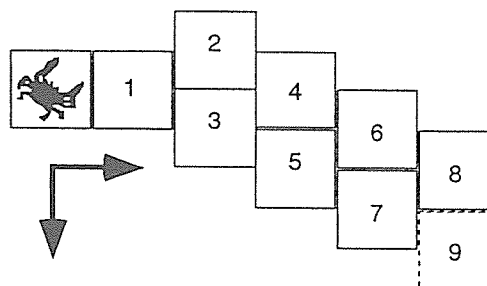
Léonard de Pise, dit *Fibonacci*, fut peut-être le plus inventif des “mathématiciens” médiévaux.

A la fin du XII^e siècle, il fit paraître un ouvrage de propagande en faveur du système d'écriture arabe des chiffres : le *Liber Abaci*. En effet, à l'époque, on utilisait encore les chiffres romains, et les calculs se faisaient sur une abaque (une sorte de boulier), ce qui n'était pas toujours commode d'emploi.

Mais son nom est resté associé à une “suite” de nombres qui apparaît dans des situations variées : c'est la “suite de Fibonacci”, thème de ce travail.

A Un exemple : le crabe qui ne montait pas.

Une bestiole se déplace dans un “couloir” (infini...), où il n'avance que vers la droite ou le bas, mais sans jamais monter. On cherche quel est le nombre de chemins par lesquels il peut atteindre une case. Par exemple, pour atteindre la case 4, il ne peut utiliser que les chemins 124, 134, 1234. Il a 3 chemins disponibles. Le nombre de manières d'atteindre la $n^{\text{ième}}$ case est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Fibonacci, noté F_n . Donc $F_4 = 3$.



- Calculer les neuf premiers nombres de Fibonacci.
- Pour arriver sur une case, d'où le crabe peut-il venir ? Dédurre de la réponse une relation entre l'un des nombres de Fibonacci et les deux qui le précèdent.

B Binet démontre (en 1843) que $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$; on peut en déduire que

F_n est l'entier le plus proche du nombre $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$. Calculer ainsi F_{10} puis F_{100} .

C La "suite" des nombres de Fibonacci possède de nombreuses propriétés, à découvrir :

- sur quatre nombres de Fibonacci consécutifs, comparer le produit des deux extrêmes, aux carrés de ceux du milieu.
- comparer le carré d'un des nombres de Fibonacci au produit des deux qui l'encadrent.

D Variété des situations...

Dans les questions suivantes l'objectif est de conjecturer si la suite définie est, ou non, une suite de Fibonacci ou un "morceau régulier" de cette suite :

- 1) la suite du nombre de manières d'arranger, au dessus d'une rangée de n billes, des billes en rangées horizontales de façon que *toutes* les billes de *chacune* des rangées se touchent (et, évidemment, que toute bille ne se trouvant pas sur la rangée la plus basse touche deux billes de la rangée du dessous, sinon elle tombe).
- 2) la suite du nombre de manières d'arranger n billes en rangées horizontales de façon que *toutes* les billes de *chacune* des rangées se touchent (et que toute bille ne se trouvant pas sur la rangée la plus basse touche deux billes de la rangée du dessous).
- 3) la suite du nombre, à la génération n , de parents d'un faux-bourdon !
(on rappelle qu'un faux-bourdon, abeille mâle, n'a pas de père)
- 4) la suite du nombre de manières différentes de peindre un immeuble de n niveaux, où le premier niveau est bleu, et où l'on peut peindre chaque niveau en jaune ou en bleu, mais en interdisant à deux niveaux adjacents d'être bleus.

E Examen des quotients $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ quand n augmente.

Essais avec un tableur :

1	F_{n+1}/F_n
1	1
2	2
3	1,5
5	1,666666667
8	1,6
13	1,625
21	1,615384615
34	1,619047619
55	1,617647059
89	1,618181818
144	1,617977528
233	1,618055556
377	1,618025751
610	1,618037135
987	1,618032787
1597	1,618034448
2584	1,618033813
4181	1,618034056
6765	1,618033963
10946	1,618033999
17711	1,618033985
28657	1,61803399
46368	1,618033988
75025	1,618033989
121393	1,618033989

F Une Biographie (Encyclopaedia Universalis)

Mathématicien italien, né et mort à Pise.

Connu aussi sous le nom de Léonard de Pise, Leonardo Fibonacci fut éduqué en Afrique du Nord, où son père, marchand de la ville de Pise (l'un des plus grands centres commerciaux d'Italie, à l'époque, au même rang que Venise et Gênes), dirigeait une sorte de comptoir ; c'est ainsi qu'il eut l'occasion d'étudier les travaux algébriques d'al-Khuwarizmi.

Par la suite, Fibonacci voyagea dans tout le monde méditerranéen, rencontrant de nombreux scientifiques et prenant connaissance des différents systèmes de calcul en usage chez les marchands de l'époque. De toutes les méthodes de calcul, il jugea celle des Arabes la plus avancée. Aussi, de retour à Pise, il publie en 1202 un ouvrage, *Liber abbaci*, où, le comparant au système romain, il expose le système de numération indo-arabe. Il est le premier grand mathématicien à l'adopter et à le vulgariser auprès des scientifiques. Son ouvrage contient également la plupart des résultats connus des Arabes en algèbre et en arithmétique (racines carrées, racines cubiques, équations du premier et du second degré).

En 1220, il publie *Practica geometriae*, qui recense toutes les connaissances de l'époque en géométrie et en trigonométrie (écrits d'Euclide et des autres mathématiciens grecs, transmis par des manuscrits arabes ou traduits par des Italiens) ; en particulier, l'ouvrage contient la formule de Héron donnant l'aire du triangle en fonction des longueurs des trois côtés.

Mais Fibonacci ne se contenta pas de faire connaître les travaux des Anciens et d'être à l'origine de la renaissance des études mathématiques en Occident, il poursuivit aussi ses propres travaux. Sa réputation scientifique était telle que l'empereur Frédéric II s'arrêta à Pise pour le voir et lui poser des "colles" (cette sorte de compétition entre scientifiques devait se développer au XVI^e et au XVII^e siècle). La résolution de ces problèmes (les plus célèbres étant : trouver un nombre x tel que $x^2 + 5$ et $x^2 - 5$ soient tous deux des carrés ; résoudre l'équation du troisième degré $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$) ainsi que la résolution d'autres problèmes de même nature sont contenues dans *Liber quadratorum* (1225).

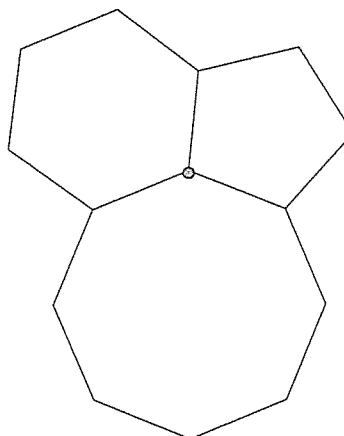
Notons enfin que Fibonacci est à l'origine d'une suite récurrente qui porte son nom, suite dont les deux premiers termes sont 0 et 1 et dont le terme d'ordre $n + 1$ est égal à la somme des deux termes d'ordre n et $n - 1$ pour tout n supérieur ou égal à 2.

2. k -collages archimédiens

(d'après "Tonton lulu")

Le but de ce thème est de trouver et de dessiner tous les assemblages exacts, autour d'un point, de k polygones réguliers : ce que l'on peut nommer des k -collages archimédiens.

L'exemple ci-contre en est-il un ?



A Calcul de l'angle d'un polygone régulier.

Établir une formule de calcul de l'angle d'un polygone régulier à n côtés.

Calculer alors les angles des polygones réguliers à n côtés pour n compris entre 3 et 10.

B Les 3-collages archimédiens

Dans toute la partie B, on se limitera à la recherche de 3-collages archimédiens, réalisés avec des polygones réguliers dont on notera respectivement, n, p, q , les nombres de côtés (où $n \leq p \leq q$).

- 1) Établir une égalité simple reliant les inverses des entiers n, p, q .
- 2) Commençons par rechercher les collages où $n = 3$.
 - Établir qu'alors $p > 6$
 - puis que $p \leq 12$
 - exprimer enfin q en fonction de p et en déduire les valeurs possibles pour p et q .
- 3) Appliquer la technique du 2) au cas où $n = 4$.
- 4) Appliquer la technique du 2) au cas où $n = 5$
- 5) Appliquer la technique du 2) au cas où $n = 6$
- 6) Prouver qu'alors on a trouvé les 3-collages archimédiens. Réaliser une synthèse de vos résultats.

C Les autres k -collages archimédiens

De même pouvez-vous rechercher quelques solutions à plus de 3 polygones, en sachant quand même que le nombre de polygones est limité. Une recherche exhaustive, si elle est possible avec des méthodes analogues à celle du B, est fort longue...

D Pavages

Parmi les k -collages archimédiens trouvés, certains permettent de "paver le plan" (sans vide, ni recouvrement, sans non plus qu'aucun sommet ne se trouve sur le côté d'un polygone, et enfin de manière que la configuration autour de chaque sommet soit la même). Pouvez-vous en identifier ?

3. Moyennes

Voici quatre sortes de moyennes : si a et b sont deux nombres positifs.

- Le nombre m tel que $m = \frac{a+b}{2}$ est appelé la *moyenne arithmétique* de a et b .
- Le nombre g tel que $g = \sqrt{ab}$ est appelé la *moyenne géométrique* de a et b .
- Le nombre q tel que $q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ est appelé la *moyenne quadratique* de a et b .
- Le nombre h tel que $\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ est appelé la *moyenne harmonique* de a et b .

A Faites quelques essais, formulez des conjectures...

Quelques pistes:

- ces moyennes existent-elles pour tous les nombres a et b ?
- pouvez-vous trouver une écriture de h fonction de a et b ?
- ces moyennes sont-elles toujours comprises entre a et b (preuve?).
- ces moyennes sont-elles toujours dans le même ordre?
- g n'est-il pas la moyenne géométrique de deux autres moyennes (preuve?).

B Interprétation géométrique

Placez trois points O , A , B alignés distincts. On nomme M le milieu de $[AB]$.

Tracez le cercle C de centre M , de rayon MA .

Placez un point G du cercle C tel que (OG) soit tangente à C .

Placez un point Q du cercle C tel que (QM) soit perpendiculaire à (AB) .

Placez H , le projeté orthogonal de G sur (AB) .

- 1) Mesurez les distances AO et BO , qu'on notera a et b .
- 2) Mesurez les distances OM , OG , OQ , OH .
- 3) Calculez les moyennes m , g , q , h , des nombres a et b .
- 4) Démontrez les conjectures que doivent vous inspirer la comparaison de 2) et 3).
- 5) Un raisonnement géométrique permet de prouver que l'ordre des quatre moyennes n'est pas le fait du hasard. Pouvez-vous le retrouver ?

C Cherchez des exemples où peuvent s'utiliser ces diverses moyennes.

4. Quelques énigmes

A Logique

Cinq lingots forment un trésor: ils sont faits respectivement d'or, d'argent, de platine, de nickel et de bronze. Chacun est dans un de ces cinq coffres, qui sont numérotés de 1 à 5. Sur chaque coffre figure une inscription. Toutes ces affirmations sont fausses, sauf une, celle qui figure sur le coffre qui contient le lingot d'or!

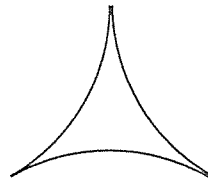
Coffre 1	Coffre 2	Coffre 3	Coffre 4	Coffre 5
L'or est dans le coffre 2 ou dans le coffre 3	L'argent est dans le coffre 1	Le bronze n'est pas ici	Le nickel est dans le coffre qui porte le numéro qui précède celui de l'or	Le platine est dans le coffre qui porte le numéro qui suit celui qui contient le bronze

Qui contient quoi ? Comment avez-vous raisonné ?

B Un problème d'aire

Chaque arc de cercle de cette étoile est tangent aux deux autres et mesure 10 cm de long (le schéma ne respecte pas les longueurs).

Quelle est l'aire de l'étoile?



C Rectangles de périmètre fixe

On s'intéresse à l'ensemble des rectangles ayant un même périmètre fixe.

- Choisis un périmètre ; donne quelques exemples.
- parmi cet ensemble, quels sont les rectangles de plus grande aire ? quels sont les rectangles d'aire minimale ? Justifie tes réponses.

D Partages d'un triangle

- Comment partager un triangle en deux triangles de même aire ? Justifie ta réponse.

- Dans un triangle ABC, on nomme :
G le centre de gravité,
A', B', C' les milieux respectifs de [BC], [AC], [BA],
I, J, K les milieux respectifs de [GA], [GB], [GC].

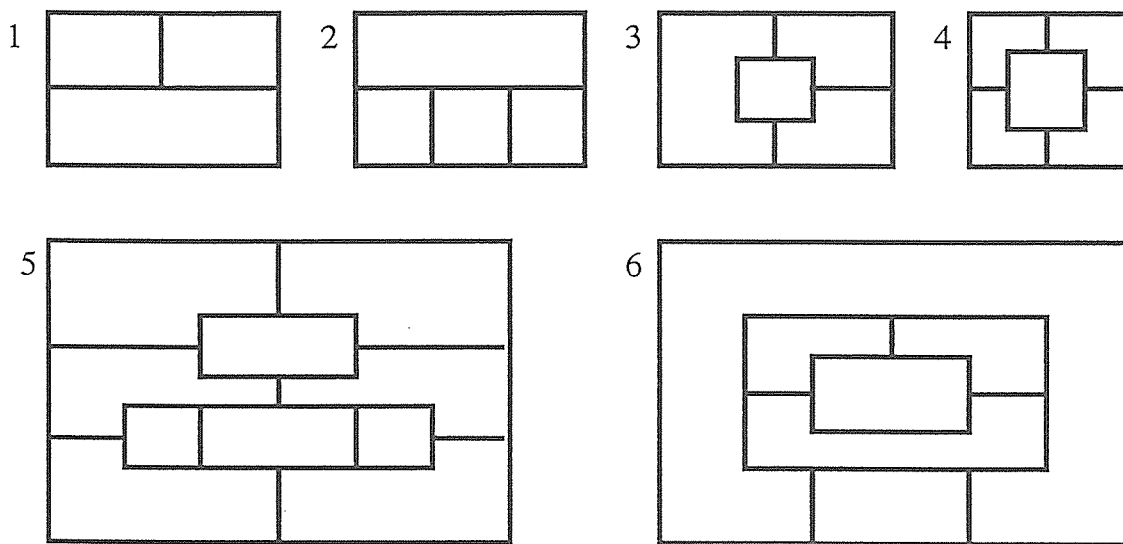
Étudie l'hexagone A'KB'TC'J :

Que dire de ses côtés ? Que dire de son aire ? Justifie tes réponses.

5. Coloriages

On appelle **coloriage** d'une carte, une affectation de couleurs à chacune des régions de la carte, faite de telle façon que deux régions adjacentes ne portent pas la même couleur (les cartes considérées ici n'auront pas de point "quadruple", c'est à dire de point appartenant à plus de trois régions). Le **nombre chromatique** d'une carte est le plus petit nombre de couleur nécessaire pour en réaliser un coloriage.

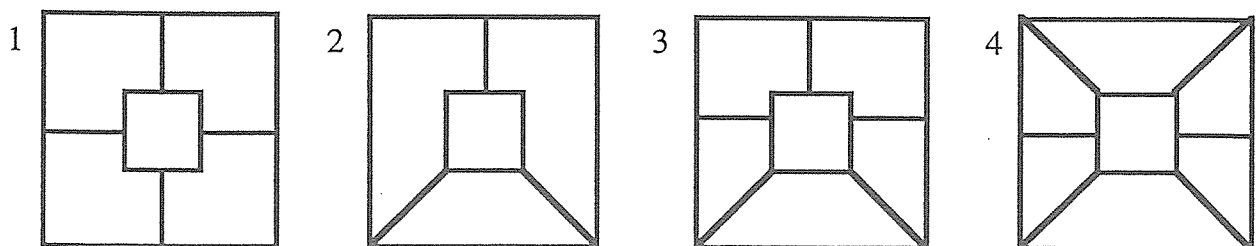
A Quel est le nombre chromatique des cartes suivantes (étayez vos affirmations pour les 4 premières cartes) :



B Pour chaque couple d'entiers (r, c) , où r et c sont pris entre 2 et 6 (inclus), construire une carte de r régions dont le nombre chromatique soit c , quand c'est possible.

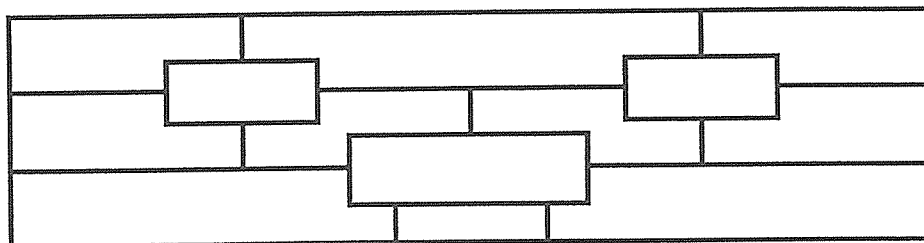
Pouvez-vous formuler une conjecture sur les nombres chromatiques des cartes du plan ?

C Les cartes suivantes ont-elles 3 pour nombre chromatique ?



Pour de telles cartes, pouvez-vous formuler une conjecture à ce propos ?

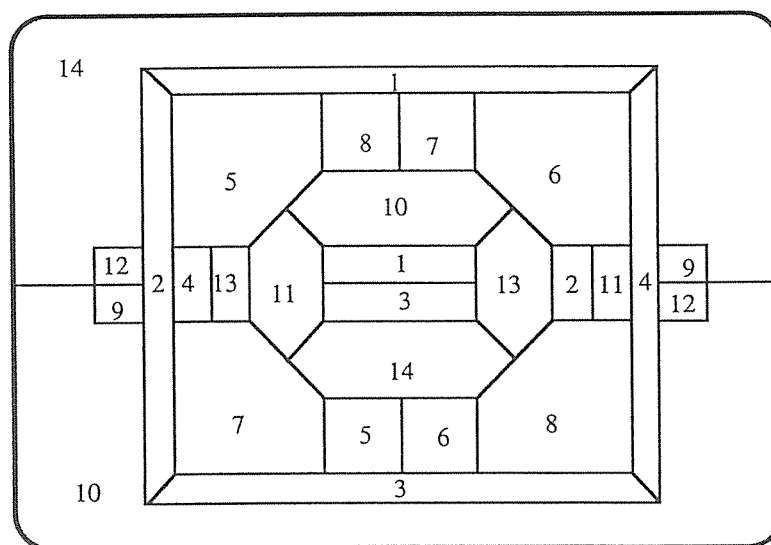
Application : comment pourrait-on modifier (un peu) la carte ci-dessous pour qu'elle soit coloriable en 3 couleurs ? (expliquez votre raisonnement).



D Est-il possible de colorier en 3 couleurs la carte des départements français continentaux ? Pourquoi ?

Dans la carte des régions administratives de France continentale, quelles régions devra-t-on fusionner pour la rendre coloriable en 3 couleurs, tout en cherchant à minimiser le nombre de fusions ?

E Supposons maintenant que chaque pays soit constitué de deux parties non adjacentes (pensez par exemple à l'ancien Pakistan ou à la RFA avant la réunification). Sur la carte ci-dessous apparaissent 14 tels pays numérotés de 1 à 14. Combien de couleurs au minimum vous semblent-elles nécessaires pour réaliser un coloriage de cette carte, les deux parties d'un même pays étant coloriées de la même couleur ?



6. Balayages

A Dessiner un rectangle dont on choisira les dimensions.

Choisir un point O à l'intérieur du rectangle et un sommet S de ce même rectangle. Relier ces deux points.

Un mobile M part du sommet S le long d'un des côtés et va parcourir le périmètre du rectangle en suivant ses quatre côtés.

"Étudier" l'application qui, à la distance x parcourue par M , associe l'aire "balayée" par le segment $[OS]$.

B Reprendre le même thème en plaçant le point O sur un des côtés du rectangle.

C Reprendre le même thème en plaçant le point O à l'extérieur du rectangle.

7. Cycloïdes

A Dans un grand cercle, marquer, à la règle et au compas, de nombreux points (au moins cent !) régulièrement espacés sur ce cercle (expliquer et discuter la construction choisie). Nommer ces points, dans l'ordre: A_0, A_1, A_2 , etc...

B Joindre ces points par des segments en respectant la règle suivante : le segment d'origine A_1 a pour extrémité A_2 , le segment d'origine A_2 a pour extrémité A_4 , le segment d'origine A_3 a pour extrémité A_6 , etc... (le segment d'origine A_n a pour extrémité A_{2n}).

Attention : à partir d'un certain moment, on va "dépasser" A_0 .

Par exemple, s'il y a 120 points autour du cercle, on devrait relier A_{60} à A_{120} ... qui n'existe pas ; en fait on reliera A_{60} à A_0 (on continue de tourner).

Une fois tous les segments tracés, ils "enveloppent" une courbe, que l'on peut tracer d'un trait léger : on l'appelle une "cardioïde". Pourquoi ?

C Sur un autre cercle, Réaliser une courbe analogue en reliant les points A_n aux points A_{3n} . Cette courbe s'appelle une "néphroïde". Pourquoi ? On peut la contempler dans le bol du petit déjeuner, à condition de n'être pas trop endormi...

D Si je dis que l'on a tracé les courbes C_2 et C_3 , saurait-on tracer C_4 et C_5 ?

E Pour tracer aussi les courbes C_{-2} et C_{-3} , il faudra partir d'un cercle plus petit, situé au centre de la feuille, et tracer non plus des segments mais des droites.

8. Sur "La Géométrie" de Descartes

En 1637, Descartes fit paraître en français un ensemble constitué du "*Discours de la Méthode*", suivi de trois traités, présentés comme autant d'essais de sa Méthode : "*La Dioptrique*", "*Les Météores*", et "*La Géométrie*".

"*La Dioptrique*" est un traité d'optique, où Descartes énonça la loi qui porte son nom. "*Les Météores*" examinent divers phénomènes physiques, comme par exemple l'arc en ciel dont Descartes donne une explication.

"*La Géométrie*" est un texte mathématique court, mais difficile pour plusieurs raisons :

- certains des thèmes abordés traitent de problèmes pour nous désuets,
- l'organisation de l'ouvrage paraît très décousue, et la trame en est subtile,
- beaucoup de difficultés sont passées sous silence.

Malgré tout, ce texte reste une borne dans l'histoire des mathématiques ; on y voit entre autre apparaître pour la première fois l'utilisation des coordonnées pour la résolution d'un problème géométrique (x et y naissent dans ce texte), ainsi que le mot imaginaire pour désigner les nombres complexes. Il marque le début de la géométrie repérée, analytique (dite souvent "Géométrie Cartésienne"), et contribue de manière originale à la genèse de l'analyse, qui était la grande affaire de l'époque.

Deux extraits sont proposés :

- une partie de l'introduction du livre, où Descartes livre une partie de son projet : réunir géométrie et numérique,
- un extrait des paragraphes où il montre divers techniques de recherche des racines d'un polynôme.

Ces extraits (page suivante) sont tirés d'une réédition où la lecture est facilitée par l'utilisation du signe d'égalité (Descartes avait une autre notation), et des exposants (Descartes écrivait xx pour x^2).

Votre travail sera de comprendre ce dont il s'agit, de le commenter en en donnant des exemples, en l'argumentant : en effet, l'auteur ne donne pas toujours de preuve de ce qu'il avance.

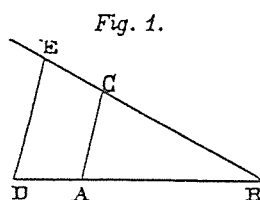
DES PROBLÈMES QU'ON PEUT CONSTRUIRE SANS Y EMPLOYER
QUE DES CERCLES ET DES LIGNES DROITES.

Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connoître la longueur de quelques lignes droites pour les construire.

Et comme toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, et l'extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division, ainsi n'a-t-on autre chose à faire en géométrie touchant les lignes qu'on cherche pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres, ou en ôter; ou bien en ayant une, que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la multiplication; ou bien en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la division; ou enfin trouver une ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque autre ligne, ce qui est le même que tirer la racine carrée.

ou cubique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'arithmétique en la géométrie, afin de me rendre plus intelligible.

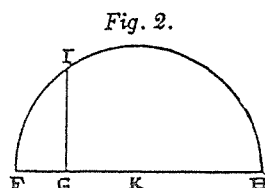
Soit, par exemple, AB (*fig. 1*) l'unité, et qu'il faille multiplier BD par BC ,



je n'ai qu'à joindre les points A et C , puis tirer DE parallèle à CA , et BE est le produit de cette multiplication.

Ou bien, s'il faut diviser BE par BD , ayant joint les points E et D , je tire AC parallèle à DE , et BC est le produit de cette division.

Ou s'il faut tirer la racine carrée de GH (*fig. 2*), je lui ajoute en ligne



droite FG , qui est l'unité, et divisant FH en deux parties égales au point K , du centre K je tire le cercle FIH , puis élevant du point G une ligne droite jusques à I à angles droits sur FH , c'est GI la racine cherchée. Je ne dis rien ici de la racine cubique, ni des autres, à cause que j'en parlerai plus commodément ci-après.

Mais souvent il arrive que quelques unes de ces racines sont fausses ou moindres que rien ; comme si on suppose que x désigne aussi le défaut d'une quantité qui soit 5, on a

$$x + 5 = 0,$$

qui, étant multiplié par

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0,$$

fait

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

pour une équation en laquelle il y a quatre racines, à savoir trois vraies qui sont 2, 3, 4, et une fausse qui est 5.

Et on voit évidemment de ceci que la somme d'une équation qui contient plusieurs racines peut toujours être divisée par un binôme composé de la quantité inconnue moins la valeur de l'une des vraies racines, laquelle que ce soit, ou plus la valeur de l'une des fausses ; au moyen de quoi on diminue d'autant ses dimensions.

Et réciproquement que si la somme d'une équation ne peut être divisée par un binôme composé de la quantité inconnue $+$ ou $-$ quelque autre quantité, cela témoigne que cette autre quantité n'est la valeur d'aucune de ses racines. Comme cette dernière

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

peut bien être divisée par $x - 2$, et par $x - 3$, et par $x - 4$, et par $x - 5$, mais non point par $x +$ ou $-$ aucune autre quantité ; ce qui montre qu'elle ne peut avoir que les quatre racines 2, 3, 4 et 5.

On connoît aussi de ceci combien il peut y avoir de vraies racines et combien de fausses en chaque équation : à savoir il y en peut avoir autant de vraies que les signes $+$ et $-$ s'y trouvent de fois être changés, et autant de fausses qu'il s'y trouve de fois deux signes $+$ ou deux signes $-$ qui s'entre-suivent. Comme en la dernière, à cause qu'après $+x^4$ il y a $-4x^3$, qui est un changement du signe $+$ en $-$, et après $-19x^2$ il y a $+106x$, et après $+106x$ il y a -120 , qui sont encore deux autres changements, on connoît qu'il y a trois vraies racines ; et une fausse, à cause que les deux signes $-$ de $4x^3$ et $19x^2$ s'entre-suivent.

De plus, il est aisé de faire en une même équation que toutes les racines qui étoient fausses deviennent vraies, et par même moyen que toutes celles qui étoient vraies deviennent fausses, à savoir en changeant tous les signes $+$ ou $-$ qui sont en la seconde, en la quatrième, en la sixième, ou autres places qui se désignent par les nombres pairs, sans changer ceux de la première, de la troisième, de la cinquième, et semblables qui se désignent par les nombres impairs. Comme si, au lieu de

$$+x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0,$$

on écrit

$$+x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0,$$

on a une équation en laquelle il n'y a qu'une vraie racine qui est 5, et trois fausses qui sont 2, 3 et 4.

Que si, sans connoître la valeur des racines d'une équation, on la veut augmenter ou diminuer de quelque quantité connue, il ne faut qu'au lieu du terme inconnu en supposer un autre qui soit plus ou moins grand de cette même quantité, et le substituer partout en la place du premier.

9. Graphes Planaires, ou "Ni Ponts, ni tunnels..."

1 Planaires ou pas...

Au pays des graphes planaires, on ne veut ni ponts, ni tunnels. On vous y a demandé une étude conjecturale...

- Dans la province d'Alpha, on veut relier les quatre villes principales les unes aux autres deux à deux par des routes. Pensez-vous que c'est possible ?
- Dans la province de Bêta, on veut relier les cinq villes principales les unes aux autres deux à deux par des routes. Pensez-vous que c'est possible ?
- Dans la province de Gamma, on veut relier les cinq villes principales les unes aux autres deux à deux par des routes, à l'exception notable de deux d'entre elles. Pensez-vous que c'est possible ?
- Dans la province de Delta, les trois villes principales sont reliées entre elles par air. Les trois villes moyennes aussi. Pensez-vous que l'on peut relier par route chacune des trois villes principales à chacune des trois villes moyennes ?

2 La relation d'Euler

Tous les graphes considérés par la suite seront "d'un seul tenant" et auront des faces d'au moins trois arêtes. Un graphe est dit "planair" si on *peut* le dessiner en déplaçant ses sommets et en déformant ses arêtes (sans les rompre) sans que ses arêtes se croisent.

- Donnez un exemple d'un graphe planair et d'un graphe que vous pensez non-planair.
- À partir de quelques exemples de graphes planaires, remplissez un tableau où vous placerez les nombres s de sommets, a d'arêtes, et f de faces (où vous compterez aussi la face extérieure "infinie" du graphe). Il existe une relation simple entre ces trois nombres. Conjecturez ce que l'on nomme "la relation d'Euler".
- Cette relation s'applique aussi à certains polyèdres. Fournissez un exemple, et faites comprendre pourquoi la relation d'Euler s'applique aux polyèdres convexes.

3 Et d'un

- Prouvez que, pour presque (à préciser) tout graphe planair, $3f \leq 2a$. Vous pouvez pour cela, par exemple, compter les liens face-arête.
- En déduire que $3s - a \geq 6$.
- Démontrer alors que l'un des graphes du paragraphe 1 est non-planair.

4 Et de deux

- Prouvez que, si un graphe planair n'a que des faces d'au moins quatre arêtes, $4f \leq 2a$.
- En déduire que $2s - a \geq 4$.
- Démontrer alors qu'un autre des graphes du paragraphe 1 est non-planair.

5 C'est complet

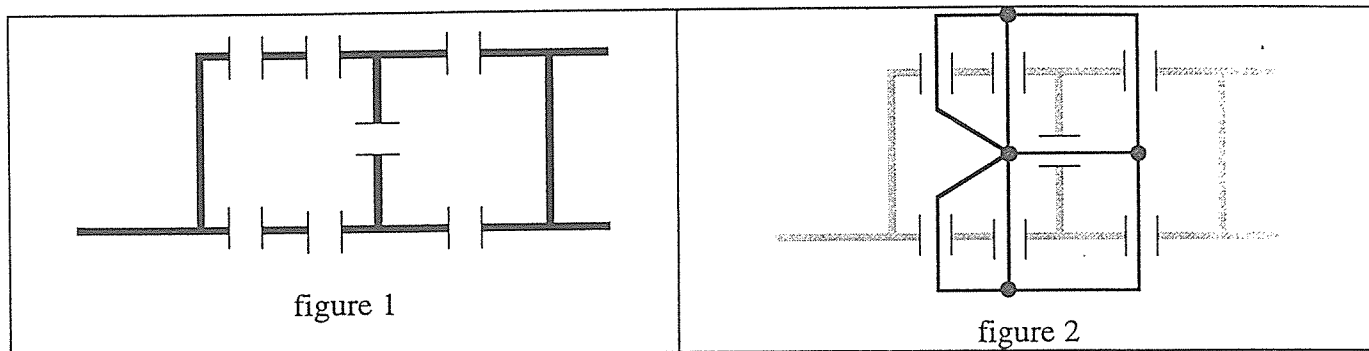
On dit d'un graphe qu'il est complet quand chacun de ses sommets y est relié à tous les autres. Démontrez qu'il n'y a pas de graphe complet planair à plus de quatre sommets.

En guise de conclusion

Le mathématicien Kuratowski a prouvé en 1930 qu'un graphe (d'un seul tenant) était planair si, et seulement si, il ne "contenait" ni l'un ni l'autre des deux graphes démontrés précédemment. La démonstration est trop compliquée pour vous être proposée, mais ce théorème vous permettra de mettre au point de jolis casse-tête...

10. Graphes Eulériens

Sur le Pregel, fleuve qui traverse Königsberg, ancienne ville allemande de Prusse orientale qui s'est longtemps appelée Kaliningrad, se trouvent deux îles, reliées entre elles et aux rives par sept ponts (figure 1).



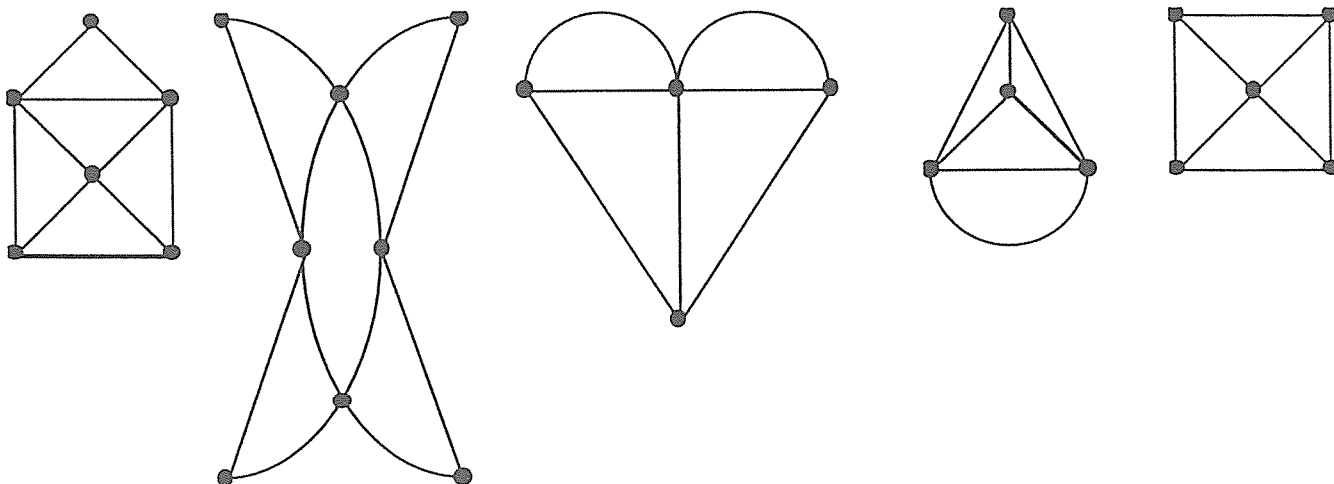
Au XVII^e siècle, un curieux s'est posé la question suivante; "est-il possible de traverser chacun des sept ponts en ne passant qu'une fois sur chacun ?"

Pour répondre, on peut "oublier" la carte et mettre en évidence les informations qui comptent : on obtient ce que l'on nomme un graphe, ici avec 7 arcs et 4 sommets (figure 2).

Sur un tel graphe, le problème consiste à dessiner un parcours en n'empruntant chaque arc qu'une seule fois (mais on y peut passer plusieurs fois par chaque sommet).

C'est le mathématicien Léonard Euler qui, au XVIII^e, énonça un critère pour qu'un graphe "planétaire" contienne un tel parcours, que l'on nomme désormais "circuit Eulérien".

a) Parmi les cinq graphes ci dessous, quel est celui qui modélise le problème des sept ponts ? Quels sont ceux que l'on peut tracer sans lever le crayon sans repasser deux fois sur le même arc.



b) En tentant un classement des sommets, formule, comme Euler, une conjecture permettant de distinguer les graphes où existe un circuit éponyme.

c) Teste ta conjecture sur quelques graphes de ton cru.

d) Essaie de la justifier.

e) Peux-tu alors préciser quels sont les graphes qui admettent un "cycle Eulérien", c'est à dire un circuit Eulérien où les sommets de départ et d'arrivée coïncident ?

11. Graphes Hamiltoniens

Sur un graphe planaire, on nomme "Cycle hamiltonien" une boucle fermée qui passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe : en effet, c'est le mathématicien Hamilton qui étudia au 19^e le problème de l'existence, dans un graphe donné, d'un cycle hamiltonien.

Un graphe qui admet un cycle hamiltonien est dit "graphe hamiltonien".

Quand un graphe est de petite taille, on a assez vite une idée de la possibilité d'y trouver un cycle hamiltonien. Mais quand le graphe est grand, c'est une autre histoire dont on sait maintenant qu'elle est "intrinsèquement difficile".

A En projetant un dodécaèdre régulier sur un plan, on peut ainsi construire un graphe planaire (c'est à dire dont les arêtes ne se coupent pas) dont les sommets et les arêtes sont les projetés de ceux du solide. Une des faces du polyèdre devient la face externe du graphe. Représenter ce graphe ; est-ce un graphe hamiltonien ?

B Un mathématicien russe du nom de Grinberg a découvert une relation qui est vérifiée par tous les graphes qui possèdent un cycle hamiltonien. Cette relation n'est d'aucune aide s'il s'agit de prouver qu'un graphe possède un cycle hamiltonien, mais elle peut aider à prouver que ce n'est pas le cas...

Nous allons la démontrer.

Données : G est un graphe "planaire" possédant un cycle hamiltonien. Soit a le nombre d'arcs du cycle, et r le nombre d'arcs de G situés à l'intérieur du cycle. Notons I_n le nombre de régions intérieures au cycle et possédant n côtés, et E_n le nombre de régions extérieures au cycle et possédant n côtés.

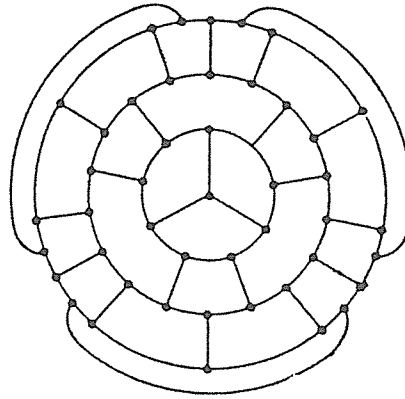
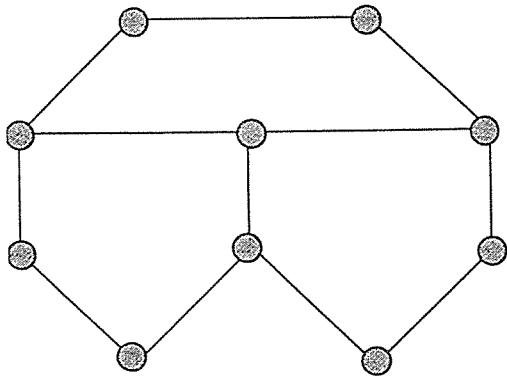
- 1) Prouver que, si k est le plus grand des nombres de côtés des régions intérieures au cycle, alors : $I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_k = r + 1$.
- 2) Démontrer que : $I_1 + 2I_2 + 3I_3 + \dots + kI_k = 2r + a$.
- 3) En déduire que : $-I_1 + I_3 + 2I_4 + 3I_5 + \dots + (k-2)I_k = a - 2$.
- 4) Prouver que, si l est le plus grand des nombres de côtés des régions extérieures au cycle, alors : $-E_1 + E_3 + 2E_4 + 3E_5 + \dots + (l-2)E_l = a - 2$.
- 5) En déduire que, si m est le plus grand des nombres l et k , alors :

$$(E_1 - I_1) + (I_3 - E_3) + 2(I_4 - E_4) + 3(I_5 - E_5) + \dots + (m - 2)(I_m - E_m) = 0.$$

C'est la "relation de Grinberg" !

C Appliquons cette relation.

- 1) Vérifier cette relation sur quelques graphes de votre choix.
- 2) Démontrer que le graphe de la figure de gauche n'a pas de cycle hamiltonien.
- 3) Et celui de la figure de droite ?



- 4) Sauriez-vous trouver un graphe non hamiltonien vérifiant la relation de Grinberg ?

12. Perfection

A Primarité

Un naturel, différent de 1, est dit **premier** s'il n'a pas de diviseurs naturels *hormis 1 et lui-même*.
Donnez la liste des 10 plus petits naturels premiers.

En expliquant, fabriquez un naturel premier supérieur à 100, puis un naturel non premier supérieur à 100.

B Décomposition

“**Décomposer un naturel en produit de facteurs premiers**”, c’est l’écrire comme un produit de naturels qui soient *tous premiers*: admettons qu’il n’y a qu’une manière d’effectuer cela, à l’ordre près des facteurs.

Par exemple, $1500 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5^3$.

Organisez-vous, en expliquant bien votre technique, pour décomposer un grand naturel en produit de facteurs premiers.

C Ensembles de diviseurs

Pour trouver l’ensemble de tous les diviseurs d’un naturel, il suffit de multiplier de toutes les manières possibles ses diviseurs premiers (et de ne pas omettre le nombre 1).

Par exemple, $20 = 2^2 \times 5 = 2 \times 2 \times 5$ a pour diviseurs:

2, 5, 2×2 , 2×5 , $2 \times 2 \times 5$, ... et 1.

L’ensemble de ses diviseurs est donc $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

Organisez-vous, en expliquant bien votre technique, pour “calculer” l’ensemble des diviseurs d’un grand nombre.

D Perfection

1 Un naturel **plus que parfait** est un naturel égal à la somme de tous ses diviseurs.

En justifiant votre réponse, pouvez-vous dire quels sont les naturels plus que parfaits.

2 Un naturel **imparfait** est un naturel égal au produit de ses diviseurs, lui-même exclu.

En justifiant votre réponse, pouvez-vous dire quels sont les naturels imparfaits.

3 Un naturel **surfait** est un naturel égal au produit de tous ses diviseurs.

En justifiant votre réponse, pouvez-vous dire quels sont les naturels surfaits.

4 Un naturel **déficient** est un naturel strictement supérieur à la somme de ses diviseurs, lui-même exclu.

Donnez quelques exemples de naturels déficients.

4 Un naturel **abondant** est un naturel strictement inférieur à la somme de ses diviseurs, lui-même exclu.

Donnez quelques exemples de naturels abondants.

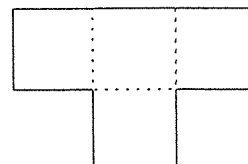
5 Un naturel **parfait** est un naturel égal à la somme de ses diviseurs, lui-même exclu.

Prouvez qu’il y a deux naturels parfaits inférieurs à 30, et que 496 est aussi parfait.

13. Polyminos

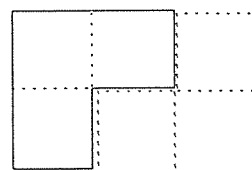
Définition: n étant un naturel, un “ n -omino” est un assemblage de n carrés, collés les uns aux autres par au moins un côté.

Exemple: voici l’un des tétrominos :

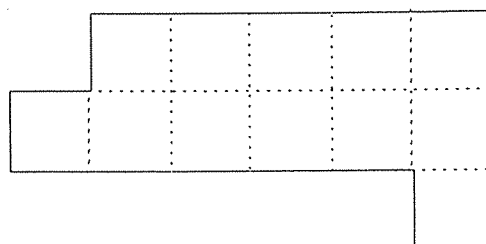


- A** Deux n -ominos sont dits “égaux” s’ils sont superposables par déplacement et/ou “retournement”.
- 1) Combien y a-t-il de monominos, de dominos, de triminos, de tétrominos ?
 - 2) Exhiber les douze pentominos.
 - 3) Des mathématiciens ont prouvé que, si n était un grand nombre, le nombre de n -ominos était compris entre $\frac{3,72^n}{8}$ et $\frac{4,5^n}{8}$. Considérant que 1000 est un grand nombre, donner un encadrement du nombre de chiffres du nombre de 1000-ominos.
- B** On appelle “ordre” d’un polymino le plus petit nombre de copies de ce polymino qui permette de remplir un rectangle. Si cet entier n’existe pas, on convient de dire que l’ordre est infini.

Exemple: l’ordre de ce trimino est deux.



- 1) Quel est l’ordre du tétrmino donné comme exemple au début ?
 - 2) Prouver que ce tétrmino est d’ordre infini :
-
- 3) Trouver l’ordre de chacun des tétrominos, et de chacun des pentaminos.
 - 4) Fabriquer un autre polymino d’ordre infini.
 - 5) Fabriquer un 25-omino d’ordre 2.
 - 6) Fabriquer un 25-omino d’ordre 4.
 - 7) Pouvez-vous prouver que l’ordre de ce dodécomino est inférieur à 10 ?



C Hexominos

- 1) Construire *tous* les hexominos.
- 2) Combien pourriez-vous trouver d’hexominos d’ordre fini ?

14. Deux problèmes “ouverts” (en 1999)

Le problème de Syracuse

Dans les années 50, à l’Université de Syracuse (aux États-Unis), le mathématicien Helmut Hasse popularisa un problème qui avait été initié par son ami Lothar Collatz vingt ans auparavant. Ce problème est, depuis, connu sous le nom de “Problème de Syracuse” ou “Problème $3n + 1$ ”.

Il s’agit de l’étude de ce que l’on appelle un “algorithme”.

Pour l’étudier à votre tour :

prenez un entier n .

Si c’est 1, arrêtez vous.

Sinon, s’il est pair remplacez-le par $n / 2$, et s’il est impair remplacez-le par $3n + 1$.

Puis recommencez avec l’entier trouvé.

Faites des essais pour pouvoir énoncer votre “conjecture de Syracuse”.

N’essayez pas trop de la démontrer (il s’agit encore d’un problème “ouvert”).

Par contre, vous pouvez faire des statistiques, surtout si vous vous aidez d’un peu de programmation.

Intrigués par ce problème résistant, on a aussi étudié d’autres algorithmes qui ressemblent au précédent.

Par exemple, que pensez-vous du comportement de celui où, au lieu de $3n + 1$, on calcule dans les mêmes circonstances $3n - 1$?

Le Problème de Richard K. Guy

Si l’on considère un graphe à n sommets où chaque sommet est relié à chaque autre, ce graphe n’est pas nécessairement “planaire”, c’est à dire que certaines de ses arêtes doivent se couper.

Quel est, en fonction de n , le nombre minimal d’intersections entre arêtes dans un tel graphe à n sommets ?

15. Régionnement du cercle

On place n points sur un cercle, et on les joint, tous, les uns aux autres ; si l'on fait en sorte que jamais trois segments ne soient concourants ailleurs que sur le cercle, en combien de régions ces segments découpent-ils le disque ?

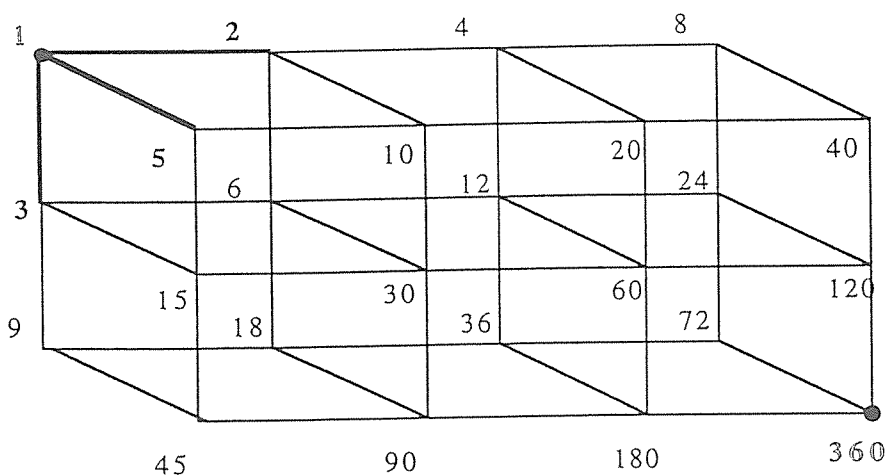
- 1 Faites des essais, formulez une conjecture...
- 2 Avec vos résultats, et des remarques judicieuses (sans démonstrations), vous devriez pouvoir compléter ce tableau, et tester vos prévisions.

nombre de points	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
nombre de régions	2	4										
différences premières		2										
différences secondes												

(dans le tableau, les "lignes de différences" se remplissent en plaçant dans chaque case la différence entre les contenus des deux cases situées au dessus)

16. Treillis de diviseurs

Ce dessin est le treillis des diviseurs de $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$:



- 1) A partir de sa décomposition en produit de facteurs premiers, construire un entier dont vous réaliserez le treillis, de manière à obtenir un grand et admirable dessin.
- 2) En utilisant le dessin réalisé, formuler des remarques, énoncer des règles portant sur les diviseurs, les PGCD, les PPCM...

17. Constructibilité

A Le théorème de Gauss

Ce n'est qu'au XIX^e siècle que l'on a compris pourquoi l'on arrivait à construire certains polygones réguliers à la règle et au compas (le pentagone, par exemple), mais que, pour d'autres, la recherche restait infructueuse (par exemple pour l'heptagone, à 7 côtés).

En effet, le mathématicien allemand Gauss (1778-1855) démontra le théorème suivant :

un polygone régulier à n côtés n'est constructible (à la règle et au compas) que si, et seulement si, n est de la forme $2^p f_1 f_2 \dots f_k$, où p est un naturel, et où les nombres $f_1, f_2 \dots f_k$ sont des "nombres de Fermat" premiers.

Un nombre de Fermat est un nombre de la forme $2^{(2^m)} + 1$, m étant un naturel.

Un nombre premier est un naturel qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

- a) Prouver que, pour qu'un nombre n soit premier, il suffit qu'il ne soit divisible par aucun nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$.
- b) Démontrer que les polygones réguliers à 5, 34, 128, 257 côtés sont constructibles.
- c) Donner deux autres exemples de polygones réguliers constructibles.
- d) Donner deux exemples de polygones réguliers non constructibles.
- e) *Avec une calculatrice programmable.*

Établir qu'un polygone régulier à 4 294 967 297 côtés n'est pas constructible à la règle et au compas.

Remarque : ce résultat, démontré (sans calculatrice...!) par le proluxe mathématicien suisse Euler (1707-1783), infirme une conjecture de Fermat, qui pensait que tous les nombres qui portent son nom étaient premiers.

B Construction du pentagone régulier

1) Construction

Réaliser la construction suivante :

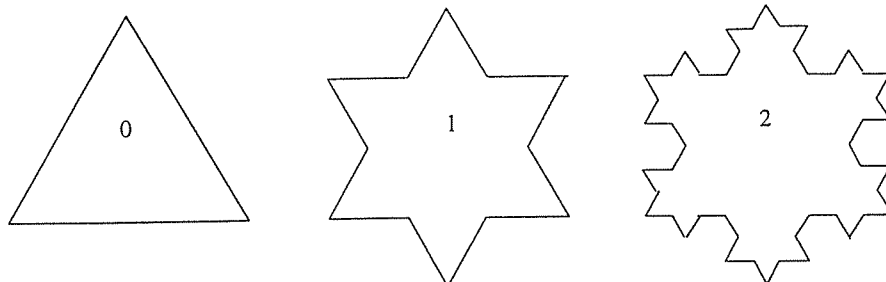
- Tracer un cercle de centre O , de rayon 1.
- Tracer un diamètre $[AS]$, le milieu H de $[SO]$, et un rayon $[OM]$ perpendiculaire au diamètre.
- Le cercle de centre H et de rayon HM recoupe le diamètre en un point L .
- La médiatrice de $[OL]$ coupe le diamètre en un point I , et le cercle en un point B .
- Alors, la distance AB est le côté du pentagone régulier : la reporter autour du cercle pour achever la construction.

2) Éléments de preuve

- a) $ABCDE$ étant un polygone régulier de centre O , calculer une mesure en radians de l'angle AOB . Donner, à l'aide de votre calculatrice, une valeur approchée à 10^{-8} du cosinus de cet angle.
- b) Démontrer que $OI = (\sqrt{5} - 1)/4$. En déduire que l'angle AOB a pour cosinus $(\sqrt{5} - 1)/4$. Donner une valeur approchée à 10^{-8} du nombre $(\sqrt{5} - 1)/4$.
- c) Pouvez-vous en déduire l'exactitude de la construction proposée ?

18. Flocons de neige

- 1 Reproduisez, en les agrandissant, les états 0, 1, 2 et 3 de la courbe "flocon de neige"; tous les triangles sont équilatéraux.



- 2 Donnez une description précise, en français, de la manière dont on peut construire un état de la courbe à partir de l'état précédent.
- 3
- a) Décomptez le **nombre de côtés** de chacun des états 0, 1, 2, 3.
 - b) Quel serait le nombre de côtés de la courbe à l'état 10, à l'état n (où n est un entier) ?
 - c) En utilisant l'approximation $2^{10} \approx 10^3$, donnez une valeur approchée du nombre de côtés de la courbe à l'état 80.
- 4
- a) En prenant pour unité la longueur du côté du triangle équilatéral de l'état 0, quel sera le **périmètre** de la courbe dans les états 0, 1, 2, 3, 10, à l'état n (où n est un entier) ?
 - b) En utilisant l'approximation $(4/3)^8 \approx 10$, donnez une valeur approchée du périmètre de la courbe à l'état 80.
 - c) Et si l'on imaginait la courbe "à l'état infini" : la courbe deviendrait-elle "grande", "longue" ? Essayez de formuler une conclusion.
- 5 *Ouvertures...*
Ceux qui sont à la fois adroits et patients peuvent fabriquer l'état 4 de la courbe "flocon de neige". Vous pouvez aussi essayer d'inventer d'autres courbes "fractales" sur un principe analogue, et vous poser des questions à leur propos.

19. Droites du triangle

Les propriétés du triangle sont innombrables : les cataloguer mériterait un livre.

L'objectif de ce travail est de découvrir la richesse de ce simple objet qu'est un triangle à travers quelques unes de ses propriétés.

A Cercle d'Euler

Dans un triangle ABC, construisez :

- a) - le cercle circonscrit, son centre ;
- l'orthocentre ;
- le centre de gravité.
- b) - les pieds des médianes (qui forment ce qu'on appelle le *triangle médian* de ABC) ;
- les pieds des hauteurs (qui forment ce qu'on appelle le *triangle orthique* de ABC) ;
- les milieux des segments joignant l'orthocentre aux points A, B et C.

B Six Bissectrices

Dans un triangle, construisez :

- a) - les trois bissectrices intérieures ;
- les trois bissectrices extérieures (droites passant par un sommet et perpendiculaires à la bissectrice intérieure issue de ce sommet) ;
- b) - le cercle inscrit ;
- les trois cercles exinscrits (tangents aux côtés du triangle, et dont les centres sont les points d'intersection des bissectrices extérieures).

C Euler + Bissectrices = Feuerbach !

Dans un triangle, construisez :

- le cercle d'Euler ;
- le cercle inscrit ;
- les trois cercles exinscrits.

Le point de contact entre le cercle d'Euler et le cercle inscrit s'appelle le point de Feuerbach. Il peut être intéressant de le projeter orthogonalement sur les côtés des triangles médians et orthiques.

20. Constructions "à la règle et au compas "

Réaliser une construction "à la règle et au compas", c'est effectuer un programme de tracé dont chaque étape soit l'une des constructions de base suivantes :

- marquer un point sur une droite ou un cercle ou à une intersection
- tracer une droite passant par deux points marqués
- tracer un cercle dont le centre soit un point marqué, passant par un autre point marqué, ou dont le rayon soit, ou donné, ou égal à la distance de deux points marqués.

Pour les constructions qui suivent:

- tu énonceras ta solution
- tu la justifieras.
- tu discuteras le problème (y a-t-il des solutions et combien ?)

1 Étant donné un point A, une droite d et un point B de d, **construire** un cercle passant par A et tangent en B à d.

2 Étant donné un point A et un cercle C, **construire** une droite passant par A et tangente à C.

3 Étant donné une droite d, un cercle C, et un réel R positif, **construire** un cercle de rayon R, tangent à la fois à d et, extérieurement, à C (la discussion est délicate).

21. Courbes à construire "points par points"

Conseil : réalise ces courbes sur grande feuille, avec soin et précision ; mets en évidence ce qui te semble intéressant et joins-y tes commentaires.

La trisectrice de Mac-Laurin

Trace un grand cercle C de centre O , de rayon R .

Soit A un point de C .

B est le point de (OA) extérieur à C et tel que $AB = R/2$.

D est la droite qui est perpendiculaire à (OA) en B .

a) Place sur C un point P quelconque; (AP) coupe D en Q . M est le milieu de $[PQ]$.

Place sur C un autre point P' quelconque; (AP') coupe D en Q' . M' est le milieu de $[P'Q']$.

Recommence avec de nombreux autres points P de C .

L'ensemble des points M décrit une courbe nommée "trisectrice de Mac-Laurin". Si tu as suffisamment de points M , tu dois pouvoir la tracer avec une bonne précision.

b) Soit Y le milieu de $[OA]$.

Pour quelques points M pris sur la courbe, compare les mesures des angles $\widehat{OYM}$ et $\widehat{OAM}$.

Il y a une remarque à faire : elle justifie le nom de cette courbe.

L'anguinée

Trace un cercle C de diamètre $[OA]$ et une parallèle D à (OA) qui coupe C .

Une droite quelconque passant par O recoupe C en un point P et coupe D en un point N .

La parallèle à D passant par P et la perpendiculaire à D passant par N se coupent en un point M .

En prenant une autre droite passant par O , tu peux construire un nouveau point M .

Recommence cela de nombreuses fois pour voir apparaître la courbe qui est l'ensemble de ces points M . Cette courbe a pour nom "anguinée".

La versiera

Trace un cercle de diamètre $[OA]$ et sa tangente T en A .

Une droite quelconque passant par O recoupe le cercle en un point N et coupe T en un point P .

La parallèle à $[OA]$ passant par P et la parallèle à T passant par N se coupent en un point M .

En prenant une autre droite passant par O , tu peux construire un nouveau point M .

Recommence cela de nombreuses fois pour voir apparaître la courbe qui est l'ensemble de ces points M . Cette courbe a pour nom "versiera".

22. Le Théorème de Pick

M. Pick a un verger planté de pommiers suivant un quadrillage parfaitement régulier à mailles carrées. Il a l'habitude d'y faire paître ses moutons en tendant une clôture fermée d'un arbre à l'autre.

Un mouton ayant besoin d'un carré unitaire d'herbe, son problème consiste à connaître le nombre de moutons qu'il pourra placer dans son polygone clôt, connaissant :

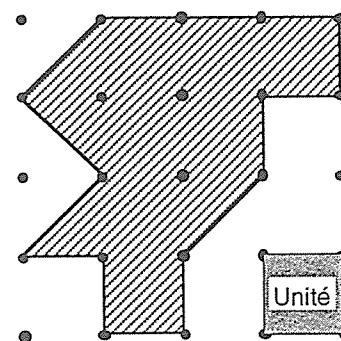
- le nombre d'arbres sur la clôture (que nous noterons C),
- le nombre d'arbres intérieurs à la clôture (que nous noterons I).

Nous noterons A l'aire délimitée par la clôture.

A Premier exemple

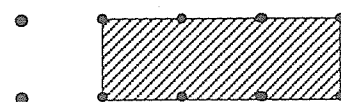
Combien de moutons pourra-t-il placer dans le polygone dessiné ci-contre ?

Fabriquer un exemple analogue de votre cru.



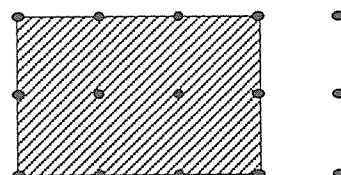
B Cas des rectangles de largeur 1

Réaliser un tableau où figurent les valeurs de A et C pour quelques rectangles de largeur 1 comme celui qui est dessiné ci-contre. En déduire une formule plausible (pour ces rectangles) qui permette d'écrire A en fonction de C .



C Cas des rectangles de largeur 2

Réaliser un tableau où figurent les valeurs de A , de C , et de la formule trouvée au **B** pour quelques rectangles de largeur 2 comme celui qui est dessiné ci-contre. Modifier un peu la formule du **B** pour trouver une formule plausible (pour ces rectangles) qui permette d'écrire A en fonction de C et I .



D Tester sur quelques exemples le fait que la formule trouvée au **C** fonctionne sur la plupart des polygones.

Y a-t-il des exceptions ?

E Essayer d'adapter la formule trouvée pour la rendre utilisable dans les cas où le polygone a un ou des "trous".

F **Guide pour des preuves** (pour des polygones non troués)

- 1) Prouver que la formule fonctionne pour des rectangles.
- 2) Prouver alors que la formule fonctionne pour des triangles rectangles (en s'aidant du fait qu'un triangle rectangle est un demi-rectangle).
- 3) Montrer que si la formule fonctionne pour deux polygones ayant une clôture commune, elle fonctionne aussi pour le polygone obtenu en éliminant entre eux cette frontière commune.
- 4) Conclure pour les polygones qui peuvent être "découpés" en triangles rectangles.

23. Question de méthodes

L'objectif de ce travail est de présenter un exposé clair de vos recherches. La méthode et son exposition sont plus importantes que les résultats numériques en tant que tels !

ABCD est un quadrilatère qui n'est ni un trapèze, ni un parallélogramme.

E,F,G,H,I,J sont les milieux respectifs des segments: $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[AC]$, $[BD]$.

- A Calculer le nombre de segments qui joignent ces dix points deux à deux.
- B Calculer le nombre de parallélogrammes qu'on peut écrire avec les dix points donnés. Un parallélogramme peut être aplati.
- C Calculer le **nombre** de vecteurs qu'on peut nommer avec ces dix points.
- D On peut étudier aussi les cas particuliers, trapèzes et parallélogrammes (mais cela risque d'être fastidieux).

Thème d'étude à proposer en club :
constructions du pentagone régulier convexe

Philippe LEFEUVRE et Michel LACAGE

Démarche :

1- recherche sur le web : dans le site du collège de Haute-Savoie dont l'adresse URL est :
"<http://aravis.cur-archamps.fr/edres74/colleges/coboemol/maths/pentago1.htm>",
découverte de la construction de Dürer.

Pentagone régulier de côté donné

Cette construction d'un pentagone presque régulier est attribuée au peintre et graveur Allemand Albrecht Dürer
(1471-1528)

<blink>Consigne : </blink>

Construire le pentagone de côté [AB] à l'aide du compas.

Toute la construction se fait avec un écartement du compas égal à la distance AB

Etape 1 :

Construis les cercles de centres A et B.
Ils se coupent en o et o'.

Etape 2 :

Construis la droite (oo')
Construis le cercle de centre o.
Il coupe les deux premiers cercles en C et D et la droite (oo') en I

Etape 3 :

Construis la droite (CI), elle coupe le cercle de centre B en C'.
Tracer [BC']

Etape 4 :

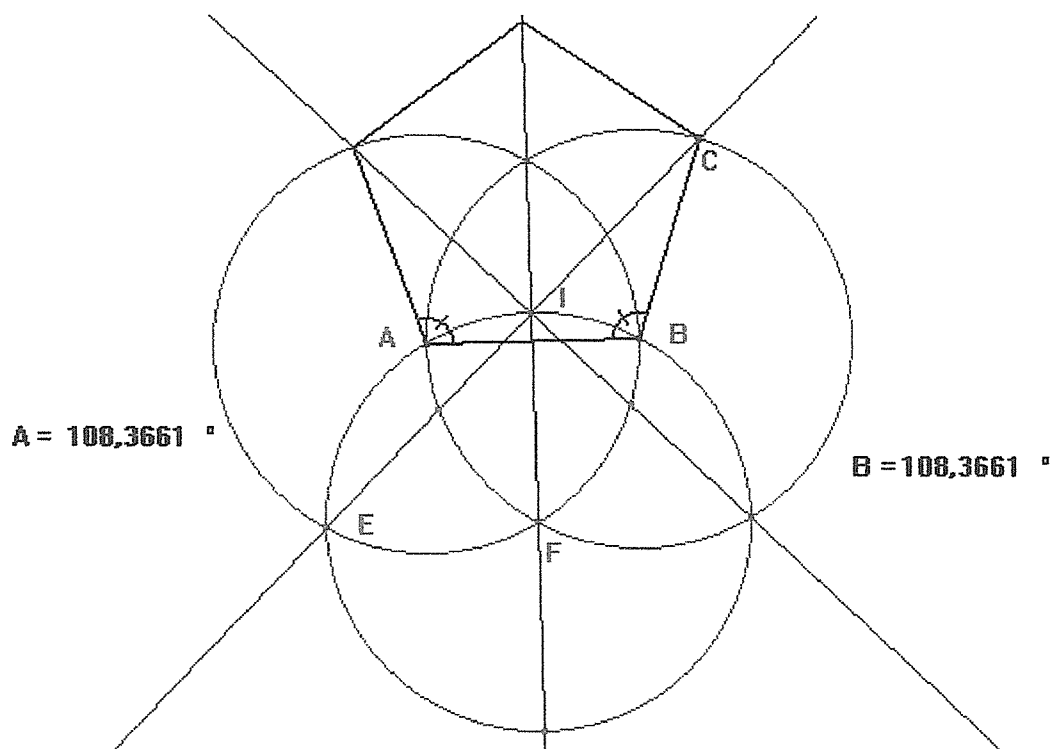
Construis la droite (DI), elle coupe le cercle de centre A en D'.
Tracer [AD'].

Etape 5 :

Construis les cercles de centres C' et D'. Ils se coupent en E.
Tracer le pentagone ABC'D'E.

- 2- Construction de la figure à l'aide de Cabri 2 (ou bien sur une calculatrice ti92)
- 3- Des constations avec Cabri-géomètre sur la validité de la construction :
Remarque : les auteurs du site web indiquent que le pentagone est presque régulier.

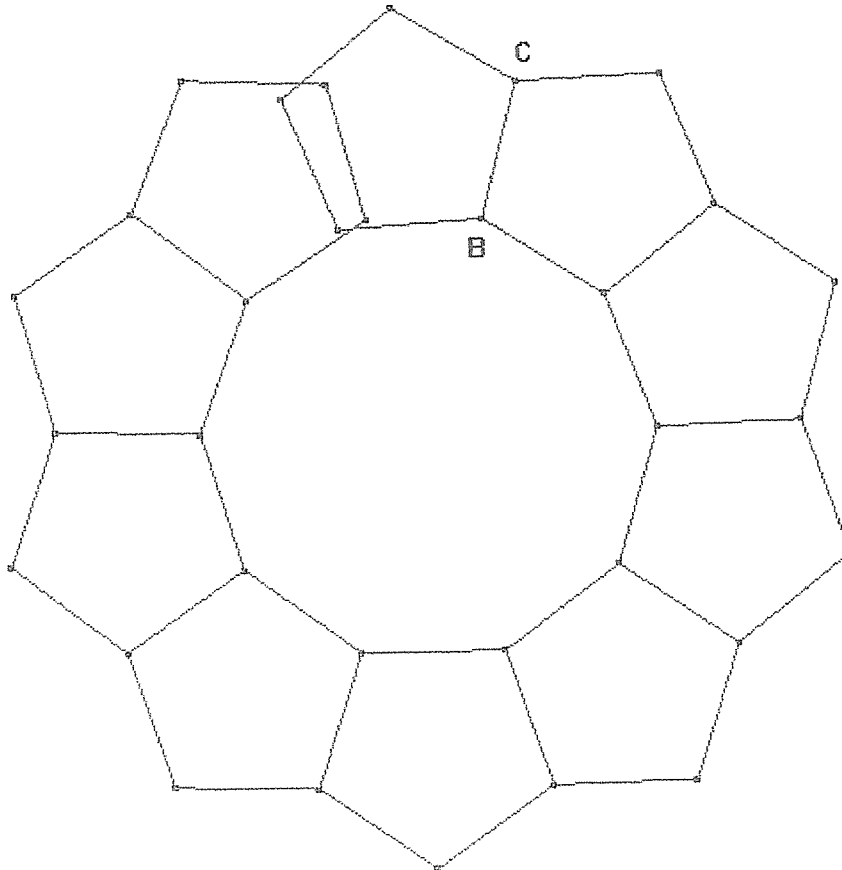
Pentagone avec mesures d'angles :



La mesure des angles A et B effectuée par le logiciel CABRI fait apparaître des valeurs légèrement supérieures à 108°.

Pentagone et réflexions successives :

On effectue une symétrie du pentagone de Dürer par rapport à la droite (BC), puis on réitère cette transformation de manière à obtenir dix pentagones.



L'erreur concernant les angles du pentagone apparaît ici clairement.

4- vérification analytique :

Etude analytique à la "main" :

Etude analytique de l'angle $\widehat{ABC}$ du pentagone de Dürer

Considérons le repère orthonormal dans lequel $A(-1;0)$ et $B(1;0)$.

Le triangle ABF est équilatéral donc $F(0;-\sqrt{3})$.

Le quadrilatère ABFE est un losange donc $E(-2;-\sqrt{3})$.

FI = 2 donc $I(0;2-\sqrt{3})$

L'équation de la droite (CI) est alors : $y = x + 2 - \sqrt{3}$.

L'équation du cercle de centre B passant par C est : $(x-1)^2 + y^2 = 4$.

Les coordonnées du point C sont donc les solutions du système :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4 \\ y = x + 2 - \sqrt{3} \end{cases} \text{ avec } x > 0$$

On obtient l'équation : $2x^2 + (2-2\sqrt{3})x + 4 - 4\sqrt{3} = 0$.

$$\text{Puis } x = \frac{\sqrt{2(3\sqrt{3}-2)} + \sqrt{3} - 1}{2} \text{ et } y = \frac{\sqrt{2(3\sqrt{3}-2)} - \sqrt{3} + 3}{2}$$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$ sont donc $\left(\frac{\sqrt{2(3\sqrt{3}-2)} + \sqrt{3} - 3}{2}; \frac{\sqrt{2(3\sqrt{3}-2)} - \sqrt{3} + 3}{2} \right)$

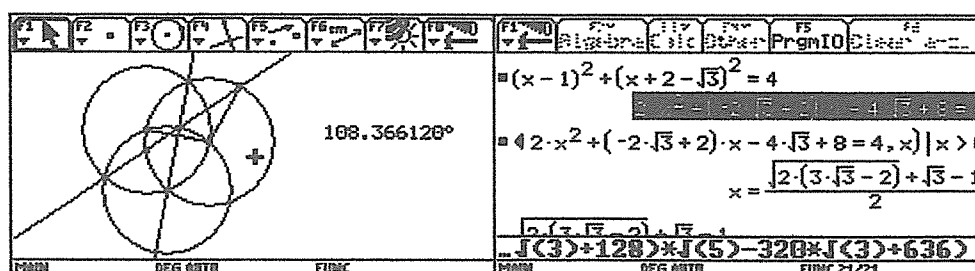
Ce qui donne $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{-\sqrt{2(3\sqrt{3}-2)} - \sqrt{3} + 3}{4}$ et $\widehat{ABC} \approx 108,36612^\circ$

$\cos(108^\circ) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$, on peut ainsi montrer directement que $\widehat{ABC} \neq 108^\circ$ en comparant $\sqrt{2(3\sqrt{3}-2)}$ et $\sqrt{5} + 2 - \sqrt{3}$, en passant au carré et en simplifiant, cela revient à comparer: $2\sqrt{15} - 4\sqrt{5}$ et $-10\sqrt{3} + 16$ puis $556 - 320\sqrt{3}$ et $140 - 80\sqrt{3}$ et enfin $(240\sqrt{3})^2$ et 416^2 .

Conclusion : le polygone de Dürer n'est pas régulier.

Etude avec la TI-92 :

Les calculs effectués à la main peuvent être aussi menés avec une TI-92.



$x + 2 - \sqrt{3} \rightarrow y$ $\frac{2 \cdot (3 \cdot \sqrt{3} - 2)}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 3/2$ $\frac{-(2 \cdot (3 \cdot \sqrt{3} - 2) + \sqrt{3} - 3)}{4} \rightarrow a$ $J(3)+128 \cdot J(5) - 320 \cdot J(3) + 636$	$\frac{2 \cdot (3 \cdot \sqrt{3} - 2)}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 3/2$ $\frac{-(2 \cdot (3 \cdot \sqrt{3} - 2) + \sqrt{3} - 3)}{4} \rightarrow a$ $\frac{-(2 \cdot (3 \cdot \sqrt{3} - 2) + \sqrt{3} - 3)}{4}$ $J(3)+128 \cdot J(5) - 320 \cdot J(3) + 636$
$\cos(108)$ $a = \frac{-(\sqrt{5} - 1)}{4}$ $(\cos^4(a)) \rightarrow \text{DMS}$ $2 \cdot (3 \cdot \sqrt{3} - 2) \rightarrow s$ $J(3)+128 \cdot J(5) - 320 \cdot J(3) + 636$	$\frac{-(\sqrt{5} - 1)}{4}$ $108^\circ 21' 58.032585216''$ $false$ $(2 - \sqrt{3} + \sqrt{5})^2 \rightarrow t$ $s - t$ $(2 - \sqrt{3} + 4) \cdot \sqrt{5} - 4 \cdot \sqrt{3} + 12$ $(2 - \sqrt{3} - 4) \cdot \sqrt{5} + 10 \cdot \sqrt{3} - 16$ $2 \cdot (\sqrt{3} - 2) \cdot \sqrt{5}$ $20 \cdot (\sqrt{3} - 2)^2$ $-10 \cdot \sqrt{3} + 16$ $J(3)+128 \cdot J(5) - 320 \cdot J(3) + 636$
$(-10 \cdot \sqrt{3} + 16)^2$ $\text{expand}(20 \cdot (\sqrt{3} - 2)^2)$ $-80 \cdot \sqrt{3} + 140$ $-80 \cdot \sqrt{3} + 140 - (-320 \cdot \sqrt{3} + 556)$ $240 \cdot \sqrt{3} - 416$ $(240 \cdot \sqrt{3})^2$ 416^2 $J(3)+128 \cdot J(5) - 320 \cdot J(3) + 636$	$-320 \cdot \sqrt{3} + 556$ $-80 \cdot \sqrt{3} + 140$ $-80 \cdot \sqrt{3} + 140 - (-320 \cdot \sqrt{3} + 556)$ $240 \cdot \sqrt{3} - 416$ $(240 \cdot \sqrt{3})^2$ 416^2 172800 173056 $J(3)+128 \cdot J(5) - 320 \cdot J(3) + 636$

5- proposition d'autres constructions du pentagone régulier.

Un club mathématique virtuel

Alain Larroche

Pendant l'année 1997-1998 j'avais créé un club mathématique que j'avais appelé Eurêka dans le lycée Thierry Maulnier à Nice. Ce club était ouvert aux élèves de seconde du lycée.

Malheureusement l'année scolaire suivante, 1998-1999, je me suis retrouvé contre mon gré en zone de remplacement et je ne pouvais pas créer un club puisque je pouvais à tout moment être sollicité pour intervenir dans d'autres établissements. En conséquence, j'ai décidé de créer un club virtuel du même nom que le club que j'avais créé l'année précédente. Pouvant intervenir soit en collège soit en lycée j'ai donc pensé à mettre en ligne un club collège et un club lycée. Ainsi lorsque je fais un remplacement court, au lieu de faire un cours qui est déjà fait par le professeur en titre, je travaille avec les élèves dans mon club leur faisant à la fois travailler les mathématiques et l'Internet.

Par ailleurs, un élève, issu d'une autre académie que celle où je me trouve, m'avait communiqué une solution d'un problème niveau lycée. Lui demandant alors plus de renseignements sur la classe et l'établissement où il se trouve, il me répond qu'il est en math sup et qu'il s'était permis de résoudre cet exercice car il ne trouvait pas de problèmes universitaires. C'est pour cela que j'ai également greffé un club université dans Eurêka.

Bien entendu, je suis ouvert à toute proposition relative à l'utilisation d'Internet pour le développement de clubs mathématiques.

PS : l'adresse du site est <http://perso.wanadoo.fr/eps>
Ci-jointe une vue de la page d'accueil du site.

Création d'un club de Mathématiques.

Eric Moccand

Mon problème pour la création d'un club, et certainement le seul, est de faire venir les premiers élèves. Ensuite je pense qu'il faut entamer un dialogue avec ceux qui veulent participer, voir leur centre d'intérêt pour faire évoluer mes propositions vers leurs attentes.

Je crois que le club doit évoluer avec les participants. Il doit être ce qu'ils en feront. Cela doit être, à mon idée, un lieu de vie et d'échange, un lieu d'envie. J'aimerais qu'ils se posent des questions, qu'ils y répondent et qu'ils s'aperçoivent que souvent chaque réponse apporte une question nouvelle.

Ensuite, je pense que le club, doit aussi être un lieu de création par rapport aux Mathématiques, que chaque projet que les élèves porteront pendant l'année doit venir d'eux, de leurs idées que se soit sur la forme aussi bien que sur le fond.

C'est pour cela que l'annonce du club se fera vers plusieurs directions. Les quatre thèmes ne seront peut-être pas abordés mais ils doivent permettre à chacun de se faire une idée de ce qu'il peut y trouver. Chaque thème aura un descriptif et un exemple.

1^{er} thème : Le rallye.

C'est un thème classique, qui peut rassurer certain en retrouvant un support plus proche de ceux qu'ils trouvent en classe.

Résolution d'exercices de rallye, affichage d'exercices de rallye ou de problèmes sur un lieu ouvert à tous les élèves du lycée, correction de solution donnée par d'autres élèves (ce qui leur permettra de pouvoir comparer les différentes idées, de se poser la question de savoir si l'une est plus efficace qu'une autre et de déterminer si les réponses données sont exactes).

2nd thème : Art-Math.

Analyse de contenu mathématique utilisé dans un film, un roman, une bande dessinée ou une pièce de théâtre.

Ce thème me vient de la vision du film « cube » où dans un thriller classique sont utilisés les nombres premiers, les coordonnées dans l'espace et le déplacement de pièce d'un cube.

Il faudrait qu'ils viennent après avoir vu un film, une pièce de théâtre ou la lecture d'un livre, d'une poésie où sont utilisées une ou plusieurs notions mathématiques.

En se posant les questions : quelles sont ces notions , pourquoi interviennent-elles, serait-il possible de demander à l'auteur le pourquoi ? Faire une projection si c'est un film. Etc.

3^{ème} thème : Recherche.

Un thème sur une année avec participation possible d'intervenants extérieurs qui travaillent sur le sujet.

La proposition est basée sur la théorie des graphes en partant du problème de Königsberg, les graphes planaires, les graphes Eulériens, les stratégies des jeux utilisant les graphes.

4^{ème} thème : Créa-math.

Prendre un thème ou un livre mathématique: essayer d'en faire une pièce de théâtre.

Ce thème est des plus vague mais peut permettre à certains élèves de s'épanouir en combinant un intérêt mathématique et artistique. La pièce de théâtre n'est pas limitative.

Les problèmes pratiques rencontrés en ce début d'année au lycée, viennent surtout des emplois du temps des élèves et des professeurs. Beaucoup d'élèves ont cours entre 13 heures et 14 heures.

Alors que le créneau horaire du club ne peut être que celui de 12 h – 14 h
Ce problème devrait être réglé pour la rentrée prochaine et les horaires des clubs pourraient être intégrés dans les emplois du temps, d'après les propos de Monsieur le Proviseur.

Ne pouvant intervenir sur les deux heures du club, je vais débiter le club avec un collègue stagiaire qui est intéressé et animera la seconde heure. Un autre collègue est intéressé par la partie Rallye et pourrait prendre en charge ce thème.

PS : ci-jointe une affiche pour l'ouverture du club.

ART-MATH

Analyse des contenus mathématiques de film, de roman, de pièce de théâtre, de bande dessinée.

Exemple : Le film Cube

Six individus se retrouvent à leur réveil enfermés dans une prison étrange, un labyrinthe composé de cubes métalliques

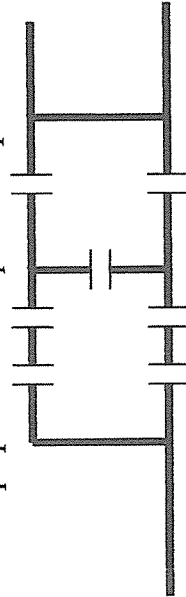
Des sas permettent de circuler d'une cellule à l'autre, mais les parois recèlent de pièges mortels. Un mathématicien a été engagé pour vérifier que les calculs sont exacts.

RECHERCHE

Recherche sur un problème donné.

Exemple : Graphe planaire – graphe Eulérien

Sur le Pregel, fleuve qui traverse Koenigsberg, ancienne ville allemande de Prusse orientale qui s'est longtemps appelée Kaliningrad, se trouvent deux îles, reliées entre elles et aux rives par sept ponts. Au XVII^e siècle, un curieux s'est posé la question suivante : « est-il possible de traverser chacun des sept ponts en ne passant qu'une fois sur chacun ? »

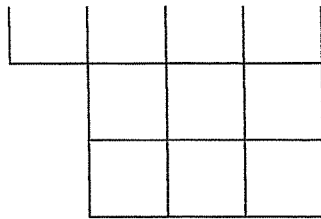


RALLYE

Résolution de problème de rallye ou de concours Kangourou.

Exemple : EN DEUX COUP DE CISEAUX ?

Découpez cette figure par des coups de ciseaux rectilignes de façon à obtenir un carré en assemblant les morceaux obtenus. Peut-on le faire en deux coups de ciseaux ?



CRÉA-MATH

Création d'une pièce de théâtre sur un thème ou une œuvre mathématique.

Exemple : Les éléments d'Euclide.

LES TABLES RONDES

PREMIERE TABLE RONDE :

Fonctionnement d'un club mathématique

Dominique Roux

Nous n'avons pas eu le temps de définir clairement ce qu'est un club (ou atelier ou...) mais cela n'est pas essentiel, la notion première est plutôt celle D'ANIMATEUR sur laquelle nous n'avons pas eu non plus le temps de discuter et sur laquelle il faudrait revenir (dans une autre U.E. ?). Nous avons abordé quelques points qui sont des questions se posant immédiatement à celui qui veut créer puis animer un club mathématique.

1) Le contact avec *le chef d'établissement* est primordial. L'animateur doit s'entendre avec celui-ci sur un local et un horaire et lui présenter une affiche-annonce qu'il visera. L'horaire est souvent de une ou deux heures placées après le repas de midi ou en fin d'après-midi, en général une fois par semaine.

2) *L'affiche* d'annonce doit être sobre et claire, bien exprimer le fait que les activités proposées ne constitueront ni du soutien scolaire ni de l'approfondissement, mais être une invitation à rencontrer les mathématiques autrement, en complément à ce qui se fait en classe, au moyen d'activités périscolaires motivantes et variées qui seront pour les participants une source de plaisir et une invitation à la recherche.

Un élément essentiel d'un club maths est *l'armoire*, avec étagères, si possible fermant à clé, dans laquelle on rangera les différents matériels, livres, jeux, etc... Le local gagnera à être décoré par des images affiches.

3) *La question financière* se pose rapidement. D'une part l'animateur est en général rémunéré soit en HSE, soit même en HSA par l'établissement, ou même parfois le rectorat, ou bien par le FSE ; d'autre part l'animateur aura besoin d'acheter quelques matériels pédagogiques ou ouvrages. Il pourra demander un bon d'achat au gestionnaire ou agent comptable de l'établissement, les ZEP ont des moyens supplémentaires.

4) L'animateur aura à faire *des choix* pour l'organisation de son club : quels élèves ? Quels effectifs ? Comment traiter l'hétérogénéité ?... Un effectif raisonnable va de 5 à 25 participants, au-delà de 30 une organisation appropriée est nécessaire. Le club peut très bien travailler avec plusieurs sous-groupes et sur plusieurs niveaux. Un thème universel est intéressant dans la mesure où il démarre sans connaissance préalable, au niveau zéro, et où il permet à chacun d'avancer selon ses moyens et son bagage mathématique.

L'essentiel est d'obtenir une motivation suffisante des participants.

5) *Le club peut fonctionner* avec un seul animateur ou avec plusieurs, et un club ayant quelques années d'existence pourra être animé partiellement par des élèves formés qui auront compris les objectifs, méthodes de travail, au cours des années antérieures. On peut aussi penser à des formes de coopérations, d'utilisation d'emplois jeunes ou d'autres formes de tutorat.

Un temps fort peut être l'invitation d'un conférencier ayant un certain renom. Une façon originale de résoudre le problème du bruit est de travailler dans une atmosphère musicale appropriée (Bach, etc...). L'essentiel, pour que le club fonctionne bien est que chacun soit à l'aise, se sente bien, éprouve un plaisir esthétique dans les activités proposées, et si possible goûte à l'émotion de la recherche.

On cherchera à obtenir de chaque élève un projet en le laissant aller, selon sa sensibilité, vers un choix.

6) Pour qu'un club puisse *durer*, il sera nécessaire de fidéliser les élèves. Pour cela il faut cultiver une *mémoire* du club : dans l'armoire on entreposera des fiches rendant compte des activités, des travaux d'élèves et on cherchera à développer les différents moyens *d'expression* du club sous forme d'affiches ou expositions ou petit journal ou brochures réalisées par le club.

Certains clubs créent un site internet. Ce nouveau moyen de communication permettra de se relier au site D'ANIMATH qui sera une aide puissante.

7) Les idées ? Le véritable moteur d'un club est le choix approprié des activités, qui tout en ayant un aspect ludique débouchent sur d'authentiques réflexions de type mathématique. C'est tout l'art de l'animateur que de savoir proposer des activités motivantes, attractives qui permettront à chacun de se lancer dans une recherche et dans des réalisations valorisantes.

Une tentative de classification des activités pourrait être :

a) problèmes relatifs à des *formes* :

pentaminos, soma-cubes, les 30 cubes de Mac-Mahon, les trioker, les puzzles et problèmes de découpages, de pliages, les polyèdres...

b) problèmes relatifs à des *mouvements de pièces* :

jeu de pions, jeu de Nim, le solitaire, les échecs, le taquin, la tour de Hanoï, le problème des 8 reines sur l'échiquier, le parcours du cavalier, les dominos,...

c) problèmes du type *casse-tête* :

problèmes de Sam-Loyd, de Gardner, de Berloquin, jeux logiques, les carrés magiques, quelques problèmes plus difficiles pour élèves de terminale S (le volume des alliances, la copie de Bergson au concours général ; sections planes d'un cube, la pile de dominos)...

d) *Thèmes historiques* : quelques clubs travaillent sur ces sujets et ont produit de belles réalisations.

e) Enfin, certains clubs peuvent s'orienter vers les *compétitions* et préparer des élèves aux rallyes, tournois, olympiades ou au concours général.

On pourra puiser également de belles idées dans la liste des 23 thèmes de Didier MISSENARD ou dans les actes des colloques MATHS EN JEANS.

ANIMATH sera là pour aider et fournir des documents et des idées.

DEUXIEME TABLE RONDE :

Quelques réflexions de fin d'U.E.

Par Robert Noirfalise

C'est une tâche à la fois facile et difficile de faire une synthèse de cette U.E. et de dégager des perspectives.

Facile, car il suffit de passer la parole aux uns et aux autres qui pourront témoigner de la grande variété d'activités pouvant se développer dans le cadre d'ateliers, de clubs mathématiques. Nous en avons eu un témoignage durant cette U.E., dans les divers ateliers mais aussi au cours des échanges plus informels entre participants. Un trait commun ressort, me semble-t-il, c'est le dynamisme, l'enthousiasme et ce, malgré les difficultés de mises en oeuvre, de ceux qui se sont essayés à l'aventure que procure la vie d'un club mathématique dans un établissement scolaire. Je ne suis pas sûr que les actes de cette U.E. puissent complètement rendre compte de toute la richesse de ce qui nous a été montré ici : la variété de matériel que nous avons pu manipuler, source de problèmes, ne peut pas aisément se mettre en texte. Gageons cependant que les auteurs d'ateliers sauront témoigner aussi dans les actes de tout ce qu'ils nous ont fait partager pendant ces quelques jours.

Plus difficile, s'il s'agit de dégager des questions de fond sur le sujet qui nous occupe, à savoir comme le disait Paul-Louis Hennequin dans son discours d'ouverture "Qu'est-ce qu'un club de maths ? Quelles sont ses fonctions ?"

Dans l'atelier "Maths en Jeans, on nous a montré qu'une des premières choses à faire lors de l'étude d'une question est de clarifier celle-ci, de se donner des mots pour parler d'objets qui sont à extraire intellectuellement du domaine de réalité, celui du problème.

Une façon de clarifier une première question posée dans toute sa généralité est de lui associer d'autres questions

Des questions, il y en a eues et je vais me permettre d'en pointer quelques-unes que j'ai pu entendre en écoutant les conférences, en participant aux ateliers et peut-être surtout en ces moments qui ne sont pas institués que sont les conversations de couloir ou lors des repas.

Je voudrais cependant prendre une précaution : on peut répondre à une question de diverses façons. On peut y répondre de façon militante : on croit, notre intuition, nos expériences en la matière, nous portent à croire que nous avons raison de vouloir développer des clubs mathématiques et notre meilleur argument est peut-être l'enthousiasme ou du moins les satisfactions dont nous pouvons témoigner. En ces jours où les horaires de mathématiques diminuent, où on constate une certaine désaffection des lycéens pour les études scientifiques, des réponses militantes sont très certainement utiles. On a besoin de militants pour faire évoluer le monde!

On peut aussi y répondre de façon moins militante, prendre de la distance par rapport à nos intuitions, se demander si nos enthousiasmes ne nous aveuglent pas, essayer d'adopter un point de vue contraire, bref, prendre les clubs de maths comme objet d'études et non plus comme une cause à défendre. On peut néanmoins espérer des études faites qu'elles donnent des arguments objectifs aux militants.

Qu'est-ce qu'un club de maths? A l'occasion de cette U.E., nous avons eu une définition en extension avec les multiples exemples fournis. Un autre enjeu serait d'en donner une en compréhension.

Il y a tout d'abord des questions portant sur les rapports entre clubs de mathématiques et ce qui peut se faire en classe. C'est un champ d'interrogation qui peut être rapidement polémique.

Par exemple, lors de la table ronde de l'avant dernier jour sont apparues les questions suivantes:

"Le club de maths est-il une remédiation aux défauts de l'enseignement fait en classe?"

"Les vrais maths seraient dans les clubs! Est-ce à dire que les mathématiques faites en classes seraient fausses?"

On peut au moins rétorquer qu'à défaut d'être vraies ou fausses, les mathématiques enseignées dans le secondaire sont sûrement utiles à qui veut poursuivre des études scientifiques ou technologiques. Sans aller chercher les formations longues de chercheurs scientifiques ou d'ingénieurs, il suffit pour s'en convaincre de parcourir, par exemple, les programmes de mathématiques de la plupart des DUT. La maîtrise en compréhension des technologies modernes s'appuie entre autres sur des résultats et des techniques mathématiques. Les besoins en maths ne sont pas réservés aux seuls chercheurs.

"Peut-on espérer transférer les pratiques développées dans des clubs à une classe ordinaire?"

Oui, bien sûr mais je crois qu'il convient d'avoir une certaine prudence. Je voudrais illustrer ce point en faisant référence à un petit travail que nous avons mené à l'IREM de Clermont-Fd dans un groupe bac/post-bac regroupant des enseignants de lycée et du supérieur. Nous avons entendu Pierre Bernard lors de sa conférence, dire qu'on peut effectivement s'interroger sur les vertus de l'enseignement secondaire et ses effets, en particulier, sur le rapport de certains bacheliers scientifiques à la démonstration : certains étudiants de Deug cessent de prendre des notes dès lors qu'un enseignant attaque une démonstration - noter l'énoncé du théorème leur paraît suffisant ! Ce type de remarques et d'autres nous a conduits à rechercher les occasions d'entraîner les lycéens à la pratique de certains raisonnements comme le raisonnement par l'absurde, l'analyse-synthèse.... On s'est demandé aussi si l'on pouvait donner des problèmes plus difficiles, des problèmes où la marche à suivre pour la solution n'est pas appelée par l'énoncé. Peut-on donner de tels problèmes au baccalauréat (si l'on veut que de tels problèmes soient l'objet d'un entraînement systématique, cela semble une condition nécessaire). Un problème nous est apparu, auquel on ne pensait pas a priori et lié aux flux des étudiants selon les filières et les spécialités. C'est ainsi qu'aujourd'hui les lycéens choisissent davantage la spécialité "science de la vie", plus que la spécialité « mathématique » ou que la spécialité « physique » (dans notre académie, les répartitions sont dans l'ordre de citation ; 50%, 30%, 20%). Certains lycéens fuiraient les formations de réputation difficile. Ne risque-t-on pas alors d'accentuer la fuite vers d'autres secteurs en rendant les mathématiques plus difficiles? Certes il peut être attrayant de réussir dans une voie difficile mais cet attrait peut ne pas être partagé par tous.

Daniel Roux lors de sa conférence, après nous avoir rappelé quelques éléments mathématiques sur les séries de Fourier qui s'enseignent en Spéciales, nous en a montré une belle application au traitement numérique d'images avec des résultats concrets et spectaculaires (dans le domaine de la compression numérique des images). En classes de Spéciales, ce sont les séries de Fourier qui font l'objet d'un enseignement, pas la compression numérique et pourtant on aurait là, semble-t-il, un bel exemple pour justifier un enseignement d'objets pouvant paraître bien abstraits. Le temps manque cruellement pour développer des applications dans les classes, mais il y a de bonnes raisons à cela: il convient, du moins dans les formations générales, de présenter les savoirs fondamentaux, ceux-là mêmes qui en d'autres lieux, en d'autres temps vont permettre d'investir de travailler d'autres champs. Un autre exemple de cela est donné par la cryptographie en spécialité math en TS. On pouvait penser, un peu naïvement, que l'arithmétique autoriserait des développements sur la cryptographie : c'est un domaine qui a connu un regain d'actualité avec le développement de l'informatique et des communications électroniques. Belle occasion de montrer des usages modernes de théorèmes dus à Euclide, Fermat, Gauss, Bezout.... Non, le temps manque. Certes on trouve quelques exercices qui traitent de cryptographie mais on ne peut pas dire que l'on traite le sujet.

Je me permets d'insister sur cette dimension du temps car c'est sûrement une des contraintes pesant le plus sur l'enseignement des maths en classes ordinaires, contraintes

dont on peut se libérer, au moins en partie dans un club de mathématiques. Une structure comme celle annoncée des TPE (sans programme à parcourir nécessairement) devrait aussi autoriser des activités comme celles que l'on peut rencontrer dans certains clubs.

D'autres questions se posent à propos de certains exemples d'activités que l'on peut proposer dans un atelier ou un club:

Peut-on assurer que toute activité, par exemple de découpage, de jeux, de constructions, conduit à faire des mathématiques? Si, oui qu'est-ce que l'élève apprend? Apprend-il des maths?

On peut aussi se demander comment des mathématiques apprises localement (celles apprises dans le club) peuvent s'insérer dans un édifice plus vaste.

Je sais qu'un argument souvent avancé est que l'on développe dans ce type d'activité des qualités d'esprit, d'analyse, esprit critique, aptitude à se poser des questions, imagination, esprit créatif... La liste pourrait s'allonger. Or on postule comme si cela allait de soit, que ces qualités une fois installées chez un sujet vont y rester. Je dois dire que les travaux récents dans divers secteurs, psychologie cognitive, didactiques, remettent en cause cette façon de penser en terme d'aptitudes générales. Les travaux sur des effets de transfert d'un secteur à un autre déçoivent souvent les attentes de ceux qui y croient et mettent en relief, à l'inverse des effets de contextes largement sous-estimés par la culture courante. Y-a-t'il transfert ? Qu'est qui se transfère ? Questions ardues, difficiles : il est clair cependant qu'il convient de repenser les modèles que la culture courante donne en ce domaine.

Les clubs ne sont-ils pas une occasion de former à la recherche, de développer l'esprit scientifique ?

Remarquons que les programmes officiels des classes de mathématiques affichent aussi ce type d'ambitions.

Je me suis demandé si dans le développement d'arguments allant dans ce sens, on ne mettait pas, implicitement, en avant une pratique sociale, parmi bien d'autres, celle de la recherche en l'idéalisant et en l'anoblissant.

- Le chercheur serait-il plus noble que le technicien qui applique les résultats de la recherche ? Les recherches en ergonomie du travail tentent à montrer qu'on ne saurait réduire l'expertise d'un technicien à une seule application d'un savoir aussi élaboré soit-il.

- Ne se focalise-t-on pas sur les aspects les plus nobles de la recherche, de la pensée, ce que l'on trouve très certainement dans le plaisir qu'il y a à chercher, à se sentir penser. Il est sans doute vrai qu'il peut être jubilatoire ou pour le moins plaisant de se sentir penser avec ce sentiment de maîtriser des objets de pensée, de progresser vers la solution d'un problème consistant et qui offre de la résistance. N'y a-t-il pas d'autres aspects de l'activité mathématique, certes moins nobles mais cependant tout aussi utiles à son économie, ne serait-ce que de s'assujettir à une culture existante, faite par d'autres. Apprendre ce qui existe, s'entraîner à certains calculs ou raisonnements, ce qui peut entraîner des répétitions, des résultats qu'il vaut mieux savoir par coeur...

Ces propos peuvent paraître excessivement polémiques et il est vrai que je me suis peut-être attaché à prendre certaines propositions en faveur des ateliers, des clubs mathématiques, qui me semble-t-il mériteraient d'être davantage étayées et donc faire l'objet d'études. Ceci pourrait très certainement être le thème d'une prochaine université d'été : la réflexion nécessaire ne doit cependant pas détruire cet état d'esprit chargé d'enthousiasme, celui même qu'il nous a été donné de rencontrer durant ces quelques jours passés à Saint-Flour.

LES CONFÉRENCES

L'UNIVERS DES POLYÈDRES

DU TÉTRAÈDRE AUX POLYÈDRES EXOTIQUES.

Jean Brette

Cette conférence s'articule sur plusieurs problèmes rencontrés dans l'étude des polyèdres : polyèdres semi-réguliers, permutoèdres, deltaèdres, polyèdres flexibles... Ce thème a été repris dans plusieurs ateliers. Jean Brette nous a donné la bibliographie ci-dessous. D'ailleurs la bibliothèque de l'U.E. contenait de nombreux ouvrages sur la question.

Marcel Berger : Géométrie, T.3, *Cedic et Nathan ed.1978*.
Un classique de la présentation moderne.

H.S.M. Coxeter, Regular Polytopes, *Macmillan, 1963, Dover 1973*)
La Bible ! surtout si l'on souhaite s'immerger dans la quatrième dimension.

Euclide : Les Éléments. T. 1 (*trad G. Kayas*) *CNRS, 1978*
On ne peut certes pas trouver plus classique !

L. Pacioli : La divine proportion, *1509 et Librairie du compagnonage, (sans date mais récent)*
avec les gravures de Léonard De Vinci.

Sur les polyèdres semi-réguliers :

Badoureaux : Mémoire sur les figures isocèles, *Journ.al de l'Ecole Polytechnique 49, 1881*
Sur les pavages et les polyèdres semi-réguliers.

Catalan : Mémoire sur la théorie des polyèdres . *Journal de l'Ecole polytechnique, 41, 1865*
Fait l'inventaire des types de sommets et ajoute prismes et anti-prismes.

Sur les permutoèdres :

F. Chung et S. Sternberg : Mathematics and the Buckyball. *American Scientist, Vol 81,1993*
Ils y parlent fort heureusement de plus de maths que de chimie, et codent A5 sur les sommets d'un ballon Adidas, ou C60, ou icosaèdre tronqué.

Donald Knuth : The art of computer programming, T. 3, *Addison Wesley, 1975*
le chapitre 1 est consacré aux permutations.

Sur les deltaèdres convexes et les polyèdres de Johnson

H. Freudenthal and B.L.van der Waerden : "Over een Bewering van Euclides", *Simon Stevin, vol. 25, pp. 114-121, 1947*.
L'article originalen hollandais !

V.A. Zalgaller: Convex Polyhedra with Regular Faces, *Consultants Bureau, 1969*.
Pour la curiosité des masochistes ? Décrit par G. Hart (voir Web ci-dessous) comme contenant la démonstration (fastidieuse) du fait qu'il n'existe que 92 polyèdres convexes à faces polygonales régulières.
La conclusion de Hart : Has anyone ever really read this? En tout cas, pas moi !

Sur les polyèdres sans diagonales :

Akos Csaszar, "A polyhedron without diagonals", *Acta Univ Szegendiensis, Acta Scient. Math*, v. 13, pp 140-2, 1949.

Sur les polyèdres flexibles

R. Bricard :Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé, *J. Math. pures et appl.* 3, 1897

La grande idée.

A. Cauchy : Sur les polygones et polyèdres . *Journal de l'Ecole polytechnique*, 19, 1813

Un convexe ne fléchit pas.

R. Connelly : A counter example to the rigidity conjecture for polyedra. *Publ. Math. IHES*, 1978

Après 160 ans, on sait enfin : il existe au moins un non-convexe fléchissant.. "Mieux, il a même réussi à en construire un modèle en papier" dit le compte-rendu annuel de l'IHES. !!!

R. Connelly, I. Sabitov & A.Walz : The bellows conjecture *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, 1997

Ou : pourquoi le soufflet ne peut pas se dégonfler !

H. Lebesgue : Octaèdres articulés de Bricard, *L'enseignement math.* T13, 3

Sur les toroèdres :

J. Bokovsky et J. Mills : Regular polyedra with hidden symmetries, *Math. Intell.* Vol. 10. 1 1988

J. Bokovsky et J. Mills : A polyedral realization of F. Klein's map (3, 7) on a Riemann surface of genus 3. *J. London . Math. Soc.* 32, 1985

Pour construire votre ménagerie polyédrale :

H. M. Cundy et A.P. Rollett : Modèles mathématiques , *Cedic*, 1978

Un classique. Consacre une centaine de pages aux polyèdres (Chap 3) (réguliers, archimédiens, étoilés, ...) Avec tables numériques (côtés, angles dièdres , etc..) Malheureusement introuvable aujourd'hui. Reste la version anglaise : *Mathematical Models, Oxford, 1961; (3ème éd par Tarquin publ., 1981).*

Alan Holden : Formes, espaces et symétries. *Cedic* 1977.

Richement illustré, décrit la construction de nombreux polyèdres, avec sa technique "perso". Malheureusement introuvable aujourd'hui. Il vous reste la version anglaise : *Shapes, Spaces and Symmetry, Columbia Univ. Pr, 1971, (Dover reprint, 1991).*

Peter et Susan Pearce: Polyhedra Primer, *Van Nostrand Reinhold*, 1978.

Très illustré, décrit la construction de nombreux polyèdres.

Sur le Web :

<http://www.li.net/~george/virtual-polyhedra/vp.html>

<http://www.li.net/~george/pavilion.html>

Ces deux sites par Georges Hart, grand constructeur de polyèdres, et sculpteur. Plus de 1000 polyèdres y sont visibles ... si vous disposez de VRML (pour *Virtual Reality Modeling Language*) . Sinon, vous pouvez toujours consulter les commentaires sur les différentes familles, c'est toujours instructif, et assez souvent illustré d'un exemple. Bibliographie.

LE 13^e PROBLÈME DE HILBERT :

Un carrefour de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie.

Jean-Pierre Kahane

Les participants de l'U.E. connaissent l'importance des 23 problèmes posés par David Hilbert, en 1900, au Congrès International des Mathématiciens à Paris. Je voudrais les entretenir du 13^e problème et de la solution de Kolmogorov.

L'origine du problème est la théorie des équations algébriques. Jusqu'au degré 6 les équations algébriques peuvent être résolues au moyen de fonctions de deux variables. L'équation générale de degré 7 peut être réduite à

$$(1) \quad X^7 + xX^3 + yX^2 + zX + 1 = 0$$

au moyen d'additions et de fonctions d'une variable. La solution de l'équation (1) est une fonction des 3 variables x, y, z - comme l'équation (1) admet 7 racines, c'est d'ailleurs une fonction multiforme -. Hilbert demande de montrer que l'équation (1) ne peut pas être résolue au moyen de fonctions continues de deux variables seulement par une chaîne finie de substitutions. Et il ajoute qu'il sait établir l'existence de fonctions analytiques de trois variables x, y, z qui ne peuvent pas s'obtenir au moyen de fonctions de deux variables seulement.

Se fiant à cet énoncé de Hilbert, les mathématiciens ont généralement cru, pendant 50 ans, qu'il existait de bonnes fonctions de trois variables réelles x, y, z ,

qui ne pouvaient pas s'écrire en composant des fonctions continues de deux variables réelles. Certains ont même cru l'avoir démontré. La surprise a donc été grande, en 1957, lorsque le jeune mathématicien soviétique V. I. Arnold publia que toute fonction continue de trois variables peut s'écrire sous la forme

$$(2) \quad f(x, y, z) = \sum_{j=1}^9 f_j(\varphi_j(x, y), z)$$

où les f_j et les φ_j sont des fonctions continues.² Quelques semaines plus tard, un mathématicien soviétique très célèbre, A. N. Kolmogorov, qui avait déjà beaucoup réfléchi au problème (Arnold utilise certaines de ses idées) publia un résultat encore plus remarquable : toute fonction continue de n variables, définie sur le cube unité de $\mathbb{R}^n$, peut s'écrire

$$(3) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} g_q\left(\sum_{p=1}^n \varphi_{pq}(x_p)\right),$$

où les fonctions φ_{pq} sont monotones, continues, et indépendantes de f , et les fonctions g_q continues (et dépendant de f , naturellement).³ Ainsi toute fonction continue de n variables s'obtient au moyen de fonctions d'une variable, et d'additions, par une chaîne finie de substitutions.

Le problème de Hilbert se trouve donc résolu par la négative.

Du même coup, d'autres problèmes émergent :

1. Que voulait dire Hilbert en affirmant l'existence de fonctions analytiques de trois variables non représentables au moyen de fonctions de deux variables ? Ici la réponse est claire ; il s'agissait certainement de fonctions analytiques de deux variables .

2. Quels autres résultats positifs peut-on obtenir dans le sens indiqué par Hilbert, c'est-à-dire l'existence de "bonnes" fonctions de n variables non représentables au moyen d'un nombre fini de superpositions de "bonnes" fonctions de $n-1$ variables ? Une série de résultats dans cette direction est due au mathématicien soviétique A. G. Vitushkin ; nous en citerons quelques uns.

3. Dans la formule (3), qu'on appelle le théorème de superposition de Kolmogorov, peut-on imposer aux φ_{pq} , ou aux g_q , d'être de "bonnes" fonctions, dans un sens à préciser ? Evidemment, les réponses aux questions 2. et 3. constituent des sortes de réciproques les unes des autres.

4. Y-a-t-il une façon imagée de se représenter le théorème de superposition de Kolmogorov ? Quel rôle y joue l'intervalle $[1, 2n+1]$ où varie l'entier q ?

5. Y-a-t-il des applications de ce théorème à d'autres domaines de l'analyse ?

6. Si l'on revient à la motivation première de Hilbert, il s'agit d'équations algébriques. Que devient le problème si on se restreint à des fonctions algébriques des variables ?

Mon intention n'est pas de faire exactement le point sur toutes ces questions. Le lecteur intéressé pourra se reporter à [1], [2], [3]. [1] est le compte-rendu d'un colloque organisé en 1974 sur les problèmes de Hilbert par l'American Mathematical Society ; il contient notamment l'énoncé du 13ème problème (pp. 20-21), une étude de G. G. Lorentz (pp. 419-430), et un commentaire de V. Arnold et G. Shimura (pp. 45-46) relatif à la question n. 6 (superposition de fonctions algébriques). [2] contient une foule d'informations, plusieurs démonstrations complètes, et des idées importantes ; il peut intéresser le lecteur de savoir que son auteur, Vitushkin, qui sait mener à merveille des calculs très compliqués, et semble connaître parfaitement toute la littérature sur le sujet, est un aveugle. [3] contient des réponses qui me sont personnelles, en particulier à la question n. 5.

Je vais plutôt tenter de justifier le titre que j'ai donné à cet article : un carrefour de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie. Je vais d'abord exposer de l'algèbre très ancienne : la théorie des équations algébriques suivant Tschirnhaus (1651-1708), qui explique pourquoi les équations de degré 6 peuvent être résolues au moyen de fonctions de deux variables, et pourquoi l'équation générale du 7ème degré se ramène à la forme (1) au moyen d'additions et de fonctions d'une variable⁴. Puis j'indiquerai quelques

résultats dans la voie de Hilbert, et le rôle qu'y joue la notion d'objet générique – ou, de façon équivalente, de propriété quasi sûre – ; nous verrons aussi apparaître l' ϵ -entropie de Kolmogorov (1955)⁵, qui explique et permet maintenant d'exposer sans trop de mal les résultats de Vitushkin (1954)⁶. La partie "géométrique" sera l'interprétation du théorème de superposition de Kolmogorov ; là encore, on voit apparaître des objets génériques, et un mélange plaisant d'analyse et de topologie. Enfin, je tenterai de conclure avec quelques réflexions sur ce qui paraît important ou intéressant en mathématiques, sur les facteurs de permanence et les facteurs d'évolution.

On trouvera dans [4] la rédaction complète et détaillée de la conférence.

- [1] Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 28. Mathematical developments arising from Hilbert problems. Amer. Math. Soc. 1976.
- [2] VITUSHKIN, A. G. On representations of functions by means of superpositions and related topics. Enseign. Math. 23 (1977), 255-320.
- [3] KAHANE, J. P. Sur le treizième problème de Hilbert, le théorème de superposition de Kolmogorov et les sommes algébriques d'arcs croissants, pp. 76-101 in Harmonic Analysis Iraklion 1978, Lecture Notes in Math. 781 (1980).
- [4] KAHANE J. P. Le 13e problème de Hilbert, un carrefour de l'analyse et de la géométrie ; cahiers du séminaire d'Histoire des Mathématiques, n° 3, 1982 (U. Pierre et Marie Curie, Laboratoire de Mathématiques fondamentales). Ce texte a aussi été publié en suédois dans la revue « NORMAT ».

13. IMPOSSIBILITY OF THE SOLUTION OF THE GENERAL EQUATION OF THE 7TH DEGREE BY MEANS OF FUNCTIONS OF ONLY TWO ARGUMENTS.

Nomography* deals with the problem: to solve equations by means of drawings of families of curves depending on an arbitrary parameter. It is seen at once that every root of an equation whose coefficients depend upon only two parameters, that is, every function of two independent variables, can be represented in manifold ways according to the principle lying at the foundation of nomography. Further, a large class of functions of three or more variables can evidently be represented by this principle alone without the use of variable elements, namely all those which can be generated by forming first a function of two arguments, then equating each of these arguments to a function of two arguments, next replacing each of those arguments in their turn by a function of two arguments, and so on, regarding as admissible any finite number of insertions of functions of two arguments. So, for example, every rational function of any number of arguments belongs to this class of functions constructed by nomographic tables; for it can be generated by the processes of addition, subtraction, multiplication and division and each of these processes produces a function of only two arguments. One sees easily that the roots of all equations which are solvable by radicals in the natural realm of rationality belong to this class of functions; for here the extraction of roots is adjoined to the four arithmetical operations and this, indeed, presents a function of one argument only. Likewise the general equations of the 5th and 6th degrees are solvable by suitable nomographic tables; for, by means of Tschirnhausen transformations, which require only extraction of roots, they can be reduced to a form where the coefficients depend upon two parameters only.

Now it is probable that the root of the equation of the seventh degree is a function of its coefficients which does not belong to this class of functions capable of nomographic construction, *i. e.*, that it cannot be constructed by a finite number of insertions of functions of two arguments. In order to prove this, the proof would be necessary *that the equation of the seventh degree $f^7 + xf^6 + yf^5 + zf^4 + 1 = 0$ is not solvable with the help of any continuous functions of only two arguments.* I may be allowed to add that I have satisfied myself by a rigorous process that there exist analytical functions of three arguments x, y, z which cannot be obtained by a finite chain of functions of only two arguments.

By employing auxiliary movable elements, nomography succeeds in constructing functions of more than two arguments, as d'Ocagne has recently proved in the case of the equation of the 7th degree.*

* d'OCAGNE, M. Calcul graphique et nomographie, 2e édition, Octave Dorn et fils, Paris 1914.

LES PROBABILITÉS DANS L'INDUSTRIE

Pierre Bernard

Introduction Les applications du calcul des probabilités connaissent depuis quelques décennies un développement considérable. Sans considérer les statistiques, qui sont un monde à elles seules, l'explosion des finances mathématiques depuis les années 80 est un bel exemple d'utilisation de cette discipline.

L'intérêt pédagogique du calcul des probabilités est qu'il constitue un terrain de rencontre privilégié du réel et de son traitement mathématique, sorte de frontière entre deux phases: c'est une excellente approche de ce que l'on nomme modélisation.

Nous avons au cours de cet exposé à l'Université d'été *Les Mathématiques Autrement* survolé quelques applications en milieu industriel, en particulier dans les problèmes de dynamique des structures et leur fiabilité. Les secteurs concernés sont le génie civil des grands ouvrages (ponts à haubans tels que le Pont de Normandie), les ouvrages de l'ingénierie nucléaire, l'aérospatiale, les lignes électriques haute tension, les plateformes pétrolières en mer, ...

Les probabilités apparaissent à travers la modélisation des actions auxquelles ces structures sont soumises (houle, vent, séismes, trafic, foudre), ainsi que dans la connaissance imparfaite de leurs caractéristiques géométriques et mécaniques, qui en outre évoluent dans le temps.

Bref historique Le lecteur intéressé trouvera des éléments plus précis d'histoire du calcul des probabilités dans l'ouvrage collectif inter-IREM [1]. On attribue généralement la naissance du calcul des probabilités à Pierre de Fermat et Blaise Pascal. Leur apport essentiel n'était pas dans la mise en évidence d'événements accidentels, mais dans l'affirmation que dans ces situations, on pouvait dégager des lois, et que ces lois pouvaient s'exprimer en termes mathématiques. Les jeux de hasard constituaient le premier terrain privilégié de mise en oeuvre de leur réflexion (le mot hasard est d'origine arabe, et signifie *dés*). Mais c'était une forme de modélisation, et en toile de fond de ces situations relativement simples, se profilait en fait l'analyse du risque au coeur du développement de la société marchande (assurance du transport maritime par exemple). Voir à ce sujet le très intéressant dossier de Pour la Science de juillet 1999 [2]. Les choses se précisent lorsque, en 1793, l'Académie des Sciences de Paris, alors présidée par Condorcet, lance un concours pour une théorie mathématique des assurances maritimes [2].

Les probabilités dans les sciences de l'Ingénieur Il convient d'abord, dans ce domaine, de discuter la notion de probabilité. Lorsqu'un ingénieur fournit un calcul donnant la limite de chargement d'une poutre, il ne peut prétendre que cette réponse soit certaine. Il y a toujours des défauts, et le résultat doit être une variable aléatoire. Aucun système ne peut assurer une sécurité absolue de fonctionnement. Il est donc indispensable d'introduire une probabilité de ruine, ou risque, qui peut être très petite, mais jamais nulle.

La probabilité dans ce domaine ne peut relever d'une définition fréquentiste: il n'est pas question de se livrer à des expériences répétées pour observer combien de réacteurs nucléaires seront détruits dans telles ou telles conditions ...

Elle est ici une mesure du degré de certitude. Nous rejoignons J.Bernoulli, dans son *Ars Conjectandi* (1713): *La probabilité est en effet un degré de la certitude et en diffère comme la partie diffère du tout...*

Un exemple: identification de structures sous chargement ambiant Le type d'approche considérée dans ce paragraphe a été effectivement mis en oeuvre par la NASA, par des constructeurs aéronautiques, par EDF. Un programme national vient d'être lancé pour le développement de ce type de méthodes afin d'assurer le suivi des ouvrages d'art (ponts suspendus, ponts à haubans, ponts métalliques, ...). Il s'agit, à partir de mesures effectuées sur la structure lorsqu'elle est mise en mouvement par une sollicitation ambiante (vent, trafic), de déterminer si elle a subi des modifications profondes susceptibles de présenter un danger pour les usagers.

La formalisation mathématique du problème utilise la notion d'opérateur, baptisé système dans ce contexte. Si l'on ne tient compte, dans un premier temps, que des effets linéaires, la structure (ou système) sera modélisée par un opérateur linéaire, agissant sur un espace de fonctions appelées *entrées*, qui s'interprètent comme les actions agissant sur la structure, et prenant ses valeurs dans un autre espace de fonctions, appelées *réponses*, qui sont les mouvements de la structure. Un tel opérateur se représente par un produit de convolution:

$$\forall t \geq 0, \quad R(t) = \int_0^t h(t-s)e(s)ds,$$

où e est l'entrée, R la réponse, et h la *fonction de réponse impulsionnelle*, caractérisant la structure (comme son nom l'indique, $h(t)$ est la réponse à l'instant t de la structure soumise à une impulsion à l'instant initial 0). Si l'entrée est un vecteur, h est une fonction à valeurs matrices. A cette équation sont associés deux problèmes: le problème dit *direct* et le problème dit *inverse*.

Le problème direct consiste, l'état de la structure étant bien connu (connaissance traduite par la donnée de la fonction h), à déterminer la réponse R associée à une entrée e . Ce n'est pas cela qui nous intéresse ici.

Le problème inverse consiste à déterminer l'état de la structure (fonction h) à partir des observations d'une famille d'entrées et des réponses associées. C'est exactement notre objectif, une dégradation de la structure devant se traduire par une modification de la fonction h ainsi déterminée.

Quelle classe de fonctions d'entrée est-il judicieux d'utiliser? La fonction h étant la réponse à une impulsion (choc bref), on peut envisager de donner un coup de marteau à la structure et de mesurer la réponse dans le temps. Naturellement, pour obtenir des informations significatives, il faut que la réponse soit assez importante et dure suffisamment longtemps, ce qui suppose beaucoup d'énergie dans l'impulsion. Ceci n'est pas réaliste pour des structures de la taille de celles qui nous intéressent (pont, avion, plateforme pétrolière, centrale nucléaire), serait très coûteux et non sans danger.

C'est ici que le calcul des probabilités intervient. On montre en effet (voir par exemple l'ouvrage de Paul Krée et Christian Soize [4]) que si l'on utilise comme entrée un bruit blanc, modèle mathématique en première approximation pour l'ensemble des actions naturelles "ambiantes" (vent, trafic, évolution thermique,...), alors la réponse, qui est aléatoire (c'est un processus stochastique gaussien) a des caractéristiques spectrales (c'est à dire obtenues par transformation de Fourier) qui, d'une part caractérisent

la fonction h , et d'autre part peuvent être déduites d'observations du mouvement de la structure par des procédés de statistiques de processus assez classiques en matière de traitement du signal.

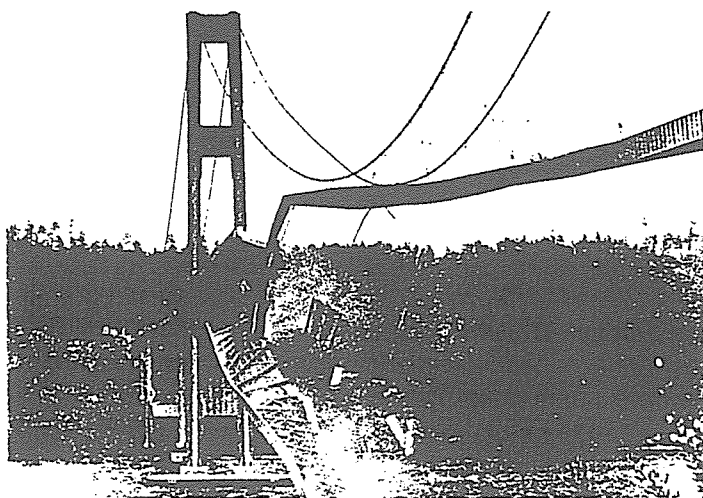
C'est ainsi que, par les outils de la théorie des processus stochastiques, on peut procéder au suivi d'une structure qui est mise en mouvement sous l'effet d'actions "ambiantes" (donc gratuites et de toutes façons présentes), non parfaitement connues (mais suivant des lois statistiques bien déterminées).

Conclusion Il s'agissait par cet exposé brièvement résumé ici de donner une idée de l'usage qui est fait du calcul des probabilités (et des statistiques) dans des domaines de l'ingénierie, afin d'élargir le panorama des enseignants de mathématiques sur les applications de leur discipline. Les techniques mathématiques mises en oeuvre pour ce type de problème d'identification de structures sont en fait très proches de celles rencontrées dans le domaine des finances mathématiques, un sujet en plein développement et très créateur d'emplois hautement qualifiés nécessitant une profonde culture en calcul des probabilités.

Un constat est en outre à dresser: c'est celui de l'accroissement considérable de l'usage du calcul des probabilités et des statistiques dans tous les domaines des technologies avancées.

Références

- [1] Commission inter-IREM statistiques et probabilités. Enseigner les probabilités au lycée, juin 1997.
- [2] Dossier Pour la Science: Les Mathématiques sociales, juillet 1999.
- [3] Chercheurs d'Energie. Direction des Etudes et Recherches, Electricité de France, 1996.
- [4] Paul Krée, Christian Soize, *Mécanique Aléatoire*. Dunod, 1983.



Photographie prise au moment où la travée centrale du pont de Tacoma (Etat du Washington) s'effondra dans l'eau sous l'effet d'un coup de vent n'excédant pas 70 km/h.

DES OUTILS MATHÉMATIQUES POUR LES IMAGES, DE L'ANALYSE DE FOURIER À L'ANALYSE EN ONDELETTES.

Daniel Roux.

1- Introduction

Nous souhaitons donner ici un aperçu de quelques notions mathématiques utiles dans le domaine des images. Le sujet "Images" est trop vaste pour être traité en un seul exposé de quelques pages: d'une part les progrès théoriques et technologiques sont incessants, d'autre part c'est un sujet situé au carrefour de plusieurs domaines scientifiques, un sujet qui fait appel à des connaissances étendues

- en Optique, Electronique, Chimie (l'image provient généralement d'une scène réelle qui met en jeu la lumière, des objets, des capteurs naturels ou artificiels, ce qui fait intervenir l'ensemble des "Sciences Physiques"),
- en Physiologie (il faut comprendre et exploiter la façon dont l'œil humain perçoit les images)
- en Analyse (la traduction mathématique d'une image est donnée par une fonction de deux variables réelles; on utilise les outils de l'Analyse harmonique et du Traitement du Signal),
- en Topologie, Géométrie (l'image peut représenter des objets réels qui sont eux même géométriques; il faut préciser les transformations subies et exploiter les invariants) et théorie des Fractales (une méthode performante de compression des images consiste à les représenter à l'aide d'itérations fonctionnelles, comme des fractales),
- en Informatique (on sait traduire une image en une suite de nombres, le traitement informatique est donc possible - et performant -: c'est le domaine de l'Infographie),
- en Statistiques (la masse des données numériques à traiter est si forte qu'il est souvent indispensable d'employer des outils statistiques), ...

Nous ne donnerons donc qu'une introduction limitée, touchant principalement la partie Analyse et Traitement du Signal. On trouvera en fin de texte une liste d'ouvrages qui peut permettre d'aller plus avant dans le domaine. Pour une première étape on peut lire "Ondes et Ondelettes: la saga d'un outil mathématique" de Barbara Burke Hubbard (Pour la Science, Belin, 1995), un livre remarquable d'initiation au sujet des ondelettes, aussi intéressant pour le spécialiste que pour le non-mathématicien (curieux).

Je me suis intéressé au sujet pour de multiples raisons:

Lors de mon doctorat il m'a fallu pour obtenir certains résultats sur des processus stochastiques commencer par construire des bases adaptées d'espaces fonctionnels. Les bases pertinentes pour cette étude étaient déduites de bases d'ondelettes. Il se trouve aussi que ces processus peuvent modéliser des images et présenter quelque utilité dans le problème délicat des textures d'images. Des applications pratiques sont actuellement en cours de développement.

Par ailleurs dans mon travail d'enseignant en Classes Préparatoires j'ai encadré les T.I.P.E. maths-informatique. Or le thème de ces T.I.P.E. pendant les années 1996 et 97 était "images et géométrie".

2- L'image analogique, l'image numérique; les modèles mathématiques correspondants.

On distingue les *images matérielles* -ayant une réalité physique - qui peuvent être analogiques (photographies, peintures, ...) ou numériques (sortie d'imprimante, image d'écran LCD, ...) et les *modèles mathématiques d'images*.

La modélisation mathématique d'une image analogique sera une fonction F définie sur un domaine $D=[a,b] \times [c,d]$ (rectangle du plan $\mathbb{R}^2$), celle d'une image numérique sera une suite "double" $S=(S_{ij})$ avec $i=1,2,\dots,M$ et $j=1,2,\dots,N$.

Les valeurs $F(x,y)$ comme S_{ij} sont positives, réelles pour F , entières pour S . Elles représentent l'intensité lumineuse au point (x,y) pour F , au point (i,j) pour S (on parle de pixel (i,j) dans ce dernier cas, pixel étant une contraction des termes "picture" et "element").

Remarques:

a) Bien sûr ceci ne prend en compte que les images monochromes, l'intensité donnant le niveau de gris (penser à une photographie N&B).

Pour les images en couleur il faut utiliser une fonction F ou une suite S à valeurs vectorielles (3 dimensionnelle) ainsi que la théorie dite de "synthèse additive" : on crée une couleur par addition de trois faisceaux lumineux de couleurs rouge, verte, bleue. Par exemple avec des faisceaux égaux en intensité

Rouge + Vert $\Rightarrow$ Jaune ; Rouge + Bleu $\Rightarrow$ Magenta ;

Bleu + Vert $\Rightarrow$ Cyan ; Rouge + Vert + Bleu $\Rightarrow$ Blanc.

Les couleurs intermédiaires sont produites en faisant varier l'intensité des faisceaux lumineux. Attention: pour l'impression sur papier on utilise la "synthèse soustractive" qui consiste à soustraire à la lumière blanche ses composantes bleues, vertes et rouges à l'aide de filtres (les pigments déposés sur le papier) respectivement jaunes, magenta et cyan.

b) Pour obtenir un signal analogique, l'observateur enregistre un phénomène réel (un son, une scène, ...) au moyen d'un procédé physique reproduisant les moindres détails, les moindres variations du phénomène sur un support par exemple une bande magnétique. (N.B. bien sûr il y a des limitations techniques et l'enregistrement n'est pas parfaitement fidèle, il y a dégradation de l'information). Une fois enregistré on peut stocker le signal, le transporter, le modifier et restituer le phénomène de départ (plus exactement ce qu'on observait ou entendait) en utilisant le procédé inverse.

Il faut une étape supplémentaire pour l'enregistrement et pour la restitution de signaux numériques:

- le signal analogique est converti en numérique grâce à un convertisseur analogique $\rightarrow$ numérique; le signal est échantillonné et quantifié, il ne reste alors qu'une suite de nombres entiers (en pratique un flot de 0 ou 1 c'est à dire un signal à seulement 2 niveaux!)

- dans l'autre direction (pour visualiser une image numérique par exemple) il faut un convertisseur numérique $\rightarrow$ analogique.

Le numérique présente des avantages indéniables. Par exemple la dégradation évoquée plus haut n'a plus lieu dans une copie numérique $\rightarrow$ numérique (même soumis à de légères perturbations on distinguera un niveau 0 d'un niveau 1). L'avantage principal du numérique tient à son parfaite adéquation avec l'informatique: pour le stockage, la copie, la transmission et surtout pour le "traitement" (modification, débruitage, compression, extraction de caractéristiques, ...). L'essor de l'informatique permet d'aller plus loin en créant des images de synthèse - qui n'ont pas d'origine analogique et résultent de procédures et de calculs -. Mais cela est un autre domaine, celui de l'infographie, pour lequel des références sont données en fin d'exposé.

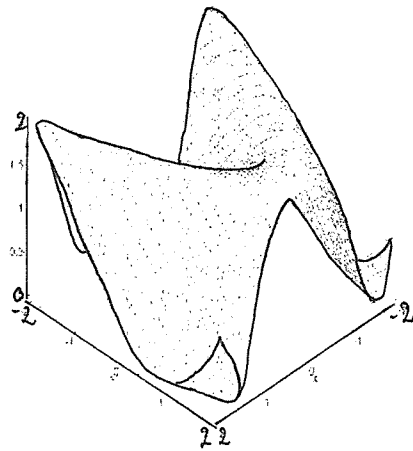
c) Pour l'image animée, la vidéo, il faut tenir compte d'une variable supplémentaire: le temps. On utilisera donc pour modéliser des fonctions F de trois variables et des suites S à trois indices. Là aussi le numérique présente des avantages considérables et se développe rapidement.

d) On notera que S n'est rien d'autre qu'une fonction définie sur le domaine discret $\mathcal{D}=\{1,2,\dots,M\} \times \{1,2,\dots,N\}$. On parle d'image discrète pour S et d'image "à domaine continu" pour F .

Au niveau des modèles on peut discrétiser une image "à domaine continu" en image discrète de la façon suivante en échantillonnant la fonction F : on choisit des entiers M et $N > 0$, on note u et v les pas de discrétisations, $u = (b-a)/M$, $v=(d-c)/N$, et on définit F_{ij} = valeur de F au centre du sous-rectangle $[a+(i-1)u, a+iu] \times [c+(j-1)v, c+jv]$. Pour obtenir un signal numérisé S au sens précédent on quantifie le signal échantillonné: on multiplie les F_{ij} par un facteur (changement d'unité) et on arrondi à l'entier le plus proche, ce qui définit S_{ij} .

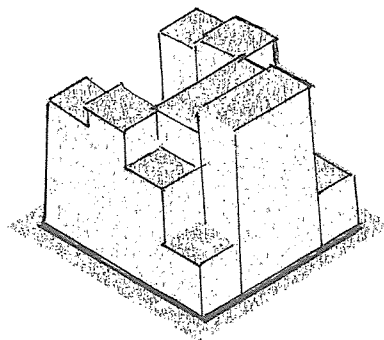
Une méthode plus fiable (intéressante si F présente des variations brusques) consiste à remplacer la valeur au centre par la moyenne de F sur $[a+(i-1)u, a+iu] \times [c+(j-1)v, c+jv]$. Illustration ci dessous:

$$F(x,y)=1+\sin(x^2+y) \text{ sur } [-2,2]^2$$



$S = F$ discrétisée avec pas $u=1$, $v=1$, tableau et graphique

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	15	16	12	06
2	02	08	17	19
3	02	08	17	19
4	15	16	12	06



3 - Séries de Fourier, transformation de Fourier, applications aux images

Dans l'étude des fonctions d'une (ou plusieurs) variable(s) réelle(s) on utilise souvent des *transformations* qui permettent de représenter les fonctions au moyen de coefficients (ou d'autres fonctions). Cela permet de remplacer un problème donné - par exemple une équation différentielle - en un problème équivalent éventuellement plus simple à résoudre. L'exemple type est l'utilisation des transformées de Fourier ou des séries de Fourier que nous allons rappeler ci dessous en commençant par le cas d'une variable.

Séries de Fourier

On s'intéresse aux fonctions $F : x \text{ (réel)} \rightarrow F(x) \text{ (complexe)}$ admettant T pour période, c'est-à-dire aux signaux de fréquence $f=1/T$. On note $\omega = 2\pi f$ la "fréquence angulaire". On se limite aux fonctions F qui sont continues par morceaux ce qui donne un espace fonctionnel noté E . La famille

$$\mathcal{F} = \{S_n : x \in \mathbb{R} \rightarrow \sin(n\omega x), n \in \mathbb{N}^*, \quad C_n : x \in \mathbb{R} \rightarrow \cos(n\omega x), n \in \mathbb{N}\}$$

est une famille linéairement libre. Cette famille engendre l'espace E ou un sous-espace convenable de E dans un sens que nous allons préciser (convergence hilbertienne, convergence ponctuelle,...). On munit E du produit scalaire

$$\langle F, G \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{F(x)} G(x) dx$$

et de la norme associée $\| \cdot \|$. On vérifie facilement que $\mathcal{F}$ est une famille orthogonale. Après normalisation on obtient une famille *orthonormale* $\mathcal{F}'$

$$c_0 = C_0, \quad \text{et } s_n = \sqrt{2}S_n, \quad c_n = \sqrt{2}C_n \text{ pour } n \geq 1$$

La projection orthogonale d'une fonction F de E sur le sous-espace engendré par $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, s_1, s_2, \dots, s_n)$ est la fonction (combinaison linéaire)

$$x \rightarrow \sum_{0 \leq k \leq n} \langle c_k, F \rangle c_k(x) + \sum_{1 \leq k \leq n} \langle s_k, F \rangle s_k(x)$$

En fait on montre que la famille $\mathcal{F}'$ est une base hilbertienne de E : toute fonction F appartenant à E s'écrit comme la limite des sommes ci dessus quand n tend vers l'infini avec convergence au sens de $\| \cdot \|$.

Donnons in second résultat de convergence: si F est continûment dérivable par morceaux, alors la série précédente converge en tout point x . Avec une petite subtilité: en un point x où F est continue la limite est $F(x)$ alors qu'en un point de discontinuité la limite est la demi-somme des limites de F à droite en x et à gauche en x . Si l'on se restreint à des sous-espaces vectoriels de fonctions plus régulières la convergence est améliorée (on a convergence uniforme par exemple pour les fonctions C^1) et la "rapidité" de convergence augmente.

On peut travailler de façon identique avec la famille de fonctions

$$\mathcal{E} = \{e_n : x \in \mathbb{R} \rightarrow \exp(in\omega x), n \in \mathbb{Z}\}$$

On obtient une nouvelle base orthonormale et on retrouve les résultats précédents de convergence.

Bilan: on a remplacé la donnée d'un signal F par la donnée d'une suite de coefficients,

$$F \Leftrightarrow (\langle F, c_0 \rangle, \langle F, c_1 \rangle, \dots, \langle F, c_k \rangle, \dots, \langle F, s_1 \rangle, \langle F, s_2 \rangle, \dots, \langle F, s_k \rangle, \dots)$$

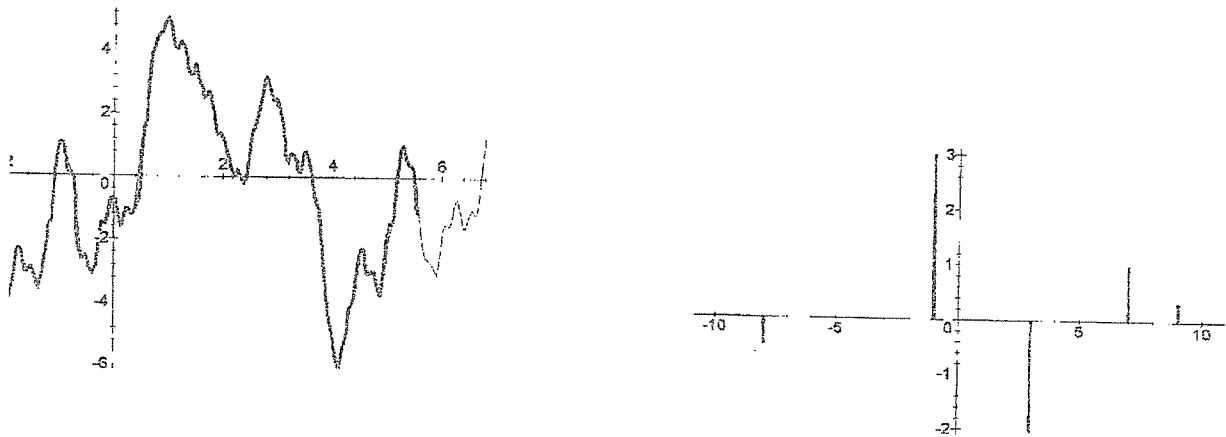
Comme ce sont les coordonnées de F dans une base orthonormale les coefficients sont des produits scalaires et tout se ramène à des calculs d'intégrales. Compte tenu de la convergence de la série, on se contente en pratique d'une somme finie de termes dans la somme, ce qui est une façon de discrétiser le signal F .

Graphiquement on passe *bijectivement* du graphe de F au "graphe" de la suite des coefficients appelé spectre de raies de F ; ce spectre sera par définition formé des segments verticaux

$[(k\omega/2\pi, 0), (k\omega/2\pi, \langle c_k, F \rangle)]$ pour les coefficients cosinusoidaux

$[(-k\omega/2\pi, 0), (-k\omega/2\pi, \langle s_k, F \rangle)]$ pour les coefficients sinusoidaux.

Exemple: le graphe d'une fonction F périodique et le spectre de raies



Transformation de Fourier

On souhaite travailler sur des signaux généraux (d'une variable réelle) et pas seulement des signaux périodiques. On définit alors la *transformation de Fourier* qui reprend l'idée précédente (combinaison linéaire de fonctions cosinus, sinus de période $T, 2T, \dots$) en autorisant toutes les périodes >0 ; il faudra sommer au moyen d'intégrales. La transformée de Fourier de F est la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} F(x) dx$$

Cette fonction remplace la suite des coefficients; elle permet de reconstruire F par le résultat suivant

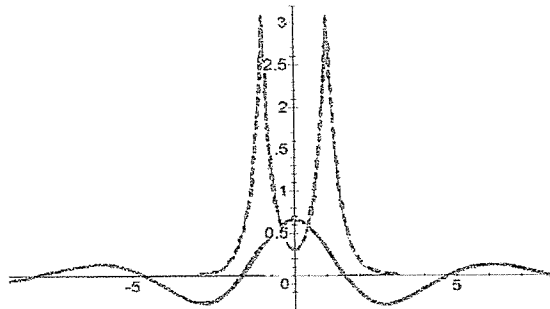
$$F'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} G(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx$$

Il faut maintenant une sommation intégrale et pas seulement la sommation d'une série.

La transformation de Fourier fait passer *bijectivement* de la fonction F à la fonction G . Les arguments de F et G ont des interprétations physiques différentes: le "temps" pour F et la "fréquence angulaire" pour G . Le support de la fonction G (les ω tels que $G(\omega) \neq 0$) retient les fréquences impliquées dans le signal. En se plaçant dans un cadre très général (celui des distributions) on retrouve les séries de Fourier comme cas particulier des

transformées de Fourier. Pour une fonction de période T seules les fréquences k/T (k entier) interviennent et c'est le spectre de raies évoqué plus haut qui remplace le graphe de G .

Exemple: graphes de $F: x \rightarrow 6 \cos(t) / (9+t^2)$ en trait plein de sa transformée de Fourier en pointillé

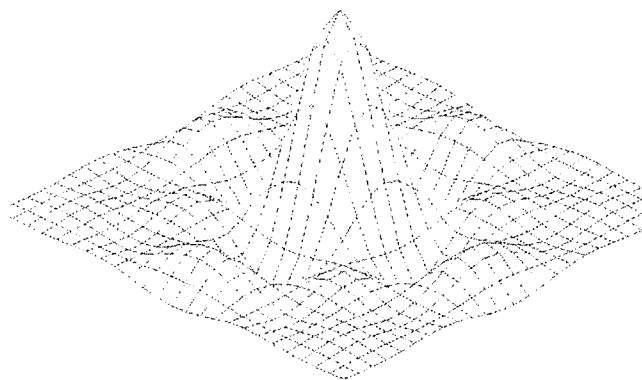


Cas des fonctions de plusieurs variables

Jusqu'ici nous avons considéré les fonctions d'une variable réelle. En fait le formalisme et les résultats précédents s'étendent immédiatement au cas des fonctions de plusieurs variables, ce qui permet d'étudier le cas des images i.e. le cas de fonctions de 2 variables réelles. Indiquons rapidement la décomposition en série pour une fonction $F: (x,y) \text{ (réels)} \rightarrow F(x,y) \text{ (complexe)}$ admettant (T_1, T_2) pour période (T_1 en x et T_2 en y)

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_1, l \in \mathbb{Z}_2} a_{k,l} e^{i(\frac{kx}{T_1} + \frac{ly}{T_2})}$$

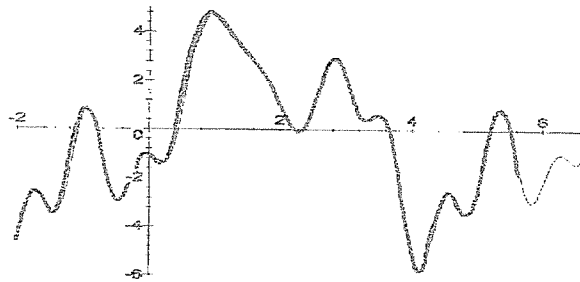
puis le graphe de la transformée de Fourier de la fonction (non périodique) valant 1 sur $[0,1]^2$ et 0 ailleurs



Calculs effectifs et applications

Quelle est l'utilité de la transformation de Fourier pour les signaux, comment calculer en pratique, comment l'exploiter ?

a) L'information première apportée la transformation de Fourier est la *caractérisation des fréquences* présentes dans le signal et la détermination du "poids" de chacune de ces fréquences. Le signal est vu d'après les résultats précédents *comme superposition de signaux périodiques*. Les basses fréquences contribuent aux variations lentes et les hautes fréquences aux variations rapides, aux irrégularités. Comme application immédiate on peut penser à lisser une image en annulant les coefficients relatifs aux très hautes fréquences. Ci dessous le signal rencontré plus haut dont on a supprimé le terme de plus haute fréquence



b) Dans le cadre des signaux numérisés (c'est le cadre intéressant avec les outils informatiques) on travaille avec des fonctions échantillonnées et il nous faut une méthode performante permettant de passer de F échantillonnée à G échantillonnée. Deux résultats importants interviennent:

- le théorème de Shannon-Nyquist nous dit que si l'on sait G nulle en dehors de $[-2\pi b, 2\pi b]$ on peut reconstruire F exactement en tout point (par une formule où intervient le sinus-cardinal $\sin(x)/x$) à partir de son échantillonnage

$$\dots F(-kh), \dots F(0), F(h), F(2h), \dots F(kh), \dots$$

avec $h=\pi/a = 1/2b$ (c'est à dire à partir d'une mesure de F à la fréquence $2b$). Par exemple pour un signal sonore destiné aux humains on travaille avec $b=20\,000$ Hz, considéré comme la fréquence audible maximum.

- on connaît des algorithmes performants pour passer d'un échantillonnage de F à un échantillonnage de G, algorithmes connus sous le nom de transformation de Fourier rapide (F.F.T., Fast Fourier Transform en anglais). L'idée est d'utiliser une méthode "*diviser pour régner*" qui accélère des calculs de produits matriciels, voir le livre Analyse Mathématique et calcul Numérique, Dautray - Lions, Masson, 1987, p838-865 ou bien un des nombreux problèmes de concours Grandes Ecoles sur le sujet (Cachan-Ulm 1994, par exemple), ou bien des livres d'Informatique comme Cours et Exercices d'informatique, Albert, Thomson Publishing, exercice IV-9 avec programme C.A.M.L. inclus.

Bilan: si l'on accepte quelques hypothèses sur les signaux et un certain degré d'approximation (contrôlé!) on dispose maintenant de méthodes efficaces pour effectuer les calculs de transformation de Fourier et de décomposition en série de Fourier, et cela s'étend au cas des fonctions à plusieurs variables.

Application aux images, la compression des images

La compression d'un signal consiste à l'écrire sous une forme prenant moins de place et c'est un des problèmes majeurs du domaine (pour stocker plus, pour stocker mieux, pour accélérer la transmission). Partons de signaux numérisés (numériser c'est déjà gagner de l'espace), donc représentés par des suites d'entiers. On cherche une transformation permettant une représentation prenant moins de place.

La réponse actuelle à ce problème dans le domaine des images est donnée par le procédé J.P.E.G. (pour Joint Photographic Experts Group), procédé basé sur la transformation D.C.T. (Discrete Cosinus Transform) qui est une variante de la F.F.T. .

On commence par transformer par D.C.T. des carrés de 8×8 pixels (8 dans chaque direction) de l'image. Cela donne des carrés 8×8 de coefficients correspondant à des fréquences.

On multiplie ces coefficients par des nombres positifs qui diminuent quand la fréquence augmente (l'idée est que les parties hautes fréquences correspondent à des détails peu visibles ou même du bruit). Puis on arrondit les coefficients à l'entier le plus proche (quantification) on élimine les coefficients devenus 0 (seuillage).

Cette dernière manipulation est non conservative, on perd (un peu) d'information par rapport aux données initiales.

Il ne reste finalement qu'un faible nombre de coefficients à stocker (les non nuls). On peut le faire astucieusement et de manière conservative.

La transformation D.C.T. inverse permet de retrouver une image qui est une bonne approximation de l'image d'origine (N.B. la méthode de quantification contribue à la qualité de l'image résultat, mais elle ne fait pas partie de la spécification JPEG).

Ce procédé est utilisé pour stocker économiquement des images fixes sur disques compacts (la méthode s'étend aux images animées - les vidéos numériques -). Le groupe M.P.E.G. (Moving Picture Experts Group) a été chargé d'établir des spécifications concernant la compression de séquences d'animations.

Une séquence d'animation est simplement une suite d'images affichées à intervalles réguliers (par exemple 24 images par seconde). De telles séquences occupent énormément de place de stockage. Un film de 10 secondes à 24 images par seconde, chaque image étant composée de 512×512 pixels de 256 couleurs nécessite environ 100MB sur disque. Les animations peuvent être très comprimées si l'on accepte de perdre un peu d'information.

La méthode de compression M.P.E.G. est basée sur l'enchaînement d'images comprimées par J.P.E.G. Il y a donc un premier gain non négligeable apporté par l'utilisation d'images J.P.E.G. La plupart du temps il y a peu de changements entre une image de la séquence et la précédente. On se contente alors de coder la variation entre les deux images. Lorsque la suite des variations est trop coûteuse, cas d'un changement de décor par exemple, une nouvelle image J.P.E.G. est codée. Il est courant d'obtenir ainsi des taux de compression $> 90\%$.

En pratique comme les calculs de compression et décompression peuvent être énormes, on utilise des cartes d'extension spécialisées M.P.E.G. qui déchargent l'unité centrale de ces calculs.

Et les ondelettes?

On vient de donner une décomposition d'un signal quelconque dans une base de cosinus et sinus et de voir son utilité et quelques applications. Quelles sont les limitations d'une telle décomposition, que peut-on faire d'autre?

Dans l'écriture d'une série de Fourier (ou d'une transformée de Fourier) les fonctions de base sont à portée infinie (parce qu'elles sont périodiques); modifier un coefficient devant une telle fonction va donc modifier la somme sur $\mathbb{R}$ tout entier. La suite des coefficients ne peut pas donner d'information locale! Or on cherche souvent dans l'étude des signaux (en géologie, ...) à obtenir des renseignements de lieu (ou d'"instant" si l'argument est le "temps"). Les coefficients du développement en série de Fourier manquent d'efficacité pour cela.

L'idée naturelle est de remplacer la base des sinus, cosinus par des fonctions de base à portée finie, de construction simple (on obtient ces fonctions de base à partir d'une d'entre elles par des transformations géométriques simples, comme la base des sinus, cosinus) et qui fournissent encore une base orthonormale pour le produit scalaire usuel sur les fonctions. On souhaite en plus que ces fonctions soient lisses (indéfiniment dérivables comme les sinus, cosinus).

La construction d'une telle base date des années 1980. Le paragraphe suivant donne quelques éléments sur le sujet. Pour la genèse de cette construction nous renvoyons à l'ouvrage de Burke-Hubbard. Pour la théorie dans tous les détails à l'ouvrage de Y. Meyer.

4 - Les ondelettes, bref aperçu

Il s'agit de construire une base de fonctions possédant les propriétés demandées en fin de §3. Il y a plusieurs possibilités (décomposition continue ou discrète), plusieurs types d'ondelettes. Donnons un seul résultat qui ressemble dans son esprit à la décomposition en série de Fourier mais qui s'adresse à toutes les fonctions F d'une variable réelle (pas seulement les périodiques). Ce résultat est lié à l'Analyse multi-résolution sur $\mathbb{R}$ et le produit scalaire considéré est

$$\langle F, H \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F(x)} H(x) dx$$

Théorème:

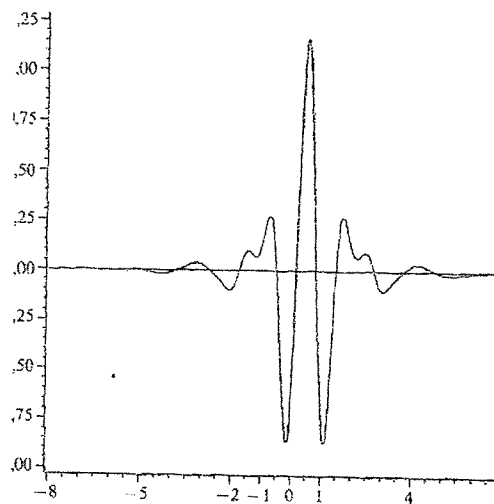
Il existe une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que la famille de fonctions

$$x \rightarrow f_{j,k} = 2^{j/2} f(2^j x - k) \quad \text{avec } j, k \in \mathbb{Z}$$

soit une base hilbertienne - donc orthonormale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - de l'espace des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le résultat se généralise au cas des fonctions de plusieurs variables réelles.

Donnons le graphe d'une telle fonction f , celle de Lemarié-Meyer



Remarques:

a) La fonction f n'est pas unique, on peut trouver de telles fonctions f dont la transformée de Fourier est concentrée sur une couronne du plan complexe (ce qui distingue une zone fréquentielle).

b) Diverses variantes sont possibles: on peut chercher f à support compact (nulle en dehors d'un intervalle $[a,b]$) si l'on n'exige pas f indéfiniment dérivable.

c) la décomposition de F en série d'ondelettes s'écrit

$$F(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} c_{j,k} f_{j,k}(x)$$

où $c_{j,k} = \langle f_{j,k}, F \rangle$.

Il faut interpréter les indices des coefficients $c_{j,k}$ de la façon suivante

- j est un indice d'échelle
- k est un indice de localisation, le coefficient d'indice (j,k) renseigne sur la fonction F pour les x voisins de $x = k2^j$

Applications de la décomposition en série d'ondelettes

Les applications sont nombreuses: compression, débruitage, extractions de caractéristiques du signal en particulier régularité locale,... Nous renvoyons aux livres de la bibliographie, en particulier ceux de Barbara Burke Hubbard et de Mallat. Nous extrayons du travail de Mallat quelques exemples de décomposition en ondelettes appliquées aux images:

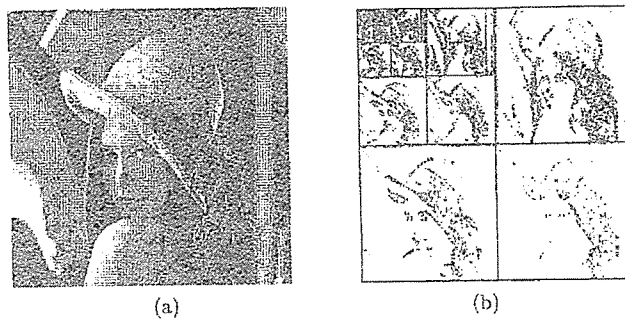


FIGURE 1. (a) : Image originale f . (b) : Amplitude des coefficients $|\langle f, \psi_{j,n}^k \rangle|$ dans une base d'ondelettes. Les sous-images correspondent à des résolutions 2^j et des orientations k différentes (voir texte).

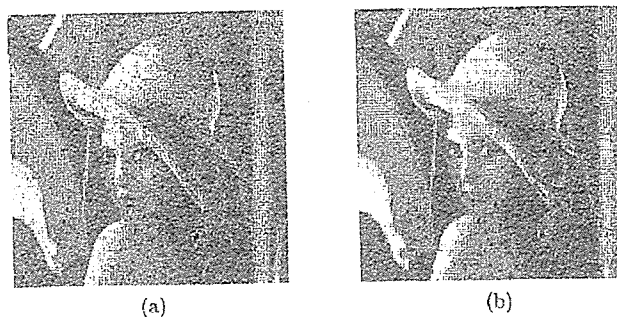


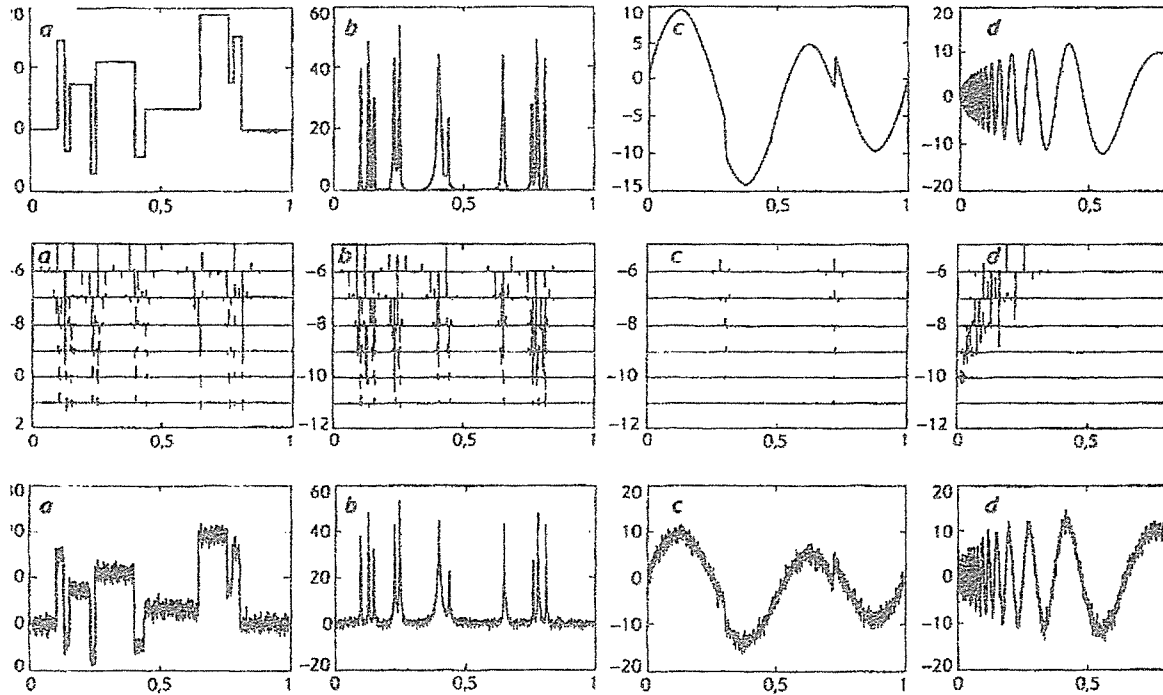
FIGURE 6. (a) : Image dégradée par l'addition d'un bruit blanc gaussien (b) : Estimation par seuillage dans une base d'ondelettes.

Puis ci dessous une technique de débruitage au moyen d'ondelettes sur des signaux à 1 variable (facile à étendre aux images)

ligne 1: 4 signaux différents

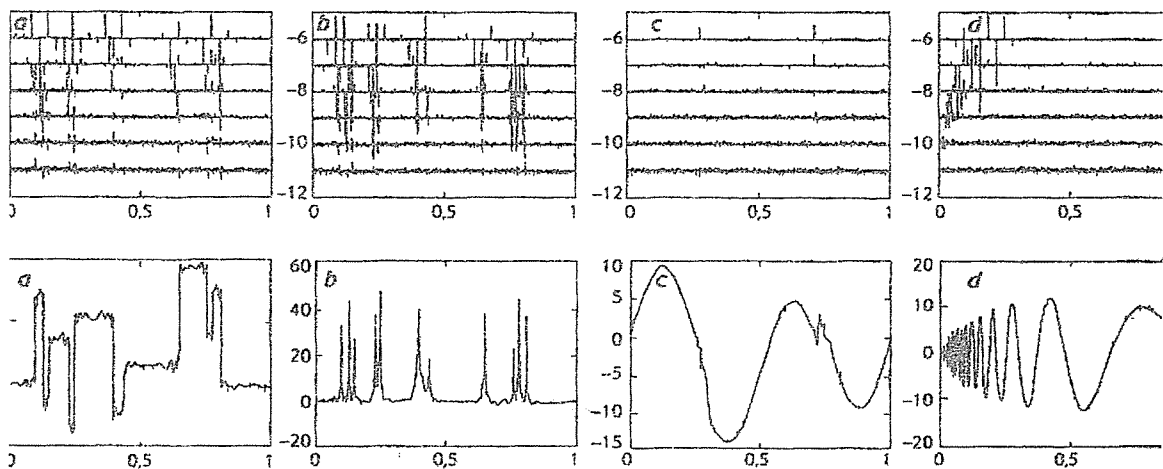
ligne 2: les coefficients d'ondelettes respectifs (j en ordonnée, k en abscisse)

ligne 3: les mêmes signaux bruités



ligne 4: les coefficients d'ondelettes respectifs des signaux bruités

ligne 5: l'élimination du "bruit" par travail sur les coefficients d'ondelettes



Référence: Donoho et Johnston

5 - Compléments et bibliographie

Un programme

Commençons par donner un programme qui permet de décomposer un signal (1 variable) en série d'ondelettes et inversement de reconstruire un signal à partir de ses coefficients d'ondelettes. L'ondelette choisie est celle de Daubechies (support compact). Ce programme est en C.A.M.L. langage utilisé en Classes Préparatoires, il se traduit facilement en Turbo-Pascal ou C (N.B. C.A.M.L. est un langage fonctionnel très simple à programmer (pour un mathématicien), la version light est disponible gracieusement auprès de l'I.N.R.I.A. (<http://www.inria.fr/pub/lang/caml-light>). Il fonctionne sur un signal déjà discrétisée (comme la F.F.T., D.C.T.).

Méthode: chercher d'abord le coefficient de grande échelle (on approxime au mieux le signal entier par une seule ondelette de la base, c'est la tendance de niveau 0), stocker ce coefficient et soustraire au signal cette première approximation; on a donc les détails de niveau 0. Puis couper le signal "détails" en son milieu, zoomer pour que les deux moitiés obtenues apparaissent de la taille du signal d'origine et recommencer pour chaque moitié la première opération... Cette idée est implicite dans la construction même de la base d'ondelettes (cf. le changement d'échelle de facteur 2 d'une ondelette à l'autre).

```
#open "graphics";; #open "fvect";; open_graph "";;
```

On a d'abord besoin de deux vecteurs u et v (le premier sert à filtrer)

```
let u=[0.744585624062;0.444593021712; -0.035087557152; -0.1328452061;0.030655093268;0.06373902704; -  
0.024348746944; -0.03213079536;0.017423434847;0.015270015782; -0.011061496864;  
-0.006387718591;0.006045814355;0.002202534195; -0.002704672240; -0.000601150260;0.000065543062; -  
0.0000163127;0.000003205442;0.000000736757; -0.000001489549;0.000001130795; -0.000000550634;  
0.000000117830;0.000000082007; -0.000000108665;0.00000006067; -0.000000010799; -  
0.000000011119;0.000000008519; -0.000000000001];;
```

```
let v=make_vect 31 0.;; let c=ref 1. in for i=0 to 30 do v.(i)<- !c*.u.(i); c:= -. !c done;;
```

On doit pouvoir extraire tendance et détails à chaque niveau

```
let decomp u a= let l=vect_length a in let t=make_vect (l/2) 0. and kk=ref 0 in  
for k=0 to l/2-1 do kk:=2*k;  
for n=(max (-30) (- !kk)) to (min 30 (l- !kk-1)) do t.(k) <- t.(k)+u.(abs(n)).a.(!kk+n)  
done; done; t;;
```

ou au contraire remonter pour reconstituer le signal

```
let reconstr a d= let l=vect_length a in let t=make_vect (2*l) 0. in  
for k=0 to 2*l-1 do  
for n=(max ((k-29)/2) 0) to (min ((k+30)/2) (l-1)) do  
t.(k) <- t.(k)+a.(n).u.(abs(2*n-k)).d.(n).v.(abs(2*n-k))  
done; done; t;;
```

Il est intéressant de dessiner les composantes à différentes échelles comme des graphes superposés

```
let dess_vect v h t= plot (520*t) (int_of_float(v.(0))+50*(h+1));  
for i=1 to (vect_length v)-1 do  
lineto ((i*int_of_float(2.*(float_of_int(h))))+520*t) (int_of_float(v.(i))+50*(h+1)) done;;
```

On donne maintenant l'algorithme de décomposition

```
let dec signal n = clear_graph(); set_color red; dess_vect signal 0; set_color black;  
let a = ref signal in  
for i= 1 to n+1 do dess_vect (decomp v !a) i; a:=decomp u a; done;;
```

et celui de reconstruction

```
let recons a d =      let l=vect_lenght a in      let=make_vect(2*1) 0. in
  for k=0 to 2*1 -1 do for n=(max( (k-29)/2 0) to (min ( (k+30)/2 (l-1))) do
    t.(k) <- t.(k) +. A.(n)*. U.(abs(2*n-k)+.d.(n)*.v.(abs(2*n-k) done;
    t.(k) <- t.(k)*.sqrt(2.) done;      t;;
```

On peut ensuite lisser le signal , débruiter ou pratiquer divers traitements

```
let filtre x n prec=      let a=ref x and d=ref [] and t=ref 0 and now=ref [[]] in
  for i=0 to n do      d:=(decomp v !a):: !d; a:=decomp u !a; done;
  for i=0 to n do      now:=hd !d; d:=tl !d; t:=vect_length !now;
    for j=0 to !t-1 do      if abs_float(!now.(j))<.prec then !now.(j)<-0. done;
    a:=reconstr !a !now
    done; !a;;

let filtre2 x n=      clear_graph();      set_color black;      dess_vect x 0 0; let a=ref x in
  for i=0 to n do      set_color (i*100*blue);dess_vect (decomp v !a) (i+1) 0;
    a:=decomp u !a; done;;
let a=[0.;1.;0.];;
let truc n=
let k=ref 3 and r=ref a and d=ref [[]] in for i=0 to n do      d:=make_vect !k 0.;      k:=!k*2;
r:=reconstr !r !d done;
dess_vect !r 0 0;;
```

Les termes employés dans l'infographie (traitement des images numériques):

Les formats d'image courants:

Le BMP: une image bitmap est une représentation sous forme d'une matrice de bits point par point; il ne peut être exploité que par un logiciel fonctionnant sous Windows.

Le GIF: à l'origine adapté au transfert d'image sur le réseau Compuserve ; il est très répandu pour sa facilité et sa rapidité de lecture. Son faible volume est dû d'une part, à la compression systématique (LZW) d'autre part, au codage de la couleur sur 8 bits/pixel. Ce format ne gère donc que 256 couleurs ou niveaux de gris.

L'EPS: utilise le langage postscript qui est un langage de description de page ; il donne une description géométrique d'une image. Une image bitmap est "encapsulée" dans du postscript. Il peut coder la couleur sur 8, 16, 24 ou 32 bits. Ce format est capable de gérer le noir et blanc, le RVB, et le CMJN.

Le traitement d'images:

La segmentation

On essaye de partager l'image en zones cohérentes. Il existe différentes approches

Le seuillage

L'Etiquetage contextuel : la relaxation

La détection de frontières

La Transformée de Hough
L'approche classification,

La segmentation laisse la place dans une seconde étape à l'interprétation.

La restauration, l'amélioration

Les techniques de restauration se proposent de réduire les effets des dégradations (ou bruits) comme

- le bruit lié au contexte de l'acquisition
- le bruit lié au capteur
- le bruit lié à l'échantillonnage
- le bruit lié à la nature de la scène

Très souvent, le phénomène dégradant est inconnu, ou bien trop complexe pour qu'une approche analytique soit envisageable. Il est donc nécessaire d'estimer ce phénomène à partir de la connaissance de l'image dégradée. Par exemple, la recherche de points ou formes particuliers (croix, etc), connus comme existant dans la scène (à priori et à posteriori), permet une estimation locale de certaines caractéristiques du phénomène dégradant. On peut également utiliser la transformée de Fourier. En effet, un bruit introduit par un capteur (défocalisation, bougé) est plus facile à détecter dans le plan de Fourier que dans le domaine spatial.

Les techniques d'amélioration tentent d'augmenter la séparabilité des régions composant une scène. Différentes techniques sont possibles :

- la modification de l'histogramme.
- le filtrage fréquentiel (figure aussi parmi les techniques de restauration d'image).
- le réhaussement de contraste.

La compression

Le but des algorithmes de compressions est de réduire la taille des fichiers pour diminuer l'espace nécessaire à leur stockage sur le disque ou leur transfert par le réseau. Ils encodent d'une manière différente les données de l'image afin de les rendre plus compactes. Deux familles d'algorithmes de compression se distinguent :

La compression sans perte :

Historiquement, les premiers algorithmes de compression furent Shannon-Fano et Huffman, mais l'algorithme sans pertes le plus utilisé dans le domaine de l'image est lzw.

La compression avec perte :

Certains types de données peuvent bien se comprimer si l'on accepte de perdre une partie de l'information. C'est notamment le cas de sons ou d'images numérisés. Les taux de compression peuvent alors être énormes (par exemple un taux de 80% pour une image). Les principales méthodes de compression avec pertes sont le procédé J.P.E.G., les méthodes "ondelettes" et les méthodes "fractales".

Une bibliographie sommaire

Pour l'aspect interdisciplinaire de l'étude

Vision et mesure de la couleur, *Kowaliski*, Masson, 1978
Vision, *Marr*, Freeman and company, 1982
Optique, formation et traitement des images, *Françon*, 1972

Pour les aspects "perception", "vision"

Vision stéréoscopique et perception multisensorielle, *Ayache*, Interéditions, 1989
Visual Perception, *Bruce, Green and Georgeson*, Psychology Press, 1996

L'oeil, le cerveau et la vision: les étapes cérébrales du traitement visuel, *Hubel*, Pour la Science, 1995.

Pour la modélisation et les divers traitements numériques, algorithmes compris

Images de synthèse, *Bret*, Masson, 1988

Introduction à l'infographie, *Foley et al*, Addison-Wesley, 1994

Analyse d'images: filtrage et segmentation, *Coquerez et al*, Masson, 1995

La compression des images numériques, *Guitter*, Hermes, CNAM, 1995

La compression des données, *Delahaye*, Pour la Science, vol. 217, novembre 1995, pp. 180-184.

Pour l'utilisation de la géométrie discrète, de la morphologie mathématique, des statistiques, des fractales et de la théorie des graphes

Géométrie discrète en analyse d'images, *Chassery et Montanvert*, Hermes, 1991

Précis d'analyse d'images, *Coster et Chermant*, Edition du CNRS, 1985

Pattern Classification and Scene Analysis, *Duda et Hart*, John Wiley and Sons, 1973

Fractal image compression, *Barnsley and Hurd*, AK Peters, Wellesley, 1992

Méthodes structurelles pour la Reconnaissance des Formes, *Miclet*, Eyrolles, 1984

Pour les résultats mathématiques sur le traitement du signal et surtout les ondelettes

Séries de Fourier et ondelettes, *Kahane et Lemarié-Rieusset*, Cassini, 1998

Ondelettes et Opérateurs, *Meyer*, Hermann, 1990

A wavelet tour in signal processing, *Mallat*, Academic Press, 1997

Ten lectures on wavelets, *Daubechies*, SIAM, Philadelphia, 1992

et

Ondes et ondelettes: la saga d'un outil mathématique, *Burke Hubbard*, Pour la Science, Belin, 1995

Mis à part les ouvrages ci dessus il faudrait citer les nombreux articles qui paraissent régulièrement dans les revues scientifiques; les revues spécialisées dans le sujet sont par exemple

les IEEE transactions on Information Theory, IEEE Computer, IEEE Acoustic and Signal Proc

SIAM Journal of Numerical Analysis

Applied and Comp. Harmonic Analysis

Il faut aussi mentionner les nombreux sites Internet qui donnent des informations sur le sujet: utiliser pour cela un moteur de recherche et "image + ondelettes".

Par ailleurs Wavelet Digest est un journal électronique (gratuit) qui centralise les informations sur le sujet ondelettes; il suffit s'écrire à digest@wavelet.org pour l'obtenir.

TROIS ACTIVITÉS POUR UN CLUB

Dominique Roux

1° Puzzles polygonaux : (niveau collège)

Vers 1830, Janos Bolyai connu pour avoir étudié une géométrie non euclidienne, démontre que : « étant donnés deux polygones de même aire, il est possible de découper l'un d'eux en morceaux de manière à pouvoir reconstituer exactement l'autre ».

Vers 1960, Hadwiger et Glur donnent une démonstration utilisant seulement les symétries-translations comme transformations. Le problème analogue pour l'espace (polyèdres) a été posé par David Hilbert (troisième problème parmi les 23 énoncés au Congrès des mathématiciens de Paris en 1900) ; la réponse est négative.

Références :

- *Equivalent and Equidecomposable figures*. G. Boltyansky, Boston 1963.
- *Formes espace et symétrie*. Distract n° 2, CEDIC-Nathan.
- « 2000 en maths ». Les malices du Kangourou collèges, ACL - éditions 2000.

2° La théorie mathématique du jeu de solitaire : (collège, lycée)

C'est en passant à une généralisation du jeu (solitaire indéfini, empilement d'un nombre quelconque de boules sur une même case) qu'on démontre l'impossibilité de réduire certaines positions initiales.

Références :

- *Récréations mathématiques* par Edouard Lucas - Tome 1 - 2e édition (1891) ; nouveau tirage : Albert Blanchard 1992, pp. 89-141.

3° Niveau maximum atteint au solitaire.

On suppose le plateau indéfini et partagé en deux par une droite parallèle à un côté du quadrillage. L'ensemble de départ est arbitraire dans un demi-plan limité par cette droite ; à quelle distance maximum de celle-ci peut-on faire passer un pion par la règle habituelle (saut et prise) ?

De proche en proche, on trouve à la main des disposition permettant d'atteindre les distances 1, 2, 3, 4 ; par contre, il est impossible de dépasser 4 : Conway en a donné une démonstration très élégante par une technique de fonction génératrice.

Référence :

- *Joyaux mathématiques*, volume 2. Ross Honsberger, CEDIC 1979, pp. 37-43.

Bilan et perspectives.

Reprenons un à un les objectifs de l'Université d'été :

1) « *développer le réseau naissant des 170 clubs recensés par Animath* ».

Tous les stagiaires étaient très décidés à mettre en route ou à renforcer un club dès cette année et ont trouvé à l'U.E. des éléments pour démarrer ou pour persévérer.

2) « *Servir de tremplin à une rénovation de l'enseignement profitant en particulier à des élèves en difficulté* »

Bien que cette question n'ait pas été abordée de front, sauf à travers les préoccupations de MATH en JEANS, il est apparu nettement que les clubs peuvent compenser l'absence d'activités à caractère ludique, culturel ou de recherche dans le système éducatif sans pour autant bouleverser la pédagogie. Le travail en club modifie l'enseignement dans la classe : le regard sur les élèves change, ils apprennent à travailler en groupe sur des sujets différents, l'enseignant s'approprie l'hétérogénéité des élèves. Dans le club, les activités de découverte, de réflexion, d'apprentissage se font au rythme de chacun ; pour l'enseignant, travailler sur des thèmes nouveaux oblige à faire des recherches approfondies et à prendre du recul sur son travail et son métier.

Beaucoup de collègues enseignaient en Z.E.P. ou dans des établissements difficiles où les clubs peuvent compenser les inégalités sociales, familiales et culturelles et permettre à des potentialités diverses de s'exprimer et d'être valorisées, alors que la classe met en valeur les seuls « bons élèves ».

3) « *Permettre la rencontre des animateurs de club et de ceux qui hésitent encore et leur donner l'occasion d'échanger leurs expériences, leurs solutions, leurs réussites et leurs échecs, leurs craintes et leurs passions.* »

Cet objectif n'était pas le plus difficile à atteindre mais il l'a été largement : le tour des ateliers a permis à chacun de voir (très rapidement) un éventail assez large d'expériences puis de partager et de s'enrichir au sein de l'atelier particulier choisi. Les tables rondes ont été trop courtes pour épuiser les questions. Les conférences n'étaient pas toutes directement utilisables en club et les éléments culturels étaient plus ou moins accessibles à l'ensemble des participants. Les temps libres, les trajets de la maison au lycée, le beau temps ont facilité les échanges informels.

4) « *Enrichir les pratiques et nourrir la réflexion sur les thèmes et les modalités possibles* »

Le passage dans tous les ateliers a permis à chacun de découvrir l'extrême diversité des clubs. Les stagiaires se sont vraiment investis et ont fourni un gros travail d'appropriation de la matière qu'on leur proposait. Les discussions sur le rôle et la réalisation d'une exposition et sur le choix des thèmes répondaient précisément aux besoins des stagiaires.

5) « *Montrer aux participants l'utilisation des ressources d'Internet avec les banques de données et les serveurs qui donnent des possibilités nouvelles à l'exploration mathématique* »

Cela a été surtout le cas dans l'atelier n°4 et dans la deuxième table ronde. Dans cet atelier, la présence d'un triple accès Internet rapide a été très apprécié et bien utilisé par les stagiaires pour enrichir leurs projets. Une partie des séquences a été consacrée à la recherche documentaire sur Internet.

6) « *Former des animateurs et des formateurs d'animateurs conduisant à une mise en réseau.* »

D'ores et déjà, tous les participants ont échangé leurs adresse électroniques et émis le voeu de la création d'un site Internet spécifique. La rédaction des actes est en cours; ils recenseront quelques clubs types et leur large diffusion contribuera à cet objectif.

Bien entendu, cette première Université d'été n'a pas épuisé le sujet ; les questions suivantes restent posées :

- quelles sont les retombées de l'existence d'un club dans l'établissement ?
- le club peut-il expérimenter et tester des activités intéressantes afin de les utiliser ultérieurement en classe ?
- la classe peut-elle inciter à participer au club ?
- comment mettre au point en club un travail réalisé en classe ?
- les élèves du club peuvent-ils jouer le rôle de tuteurs en classe ?
- comment exposer en classe le travail fait en club ?
- peut-on encadrer en classe un travail de type club ?
- faut-il changer la place, le rôle du cours « traditionnel » ?
- comment remotiver les élèves en difficulté ?

Une nouvelle Université d'été pourrait se fixer comme objectif d'y répondre.

Une large diffusion des actes et la mise en place d'un serveur Internet va permettre de renforcer les liens entre les clubs existants ; mais cet effort ne pourra se poursuivre et se développer que moyennant :

- une aide à la pérennisation du réseau
- une forte incitation à tous les établissements de développer les clubs et ateliers de mathématique.

Pour l'équipe des animateurs,

P.L.Hennequin , responsable pédagogique.

1.10.99

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

OUVRAGES DISPONIBLES PENDANT L'UNIVERSITÉ D'ÉTÉ

Paul-Louis Hennequin

Avertissement :

La liste donnée ici n'est pas à proprement parler une bibliographie car certains ouvrages n'étaient pas disponibles; par ailleurs la classification est arbitraire et beaucoup de titres pourraient être classés dans une autre rubrique. Nous renvoyons au catalogue 2000 de Tangente pour un inventaire plus récent et au site : <http://publimath.irem.univ-mrs.fr> pour des analyses d'ouvrages. *Nous avons précédé d'une astérisque tous les titres recensés dans PUBLIMATH.*

1) Histoire et épistomologie.

ESSAIS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES par Jean Itard, réunis et introduits par R.Rashed, Librairie Blanchard Paris 1984 , 386 p.

UNE HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES, Routes et dédales, par A.Dahan-Dalmedico et J.Peiffer, Éditions du Seuil Paris 1986, 314 p.

* LA FABULEUSE HISTOIRE DES NOMBRES, É. Cousquer, Diderot Paris 1998, 260 p.

HISTOIRE UNIVERSELLE DES CHIFFRES, L'intelligence des hommes racontées par le nombre et le calcul, G. Ifrah, Robert Laffont , Paris 1994, 2 tomes, 1042 et 1010 p.

* MATHÉMATIQUES AU FIL DES ÂGES, *textes choisis et commentés* par: J. Dhombres, A. Dahan-Dalmedico, R. Bkouche, C. Houzel et M.Guillemot (Groupe IREM épistémologie et histoire), Gauthier-villars Paris, 1987, 327 p.

FRAGMENTS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES, brochure APMEP Paris n° 41, 1981, 176p.

FRAGMENTS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES II, brochure APMEP Paris n° 65, 1987, 211 p.

LES MATHÉMATIQUES ARABES (VIII^e-XV^e siècles) par A.P.Youschkevitch, Vrin Paris, 1976, 212 p.

HISTOIRE DES SCIENCES ARABES 2. MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE, sous la direction de R.Rashed, Éditions du Seuil Paris, 1997, 433 p.

POUR L'HONNEUR DE L'ESPRIT HUMAIN, les mathématiques aujourd'hui, J. Dieudonné, Hachette Paris, 1987, 298 p.

DEVELOPMENT OF MATHEMATICS 1900-1950, Edited by J. P. Pier, Birkhauser verlag Basel, 1994, 729 p.

- * JEUX 2, jeux et activités numériques, H.Péault, brochure n° 59, APMEP Paris, 1985, 193 p.
LUDOFICHES 88, brochure n° 68, APMEP Paris, 1988, (21 fiches)
- * JEUX 3, jeux pour la tête et les mains, Groupe « jeux et maths », brochure n° 78, APMEP Paris, 1990, 158 p.
- * JEUX 4, de l'intérêt des problèmes de rallye, Groupe « jeux », brochure n° 97, APMEP Paris, 1995, 163 p.
- * JEUX 5, des activités mathématiques au collège, Groupe « jeux », brochure n° 119, APMEP Paris, 1998, 132 p.
- * DOUBLE DÉTENTE, défis mathématiques à rebondissements, B.Novelli, Éditions Pole Paris, 1995, 192 p.
- JEUX D'ESPRIT ET ÉNIGMES MATHÉMATIQUES, les aventures extraordinaires du Dr Ecco, D.Shashu, traduit par M. Garène, Éditions Odile Jacob Paris, 1995, 193 p.
- JEUX D'ESPRIT ET ÉNIGMES MATHÉMATIQUES, codes, mystères et complots, D.Shashua, traduit par M. Robert, Éditions Odile Jacob Paris, 1996, 273 p.
- * LES JEUX DE NIM, J.Bouteloup, ADCS Amiens, 1996, 298 p.
- * LES JEUX MATHÉMATIQUES, M.Criton, que sais-je? n° 3220 PUF Paris, 1997, 126 p.
- * JEUX DE PAVÉS, B.Bettinelli, IREM de Besançon, 1997, 78 p.
- * JEUX MATHÉMATIQUES ET MATHÉMATIQUES DES JEUX, J.P. Delahaye, bibliothèque pour la science Paris, 1998, 143 p.
- LE SECRET DES NOMBRES, jeux, énigmes et curiosités mathématiques, A.Jouette, Albin Michel Paris, 1998, 287 p.
- * LA GÉOMÉTRIE DE LA CHAMBRE À AIR, 39 mystères mathématiques, J.P. Boudine, Vuibert Paris, 1998, 192 p.
- MATHEMATICAL GAMES, I, II, III)
MATH. MORSELS, MORE MATH. MORSELS) R. Honsberger, Math. Ass. of America.
MORE MATH. PLUMS)
FROM ERDOS TO KIEV, IN POLYA'S FOOTSTEP)
- JEUX DE CALCULATRICES, R. du Plessis, M.A. Editions, 90 rue d'Assas, 15006 Paris.
- JEUX DE CANCRES, C.Mainguy, M.A. Editions, 90 rue d'Assas, Paris.
- 100 JEUX GÉOMÉTRIQUES, 100 JEUX NUMÉRIQUES, P. Berloquin, Ed. Livre de poche.
- JOUER AVEC LES MATHS, H. Camoux, Editions d'organisation.
- JEUX D'ESPRIT ET ENIGMES MATHÉMATIQUES, E. Busser et G. Cohen, Ed. O. Jacob, 1999.
- * JEUX MATHÉMATIQUES DU SCIENTIFIC AMÉRICAIN, Cedic Nathan, 1996.
- * JEUX MATHÉMATIQUES ET MATHS DES JEUX, Delahaye, Ed. Belin.
- 100 JEUX MATHÉMATIQUES DU MONDE, E. Busser et G. Cohen, Pôle Paris 1999.

pour écoliers et collégiens:

- * JEUX ET DÉCOUVERTES MATHÉMATIQUES, A. et J.C. Deledicq, F.Casiro, ACL éditions Paris, 1996, 64 p.

5) Compétitions, Rallyes et Problèmes.

- * LES 200 PREMIERS PROBLÈMES DE L'APMEP réunis par D.Roux, APMEP Paris, volume I « Arithmétique et Théorie des nombres », n°92, 1993, 150 p.; volume II « Géométrie », n°93, 1994, 167 p.; volume III « Combinatoire, algèbre et analyse », n°94, 1994, 188 p.
- * MATHEMATIQUES DU KANGOUROU, A. Deledicq et F. Casiro, ACL éditions-Vuibert Paris, 1994, 191 p.
- * FICHER ÉVARISTE, 120 problèmes niveau Benjamins, 120 niveau Cadets, présentés sous forme de fiches, Brochure n° 98, APMEP Paris, 1995,
LE TOURNOI MATHÉMATIQUE DU LIMOUSIN, 1987-1995: neuf années d'existence, J.P. Borel, M. Clement, M.J. Pestel, IREM de Limoges, 1996, 145 p.
- * PANORAMATH96, Panorama 1996 des compétitions mathématiques, sous la direction de G.Cohen et C.Masson, coédition CIJM-APMEP-ACL Paris, 1996, 224 p.
- * OLYMPIADES INTERNATIONALES DE MATHÉMATIQUES, Énoncés et solutions détaillées, années 1988 à 1997, J.P. Boudine, F. Lo Jacomo, R. Cuculière, Éditions du Choix Marseille, 1998, 219 p.
- * LES OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES, Réflexions et stratégies, Tarik Belhaj Soulam, Ellipses, Paris 1999.
- * LES MATHÉMATIQUES DU C.O.K. , M.Bachmakov, ACL Paris, 1998, 256 p.
- * SUJETS ET CORRIGÉS 1998, Commission inter-IREM « Rallye », Irem de Toulouse, 1999, 234 p.
- * CONCOURS AUSTRALIEN DE MATHÉMATIQUES, Secrets de la résolution de problèmes au collège et au lycée, W. Atkins, traduit par M.Gonnard, adapté par H. Bareil, Pole-Archimède-APMEP-CIJM Paris, 1999, 256 p.
- * PANORAMATH 2, Panorama 2000 des compétitions mathématiques, sous la direction de G. Cohen et C. Masson, coédition CIJM-APMEP-ACL Paris, 1999, 288 p.
- DES MATHS EN ÉTÉ, Université d'été de la FFJM, Orléans 19-26 juillet 1998, 100 p.
- DES MATHS EN ÉTÉ, Stage Mathématiques Olympiques, Orléans 19-26 juillet 1998, 100 p.
- MATHEMATIC OLYMPIAD HANDBOOK, Gardiner, Ed. Oxford Science.
- WHAT TO SOLVE, Cofman, Ed. Oxford Science.

6) Thèmes anciens ou à la mode.

- * LE MONDE DES PAVAGES, A.Deledicq et R. Raba, ACL Éditions Paris, 1997, 64 p.

* ZOO MATHÉMATIQUE, R.Raba, ACL Éditions Paris, 1998, 96 p.

LE MAROC ET L'ARTISANAT TRADITIONNEL ISLAMIQUE DANS L'ARCHITECTURE,
Tome 2, A. Paccard, Éditions atelier 74 Annecy, 1981, 582 p.

* DESSINER L'ESPACE, ou comment employer Cabri-Géomètre en géométrie dans l'espace,
M.Rousselet, Éditions Archimède Argenteuil, 1995, 124 p.

* MATHS EN GRAPHIQUES, S Gasquet, ACL Éditions Paris, 1998, 96 p.

* LE TRÉSOR D'ARCHIMÈDE, B.Bettinelli, IREM de Besançon, 1988, 138 p.

* APPRIVOISER L'INFINI, A.Deledicq et F.Casiro, ACL Editions Paris, 1997, 95 p.

CARRÉS MAGIQUES, CARRÉS LATINS ET EULÉRIENS, histoire, théorie, pratique, J.
Bouteloup, Éditions du Choix Argenteuil, 1991, 171 p.

POLYHEDRON MODELS, M.J. Weninger, Cambridge University press, 1970, 208 p.

LA SYMÉTRIE DU CHAOS, À la recherche des liens entre maths , art et nature, M. Field et
M. Golubitsky, InterEditions Paris, 1993, 218 p.

LE CALCUL, L'IMPRÉVU, Les figures du temps de Kepler à Thom, I.Ekeland,Éditions du
Seuil Paris, 1984, 170 p.

THE BEAUTY OF FRACTALS, Images of complex dynamical systems, H.O. Peitgen, P.H.
Richter, Springer-Verlag erlin, 1986, 199 p.

PIERRE DE FERMAT, Textes et documents, présentés par M. Spiesser, IREM de Toulouse,
1995, 114 p.

* QUADRATURE DU CERCLE, FRACTIONS CONTINUES et AUTRES CONTES,
M.Serfati, brochure n° 86 APMEP Paris, 1992, 202 p.

MATHÉMATISATIONS, Augustin-Louis CAUCHY et l'École Française, A. Dahan -
Dalmedico, Éditions du choix Argenteuil, 1992, 460 p.

LA MATHÉMATISATION DU RÉEL, Essai sur la modélisation mathématique, G. Israel,
Éditions du Seuil Paris, 1996, 368 p.

LEÇONS SUR LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DE LA LUTTE POUR LA VIE, V.Volterra,
Éditions Jacques Gabay Paris, 1990, 214 p.

LEÇONS D'À PEU PRÈS, G. Th. Guilbaud, Christian Bourgeois, Éditeur Paris, 1985, 235 p.

INITIATION À LA CRYPTOGRAPHIE, G. Dubertret, Vuibert Paris, 1999, 103 p.

PARADOXES IN PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS, G.J.
Székely, Reidel Publishing Company Dordrecht, 1986, 250 p.

THE PLEASURE OF PROBABILITY, R.Isaac, Springer-Verlag Berlin, 1995, 241 p.

ONDES ET ONDELETTES, la saga d'un outil mathématique, B. Burke Hubbard, Pour la
science-Belin Paris, 1995, 235 p.

ONDELETTES ET OPÉRATEURS LINÉAIRES, I Ondelettes, Y. Meyer, Hermann Paris,
1990, 215 p.

* LE FASCINANT NOMBRE π , Delahaye, Pour la Science, Paris 1997.

* AUTOUR DU NOMBRE π , P. Eymard, J.P. Lafon, Hermann, Paris 1999.

QUELQUES ASPECTS DES MATHÉMATIQUES ACTUELLES, Textes réunis par A. El Kacimi et V. Vassalo, ellipses Paris, 1998, 234 p.

TROIS APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES : la formalisation mathématique du traitement des images, S. Masnou et J.M. Morel; problèmes mathématiques de l'hydrodynamique et de la magnétohydrodynamique, V. Arnold; the minimum-entropy algorithm and related methods for calibrating Asset-Pricing model, M. Avellaneda, Journée annuelle SMF Paris, 1998, 86 p.

MATHS EN SCÈNE, EN SEINE, Pour se repérer dans l'exposition Maths 2000, Régionale APMEP de Haute-Normandie Rouen, 1998, 221 p.

LE LIVRE DES NOMBRES, Conway et Guy.

DICTIONNAIRES PENGUIN « Des nombres curieux » « curiosité géométriques », D. Wells, Ed. Eyrolles, Paris.

FRACTALS FOR THE CLASSROOM, Peitgen, Jurgens, Sauve, Ed. Springer.

L'ORDRE DU CHAOS, Ed. Belin.

VISION GÉOMÉTRIQUE, I. Stewart, Ed. Belin.

LA QUATRIÈME DIMENSION, T. Benchoff, Ed. Belin.

MATHS ET FORMES OPTIMALES, Hildebrand, Tromba, Ed. Belin.

7) Dans nos classes.

GALION-THÈMES-SÉRIE 1 (Arpentages, Dessins géométriques, Photographie et maths, Démontrer avec des aires, Des spirales, Combien..?), Gallion Lyon, 1990-95, 100 p.

GALION-THÈMES-SÉRIE 2 (Le nombre d'or, Polygones réguliers, Autour de la moyenne, Vers les fonctions, le nombre pi, Autour de pi), Gallion Lyon, 1990-95, 100 p.

GALION-THÈMES-SÉRIE 3 (Navigation à vue de terre, Histoire de cubes, Avec des polyèdres, Figures de la terre, Paraboles, Planètes), Gallion Lyon, 1990-95, 100 p.

GALION- THÈMES-SÉRIE 4 (Calculus, Autour du nombre d'or, Le bicoïn, Graphiques, Pourcentages, Radical de 2), Gallion Lyon 1990-95, 100 p.

* LE TRÉSOR DE TONTON LULU Volume 2 (25 problèmes de maths niveau Première), J.Lubczanski, dessins de G. Chaumeil, Éditions Archimède argenteuil, 1994, 40 p.

* PROFESSION ENSEIGNANT, les maths en collège et en lycée, coordonné par P.Legrand, Hachette Paris, 1997, 444 p.

AUTOUR DE LA LIAISON BAC/POST-BAC, Eléments pour agir, coordonné par A. Noïrfalisse, IREM de Clermont, 1998, 107 p.

* EXOS-MALICES, 200 exercices classés et corrigés, 4^{ème}, 3^{ème}, 2^{de}, D. Missenard, ACL éditions Paris, 1997, 160 p.

ENCYCLOPÉDIE KANGOUROU DES MATHS AU COLLÈGE, A. Deledicq, C. Missenard, ACL éditions Paris, 1998, 192 p.

MATHEVASION, Exercices et T.P. de maths, seconde, première, terminale, Ph. de Sablet, Mathevasion Californie, 1997, 71 p.

GEOMÉTRIC CONSTRUCTIONS, Martin, Ed. Springer.

* PLIAGES MATHEMATIQUES, V. Larose, ACL 1997.

MATHS POUR TOUS, J.L. Boursin.

DECOUPAGES MATHÉMATIQUES, F. Dupuis, D. Sonde, Ed. Archimède 1999.

8) Périodiques.

TANGENTE, N° 57, 58/59, 64/65, 66, HS7, 67, 68, 69/70, Éditions Archimède Argenteuil, 5 à 6 numéros par an.

QUADRATURE, N° 21, 24, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, Éditions du Choix Marseille, trimestriel.

REPÈRES IREM, N° 1 à 35, Topiques éditions Metz, trimestriel.

GRAND N , n° 63, IREM de Grenoble, 2 numéros par an.

PETIT X, n° 51, IREM de Grenoble, 3 numéros par an.

PLOT, n° 80, Régionales APMEP Poitiers/Limoges/Orléans/Tours, trimestriel.

L'OUVERT, n° 95, APMEP Alsace et IREM Strasbourg, trimestriel.

POUR LA SCIENCE, N° 259, 260, 261, mensuel.

LA RECHERCHE, N° 309, 310, mensuel.

SCIENCE ET VIE JUNIOR, n° 112, mensuel.

EUROPEAN MATHEMATICAL SOCIETY NEWSLETTER, n° 32, trimestriel.

THE MATHEMATICAL INTELLIGENCER, n° 20/4, trimestriel.

THE AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY, n° 106/6, mensuel.

MATHEMATICS COMPETITIONS, journal of the World Federation of National Competitions, Canberra, Australie, N° 5/1, 2; 6/2; 7/1, 2; 8/1, 2; 9/1; semestriel.

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES, N° 2/2, 3/1, 3/2, 4/1, SMF , semestriel.

9) Films.

BLAISE PASCAL, sa vie et son oeuvre, CRDP Clermont, 1991, 25 minutes.

* FERMAT, le « premier homme du monde », CRDP Midi-Pyrénées, 1995, 25 minutes.

* LA NOUVELLE ETOILE DU BERGER, CNRS Audiovisuel, 1995, 29 minutes.

Une sélection d'adresses Internet où trouver de la documentation pour un club mathématique

D. Missenard

Le site d'ANIMATH : <http://animath.free.fr>

La base de données historiques de l'Université de St-Andrews
<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history>

La base de données mathématiques Publimath
<http://www.irem.univ-mrs.fr/publimath/>

Un site dédié aux mathématiciennes
<http://www.scottlan.edu/lriddle/women/women.html>

Tout sur Archimède
<http://www.mcs.drexel.edu:80/~crrres/Archimedes/contents.html>

Une liste de liens en Histoire des Maths
<http://www.duch.schdist57.bc.ca/Library/HistMath.html>

Histoire et Philosophie des Mathématiques
<http://www.kingsu.ab.ca/~glen/cshpm/home.htm>

Un site contenant de nombreux documents originaux
http://www.ma.iup.edu/~gstoudt/history/ma350/sources_home.html

Histoire des sciences
<http://bang.lanl.gov/video/stv/arshtml/arstoc.html>

Histoire des sciences et images de géométrie fractale
<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/home.html>

Un site dédié à la géométrie
<http://www.geom.umn.edu/>

Un site relatifs aux polygones, polyèdres, polytopes...
<http://www.ics.uci.edu/~epstein/junkyard/>

Le site de Cabri-Géomètre
<http://www-cabri.imag.fr/Start.html>

Le site de l'association Abracadabri
<http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/WabraGene/abraGene.html>

Le site du CREEM présentant des utilisations de Geoplan et Geospace
<http://www2.cnam.fr/creem/>

Le site de l'ADIREM (pointe vers les sites d'IREMs):
<http://math.unice.fr/~iremnice/>

Le site de l'APMEP
<http://www.univ-lyon1.fr/apmep/sommaire.html>

Un "site de liens" très riche
<http://www.astro.virginia.edu/~eww6n/index.html>

Les liens ci-dessus figurent (avec d'autres) sur le site du
Kangourou, à l'adresse suivante :

<http://www.mathkang.org/liens.html>

**TITRE : CRÉER ET ANIMER UN CLUB DE MATHÉMATIQUES
EN COLLÈGE OU EN LYCÉE.**

AUTEUR : Paul-Louis HENNEQUIN (coordonnateur).

EDITEUR : IREM de CLERMONT-FERRAND.

DATE : OCTOBRE 2000.

MOTS CLÉS : Activités - Animation - Ateliers - Clubs - Jeux.

RÉSUMÉ : Document de travail élaboré pendant et après l'Université d'Eté de Saint-Flour (28 août - 1^{er} septembre 1999). Il rassemble une cinquantaine d'expériences de clubs, ateliers, activités péri-scolaires et mathématiques dans l'objectif de multiplier les clubs tant en collège qu'en lycée.

Format A4 : Nombre de pages : 222.