

LES RECHERCHES SUR LES COURBES À DOUBLE COURBURE (PARIS, 1731), D'ALEXIS-CLAUDE CLAIRAUT (1713-1765).

Jean-Pierre LE GOFF,
Mai 1991⁰.

Résumé:

En 1731, un jeune géomètre étonnait les membres éminents de l'Académie Royale des Sciences en publiant le résultat de ses *Recherches sur les Courbes à double Courbure*, c'est-à-dire sur les courbes inscrites sur certaines surfaces; il reprenait ainsi le travail commencé par Descartes et Fermat un siècle plus tôt. Ce *neveu* à la fois tardif et précoce du philosophe ouvrait ainsi une nouvelle carrière aux mathématiciens, qui n'avaient pas jusque là songé à s'y engager de façon systématique, hormis peut-être Philippe de La Hire, Antoine Parent, Jean Bernouilli, ou Henri Pitot, qui traitèrent du problème de façon allusive ou ponctuelle. Mais plus qu'une simple extension à l'espace de la géométrie analytique, c'est bien d'une nouvelle conception de cette science récente qu'il s'agit chez Clairaut: car la technique calculatoire analytique est ici au service de la compréhension synthétique des propriétés des figures de l'espace. Si Clairaut n'eut pas l'heur de pousser jusqu'au bout les recherches qu'il annonçait sur les surfaces elles-mêmes, on peut apprécier la fécondité de ses vues au travers de quelques extraits de ces *Recherches...* et de quelques uns de ses mémoires, dont un est consacré à la génération par projection des courbes du troisième ordre, et servira ici d'illustration de ce nouvel essai de la *Méthode*.

* * * * *

⁰ Cet article a été rédigé pour les besoins et comme trace d'un exposé sur Clairaut, géomètre, et d'un atelier de lecture des *Recherches sur les Courbes à double Courbure* de Clairaut, proposés au Colloque inter-IREM de Lyon, "*La figure et l'espace*", (organisé par la Commission inter-IREM d'Épistémologie et d'Histoire des Mathématiques, les 31 mai et 1er juin 1991). Bien que le contenu de cet article touche plutôt à la géométrie analytique dans l'espace, sans rapport immédiat avec la question de la perspective, il permet néanmoins de comprendre comment Clairaut a pu concevoir une solution - qui annonce la création des coordonnées homogènes -, au problème posé par Newton à propos de la génération par ombrage des courbes du troisième ordre: cf. les deux autres articles de ce dossier, sur ce sujet.

Alexis-Claude Clairaut: quelques éléments biographiques¹.

C'est à 18 ans qu'Alexis-Claude Clairaut publie son ouvrage intitulé *Recherches sur les Courbes à double courbure*, et paru à Paris en 1731². Mais à ce moment de son histoire intellectuelle, le jeune mathématicien n'en est pas à son coup d'essai: il est déjà connu de la communauté savante française, et bientôt européenne, pour son extraordinaire précocité attestée par la rédaction, dès l'âge de 12 ans, d'un premier mémoire sur quatre courbes du troisième genre qu'il avait imaginées pour résoudre le problème de la construction d'un nombre quelconque de moyennes proportionnelles entre deux lignes données³.

L'auteur de son éloge devant les membres de l'Académie⁴, Granjean de Fouchy, nous apprend qu'Alexis-Claude Clairaut est né le 13 mai 1713, second enfant de Jean-Baptiste Clairaut et de Catherine Petit, son épouse. Son père étant géomètre, il apprend son alphabet sur les figures d'Euclide et sait lire et écrire à quatre ans. À neuf ans, il est en mesure de lire, sous la conduite de son père puis sans aide aucune, le tout récent ouvrage de Monsieur Guisnée, inspiré par Descartes, *l'Application de l'algèbre à la géométrie* (Paris, 1705), et de résoudre "la plupart des problèmes du livre d'une manière plus simple et plus élégante que celle de l'auteur"⁵.

¹ L'essentiel des éléments bio-bibliographiques donnés dans cette section est issu de l'ouvrage de Pierre Brunet: *La vie et l'œuvre de Clairaut (1713-1765)*, Paris, Centre International de Synthèse, 1952. Cf. aussi J. Bertrand: *Clairaut. Sa vie et ses travaux*, in *Éloges académiques*, 2de série, Paris, 1902, pp. 231-261, extrait du *Journal des Savants*, 1866, pp. 117-138, et Maximilien Marie: *Histoire des sciences mathématiques et physiques*, t. 8, Paris, 1886, pp. 150-155.

² *Recherches sur les Courbes à double courbure*, A Paris, chez Nyon, Place Conty, au premier Pavillon des quatre Nations, à sainte Monique, (chez) Didot, Quay des Augustins, près le Pont saint Michel, à la Bible d'Or, (chez) Quillau, rue Galande, près la Place Maubert, à l'Annonciation. M. DCC. XXXI. Avec Approbation et Privilège du Roy. Sans dédicace; l'approbation est signée de J. de Molières, lecteur désigné par le Garde des Sceaux, à Paris, le 3 juin 1730; le privilège date du 7 juin 1730, est signé par Noblet, et a été enregistré le 11 juillet 1730 par A. Le Mercier, syndic. Le volume comporte une préface de IV pages, 119 pages de texte, complétées de deux pages de remarques et d'errata, et VI planches gravées par Vallet, avec 67 figures. Exemplaire consulté: Bibliothèque Nationale, cote V. 831.

³ A.-C. Clairaut: *Quatre problèmes sur de nouvelles courbes*, pour faire suite à *Trois problèmes de géométrie*, de J.-B. Clairaut son père, in *Miscellanea Berolinensia*, t. IV, 1734. M. Marie donne ce mémoire pour "assurément de peu de valeur, mais toutefois original" (*Histoire...*, op. cit., p. 150).

⁴ *Éloge de Clairaut*, par Grandjean de Fouchy, in *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, 1765, pp. 144-159. Voir aussi le *Journal des Sçavans*, 1765 et la notice de S.-F. Lacroix dans la *Biographie universelle* de Michaud, t. 8, Paris, 1813, pp. 593-598.

⁵ *Application de l'Algèbre à la Géométrie, ou Méthode de démontrer par l'Algèbre, les Théorèmes de Géométrie, & d'en résoudre & construire tous les Problèmes. L'on y a joint une Introduction qui contient les Règles du Calcul Algébrique. Par Mr Guisnée de l'Académie*

À dix ans, il se plonge dans la lecture des *Sections coniques* du marquis de l'Hôpital, mais n'en comprend pas tous les principes; son père veut lui imposer une seconde lecture: il s'y refuse jusqu'à ce qu'un ami de la famille, l'académicien de L'Isle, s'avisant de ses lectures, ne le raille en avançant que, vu son jeune âge, il a entre les mains un ouvrage dont il ne connaît guère que le titre et la couverture. Piqué au vif, le jeune Clairaut relit l'ouvrage deux fois pour bien s'en imprégner, et s'attaque ensuite à l'*Analyse des infiniment petits* du même auteur, parue en 1696. Il semble d'ailleurs que le don d'Alexis-Claude soit partagé par son jeune frère, appelé "le cadet de Clairaut" puisque de prénom inconnu, qui mourut précocement de la petite vérole en 1732, non sans avoir en 1731, dès l'âge de quinze ans, publié un traité consacré à *Diverses quadratures circulaires elliptiques et hyperboliques*⁶. Les deux frères ont pris l'habitude de travailler tardivement et en secret dans un cabinet aménagé pour eux, et la mort de son frère affectera beaucoup Alexis-Claude, selon son biographe qui indique que

"l'amitié qui les unissait plus encore que le sang lui fit sentir ce coup si vivement qu'on craignit quelque temps pour lui-même."

C'est Destouches, logé un temps par la famille Clairaut, qui présente Alexis-Claude, encore enfant, à quelques membres de l'Académie des Sciences, et en particulier à l'abbé Bignon. Clairaut est alors occupé en grand secret à la rédaction de son premier mémoire: son père, découvrant qu'il y passe le plus clair de ses nuits, lui en fait le reproche mais décide de le présenter à l'Académie pour y lire son œuvre; on doute qu'il soit de lui, jusqu'à ce que ses réponses à la Compagnie aient montré qu'il peut produire des connaissances et des résultats plus forts. Clairaut n'a alors qu'un peu plus de douze ans. L'Académie ne retient pas son mémoire pour ses publications, mais son secrétaire perpétuel, Fontenelle, délivre au jeune auteur un certificat d'authenticité, qui sera imprimé plus tard avec son travail à la suite d'un mémoire que son père publiera en 1734 dans les *Miscellanea Berolinensia*.

Dès 1726, il travaille à son premier ouvrage, dont il sera ici question: les *Recherches sur les courbes à double courbure*, qui paraîtront cinq ans plus tard. Car dans sa hâte de finir, il contracte une fièvre et des maux de tête violents qui retardent l'achèvement d'un manuscrit qu'il terminera cependant en 1729, comme l'atteste un certificat accordé par l'Académie,

"dans lequel - nous dit Granjean de Fouchy -, il était fait mention expresse des précautions qu'elle avait prises pour s'assurer que l'auteur

Royale des Sciences, Professeur Royal de Mathématique, & ancien Ingénieur ordinaire du Roy. A Paris, chez Jean Boudot, Imprimeur du Roy & de l'Académie Royale des Sciences, rue saint Jacques, au Soleil d'Or, et (chez) Jacques Quillau, Impr. Jur. Libr. de l'Université, rue Galande, près de la rue du Fouarre (qui a imprimé le volume). MDCCV. Avec Approbation (du 25 juillet 1704, signée Fontenelle) et Privilège du Roy (du 24 août 1704, signé Le Comte, enregistré le 2 septembre 1704, par Pierre Emery, syndic). L'ouvrage, sans dédicace, comporte une préface et une table de VI pages et 252 pages de texte, ainsi que VI planches ornées de 113 figures.

⁶ *Diverses quadratures circulaires elliptiques et hyperboliques*, de M. Clairaut le cadet (1716? - 1732), Paris, Quillau, 1731, in-12°, IV-56 pages.

avait à peine 16 ans accomplis lorsqu'il avait présenté un livre dont les plus célèbres géomètres se seraient fait honneur."

Voici un passage de ce certificat, signé le 23 août 1729 par Fontenelle; c'est un extrait qui figure en tête de l'ouvrage, à la suite de l'approbation, et qui provient des registres de l'Académie Royale, séance du 20 août:

"Messieurs de Mairan & Nicole qui avoient été nommés pour examiner un Ouvrage de M. CLAIRAUT le Fils, intitulé, Recherches sur les Courbes à double courbure, en ayant fait leur rapport, la Compagnie a jugé que cet Ouvrage contenoit beaucoup de choses curieuses & nouvelles sur ces sortes de courbes, & montrait non-seulement de l'invention dans l'Auteur, qui n'est âgé que de seize ans, mais encore beaucoup de connoissance du Calcul différentiel, & de l'Integral."

L'approbation de J. De Molieres, en date du 3 juin 1730, qui fait suite à la préface, est aussi laudatrice:

"J'ai lû par ordre de M. le Garde des Sceaux un Manuscrit intitulé Recherches sur les Courbes à double courbure, composé par M. CLAIRAUT. Ce Traité que les plus habiles Geometres de notre temps & des siecles passés se seroient fait honneur d'avoir composé, & qui est certainement l'Ouvrage d'un jeune homme de seize ans, qui dès l'âge de douze avoit déjà donné des marques publiques de son habileté dans les Mathématiques, ne merite pas seulement d'être imprimé, mais d'être admiré comme un prodige d'imagination, de conception & de capacité."

C'est donc à la naissance intellectuelle d'un géomètre promis aux plus belles destinées que l'on assiste dans ces premières années de la carrière scientifique de Clairaut. Cependant, les travaux de commande de l'Académie, et sans doute aussi un certain goût de l'époque pour l'astronomie et la géodésie vont l'éloigner de son projet de rédiger une sorte de second tome, consacré celui-là aux surfaces courbes: le débat sur la figure de la terre va occuper les esprits et conduire les uns ou les autres à de longs voyages de mesure. À partir de 1731, Clairaut publiera essentiellement des mémoires sur l'astronomie, la dynamique et la géodésie, et ses contributions en mathématiques "pures" se réduiront à une douzaine de mémoires de géométrie ou de calcul infinitésimal, inclus dans ceux de l'Académie, et à quelques communications dans les *Philosophical Transactions of the Royal Society* ou dans le *Journal des Sçavans*; la plupart de ses autres textes mathématiques traitent de questions théoriques issues de ses travaux en astronomie ou en géodésie.

Il faut souligner que plusieurs de ces mémoires de géométrie "pure", rendus publics entre 1731 et 1734, sont consacrés à des problèmes divers sur les surfaces coniques ou sphériques et sont rédigés dans la foulée de son traité sur les courbes gauches; le premier est consacré aux courbes du

troisième ordre⁷, le second aux épicycloïdes sphériques⁸, le troisième aux courbes algébriques et rectifiables sur un cône⁹, le suivant à la solution d'un problème de géométrie proposé par M. Cramer¹⁰, le cinquième roule sur des questions de *maximis* et de *minimis*¹¹, le sixième à la solution de plusieurs problèmes sur des courbes à plusieurs branches¹², et le dernier sur une méthode de Fontaine à propos de ces courbes¹³. Les autres mémoires de mathématiques de Clairaut touchent au calcul infinitésimal¹⁴.

Pour rendre justice à la contribution de Clairaut à l'avancement et à la diffusion des sciences, il faut aussi signaler sa participation, aussi mince soit-elle, à la mise au point de la traduction par la marquise du Châtelet des *Principia* de Newton¹⁵, et l'intérêt qu'il porta à la rédaction de livres à vocation pédagogique: il fit paraître des *Éléments de Géométrie*¹⁶ et des *Éléments d'Algèbre*¹⁷. Ces ouvrages, par leur clarté et leur lectorat potentiel, annoncent ceux que produiront les savants des Lumières et de la révolution à venir, dont les manuels viendront soutenir l'effort d'éducation entrepris dans les nouvelles écoles de la République: les Bézout¹⁸, Legendre¹⁹ et autre

⁷ Sur les courbes Que l'on forme en coupant une surface courbe quelconque, par un plan donné de position, 1731, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, 1733, pp. 483 à 493 et 8 figures en une planche (n°30 du volume, insérée en p. 492).

⁸ Des épicycloïdes sphériques, 1732, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris.

⁹ Manière de trouver des courbes algébriques et rectifiables sur la surface d'un cône, 1732, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris.

¹⁰ Solution d'un problème de géométrie proposé par M. Cramer, professeur de mathématiques à Genève, 1732, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris.

¹¹ Sur quelques questions de *maximis* et *minimis*, 1733, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris.

¹² Solution de plusieurs problèmes où il s'agit de trouver des courbes dont la propriété consiste dans une certaine relation entre leurs branches, exprimée par une équation donnée, 1734, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris.

¹³ Sur la méthode de M. Fontaine pour résoudre le problème où il s'agit de trouver une courbe..., 1734, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris.

¹⁴ Recherches générales sur le calcul intégral, 1739; De la spirale d'Archimède décrite par un mouvement pareil à celui qui donne la cycloïde et de quelques autres courbes du même genre, 1740; Sur l'intégration ou la construction des équations différentielles du premier ordre, 1740; tous inclus dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris.

¹⁵ *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, en 2 vol., par feu M^{me} la marquise du Châtelet, Paris, 1756-1759.

¹⁶ *Éléments de Géométrie*, Paris, 1741, in-8°, XXIV-XVI-216 p. et 14 pl.: deux éditions en 1741, puis trois en 1753, 1765 et 1768; nombreuses réimpressions: 1830, 1852, 1856, 1857, 1861, 1920. Rééd. en fac-simile de l'éd. de 1753 sous l'égide de la Commission inter-IREM d'Épistémologie, Laval, 1987.

¹⁷ *Éléments d'Algèbre*, Paris, 1746, in-8°, XVIII-336 p. et tableaux; plusieurs rééd. en 1749, 1760 (2 éd.), 1768; la 5^{ème} éd., datée de l'An V (1797), en 2 vol. comporte des additions de S.-F. Lacroix tirées des leçons données à l'École Normale par Lagrange et Laplace, et fait suite à un traité élémentaire d'Arithmétique; nouv. éd. avec notes et additions, Paris, An IX (1801).

¹⁸ Étienne Bézout: 1730-1783. Auteur d'un *Cours de Mathématiques à l'usage du Corps Royal de l'Artillerie*, Paris, 1770, et surtout d'un *Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine*, Paris, 1764-1769, qui connut de nombreuses rééditions: 1770, 1771, 1775, 1781, 1787 et 1789; il y eut de nombreuses rééditions posthumes, refondues. Cf. *Naissance d'un nouveau pouvoir: sciences et savants en France, 1793-1824*, N. et J. Dhombres, Paris, 1989.

¹⁹ Adrien-Marie Legendre: 1752-1833. Auteur de fameux *Éléments de Géométrie*, Paris, 1794; nombreuses rééditions anthumes et posthumes.

Lacroix²⁰. Les *Éléments de Géométrie* ont été écrits à la demande de la marquise du Châtelet, et Maximilien Marie les décrit en ces termes²¹:

“Le côté saillant de cet ouvrage, très estimé à l’époque, est une tendance philosophique de l’auteur à éviter autant que possible l’appareil pédantesque des démonstrations ardues, et à chercher, au contraire, à mettre toujours en évidence la raison sensible de chaque fait... Il recourt le plus rarement possible à la forme du raisonnement syllogistique. Le discours s’y suit comme dans tous les traités autres que ceux de Géométrie, et les vérités s’y enchaînent naturellement par le but commun vers lequel elles tendent dans chaque partie de l’ouvrage. La méthode de Clairaut constituait assurément un progrès mais il était bien difficile qu’elle prévalût à la fois contre les habitudes prises, contre la paresse d’esprit des élèves et contre la nonchalance des maîtres. Sa Géométrie n’obtint pas en effet, un grand succès. ”

Clairaut y renonce, suivant en cela l’exemple d’Arnould²², à l’ordre euclidien dont la rigueur logique dans la démarche hypothético-déductive s’autorise seulement de quelques prémisses indispensables, pour adopter une méthode assez naturelle, pour être supposée la même que celle des premiers Inventeurs²³, c’est-à-dire celle des arpenteurs puisque *Géométrie* signifie mesure de Terrain²⁴: la clarté et le bonheur de l’exposé de ses *Recherches...* de 1731 s’expliquent peut-être par une certaine conception épistémologique qui les sous-tendrait et qui s’exprimerait dans la préface des *Éléments de Géométrie* en ces termes²⁵:

“Quelques réflexions que j’ai faites sur la Géométrie, m’ont fait espérer d’éviter ces inconvénients, en réunissant les deux avantages d’intéresser et d’éclairer les Commencants. J’ai pensé que cette Science, comme toutes les autres, devait s’être formée par degrés; que c’était vraisemblablement quelque besoin qui avait fait faire les premiers pas, et que ces premiers pas ne pouvaient pas être hors de la portée des Commencants, puisque c’étaient des Commencants qui les avaient faits.”

Et les *Recherches...* de Clairaut sont en effet l’œuvre d’un “Commencant” en géométrie analytique: le style en est celui d’un jeune mathématicien qui chercherait à faire partager son émerveillement devant

²⁰ Sylvestre-François Lacroix: 1765-1843. Auteur d’un *Cours de Mathématiques*, en 4 vol., Paris, An VIII (1800), qui fut réédité avec de nombreuses additions et modifications, sous divers formats (jusqu’à sept volumes) et sous divers titres tout au long du siècle: l’arithmétique connaissait sa 13^{ème} éd. en 1813, le calcul infinitésimal sa 8^{ème} éd. en 1878-9, par exemple; ses *Éléments d’algèbre*, Paris, 1799, connurent une 19^{ème} éd. en 1874. Cf. Dhombres, *op. cit.*

²¹ *Histoire...*, *op. cit.*, p. 153.

²² Antoine Arnould: *Nouveaux Éléments de Géométrie, contenant, Outre un ordre tout nouveau...*, Paris, 1667.

²³ Clairaut: *Éléments de Géométrie*, *op. cit.*, préface.

²⁴ *Ibid.*

²⁵ *Ibid.*

telle signification géométrique qui émerge du langage algébrique. Comme l'écrit Maximilien Marie en 1886²⁶:

"Les solutions données par Clairaut des questions relatives aux tangentes aux courbes à double courbure, à la rectification de ces courbes et à la quadrature des cylindres qui les projettent sur les plans coordonnés, sont celles qui se trouvent encore aujourd'hui indiquées dans tous les cours."

Nous ne détaillerons pas les travaux d'astronomie et de géodésie de Clairaut qui sont assez connus et qui sont de peu de rapport avec l'objet de cette étude, bien que son intérêt pour la question de la figure de la terre, par exemple, était très probablement lié à celui qu'il portait, à l'évidence, à la géométrie dans l'espace, aux diverses surfaces de révolution, et aux courbes qu'on peut y décrire. Nous achèverons cette évocation de la vie et de l'œuvre de Clairaut par ce jugement mitigé que portait l'abbé Charles Bossut et qui contribuerait plutôt - autres temps, autres mœurs - à nous le rendre sympathique²⁷:

"Un caractère doux et liant, une grande politesse, une attention scrupuleuse à ne jamais blesser l'amour-propre d'autrui, donnèrent à Clairaut dans le grand monde une existence, une considération que le talent seul n'aurait pas obtenues. Par malheur pour les Sciences il se livra trop à l'empressement général que l'on avait de le connaître et de le posséder. Engagé à des soupers, à des veilles, entraîné par un goût vif pour les femmes, voulant allier le plaisir à ses travaux ordinaires, il perdit le repos, la santé et enfin la vie à l'âge de cinquante-trois ans, quoique son excellente constitution physique parût lui promettre une bien plus longue carrière."

* * * * *

²⁶ *Histoire...*, op. cit., p.150.

²⁷ *Histoire des Mathématiques*, Paris, 1802. Cité par M. Marie, op. cit., p. 155.

La géométrie analytique en trois dimensions avant Clairaut²⁸.

Descartes avait conçu son "analyse" comme une méthode de découverte, analogue à celle que l'on soupçonnait pratiquée par les Anciens, comme dans les porismes, ou dans certaines propositions de la *Collection mathématique* de Pappus. L'algèbre littérale, appliquée à la géométrie, est plus un moyen commode et expéditif de parvenir à de nouveaux résultats, moyen systématique de surcroît, qui met la mathématique à la portée de celui qui recherche l'efficacité plus que la spéculation. De ce point de vue, Fermat était sans doute plus attaché à la méthode algébrique (plus persuadé de sa fécondité ?), que Descartes, qui pense avoir fait l'essentiel, et ne laisser que peu de travail à ses *neveux*. Il n'empêche que son idée de classification des courbes et des problèmes trouvera rapidement un écho, tant chez ses épigones, tels Philippe de La Hire dans son étude analytique des coniques et autres courbes de 1679²⁹, le marquis de l'Hôpital, dans son *Traité analytique des Sections Coniques* de 1704, Guisnée dans son *Application de l'algèbre à la géométrie*, de 1705, Fantet de Lagny et Richer du Bouchet dans leur *Analyse générale*, de 1733³⁰, ou l'abbé de Gua de Malves dans ses *Usages de l'Analyse de Descartes*, de 1740, comme chez le Newton de l'*Enumeratio Linearum tertii Ordinis*, de 1704. Il reste que chez Descartes, les courbes sont étudiées plus pour les solutions qu'elles permettent d'apporter à tel problème de géométrie, que pour elles-mêmes, y compris lorsqu'elles sont regroupées par types du fait des caractéristiques de leurs équations: c'est ainsi que droites et plans relèvent de la géométrie pure. Là encore, Fermat donnera plus d'importance, dans des travaux qui ne devaient paraître qu'en 1679, dans ses *Varia Opera Mathematica*, à l'étude des courbes définies par leurs équations.

Quand faut-il situer les premières études sur ces courbes que l'on appela assez vite et pour longtemps "à double courbure" ? Les premiers à évoquer la possibilité d'une extension à l'espace de l'analyse dite cartésienne furent Descartes lui-même et Fermat. Le premier, dans sa *Géométrie*, de 1637, aborde la question au détour d'un paragraphe situé à la fin du livre second: il y rapporte toute courbe de l'espace à deux plans de projection et indique comment l'on peut construire une normale à la courbe. Voici ce passage, intitulé dans la marge "Comment on peut appliquer ce qui a été dit ici des lignes courbes décrites sur une superficie plate, à celles qui se décrivent dans un espace qui a trois dimensions"³¹:

²⁸ Une partie des éléments historiques présentés dans cette section est tirée de l'ouvrage de R. Taton: *L'œuvre scientifique de Monge*, Paris, 1951, pp. 101 à 147.

²⁹ *Nouveaux Elemens des Sections Coniques, Les Lieux Geometriques, La Construction, ou Effecttion des Equations*, Paris, 1679.

³⁰ Thomas Fantet de Lagny (1660-1734), et le chanoine Claude Richer du Bouchet: 1680-1756; le second fut éditeur du premier pour son *Analyse Générale ou Methodes Nouvelles pour resoudre les Problèmes de tous les Genres & de tous les Degrez à l'infini*, par M. de Lagny, par les soins de M. Richer, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, T. XI, 1733.

³¹ *La Géométrie*, pour faire suite au *Discours de la Méthode*, Livre second, pp. 368-369.

"Au reste je n'ai parlé en tout ceci que des lignes courbes qu'on peut décrire sur une superficie plate; mais il est aisé de rapporter ce que j'en ai dit à toutes celles qu'on saurait imaginer être formées par le mouvement régulier des points de quelque corps dans un espace qui a trois dimensions: à savoir, en tirant deux perpendiculaires de chacun des points de la ligne courbe qu'on veut considérer, sur deux plans qui s'entre-coupent à angles droits, l'une sur l'un et l'autre sur l'autre; car les extrémités de ces perpendiculaires décrivent deux autres lignes courbes, une sur chacun de ces plans, desquelles on peut en la façon ci-dessus expliquée déterminer tous les points et les rapporter à ceux de la ligne droite qui est commune à ces deux plans, au moyen de quoi ceux de la courbe qui a trois dimensions sont entièrement déterminés. Même si on veut tirer une ligne droite, qui coupe cette courbe au point donné à angles droits, il faut seulement tirer deux autres lignes droites dans les deux plans, une en chacun, qui coupent à angle droits les deux lignes courbes qui y sont, aux deux points où tombent les perpendiculaires qui viennent de ce point donné; car ayant élevé deux autres plans, un sur chacune de ces lignes droites, qui coupe à angles droits le plan où elle est, on aura l'intersection de ces deux plans pour la ligne droite cherchée. Et ainsi je pense n'avoir rien omis des éléments qui sont nécessaires pour la connaissance des lignes courbes."

Le second y avait pensé, bien que cela n'apparaisse pas dans ses *Varia Opera* posthumes: il s'en expliquait dans une lettre à Carcavy dès 1643. Cette lettre est une esquisse programmatique d'une extension à l'espace de la géométrie analytique, intitulée *Isagoge ad locos ad superficiem* (Introduction aux Lieux en Surface): Fermat y généralise les notions de surface cylindrique, de conoïde (paraboloïde elliptique ou hyperboloïde à deux nappes) et de sphéroïde (ellipsoïde), toutes surfaces qu'Archimède avait étudiées dans le cas particulier où elles étaient de révolution, et que Fermat envisage comme solutions possibles de certains problèmes de lieux. Dans son préambule, il s'exprime en ces termes, qui font regretter qu'il n'ait pas poursuivi son étude, ou qu'il n'en reste pas d'autre trace³²:

"Pour couronner l' Introduction aux lieux plans et solides, il reste à traiter des lieux en surface. Les anciens n'ont fait qu'indiquer ce sujet, mais n'ont pas enseigné de règles générales, ni même donné quelque exemple célèbre à moins que ce ne soit enseveli depuis longtemps dans ces monuments de l'antique Géométrie où tant de précieuses découvertes ont été abandonnées sans défense aux insectes et souvent anéanties sans laisser aucune trace.

Cette théorie est cependant susceptible d'une méthode générale, comme le montrera cette courte dissertation; plus tard, si nous en avons le loisir, nous éclaircirons davantage chacune des découvertes géométriques que nous avons jusqu'ici fait brièvement connaître.

Les caractères que nous avons cherchés et montrés dans les lignes comme lieux peuvent être de même recherchés pour les surfaces

³² Œuvres de Fermat, éd. de P. Tannery et Ch. Henry, T. 3, 1896, pp.102-108. Texte latin original, T. 1, 1891, pp. 111-117.

planes, sphériques, coniques, cylindriques ou pour celles des conoïdes et sphéroïdes quelconques, si l'on établit tout d'abord les lemmes constitutifs de chacun de ces lieux."

Puis il pose six lemmes qui caractérisent les lieux en surface par la nature, éventuellement multiple mais exclusive de toute autre, de leurs sections planes: il définit ainsi les surfaces plane, sphérique, sphéroïde, conoïdes (parabolique ou hyperbolique), conique ou cylindrique. Il propose "l'invention" de cylindres, droits ou obliques, à base parabolique ou hyperbolique, car "les problèmes de lieux - dit-il - conduisent nécessairement à de tels cylindres", et la généralisation des sphéroïdes et des conoïdes par obliquité. Voici, parmi d'autres, l'analyse que fait Fermat d'un problème de lieu en surface conduisant à un sphéroïde³³:

"Soient, en nombre quelconque, des plans donnés de position; si d'un même point on mène à ces plans donnés, sous des angles donnés, des droites dont la somme des carrés soit égale à une aire donnée, ce point sera sur une surface d'un sphéroïde donné de position."

Faisons l'analyse en prenant, suivant la méthode indiquée [plus haut], un plan quelconque de position; cherchons-y, suivant les règles pour les lieux plans et solides telles que nous les avons autrefois exposées dans le plan, le lieu des points dont la somme des carrés des menées aux plans donnés sous les angles donnés est égale à l'aire donnée. La construction se présente immédiatement; le plan que nous avons pris est en effet donné de position aussi bien que les autres plans donnés; les intersections de ce plan choisi et des plans donnés seront donc également données. Les droites menées aux plans donnés d'un point quelconque du plan supposé recevront donc facilement une expression analytique. Si l'on fait la somme de leurs carrés et qu'on l'égalise à l'aire donnée, l'analyse donnera comme lieu, dans le plan supposé, un cercle ou une ellipse, et sa marche même prouvera que dans aucun autre plan donné de position, quel qu'il soit, le lieu ne peut être d'une autre nature. Il est donc clair, d'après le lemme 3, que le lieu cherché, dont les sections sont seulement des cercles ou des ellipses, est un sphéroïde."

Pour mener ce type de calculs, Fermat utilise un plan de section comme plan de base: une fois projeté orthogonalement un point (A) de ce plan sur les différents plans donnés, chacune de ces projections (A_i) est elle-même projetée (en a_i) sur le plan de référence; les carrés des distances (AA_i) d'un point aux plans donnés se calculent comme sommes des carrés des distances (Aa_i) et ($A_i a_i$), c'est-à-dire du rayon vecteur dans le plan et de la cote relative à ce plan.

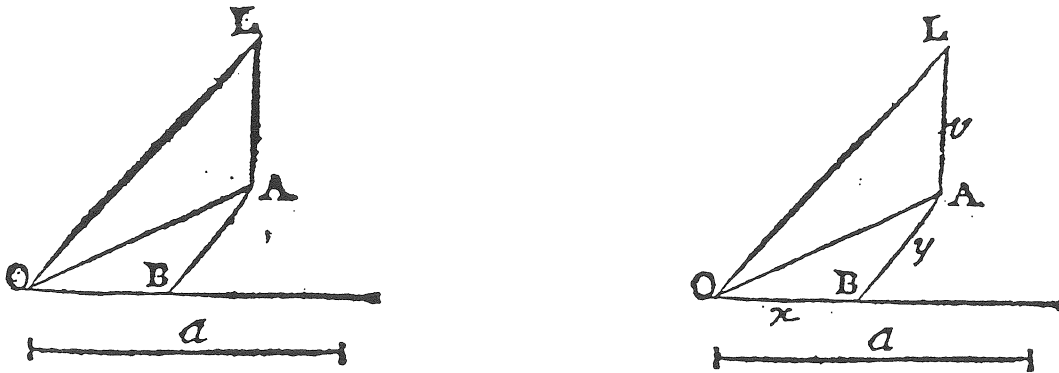
Philippe de La Hire, dans *Les Lieux Geometriques*, qui font suite à ses *Nouveaux éléments des sections coniques*, parus en 1679, reprendra le flambeau; voici par exemple un problème de lieu tel qu'il l'expose (Fig. 1)³⁴:

³³ Op. cit., pp. 106-107.

³⁴ Chapitre I des Lieux, Quatrième Exemple d'un Problème Indéterminé, p. 209-210.

"La ligne droite OB indéterminée vers B, étant donnée sur un plan, et un point O sur cette ligne, il faut trouver le point L hors de ce plan, en sorte que si l'on mène LB perpendiculaire à OB, la partie OB avec une ligne droite donnée a , soit égale à OL."

Figure 1.



Pour ce problème, il propose une solution qu'il exprime ainsi:

"Je considère que pour déterminer un point hors du plan, à l'égard d'une ligne donnée sur ce plan, il faut trois conditions: la première, est la grandeur de la perpendiculaire LA menée du point L au plan; la seconde, la perpendiculaire AB menée du point A à la ligne OB; & la troisième, la partie OB de cette ligne comprise entre un de ses points O & la rencontre B: c'est pourquoi je fais $OB = x$, $AB = y$, $LA = v$ ³⁵, qui sont trois inconnues, et la connue a ."

Ce qui le conduit à la "construction" suivante:

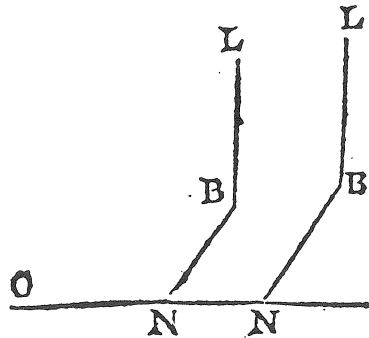
"À cause des angles droits LAB, ABO, et par conséquent LBO, OL sera égale à la racine des trois carrés de LA, AB, et BO ensemble; mais OL doit être égale à OB plus a , c'est pourquoi en termes Analytiques, on a l'Équation $a + x = \sqrt{xx + yy + vv}$, et pour ôter le signe radical, multipliant par soi-même chaque partie de l'Équation, on a $aa + 2ax + xx = xx + yy + vv$, qui se réduit à $aa + 2ax = yy + vv$; et comme il n'y a pas moyen de trouver d'autres Équations pour faire évanouir quelques-unes des inconnues, il s'ensuit que le Problème est indéterminé.

On remarquera que dans les trois premiers exemples des Problèmes indéterminés, il n'y manquait qu'une condition pour les déterminer, mais dans le quatrième il en manque deux."

³⁵ De La Hire note l'égalité comme Descartes, par un symbole proche de " ∞ ", remplacé ici par " $=$ ".

Philippe de La Hire précise les choses dans un autre passage du même ouvrage, qui montre bien qu'il n'est pas attaché à l'usage d'un repère orthonormé. Ce passage se trouve à la fin d'un paragraphe du second chapitre des *Lieux* consacré à définir ce qu'est un lieu plan (Fig. 2)³⁶:

Figure 2.



"De même pour connaître le rapport des points LL d'une superficie aux points d'une ligne droite ON, il faut mener par la ligne ON un plan ONB, et de chaque point L de la superficie, les lignes LB parallèles entre elles jusqu'au plan, et des lignes BN aussi parallèles entre elles jusqu'à ON: mais ce n'est pas mon dessein de parler ici de ces sortes de Lieux."

Un peu plus tard, Antoine Parent rédigera un mémoire sur certaines surfaces (entre autres la sphère, dont il donne l'équation et dont il caractérise le plan tangent, et l'hyperboloïde à une nappe, déjà étudié par Wren), lu à l'Académie les 24 juillet et 23 août 1700, et intitulé *Des affections des superficies. De leurs plans tangents*. Il paraîtra dans ses *Recherches de mathématiques et de physique*, Paris, 1705³⁷, rééditées en 1713³⁸.

Jean Bernouilli, dans une lettre à Leibniz du 6 février 1715, puis dans un mémoire de 1728 consacré à la généralisation des géodésiques pour une surface quelconque, *In superficie quacunque curva ducere lineam inter duo puncta brevissima*, paru dans les *Acta Eruditorum* de Leipzig, et réédité en 1742 dans ses œuvres³⁹, précise à son tour sa conception de l'extension à l'espace de la géométrie analytique, par l'usage de trois plans de coordonnées rectangulaires:

"J'entends par surface courbe une surface dont les points particuliers (de même que les points d'une courbe donnée) sont déterminés à l'aide des trois coordonnées liées par une relation exprimée par une équation donnée: ces coordonnées ne sont que les

³⁶ Op. cit., chapitre II, Définition I, p. 215.

³⁷ *Recherches de mathématiques et de physique*, 1705, t. 1, 3^e partie, pp. 181-200.

³⁸ Ibid., 1713, 2^d vol., pp. 181-200.

³⁹ *In superficie quacunque curva ducere lineam inter duo puncta brevissima*, in *Acta Eruditorum*, Leipzig, 1728, et in *Opera*, Lausanne, t. IV, 1742, pp. 108-128.

trois perpendiculaires menées d'un point quelconque de la surface courbe à trois plans donnés de position et se coupant mutuellement à angle droit. Si par exemple l'équation entre les trois coordonnées est $xyz = a$, on peut demander la dimension de cette surface ou la réduction à quelque figure plane. Pour ce qui concerne les volumes compris entre la surface donnée et les plans donnés, leur calcul se fait plus facilement que celui des surfaces bien que ce ne soit pas exempt de difficultés."

En 1724, Henri Pitot étudie un problème de quadrature dans l'espace, qu'il expose dans un mémoire de l'*Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, paru en 1724, sous le titre: *Sur la quadrature de la moitié des arcs d'une courbe appelée compagne de la cycloïde* (i-e la sinusoïde, qu'il considère tour à tour comme développement d'une courbe tracée sur un cylindre, puis comme projection orthogonale d'une hélice circulaire sur un plan parallèle à l'axe du cylindre)⁴⁰. Il y lance cet appel à contribution:

"Peut-être que ces sortes de courbes à double courbure, ou posées sur la surface des solides, seront un jour l'objet des recherches des géomètres."

C'est Clairaut qui répondra le premier à cet appel, suivi dès 1732-1733 par Jacob Hermann, élève de Jacques Bernouilli, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg* de 1738, puis par Euler dans son *Traité abrégé des surfaces*, inclus dans l'*Introduction à l'analyse infinitésimale*, éditée à Paris, en l'An V (1797).

* * * * *

Les Recherches sur les Courbes à double Courbure de 1731.

Pour donner une idée du contenu de ce premier ouvrage de Clairaut, nous en avons sélectionné quelques extraits, dont la citation, éclairée de quelques commentaires, vaut mieux qu'une paraphrase ou qu'une analyse détaillée sans support.

Voici tout d'abord la préface⁴¹:

"Les Courbes dont l'on traite dans cet Ouvrage sont celles qui ne se peuvent décrire que sur les surfaces des solides courbes, telles que seroient par exemple celles que l'on formeroit en faisant tourner un compas sur la surface d'un cylindre ou de telle autre surface courbe que

⁴⁰ *Sur la quadrature de la moitié des arcs d'une courbe appelée compagne de la cycloïde*, in *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, 1724, pp. 107-113.

⁴¹ *Recherches...*, pp. I-IV.

*l'on voudra. Personne que je sçache n'a encore traité de cette matiere; Descartes est le seul qui m'ait paru avoir envisagé ces sortes de courbes. Ce qu'il en dit nous apprend simplement que pour les examiner, il faut abaisser de tous leurs points des perpendiculaires sur deux plans qui soient perpendiculaires l'un à l'autre & rapporter tous les points de ces courbes aux points de celles que l'on forme par ce moyen sur deux plans*⁴².

J'ai suivi dans tout mon Ouvrage cette maniere de considerer ces sortes de courbes, en les supposant toujours décrites dans un angle droit solide, à peu près de la même façon que le sont les courbes ordinaires dans un angle droit plan.

J'ai appelé courbes de projections, les courbes formées par les perpendiculaires que l'on mene sur les trois plans de cet angle solide, & j'ai regardé les équations de deux de ces trois courbes de projections prises indistinctement, comme celles de la courbe que l'on se propose d'examiner, puisqu'elles en peuvent déterminer tous les points, & ensuite j'ai donné des methodes générales pour faire trouver par le moyen de ces équations, les propriétés & affections de ces sortes de courbes, comme les tangentes, les differentes perpendiculaires, les quadratures, les cubatures, rectifications, &c. & tout ce qui peut y avoir rapport comme on le peut voir par la distribution de l'ouvrage.

*J'ai crû devoir appeler ces sortes de courbes, courbes à double courbure, parcequ'en les considerant de la façon qu'on vient de dire elles participent pour ainsi dire toujours de la courbure de deux courbes, & c'est même le nom qu'on leur donne dans un memoire de l'Academie Royale des Sciences où on les propose comme un objet digne des recherches des Géometres*⁴³.

Outre la maniere de considerer les courbes à double courbure en elles-mêmes par leurs équations, j'ai donné aussi celle de les considerer par rapport aux differentes surfaces courbes sur lesquelles on les conçoit décrites, & pour cet effet je donne le moyen de considerer ces surfaces courbes elles-mêmes, de la façon la plus générale qui est de les exprimer par des équations à trois variables.

Ces sortes d'équations facilitent beaucoup la recherche des propriétés des surfaces, & l'on s'en sert pour leur examen avec autant de succès que des équations à deux variables pour les lignes courbes.

J'avois entrepris il y a quelques années de donner au Public en même tems que cet Ouvrage un Traité de la maniere d'employer ces sortes d'équations, & je lus à l'Academie Royale des Sciences, au mois d'Avril 1728, une partie de ce que j'avois fait à ce sujet; mais le tems que j'ai vû qu'il falloit pour pousser plus loin mes recherches, m'a fait résoudre de donner premierement celles que j'avois faites sur les courbes à double courbure, & d'attendre quelque tems pour donner cette espece de Traité des surfaces courbes auquel celui-ci pourra préparer. Je ne crois pas cette matiere moins neuve que celle des courbes à double courbure, & je ne sçai de connu sur ce sujet, que la façon d'exprimer les surfaces courbes par des équations à trois variables,

⁴² Référence quasi-explicite au dernier paragraphe du livre 2d de la *Geometrie*, cf. note ³¹.
⁴³ Clairaut fait ici référence au mémoire de Henri Pitot, *op. cit.*, note ⁴⁰.

dont j'ai appris qu'il étoit fait mention par occasion, dans un memoire du celebre M. Bernouilli inseré dans les Actes de Leypsic⁴⁴

Je n'ai traité dans cet ouvrage que des courbes à double courbure Géométriques; mais les méthodes que je donne ici se peuvent appliquer aux courbes à double courbure transcendantes dont les coordonnées sont perpendiculaires, au moins aussi facilement que l'on se sert pour les courbes planes transcendantes des methodes qui conviennent aux courbes planes Géométriques. À l'égard des courbes à double courbure, dont les coordonnées partent d'un point, ou dont les coordonnées representent des lignes courbes, elles demandent une methode particuliere, & peuvent fournir la matiere d'un autre Traité que je compte donner au Public, & dans lequel j'espere montrer quelle est l'utilité des courbes à double courbure, surtout des transcendantes, dans les Sciences Physicomathematiques⁴⁵."

L'idée générale de ces *Recherches*... est donc exposée d'entrée de jeu: une surface a une équation à trois variables, et une courbe à double courbure, qui se projette selon deux courbes planes, a deux équations qui la définissent et déterminent chacun de ses points. On notera que pour Clairaut, le repère tridimensionnel orthogonal (*l'angle droit solide*) permet le choix indistinct, mais pas nécessairement indifférent, parmi trois couples de courbes de projections⁴⁶: Descartes parlait de deux plans de projection, et c'est sans doute un indice supplémentaire de ce que le philosophe s'intéressait aux courbes plus qu'à l'espace, et que l'expression "repère cartésien" relève d'un abus rétroactif de langage. Il reste que chez Clairaut la primauté apparente donnée aux courbes sur les surfaces et aux courbes "géométriques" sur les courbes "transcendantes" dans l'ordre de l'exposé, est l'indice d'une influence certaine de ses lectures cartésiennes: mais s'il prévoyait un second volume consacré aux surfaces, et un autre traité consacré aux courbes "mécaniques" comme aurait dit Descartes⁴⁷, et aux courbes "transcendantes", il lui apparaît très vite qu'il lui est impossible de faire l'impasse totale sur les surfaces, ne serait-ce qu'en raison de la forme particulière des équations des cylindres projetants: d'où la forme de son exposé, qui est en relative contradiction avec celle suggérée dans la préface.

Voici le plan de l'ouvrage:

- première section (pp. 1 à 39): *De la Maniere de considerer les Courbes à double Courbure*; elle comprend trois définitions suivies de corollaires et de remarques, huit propositions accompagnées leurs démonstrations et de corollaires, remarques ou exemples; cette section comporte en outre

⁴⁴ Référence au mémoire de Bernoulli évoqué supra: cf. note ³⁹.

⁴⁵ Un tel ouvrage n'a jamais vu le jour: il aurait sans doute traité des courbes définies paramétriquement et qui se présentent en cinématique, en particulier dans le cas de composition de mouvements rectilignes; le modèle plan en est la cycloïde. Clairaut reprit cette idée dans un mémoire consacré au cas particulier des épicycloïdes sphériques, *op. cit.*

⁴⁶ En parlant ici de courbes de projection, nous anticipons sur la marche adoptée par Clairaut, comme on le verra: ce n'est, en dehors de la préface, qu'à l'article 42, donné infra, que cette idée apparaît.

⁴⁷ La Géométrie, *op. cit.*, p. 315-317.

"l'examen de six courbes par le moyen de leurs équations, et une Maniere d'examiner une Surface courbe exprimée par une équation donnée à trois variables passant le premier degré..." avec un exemple;

- la seconde section (pp. 40 à 60) touche à l'Usage du Calcul Differentiel dans les Courbes à double courbure, par rapport à leurs tangentes & à leurs perpendiculaires. Elle comporte six propositions, avec corollaires, remarques ou exemples;

- la troisième section (pp. 61 à 96) s'intitule: Usage du Calcul Intégral dans les courbes à double courbure, par rapport à leurs rectifications à la quadrature des espaces qu'elles déterminent, &c. Elle comporte neuf propositions commentées;

- la quatrième et dernière section (pp. 97 à 119) développe Quelques Principes Generaux pour former des courbes à double courbure, & pour en trouver la nature, en cinq propositions.

L'ouvrage comporte en outre des Remarques & éclaircissemens sur quelques Articles (chaque développement composé de quelques paragraphes, appelé article, est numéroté de 1 à 173), une page d'errata et six planches présentant 67 figures.

La première section débute par une définition (Fig. 3):

"DÉFINITION.

(Fig. 1.) 1. Soit une ligne courbe AM, avec son axe AP, ses appliquées PM sur un plan APM. Soient encore une infinité de perpendiculaires MN élevées des points M sur ce plan. Si l'on trouve sur ces MN les points N, en sorte que la relation des AP aux MN, ou des MN aux PM soit exprimée par une équation quelconque passant le premier degré, tous ces points formeront une courbe à double courbure ANN."

Les corollaires et les remarques explicitent cette définition (Fig. 4 à 8):

"COROLLAIRE I.

(Fig. 2.) 2. Il suit de là que si l'on élève le plan QAR perpendiculaire au plan APM, dans la ligne AQ perpendiculaire à AP en A, & que l'on décrive dessus la courbe AV, dont l'axe soit AQ, A, l'origine des abscisses, & l'équation qui en exprime la nature, celle qui exprime la relation des PM aux MN; la courbe à double courbure ANN sera la section de la surface élevée perpendiculairement au plan QAR sur cette courbe, c'est-à-dire composée de toutes les perpendiculaires NV à ce plan QAR sur les points V de la courbe AV, & de la surface élevée perpendiculairement au plan APM sur la courbe AM ou composée de toutes les perpendiculaires MN."

Figure 3.
Figure 1 des Recherches...

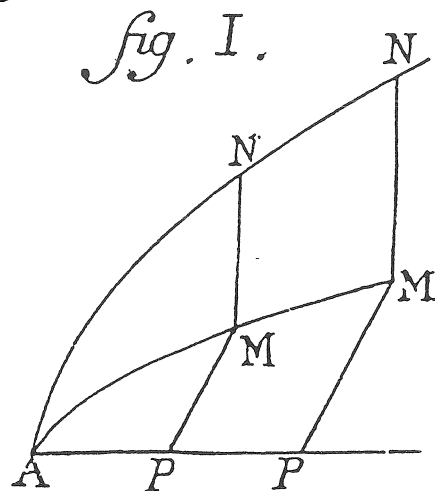
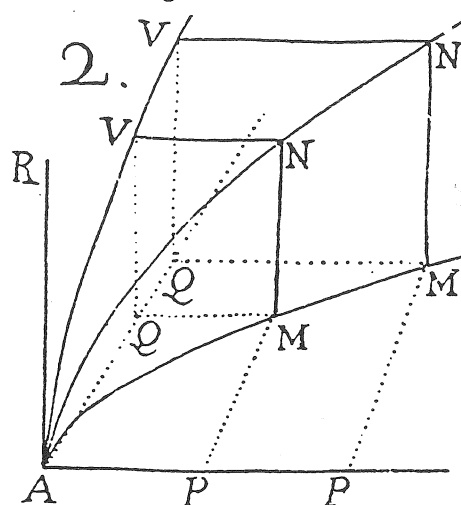


Figure 4.
Figure 2 des Recherches...



Une courbe gauche est donc définie, dirions-nous aujourd'hui, comme intersection de ses cylindres projetants: Clairaut ne précisera cet aspect des choses que dans la dernière partie de cette première section.

"COROLLAIRE II.

(Fig. 3.) 3. Il suit encore que si l'on élève aussi le plan RAP perpendiculaire au plan APM dans l'axe AP, & que l'on décrive dessus la courbe AS dont l'axe soit AP, A, l'origine des abscisses, & l'équation celle qui exprime la relation de AP à MN; la section de la surface élevée perpendiculairement sur cette courbe AS, & de la surface élevée sur la courbe AM sera toujours la courbe à double courbure ANN, & par conséquent que les surfaces élevées sur les courbes AV, AS (Fig. 4.) se rencontreront encore dans la même courbe à double courbure."

Figure 5.
Figure 3 des Recherches...

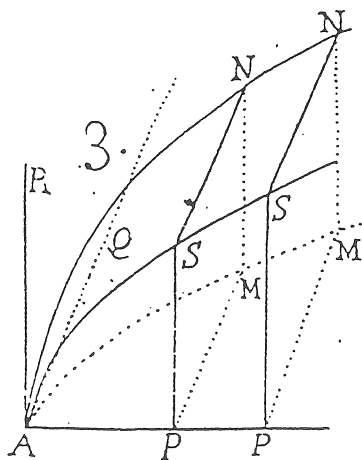


Figure 6.
Figure 4 des Recherches...

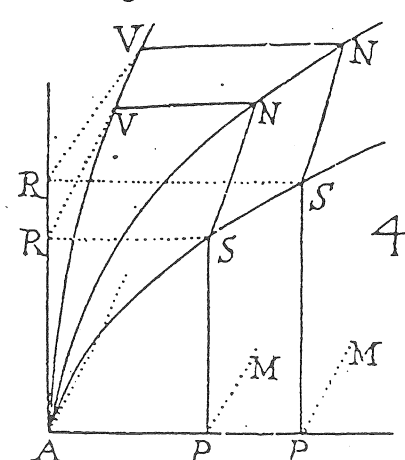


Figure 7.
Figure 5 des Recherches...

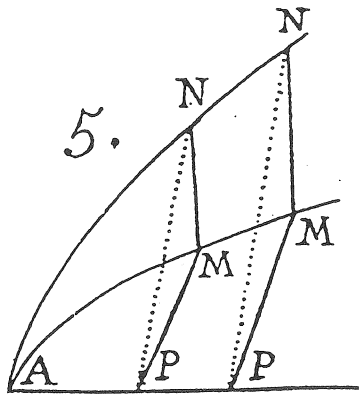
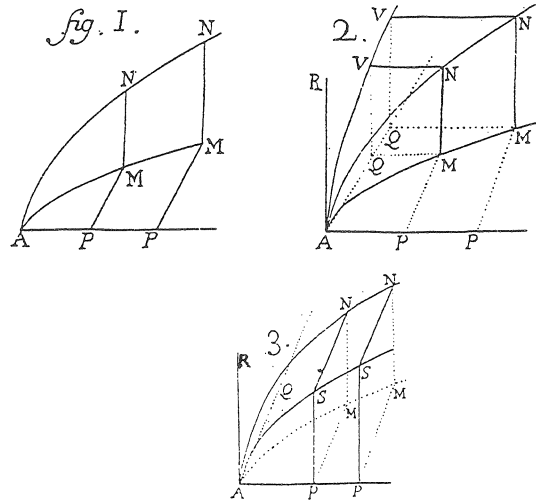


Figure 8.
Fig. 1 à 3 des Recherches...



"COROLLAIRE III.

(Fig. 1.2.3.) 4. Il est évident que si l'équation de la relation de MN à PM est donnée, celle de la relation de MN à AP le sera aussi, supposant que l'on ait l'équation de la courbe AM; & de même que si c'est celle de la relation de MN à AP qui est donnée on aura facilement celle de PM à MN, ainsi deux des trois courbes AM, AV, AS étant données on connoîtra aussitôt l'autre. Il est clair aussi par conséquent qu'avec deux de ces courbes on peut toujours former la courbe à double courbure."

Ou encore: deux quelconques des trois cylindres de projection définissent une seule et même courbe gauche.

"REMARQUE I.

(Fig. 1.) 5. Puisque deux de ces courbes peuvent déterminer tous les points de la courbe à double courbure, on peut regarder leurs équations comme celles qui expriment sa nature, c'est ce que l'on fera toujours dans la suite de cet Ouvrage, considérant une courbe à double courbure ANN par le moyen de deux de ces équations. Une seule de ces équations, par exemple celle qui renferme les deux variables AP, PM, n'exprime que la courbe AM en déterminant la longueur des appliquées PM selon les valeurs d'AP, mais les deux ensemble donnent encore les valeurs des MN qui déterminent les points N de la courbe à double courbure, & ainsi en exprimant la nature. On peut remarquer que ces équations contiennent toujours à deux qu'elles sont, les trois variables AP, PM, MN, & qu'elles n'en ont chacune que deux, sçavoir AP & PM, ou PM & MN, ou AP & MN.

REMARQUE II.

6. Il est à remarquer que l'on pourroit bien exprimer de différentes façons une courbe à double courbure, mais il faudroit toujours se servir

comme nous faisons de deux équations qui renfermassent trois variables, car une seule équation à deux variables ne suffiroit pas comme aux courbes ordinaires. Par exemple si l'on prenoit pour abscisses les arcs de la courbe AM, & pour ordonnées les droites MN, on pourroit bien par le moyen d'une équation qui auroit ces deux variables, exprimer la courbe à double courbure, pourvu que l'on connût d'ailleurs cette courbe AM, & alors cette connoissance supposeroit encore une équation, ce qui en feroit donc deux. (Fig. 5.) Si c'étoit les AP qui fussent les abscisses, & les droites PN tirées des points de l'axe AP aux points correspondans dans la courbe à double courbure, qui fussent les ordonnées, l'équation qui renfermeroit ces deux variables ne donneroit que la longueur de l'ordonnée PM sans donner la grandeur de l'angle NPM pour la placer, &c.

Il est inutile de faire une plus grande explication de cela, on peut voir aisément que de quelque façon que l'on prît deux coordonnées pour une courbe à double courbure, on ne pourroit jamais déterminer la position de l'une par rapport à l'autre; il suffit seulement de dire que ce nom de courbes à double courbure n'est entendu que de celles qui ne peuvent pas être décrites sur un plan.

REMARQUE III.

7. Si l'on formoit une équation de celles de la courbe à double courbure, soit en les multipliant, soit en les ajoutant, &c. en sorte qu'elle renfermât à elle seule les trois variables AP, PM, MN, il est clair que cette équation pourroit exprimer tous ses points. Cependant on ne pourroit pas la considérer par cette seule équation, ni la décrire; car en même tems que cette équation l'exprimeroit elle en exprimeroit une infinité d'autres, toute équation à trois variables exprimant une surface, comme on le va démontrer dans le théorème suivant."

Faute d'être parti de la notion de surface, sans doute en raison de l'intérêt deux fois millénaires que les géomètres ont porté aux courbes, avant que d'aborder les "solides" qui les contiennent et qui ne sont eux-mêmes définis que par engendrement (le mouvement de rotation d'une ligne droite ou courbe, par exemple), Clairaut se trouve confronté dès la première proposition à l'inconfort de sa position dans le domaine analytique: il y traite de l'expression des surfaces par une équation à trois variables.

"PROPOSITION I. THEOREME.

(Fig. 6.) 8. Soit sur un plan APM, une ligne APB avec un point A dessus & une infinité de perpendiculaires PM sur chacune desquelles soient aussi une infinité de perpendiculaires MN au plan APM, si l'on a une équation qui renferme trois variables, dont la première exprime les lignes AP déterminées par le point A, & par les points de rencontre de la ligne APB, avec les perpendiculaires MP, la seconde ces perpendiculaires MP, & la troisième les perpendiculaires MN au plan APM. Je dis que cette équation exprimera toujours une surface."

suppositions de valeurs déterminées que l'on assigneroit à la variable AP, donneroient toutes des lignes droites GN qui auroient toujours la même inclinaison par rapport aux PM. Ainsi de même que les équations du premier degré à deux variables expriment des droites, de même celles qui en ont trois donnent des plans.

COROLLAIRE III.

11. On verra aussi que de même que les équations à deux variables qui passent le premier degré, expriment toujours des lignes courbes, de même les équations à trois variables qui passent aussi le premier degré, expriment toujours des surfaces courbes, car toutes les différentes valeurs d'AP donneront des lignes GN droites ou courbes, si elles donnent des lignes courbes on ne peut pas douter que leur assemblage ne soit une surface courbe, si elles donnent des droites elles ne pourront pas toujours être également inclinées par rapport aux PM, car la variable AP devra passer alors le premier degré, & ainsi leur assemblage formera toujours une surface courbe."

Ces affirmations ressortissent clairement d'un donné sensible, mais elles montrent que Clairaut est en mesure d'interpréter géométriquement les données analytiques formelles: par exemple, les surfaces réglées suivant une direction de plan donnée sont repérables algébriquement. Encore faut-il comprendre que "passer le second degré" sous-entend pour Clairaut comme pour Descartes que ce second degré minimal n'est pas décomposable en facteurs du premier degré: il y reviendra; et faut-il sans doute entendre aussi qu'à la variable "AP" peut être substituée l'une des deux autres coordonnées, et que si l'une de ces variables passe le second degré, c'est en termes de degré global des monômes constituant l'équation; mais que dire alors du cylindre d'équation $[xy = 1]$, dont les sections obtenues dans un plan d'équation $[x = \text{Cste}]$ sont des droites d'équation $[y = 1/\text{Cste}]$ qui sont toutes "inclinées" à angle droit sur les ordonnées "PM" ?

Il apparaît donc qu'en cédant à l'évidence ou à la seule intuition d'un cas particulier, Clairaut ne traite pas le cas général des surfaces réglées: pourquoi un cône ou un cylindre n'est-il pas un plan, par exemple, alors qu'une infinité de ses sections planes est composée de droites ?

"REMARQUE I.

12. On a vu (Art. 7. & 8.) que si des équations d'une courbe à double courbure, l'on en formoit une seule à trois variables, elle exprimeroit une surface sur laquelle elle pourroit être décrite. Ainsi si de ces équations l'on en pouvoit former une du premier degré, il est clair que cette courbe pourroit alors être décrite sur le plan que cette équation exprimeroit; & par conséquent elle ne seroit plus appelée à double courbure (Art. 6.)."

Il ne s'agit pas là d'une condition nécessaire et suffisante qui caractériserait tous les systèmes d'équations de deux surfaces qui se coupent suivant une courbe plane, mais on peut noter l'idée de combiner des

équations pour produire d'autres surfaces contenant une courbe donnée, qu'elle soit gauche ou plane, car elle met en évidence qu'une certaine procédure algébrique a une certaine signification géométrique; ce que Clairaut précise encore dans la remarque suivante, qui montre que toute courbe définie comme intersection de deux surfaces peut être définie comme une courbe à double courbure, c'est-à-dire par deux équations à deux variables exprimant soit deux courbes planes projetées, soit encore les deux cylindres de projection, dont il ne sera question que dans la proposition VII:

"REMARQUE II.

13. Si des équations d'une courbe à double courbure on forme de différentes façons d'autres équations à trois variables, on exprime différentes surfaces dans lesquelles il est évident (7. & 8.) que l'on peut considérer également cette même courbe, qui par conséquent en sera alors pour ainsi dire la section; d'où l'on voit en renversant que lorsqu'une courbe à double courbure se trouvera la section de deux surfaces courbes données, l'on pourra former de ses équations celles de ces surfaces courbes; & ainsi que pour trouver les équations d'une courbe à double courbure comme celle-là qui est la section de deux surfaces courbes données, il ne faut que tirer des équations de ces surfaces d'autres équations qui ne renferment chacune que deux de leurs trois variables; c'est dont l'on traitera plus amplement dans un Problème de cette Section, aussitôt que l'on aura donné la manière de trouver les équations des surfaces courbes des solides les plus simples, ce que l'on croit devoir mettre absolument ici tant pour le détail même de ce Problème que pour tout le reste de cet Ouvrage."

Il faut donc bien en passer par une définition analytique des surfaces, ce que Clairaut illustre aussitôt sous forme d'une définition et de quelques problèmes de construction d'équations (propositions II à VI), dont nous donnerons seulement les énoncés et les équations, sauf pour la proposition III dont nous donnerons en outre la démarche constructive à titre d'exemple (les figures 11 à 16 reproduisent les figures 8 à 13 de Clairaut):

"DÉFINITION.

(Fig. 1.2. & 6.) 14. Soient nommez à present la plan APM, Plan de la Base, les variables AP, PM, MN, les Coordonnées tant de la surface courbe BGGNN, que de la Courbe à double courbure ANN; AP l'axe des x; AQ l'axe des y; AR l'axe des z, supposant que ces trois variables soient ainsi exprimées.

PROPOSITION II.

PROBLEME.

15. Soit proposé de trouver l'équation d'une Sphère, dont le centre soit A, & un diametre CB placé sur un plan donné de position APM. (Fig. 8.)"

Solution, a étant le rayon de la sphère:

$$a = \sqrt{xx + yy + zz} \quad \text{ou} \quad aa = xx + yy + zz.$$

Figure 11.
Figure 8 des Recherches...

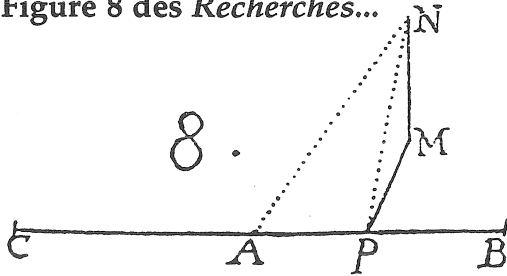


Figure 12.
Figure 9 des Recherches...

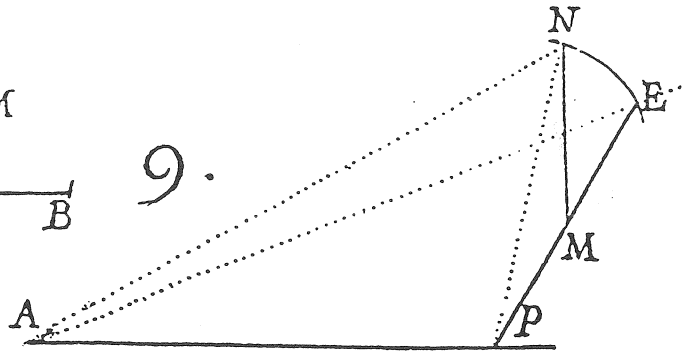
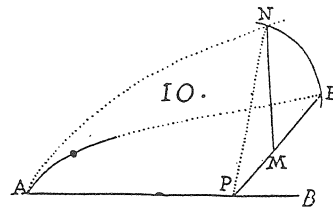


Figure 13.

Figure 10 des Recherches...



"PROPOSITION III. PROBLEME.

16. Soit in Cône droit dont l'axe soit AP la pointe A, un plan passant par l'axe, APME, l'angle générateur EAP, on demande l'équation de sa surface.

(Fig. 9.) Ayant pris aussi un point quelconque N sur cette surface on abaissera de même la perpendiculaire NM sur le plan APME de la base & du point M où elle le rencontre, la perpendiculaire MP à l'axe AP, & l'on nommera aussi AP, x; PM, y; MN, z; Ensuite l'on verra que le rapport de AP à PE doit être constant pour que l'angle EAP le soit, ainsi on l'exprimera par celui de m à n, de sorte que

$$m: n:: AP (x): PE \left(\frac{nx}{m}\right)^{49}$$

Puis tirant PN du point P au point N elle sera égale à PE ou à $\sqrt{MP^2 + MN^2}$ ce qui donnera en termes analytiques

$$\left(\frac{n}{m}\right) \cdot x = \sqrt{yy + zz}, \text{ ou } \left(\frac{nn}{mm}\right) \cdot xx = yy + zz$$

qui est l'équation du Cône.

PROPOSITION IV. PROBLEME.

17. Soit un paraboloïde dont le sommet soit A, l'axe AP, APM un plan passant par l'axe sur lequel est la parabole génératrice AE dont le parametre est a, on demande l'équation de ce paraboloïde. (Fig. 10.)"

Solution:

$$yy + zz = ax.$$

49 Rappelons que la notation a: b:: c: d signifie: a/b = c/d.

"Il serait aisé d'avoir de même l'équation de l'ellipsoïde, de l'hyperboloïde, &c. mais il est plus à propos, ce me semble, de donner la manière de trouver les équations des surfaces de circonvolution en général, c'est-à-dire des surfaces formées par la révolution d'une courbe quelconque autour d'une ligne droite.

PROPOSITION V. PROBLEME.

18. La courbe AE étant donné avec son axe APB, ses abscisses AP x , ses ordonnées PE u , il faut trouver l'équation de sa surface de circonvolution autour de l'axe APB."

Solution, [$f(x,u) = 0$] étant l'équation de la courbe AE et u étant égal à $\sqrt{yy + zz}$:

$$f(x, \sqrt{yy + zz}) = 0.$$

"COROLLAIRE.

19. Il est évident que si l'on vouloir avoir l'équation de la surface d'un solide formé par la révolution d'une courbe autour d'une ligne autre que son axe, il n'y auroit qu'à trouver d'abord l'équation de cette courbe en prenant les abscisses x sur cette ligne, & les ordonnées u perpendiculaires, puis substituer de même dans cette équation, à la place de u , sa valeur."

Clairaut donne alors sept exemples que voici en substance:

1) la courbe est une parabole d'équation [$xx = au$], et l'axe est sa tangente au sommet; solution:

$$x^4 = aayy + aazz.$$

2) la courbe est une hyperbole équilatère d'équation [$xu = aa$], et l'axe, une de ses asymptotes; solution:

$$xxyy + xxzz = a^4.$$

3) la courbe est une parabole ou une hyperbole d'un degré quelconque d'équation [$u^m = x$ ou ax , avec m rationnel relatif], et l'axe, celui des abscisses; solution:

$(yy + zz)^m = xx$ (ou $aaxx$), ce que Clairaut explicite pour diverses valeurs de m : $3, 3/2, -2, 1/3$; et il précise:

"on doit prendre garde que toutes les fois que m surpassera l'unité l'on aura des paraboloides sur l'axe, & que quand elle sera moindre ce sera des paraboloides sur la tangente."

4) la courbe est un cercle de diamètre $2a$, qui tourne autour de sa tangente; son équation sera [$2au - uu = xx$] et celle du tore:

$$4aayy + 4aazz = (xx + yy + zz)^2.$$

5) la courbe est une cissoïde d'équation [$auu - xuu = x^3$]; la surface du conoïde cissoïdal sera d'équation:

$$2ayy + 2azz = x \cdot (xx + yy + zz).$$

6) l'ellipse étant d'équation $[aa - xx = (aa/bb).uu]$, l'ellipsoïde sur le grand axe s'écrit:

$$bb \cdot (aa - xx) = aa \cdot (yy + zz).$$

7) enfin, l'hyperbole s'écrivant: $xx - aa = \left(\frac{aa}{bb}\right) \cdot uu$, l'hyperboloïde de révolution autour du grand axe aura pour équation:

$$bb \cdot (xx - aa) = aa \cdot (yy + zz).$$

Vient ensuite le problème de l'équation d'un cône scalène s'appuyant sur une courbe quelconque:

"PROPOSITION VI.

PROBLEME.

(Fig. 11.) 27. Soit sur un plan BDG la courbe BD dont l'axe soit BG, B l'origine des variables; & soit hors de ce plan un point donné A, duquel partent une infinité de droites comme AD à la courbe; on demande l'équation de la surface du cône formé par toutes ces lignes AD, supposant que l'on ait celle de cette courbe BD."

Pour établir cette équation, Clairaut définit la courbe BDG par son équation $[f(u,s) = 0]$ dans le système de coordonnées orthogonales ($BG = u$, $GD = s$) de son plan. Puis il utilise un système de coordonnées rectangulaires (AP , PM , MN) dans l'espace, AB étant l'axe des abscisses Ax et ABG étant le plan de base Axy : N étant un point de la surface sur l'une quelconque des génératrices AD du cône, il est projeté orthogonalement en M sur ABG , et M l'est en P sur AB . Dans la figure, la projection orthogonale de G sur AB est nommée O , et MK est parallèle à GB . Clairaut note la constante $AB: b$, et il donne le rapport $\frac{BO}{OG}$ comme égal à $\frac{m}{n}$, ce qui fixe l'angle GBA , donné de position.

Figure 14.
Figure 11 des Recherches...

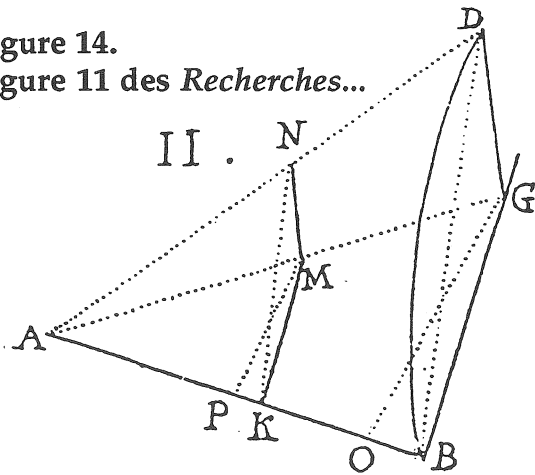
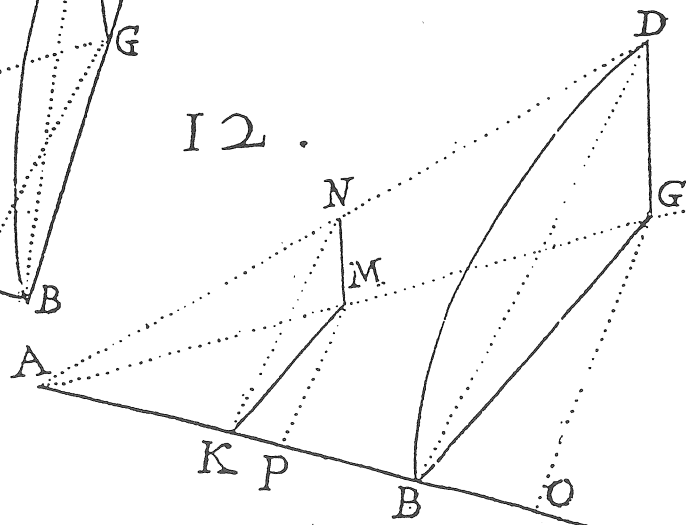


Figure 15.
Figure 12 des Recherches...



En écrivant " $nx \pm my$ " suivant que GBA est aigu ou obtus (Fig. 14 et 15), l'équation du cône sera:

$$f\left(\frac{by \cdot \sqrt{mm + nn}}{nx \pm my}, \frac{bzn}{nx \pm my}\right) = 0.$$

Dans le cas où GBA est droit, $[m = 0]$, et l'équation devient $[f(\frac{by}{x}, \frac{bz}{x}) = 0]$, ce que Clairaut signale dans un premier corollaire.

Suivent une remarque d'importance, qui porte sur l'homogénéité de telles équations et qui appelle une démonstration, et trois exemples:

"REMARQUE.

30. On tire de cette solution une propriété commune à toutes les surfaces de cônes en général, qui est que leurs équations dont les coordonnées partent du pôle comme dans celle-ci n'auront jamais de paramètre, j'entends par ce mot toute lettre constante dans une équation, qui exprime une ligne qui doit être absolument donnée pour la construction de l'équation comme le paramètre dans la parabole, le rayon dans le cercle, &c. c'est-à-dire que s'il s'y rencontroit des constantes on n'auroit besoin de connoître que le rapport qu'elles auroient entr'elles, ou bien encore que tous les termes de ces équations renferméroient des variables élevées toujours ensemble à un même degré comme dans l'équation $axy + bxz = cyy$ par exemple, &c.

DEMONSTRATION.

Dans l'équation de la courbe BD de la base, tous les termes doivent être du même degré, on les supposera au degré m ; & l'on remarquera, 1° Que tous les termes entierement constans ne changeront point par les substitutions des valeurs d' u & d' s , puisque ces variables n'y seront point. 2° Que ceux qui auront des variables & des constantes, après les substitutions des valeurs de ces variables u & s , composées de la lettre b , multipliée par des rapports ou fractions variables, se trouveront des produits de constantes faisant ensemble le degré m , par des fractions ou rapports variables. 3° Que les termes entierement composez de variables seront par consequent aussi composez de constantes au degré m accompagnées de rapports ou de fractions variables; ainsi il est clair que tous les termes seront composez de lettres connues au degré m , multipliées par des variables au degré m aussi, quand l'on aura chassé les fractions; & alors divisant toute l'équation par b^m elle ne sera plus composée que de termes ne renfermant que des variables au degré m multipliées par des rapports ou fractions constantes. Les exemples éclairciront ceci davantage."

Clairaut ne se contente pas d'énoncer et de démontrer cette remarque, qui exprime l'homogénéité du degré global des monômes constituant l'équation d'un cône, il démontre qu'il y a équivalence entre la définition

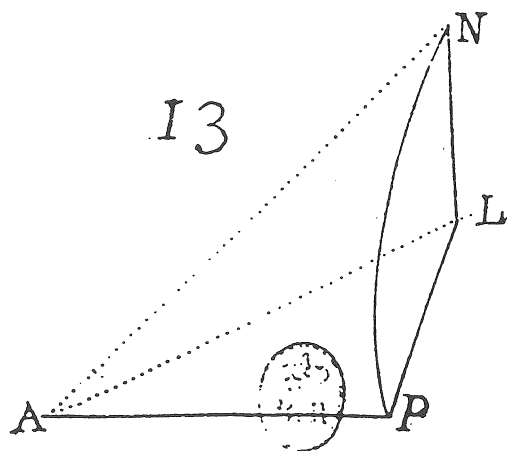
géométrique d'un cône et sa définition analytique par une fonction $f(x,y,z)$ homogène:

"31. Voici presentement la démonstration de l'inverse qui est, toute équation à trois variables sans constante⁵⁰, ou dans laquelle tous les termes sont composez de variables au même degré, est toujours à une surface conique [nous soulignons].

(Fig. 13.) Il est clair alors que si l'on donne une valeur constante à x , l'équation n'aura plus que deux variables, & qu'elle exprimera la courbe PN ⁵¹ qui sera la section de la surface par un plan perpendiculaire à AP à P ; & comme il n'y aura point de constantes dans l'équation de cette courbe que celle que l'on aura donnée pour la valeur d' x , il est clair que toutes les courbes comme PN ⁵² que l'on aura formées en donnant ainsi des valeurs à x seront semblables; par conséquent tirant une ligne quelconque AL sur la base & élevant des perpendiculaires au plan de la base APM des points L où cette ligne rencontre les appliquées PM , ces perpendiculaires LN seront proportionnelles aux parties AL , d'où il est clair qu'une ligne droite pourra passer par les points N & par A , c'est-à-dire que la surface sera composée d'une infinité de lignes comme AN , ainsi on voit aisément que les surfaces exprimées par des équations sans parametres sont des surfaces coniques de même que les équations à deux variables sans parametre comme $x = 3y$, &c. expriment des lignes droites qui partent de l'origine des variables."

Figure 16.

Figure 13 des Recherches...



Certes, pour ce qui est de l'équation $[x^2 = 3y^2]$, mais qu'en est-il de $[x^2 + 3y^2 = 0]$? Clairaut précise ce qu'il en est des cônes du second ordre, puis donne trois exemples que nous donnerons sous forme abrégée:

⁵⁰ Constante ou paramètre, au sens défini dans la remarque précédente.

⁵¹ Le texte donne GN par erreur: cf. la figure 13 de Clairaut (Fig. 15).

⁵² Même remarque que dans la note précédente.

"COROLLAIRE.

32. Il suit de cette seconde démonstration que toute équation à trois variables sans paramètre qui ne montera qu'au second degré, appartiendra à un cône circulaire, puisque donnant une valeur constante à la variable AP x , il en viendra alors un lieu géométrique pour la courbe PN⁵³ section du cône."

L'exemple (I) traite du cas où la courbe BD de la figure 11 (Fig. 14, GBA est aigu) est un cercle d'équation $[ss + uu = aa]$; l'équation du cône est alors:

$$bbzz + \left[bb \cdot \left(\frac{mm}{nn} \right) + bb - \left(\frac{mm}{nn} \right) \cdot aa \right] \cdot yy = aaxx + 2aa \cdot \left(\frac{m}{n} \right) \cdot xy ,$$

Deux corollaires indiquent, le premier, que:
si GBA est obtus (Fig. 15) l'équation devient:

$$bbzz + \left[bb \cdot \left(\frac{mm}{nn} \right) + bb - \left(\frac{mm}{nn} \right) \cdot aa \right] \cdot yy = aaxx - 2aa \cdot \left(\frac{m}{n} \right) \cdot xy ,$$

et le second, que:

si GBA est droit, on obtient:

$$aaxx = bbzz + bbyy.$$

L'exemple (II) et ses deux premiers corollaires donnent les équations des cônes s'appuyant sur une parabole de degré positif r , d'équation $[s^r = a^{r-1} \cdot u]$, GBA étant successivement obtus, aigu ou droit:

$$\left(\frac{b^{r-1}}{a^{r-1}} \right) \cdot z^r = \sqrt{\frac{nn + mm}{nn}} \cdot y \cdot \left[x - \left(\frac{m}{n} \right) \cdot y \right]^{r-1} .$$

$$\left(\frac{b^{r-1}}{a^{r-1}} \right) \cdot z^r = \sqrt{\frac{nn + mm}{nn}} \cdot y \cdot \left[x + \left(\frac{m}{n} \right) \cdot y \right]^{r-1} .$$

$$\left(\frac{b^{r-1}}{a^{r-1}} \right) \cdot z^r = y \cdot x^{r-1} .$$

Le troisième corollaire donne des équations analogues dans le cas où la courbe génératrice est une hyperbole donnée dans ses asymptotes, c'est-à-dire dans le cas où r est négatif; Clairaut écrit alors les solutions, suivant que GBA est aigu, obtus ou droit:

$$\left[x + \left(\frac{m}{n} \right) \cdot y \right]^{r+1} = \left(\frac{b^{r+1}}{a^{r+1}} \right) \cdot z^r \cdot y \cdot \sqrt{\frac{nn + mm}{nn}} .$$

$$\left[x - \left(\frac{m}{n} \right) \cdot y \right]^{r+1} = \left(\frac{b^{r+1}}{a^{r+1}} \right) \cdot z^r \cdot y \cdot \sqrt{\frac{nn + mm}{nn}} .$$

$$x^{r+1} = \left(\frac{b^{r+1}}{a^{r+1}} \right) \cdot z^r \cdot y .$$

53 Le texte indique par erreur PGN.

Le troisième exemple porte sur les ellipses et les hyperboles d'un degré quelconque r , dont les équations s'écrivent, par rapport à leur diamètre:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{r+q} = u^r \cdot (a \pm^* u)^q;$$

et l'équation du cône s'écrira (le signe $\pm^*$ dépendant du type de la courbe de base, et le signe $\pm^o$ de l'ouverture de l'angle GBA):

$$\frac{\left(\frac{a}{c}\right) \cdot n^r \cdot b^q \cdot z^{r+q}}{\sqrt{(mm + nn)^r}} = y^r \cdot \left[x \pm^o \left(\frac{m}{n}\right) \cdot y \right]^q \cdot \left(a \pm^* \frac{by \cdot \sqrt{\frac{nn + mm}{nn}}}{x \pm^o \left(\frac{m}{n}\right) \cdot y} \right)^q.$$

Un corollaire précise l'équation dans le cas où GBA est droit:

$$\left(\frac{a}{c}\right) \cdot b^q \cdot z^{r+q} = y^r \cdot x^q \cdot \left[a \pm^* \left(\frac{by}{x}\right) \right]^q.$$

"Ayant ainsi donné les équations des surfaces ordinaires, on va revenir au problème qui a été promis à l'art. 14, qui est de trouver la section de deux surfaces courbes en une courbe à double courbure; on s'appliquera ensuite à connoître & à décrire ces sortes de courbes par le moyen de leurs équations, réservant pour les autres sections de cet ouvrage, la manière de se servir de ces équations, pour en trouver toutes les dépendances, comme les tangentes, les rectifications, &c."

Et Clairaut de définir alors - et alors seulement, est tenté de dire un lecteur moderne - les courbes de projection d'une courbe gauche donnée:

"DEFINITION.

42. Si de tous les points d'une courbe à double courbure, l'on abaisse des perpendiculaires sur un plan, elles formeront en le rencontrant une ligne courbe que l'on appellera la Courbe de projection de la courbe à double courbure sur ce plan; ainsi la courbe AM (Fig. 1.) est la courbe de projection de la courbe à double courbure AN sur le plan de la base APM, la courbe AV (Fig. 2.), la courbe de projection sur RAQ que l'on appelle ici Plan des y & des z ; la courbe AS (Fig. 4.) la courbe de projection sur le plan RAP qui est nommé le Plan des x & des z .

COROLLAIRE I.

43. Il suit de là que les équations d'une courbe à double courbure, sont celles de ses courbes de projection sur deux differens plans perpendiculaires l'un sur l'autre.

COROLLAIRE II.

44. Il est clair aussi qu'une courbe à double courbure, de quelque façon que l'on en abaisse une projection, ne peut jamais donner une ligne droite; puisqu'alors elle seroit décrite sur le plan qui seroit formé par toutes les perpendiculaires de cette projection."

La proposition VII de cette première section énonce le problème général de la définition d'une courbe à double courbure donnée comme section de deux surfaces quelconques par les équations de ses courbes projetées ou, ce qui revient au même de ses cylindres projetants.

"PROPOSITION VII. PROBLEME.

45. Deux surfaces courbes ayant les mêmes axes, & les mêmes variables dans leurs équations, étant données, trouver la courbe à double courbure qui est la section, c'est-à-dire dans laquelle une surface rencontre l'autre.

Le Problème se réduit à trouver deux des courbes de projection de cette courbe à double courbure cherchée, par exemple de trouver les courbes de projection sur le plan de la base, & sur le plan des y & des z ; il ne s'agit pour cela que de former par le moyen des deux équations de ces surfaces courbes qui contiennent chacune les trois variables x, y, z , deux autres équations qui n'ayent chacune que deux variables, savoir la première les deux x, y , & la seconde les deux y, z .

Pour trouver ces équations on tirera la valeur de z de l'une des deux équations aux surfaces courbes, & on la substituera dans l'autre qui ne renfermera plus après que les deux variables x & y , & qui exprimera par conséquent la courbe de projection sur le plan de la base; ensuite on prendra de même la valeur de x , dans l'une des deux équations des deux surfaces, & on la substituera dans l'autre équation, qui ne sera plus composée que d' y & de z , & qui appartiendra par conséquent à la courbe de projection sur le plan de ces deux variables.

46. Si l'on vouloit aussi avoir la courbe de projection sur le plan des x & des z , il n'y auroit qu'à prendre de la même façon la valeur d' y dans l'une des deux équations, & de la substituer dans l'autre qui deviendrait par là celle que l'on auroit cherchée."

La méthode est clairement celle de l'élimination entre deux équations. Mais elle appelle une remarque: l'élimination entre deux équations de surfaces semble conduire, dans l'esprit de Clairaut, à une équation de courbe, et non de cylindre; en fait, un passage du corollaire qui suit et deux des exemples qui illustrent la proposition montrent qu'il a une parfaite conscience de ce qu'une surface peut s'exprimer avec deux variables, la troisième étant indéterminée et qu'une équation à deux variables peut exprimer une courbe ou le cylindre élevé sur elle: c'est simplement son idée primitive de double courbure, venue sans doute d'une image mentale de type cinématique, qui lui fait concevoir la courbe gauche comme formée de la courbure simultanée de deux courbes, plutôt que comme intersection de deux cylindres. Le problème VII est commenté de deux corollaires et d'une remarque; le premier traite du cas particulier où une variable manque dans l'une des équations données, c'est-à-dire où l'une des surfaces est "déjà" un cylindre s'appuyant sur une courbe dans un plan de coordonnées; la démarche de Clairaut, qui y définit d'abord la courbe gauche par la donnée d'une surface quelconque et d'une courbe de projection, confirme l'analyse précédente:

"COROLLAIRE I.

47. *S'il s'agissoit seulement de trouver la courbe à double courbure qui seroit décrite sur une surface courbe donnée, & dont la courbe de projection sur le plan de la base ou sur les autres plans, soit des y & des z, ou des z & des x seroit donnée aussi; c'est-à-dire de trouver la courbe à double courbure qui seroit la section de cette surface par un cylindre élevé sur cette courbe de projection; il est clair qu'il n'y auroit qu'à substituer la valeur d'une des deux variables de l'équation de cette courbe de projection, dans l'équation de la surface, ce qui feroit qu'elle ne seroit plus composée que de deux variables, & qu'elle seroit par conséquent à une des courbes de projection cherchée, qui avec la première, détermineroit la courbe à double courbure que l'on auroit demandée. Tout ce que l'on vient de dire dans cette proposition & dans ce corollaire sera éclairci par les exemples suivans."*

Quant à la remarque et au corollaire II, ils envisagent la question de l'appartenance d'une courbe gauche à une surface donnée, et le cas particulier où cette surface est un plan, ce qui permet de déceler si une courbe donnée pour gauche est en fait plane, puisqu'incluse dans une surface plane:

"REMARQUE.

48. *Si lorsque l'on a une surface courbe & une courbe à double courbure, qui ont les mêmes coordonnées, on vouloit sçavoir si la courbe à double courbure étant décrite, se trouve sur la surface, il n'y auroit qu'à voir si l'une des équations de ses courbes de projection, étant substituée dans l'équation de la surface, il en peut venir les équations de ses deux autres courbes de projection.*

COROLLAIRE II.

49. *De-là suit aisément la maniere de trouver si une certaine courbe qui paroît à double courbure, n'est que simple ou plane, car il n'y a qu'à prendre l'équation du premier degré à trois variables la plus composée, qui exprime un plan quelconque, & voir si en y substituant l'équation d'une des courbes de projection de la courbe qui paroît à double courbure, il en peut venir celles des autres courbes de projection, ou bien des équations qui s'y puissent réduire en changeant les valeurs des lettres constantes de l'équation générale du premier degré."*

La méthode du plan variable par ses constantes est ingénieuse, même si elle paraît triviale aujourd'hui: elle montre le degré d'habileté auquel on était parvenu dans les techniques calculatoires de la géométrie analytique en ce début du XVII^{ème} siècle.

Les exemples annoncés par Clairaut sont les suivans:

- Exemple I: intersection d'un parabolöide et d'un cône droit de mêmes sommets et d'axes perpendiculaires; ces surfaces ont pour équations:

$ax = yy + zz$ (art. 17) et $nnyy = mm \cdot (xx + zz)$ (art. 16 adapté);
deux des courbes de projection de l'intersection seront une hyperbole
d'équation:

$$[(nn + mm) \cdot yy = mm \cdot (ax + xx)],$$

et une ellipse d'équation:

$$[nnax - mmxx = (nn + mm).zz].$$

- Exemple II: section d'un ellipsoïde de révolution d'équation
[$bb.(aa - xx) = aa.(yy + zz)$] et d'un cylindre elliptique (donné comme tel par
Clairaut) élevé sur une ellipse dont les axes sont moitié de ceux de l'ellipse
génératrice de l'ellipsoïde, et dont le centre est milieu du demi grand axe de
cet ellipsoïde; ce cylindre aura pour équation [$bb.(ax - xx) = aayy$], qui est
aussi celle d'une des courbes de projection cherchée; l'autre aura pour
équation: $bb.(a - x) = azz$, et sera donc une parabole.

- Exemple III: intersection d'un paraboloides de révolution d'équation
[$ax = yy + zz$], et d'un cylindre parabolique (donné comme tel par Clairaut)
élevé sur une parabole égale à la génératrice du paraboloides, de même
sommet qu'elle, mais d'axe perpendiculaire; le cylindre s'écrit [$ay = xx$]: on
tire de là les équations des deux autres courbes de projection sur yAz et zAx :

$$a^3y = y^4 + 2yyzz + z^4, \text{ et } x^4 + aazz = a^3x.$$

- Exemple IV: section des surfaces d'équations [$y^3 = zxx$] et [$xy = az$]; les
courbes de projection en sont:

$$x^3 = ayy, \quad y^5 = aaz^3, \quad \text{et} \quad a^3zz = x^5.$$

- Exemple V: une parabole étant donné d'équation [$ay = xx$], et une
surface étant donnée d'équation [$y^3 = zxx - xxy$], la courbe qui se projette en
la parabole et qui est incluse dans cette surface a pour autres courbes de
projection une parabole qui s'écrit [$yy = az - ay$], et une courbe du quatrième
ordre d'équation:

$$[x^4 + aaxx = a^3z].$$

La dernière proposition de la section consiste en la description (au sens
de construction point par point) de la courbe gauche au moyen de ses
courbes de projection.

"PROPOSITION VIII. PROBLEME.

(Fig. 14.) 55. Les Equations des courbes de projection d'une courbe à
double courbure, sur les trois plans, de la base, des y & des z , & des x &
des z , étant données, décrire par leur moyen cette courbe à double
courbure.

Pour résoudre ce problème, il ne faut que bien examiner la
première définition, où l'on a expliqué la manière dont se forment tous
les points d'une courbe à double courbure, & alors l'on en tirera
aisément la méthode que l'on va expliquer ici.

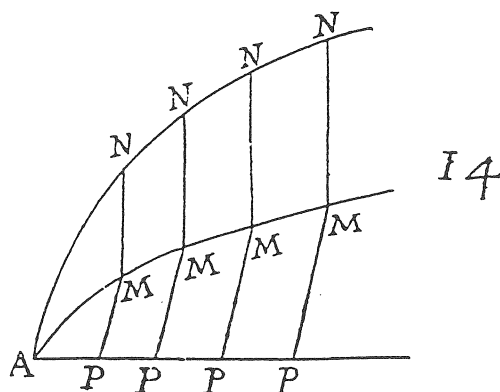
L'Equation de la courbe de projection AM sur le plan de la base
étant donnée, on décrira d'abord cette courbe sur un plan, & ensuite sur
cette courbe comme base on élèvera perpendiculairement une surface

comme une espece de cylindre, sur laquelle on décrira la courbe à double courbure par plusieurs points, à la façon des courbes simples; ce qui se fera en tirant beaucoup d'ordonnées PM à l'axe AP , très-proches les unes des autres, en élevant de leurs extremités M des perpendiculaires MN au plan de la base, & en déterminant ces MN par le moyen de l'équation qui exprime la relation des PM , y , aux MN , z , ou par celle qui exprime la relation des AP , x , aux MN , z , ce qui formera un grand nombre de points N , par lesquels on fera passer la courbe à double courbure. Il est aisé de voir que pour déterminer à chaque point M la longueur de l'ordonnée MN ⁵⁴, par le moyen de ces équations, il n'y a qu'à y substituer à la place de x si c'est la première, ou de y si c'est la seconde, les valeurs que ces variables ont au point M , ce qui rendra alors l'équation déterminée, n'ayant que la variable MN , z , dont on pourra donc aisément trouver la valeur.

On pourroit aussi si l'on vouloit décrire la courbe à double courbure, sur la surface élevée perpendiculairement sur la courbe de projection sur le plan des y & des z , en déterminant les x par le moyen des y & des z . On pourroit de même la décrire sur la surface élevée perpendiculairement sur la courbe de projection des x & des z , en déterminant les y par les x & les z ."

Figure 17.

Figure 14 des Recherches...



Une telle insistance nous semble plus qu'un simple souci de se faire comprendre: elle est sans doute l'indice d'une volonté de convaincre, tant la chose est nouvelle sous cette forme systématique.

"Il est clair que si une certaine valeur donnée à x ou à y rendoit la valeur de z imaginaire, cela marqueroit que la courbe à double courbure ne passeroit pas par la ligne MN où x ou y auroit eu cette valeur; & si cette valeur donnoit au contraire une valeur vraie, mais negative, il est évident qu'il la faudroit mettre en dessous du plan de la base APM ."

⁵⁴ Il s'agit d'une ordonnée relativement à la ligne courbe AMM , mais Clairaut n'introduit pas de mot nouveau, comme celui de cote, pour désigner ce qui est aussi une troisième coordonnée.

Cette dernière remarque montre qu'un analyste du premier XVIIème siècle pouvait se satisfaire d'une solution négative à un problème, dès lors qu'il en possédait une interprétation géométrique rendue possible par l'adoption d'un repère dit cartésien: il en est des abysses comme des sommets, de part et d'autre du niveau de la mer.

La première section se poursuit par l'examen de quelques courbes données par leurs équations, dont voici la liste:

- pour la courbe définie par le couple de cylindres paraboliques $\{ [ax = yy] \text{ \& } [by = zz] \}$, Clairaut donne la troisième courbe de projection $[abbx = z^4]$, et indique qu'elle "monte toujours & s'étend jusqu'à l'infini, ce

qui se pourroit voir aussi en faisant $x = \infty$, qui donne $z = \sqrt[4]{abb \cdot \infty}$." Il donne aussi un moyen simple de construire la courbe point par point sur le cylindre élevé sur la parabole $[ax = yy]$.

- la courbe définie par le couple $\{ [ax = yy] \text{ \& } [yy + zz = aa] \}$ (Fig. 18), conduit à une troisième courbe de projection d'équation $[ax + zz = aa]$; Clairaut montre que si x est supérieur à a , z devient imaginaire et que la courbe ne passe pas au delà du point $C(a, a, 0)$, et remarque que le changement de " y " en " $-y$ " ne change pas les équations, ce qui implique une symétrie par rapport au plan xAz .

- la courbe définie par $\{ [xx + yy = aa] \text{ \& } [aayy = aazz - yyzz] \}$ (Fig. 19), a pour troisième équation $[a^4 - aaxx = xxzz]$; Clairaut n'hésite pas à écrire:

"si l'on fait $x = 0$ l'on a $y = a$, & $z = \infty$ d'où l'on voit que la courbe à double courbure ne rencontre qu'à l'infini la droite IH , élevée perpendiculairement au plan de la base sur le point I de l'axe AQ , où $AI = a$; c'est-à-dire que cette ligne lui est une asymptote. L'étude des symétries le conduit à reconnaître huit branches toutes égales, dont quatre prennent leur origine au point $C(a, 0, 0)$ & les quatre autres au point $c(-a, 0, 0)$."

Figure 18.
Figure 17 des Recherches...

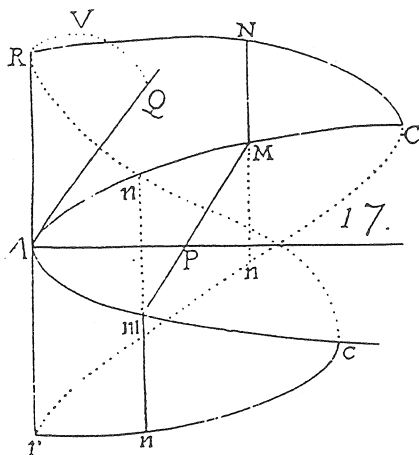
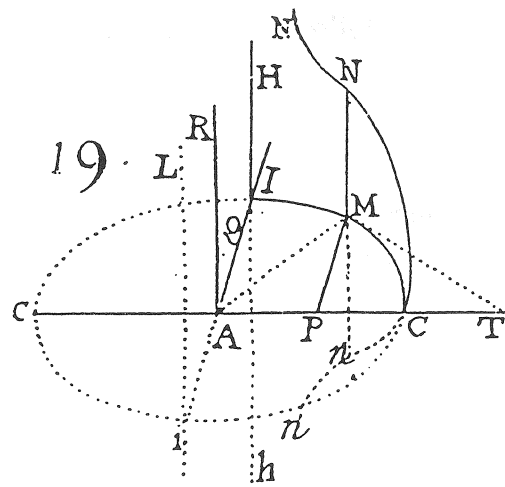


Figure 19.
Figure 19 des Recherches...



- la courbe d'équations $\{ [ayy - xyy = x^3] \& [aa = yz] \}$ (Fig. 20), définie par des cylindres cissoïdal et hyperbolique, a pour asymptotes l'axe AR et l'asymptote CK de la cissoïde, puisque "supposant $x = 0$, on a $y = 0$ & $z = aa/0 = \infty$, et puisque faisant $x = a$, y qui sera alors $= \infty$ donnera $z = 0$ ". La symétrie permet de prolonger ces asymptotes en dessous du plan de la base.

- la courbe définie par $\{ [ax = yy] \& [aazz = y^4 + yyaa] \}$, "va toujours en montant" au dessus de A (0, 0, 0), et quand x augmente, "il est aisé de voir qu'elle continuera jusqu'à l'infini, car faisant $x = \infty$, y & z le sont aussi."

Figure 20.

Figure 20 des Recherches...

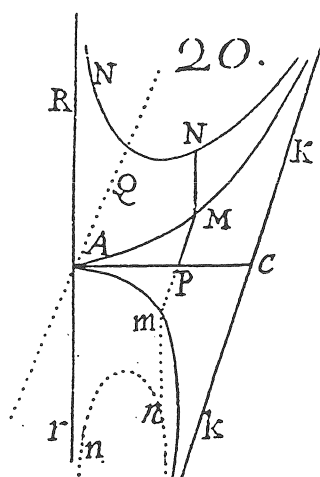
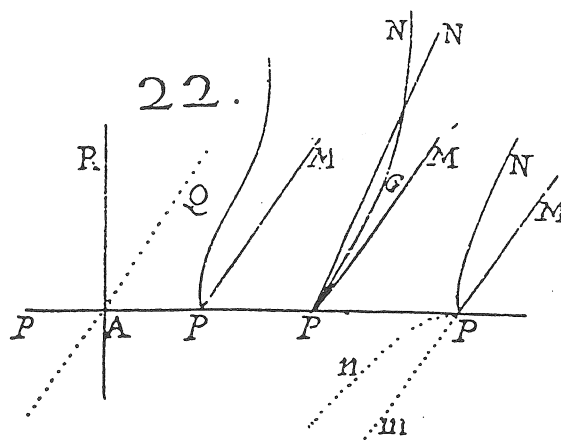


Figure 21.

Figure 22 des Recherches...



Clairaut conclut ces examens par un *Avertissement* qui montre bien toute l'ambiguïté d'une démarche qui ne fait appel aux surfaces que pour bien définir les courbes:

"Avant de passer à la seconde section, on va donner la maniere d'examiner les surfaces courbes par leurs équations, comme on le vient de faire pour les courbes à double courbure. Cela paroît d'abord s'écarter du sujet de cet ouvrage, où l'on s'est proposé la recherche des courbes à double courbure; mais comme pour un plus grand détail de ces recherches mêmes, on entrera dans la suite dans quelques problèmes, où l'on suppose la connoissance des surfaces courbes sur lesquelles les courbes à double courbure sont décrites, on ne peut pas se dispenser, ce me semble, de donner cette maniere de connoître & de considerer les surfaces courbes."

La première section s'achève donc sur une *"Maniere d'examiner une Surface courbe exprimée par une équation donnée à trois variables passant le premier degré, en supposant que APM soit le plan de la base, AP l'axe des x , AQ l'axe des y , AR l'axe des z "*. Clairaut y explique qu'un bon moyen d'examiner une surface donnée par son équation à trois variables est de la

couper par des plans parallèles aux plans de coordonnées, c'est-à-dire "de faire x , ou y ou z égal à une constante" dans l'équation donnée; l'équation à deux variables qui en résultera sera celle de la courbe de section dans le plan d'abscisse, d'ordonnée ou de cote constante (Fig. 21): il est bien entendu que:

"lorsque les équations que ces suppositions donnent seront imaginaires ou fausses, c'est-à-dire lorsqu'elles renfermeront des contradictions, ce sera une marque que la surface ne rencontre pas le plan RAQ, et qu'il faudra aussi donner des valeurs négatives à x , afin de connoître la partie de la surface qui est de l'autre côté du plan RAQ,"

qui peut d'ailleurs être la surface toute entière si les équations obtenues pour x positif sont toutes "fausses". Si l'une des coordonnées "devient" constante lorsqu'une autre "est égale à l' ∞ ", la surface aura un plan asymptotique. Enfin si une équation obtenue avec l'une des coordonnées constante est décomposable en produit de facteurs, ce sont autant de courbes qui constituent la section de la surface par le plan donné. Il termine cet article 66 par des considérations sur les équations de plans, qui, somme toute, n'avaient jamais été développées auparavant, puisqu'encore une fois la géométrie analytique n'a pas été "inventée" pour autre chose que pour maîtriser le courbe plutôt que le droit:

"On n'a point parlé des équations du premier degré à trois variables, parcequ'elles expriment des plans, ainsi qu'on l'a vû (article 10,) cependant comme on n'a point donné, lorsque l'on a une de ces sortes d'équations, la maniere de déterminer le plan qu'elle exprime; il est bon de dire ici qu'il ne faut alors que faire x & y , ou y & z , ou x & z , égal à zero dans l'équation que l'on a, & il viendra d'autres équations qui exprimeront des lignes droites dans les plans de la base, ou des x & des z , ou des y & des z , par lesquelles le plan demandé doit passer."

Un exemple illustre cette manière d'examiner une surface: il s'agit de la surface d'équation $[xyz = a^3]$, dont les sections parallèles aux plans de coordonnées sont des hyperboles équilatères, et qui possède à l'évidence trois plans asymptotiques.

* * * * *

Les applications de la méthode à la nouvelle analyse.

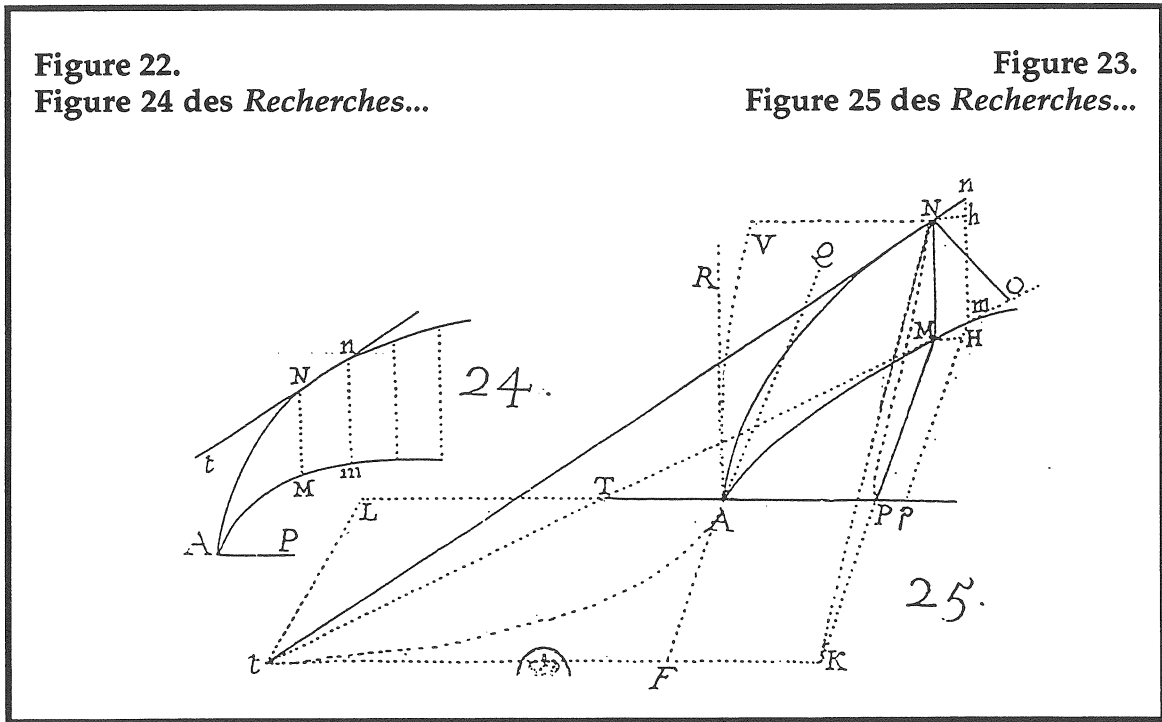
Pour illustrer les applications que Clairaut voit à cette définition analytique des courbes à double courbure, nous ne commenterons qu'un extrait de chacune des sections qui traitent du calcul infinitésimal sur ces courbes.

La seconde section, consacrée au calcul différentiel, contient une remarque préliminaire qui montre que Clairaut a fait siennes l'interprétation de Leibniz par le marquis de l'Hôpital (Fig. 22):

"(Fig. 24.) On conçoit ici une courbe à double courbure AN comme composée d'une infinité de petits côtesz Nn, de même qu'une courbe qui seroit décrite sur un plan; ce qui fait que le prolongement d'un de ces petits côtesz Nn, est la tangente dans le point N ou n de cette courbe à double courbure."

Figure 22.
Figure 24 des Recherches...

Figure 23.
Figure 25 des Recherches...



Puis on y trouve, par exemple, cette proposition:

"PROPOSITION I. PROBLEME.

(Fig. 25.) 68. Soit la courbe à double courbure AN, son axe des x, AP, dont l'origine est A, le plan de la base APM, avec la courbe AM de projection dessus, dont on a l'équation de même que celle d'une des deux autres courbes de projection; on propose de mener d'un point quelconque N de cette courbe à double courbure, la tangente Nt, ou ce qui est la même chose, de trouver la valeur de la sous-tangente Mt avec sa position.

Ayant mené du point N la coordonnée MN, & du point M où elle rencontre le plan de la base, la coordonnée MP, on prendra sur la courbe à double courbure un autre point n infiniment proche du premier N, & l'on abaissera de même les coordonnées nm, mp. On menera après Nh parallèle au petit côté Mm de la courbe de projection AM, & MH parallèle à l'axe AP. Nommant ensuite comme à l'ordinaire AP x, PM y, MN z, Pp sera dx, mH sera dy, nh sera dz & Mm,

$\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Ainsi les triangles semblables nNh , NMt donneront $nh(dz)$, $Nh = Mm \cdot (\sqrt{dx^2 + dy^2}) :: MN(z)$.

Mt^{55} qui sera $\frac{[z \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2}]}{dz}$ valeur de la sous-tangente

cherchée, & dont on voit clairement que la position doit être sur la tangente MT de la courbe de projection AM dans le point M , car le côté Nn & le côté Mm étant dans le même plan, leurs prolongements doivent y être aussi.

Ayant donc les équations des courbes de projection, on réduira par leur moyen la valeur qu'on vient de trouver de la sous-tangente, en même expression de x & de dx , ou de y & de dy , ou de z & de dz , & comme alors les mêmes différentielles se trouveront au numérateur & au dénominateur, elles s'évanouiront, & cette valeur que l'on demandoit en sera par là délivrée.

COROLLAIRE I.

69. Il est clair que la valeur de la tangente Nt sera $\frac{z \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dz}$, car elle est égale à $\sqrt{MN^2 + Mt^2}$ c'est-à-dire

$$\text{à } \sqrt{\left[\frac{z z dx^2 + z z dy^2}{dz^2} \right] + z z}."$$

La troisième section, consacrée au calcul intégral (rectifications et quadratures) débute par la proposition suivante:

"PROPOSITION I. PROBLEME.

(Fig. 32.) 93. La Courbe à double courbure AN étant donnée avec les axes AP , AQ , AR , & ses courbes de projection AM & AV , ou PN sur les plans APM & QAR , trouver la rectification de l'arc AN ."

Un calcul analogue au précédent conduit à la formule classique: $Nn = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, l'arc AN étant l'intégrale (que Clairaut note S .) de cet élément différentiel, qui ne contiendra plus qu'une seule des trois variables dès lors que l'on se sert des équations des courbes de projection.

La dernière section énonce "Quelques principes généraux pour former des courbes à double courbure, & pour en trouver la nature". Il ne s'agit plus cette fois de définir la courbe gauche par deux surfaces cylindriques ou quelconques, mais de se donner des procédés de construction point par point et d'en déduire les équations des courbes de projection. Le mode de construction peut être éventuellement d'origine mécanique: c'est le cas dans la proposition III qui décrit le roulement d'une courbe plane sur une autre courbe plane, le plan de la roulante étant en permanence perpendiculaire à celui de la courbe fixe. Voici, à titre d'exemple, la première proposition:

55 En fait: $nh: Nh:: MN: Mt$.

"PROPOSITION I. PROBLEME.

(Fig. 53.) Soit une surface courbe dont les coordonnées soient AP, x ; PM, y ; MN, z ; & leur origine A , on demande la courbe à double courbure NN décrite en faisant tourner dessus un compas dont une pointe est attachée à un point fixe C ."

Le problème est clairement celui de l'intersection de cette surface avec une sphère de centre C , ce qui nous ramène à l'une des définitions précédentes des courbes gauches. Ce n'est pas le cas des autres propositions: le problème III a déjà été explicité; la proposition II décrit une courbe obtenue sur un cône par allongement constant des génératrices qui s'appuient sur une courbe plane donnée; le problème IV propose une courbe obtenue par l'intersection d'un cylindre élevé sur une courbe de base quelconque, par une courbe dont l'origine se meut sur AP , et qui est située dans un plan qui se meut lui-même en restant orthogonal au plan de base et à la courbe de base du cylindre; enfin la proposition V décrit la courbe d'*attouchement* du cône tangent à une surface donnée, depuis un point donné.

C'est donc un ouvrage analytique assez complet, illustré des solutions de questions pour la plupart classiques en géométrie, que Clairaut offre à ses contemporains en 1731; mais c'est aussi, et surtout, une méthode qui ne demande qu'à s'essayer sur des problèmes récemment mis au jour. C'est ce que Clairaut s'applique à faire dans les années qui suivent sur un certain nombre de questions; nous proposons, pour illustrer ces prolongements des *Recherches...* de donner un aperçu d'un mémoire de Clairaut sur les courbes du troisième ordre que nous avons étudié plus en détail par ailleurs.

* * * * *

Un exemple de prolongement des *Recherches...*: le mémoire
*Sur les Courbes que l'on forme en coupant une Surface courbe
 quelconque par un Plan donné de position* (1731).⁵⁶

Dans ce mémoire lu devant l'Académie le 12 décembre 1731, et paru dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* de 1733, Alexis-Claude Clairaut tente une explicitation analytique de l'énoncé de Newton⁵⁷ sur la

⁵⁶ *Sur les courbes que l'on forme en coupant une surface courbe quelconque par un plan donné de position*, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, 1733, pp. 483 à 493 et 8 figures en une planche (n° 30 du volume, insérée en p. 492). Cf. notre article dans ce numéro des *Cahiers*, et dans les Actes de l'Université d'été inter-IREM de Lille (1990), à paraître.

⁵⁷ Le lecteur trouvera d'autres développements sur cette question, et en particulier l'énoncé de Newton, dans deux articles de D. Lanier et J.-P. Le Goff: *La classification des courbes du*

génération des courbes du troisième ordre par l'ombragement de cinq d'entre elles⁵⁸. Sa solution est d'une grande élégance et il est curieux que Jean-Étienne Montucla l'ait occultée dans sa relation des tentatives d'élucidation du texte assez sybillin de Newton⁵⁹, où il évoque pourtant les travaux de James Stirling⁶⁰, de Colin MacLaurin⁶¹, de Patrick Murdoch⁶², et de l'abbé de Gua de Malves⁶³.

Le problème est tout d'abord posé dans la forme générale qu'induit le titre du mémoire: une surface courbe étant donnée par son équation dans trois axes de coordonnées⁶⁴, quelle est la nature de la courbe intersection de cette surface et d'un plan quelconque donné de position? C'est, on le voit, un problème déjà évoqué et résolu dans les *Recherches...* Voici les principales étapes de sa démonstration, qui mêlent habilement des considérations analytiques et géométriques:

- N étant un point de l'intersection cherchée, sa cote (z) est NM, son ordonnée (y) est PM, et son abscisse (x) est AP dans le repère de l'espace (Fig. 24); mais pour caractériser la courbe d'intersection, une fois tirée la perpendiculaire (NL) à (VB), N est repéré dans le plan de coupe (VLN) par des coordonnées rectangulaires: l'abscisse (u), qui est BL, et l'ordonnée (s), qui est LN. Dès lors, par quelques calculs élémentaires, on aura le système de substitution ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$):

$$\mathcal{A}: z = \frac{qs}{\sqrt{p^2 + q^2}} ;$$

$$\mathcal{B}: y = \frac{nps}{\sqrt{p^2 + q^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2}} + \frac{mu}{\sqrt{m^2 + n^2}} ;$$

$$\text{et } \mathcal{C}: x = \frac{mps}{\sqrt{p^2 + q^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2}} - \frac{nu}{\sqrt{m^2 + n^2}} - g .$$

troisième ordre: aspects algébriques et aspects projectifs chez de Gua de Malves et Murdoch, dans ce numéro des *Cahiers*, et *L'héritage arguésien*, dans les *Cahiers* n° 5.

Rappelons simplement les types d'équations définis par Newton:

- (i) $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$, qui produit 65 espèces de courbes;
- (ii) $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$, qui produit une courbe fonctionnelle, le trident;
- (iii) $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, qui conduit aux cinq paraboles divergentes;
- (iv) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, équation de la parabole cubique ou wallisienne.

⁵⁸ Ce qui revient à dire que, de même qu'il n'existe qu'un seul type de cônes du second degré, toutes les coniques s'obtenant comme ombres du cercle, il existe au plus cinq types de cônes du troisième ordre.

⁵⁹ Montucla: *Histoire des Mathématiques*, t. III, Paris, An X (1802), pp. 63 à 73.

⁶⁰ *Linæ Tertii Ordinis Neutonianæ, sive Illustratio Tractatus Domini Neutoni De Enumeratione Curvarum Tertii Ordinis*. Oxford, 1717. Édition française par Duprat, Paris, 1797 (d'après Chasles).

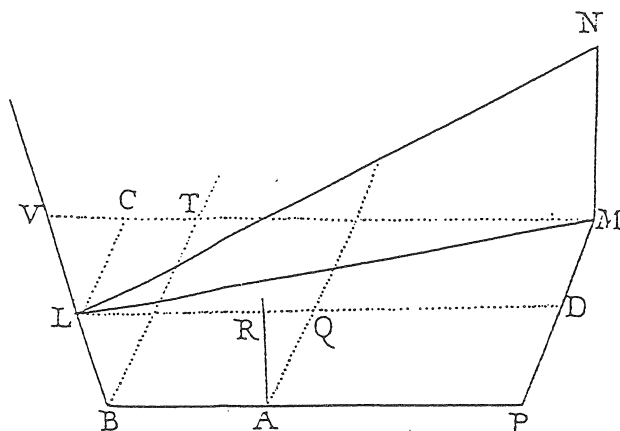
⁶¹ *Geometria Organica: sive Descriptio Linearum Curvarum universalis*, Londres, 1720.

⁶² *Neutoni Genesis Curvarum per Umbras, seu Perspectivæ Universalis Elementa; Exemplis Coni Sectionum et Linearum Tertii Ordinis illustrata*, Londres 1746.

⁶³ *Usage de l'analyse de Descartes pour découvrir sans le secours du calcul différentiel, les propriétés, ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres*, Paris, 1740.

Il ne restera plus qu'à reporter ces "fonctions de u" et "de s" dans l'équation "en x,y,z" de la surface $[f(x,y,z) = 0]$ pour obtenir l'équation $[g(u,s) = 0]$ de la courbe d'intersection, dans le plan sécant rapporté au repère orthogonal (uBs), l'axe Bu étant le support de (BV) et l'axe Bs étant parallèle à (LN).

Figure 24.



- la multiplicité des points d'inflexion des courbes du troisième ordre se traduit, dans un cône du troisième ordre qui s'appuierait sur elle, par une multiplicité au moins égale de ces génératrices particulières que Clairaut appelle des *côtés d'inflexion*, qui correspondent à des changements de concavité sur la surface du cône; de tels côtés sont, comme les points d'inflexion d'une cubique, en nombre inférieur ou égal à trois, et sont coplanaires s'ils sont trois, puisque les trois points d'inflexion d'une cubique sont alignés, et définissent un plan avec le sommet du cône⁶⁵;

- de ce fait, toute cubique est ombre d'une cubique d'équation:

$$[xy^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d];$$

car celle-ci est un sous-cas (i') du type (i) de Newton⁶⁶, ne comportant que deux inflexions ou n'en contenant pas, et se présente dans tout cône du troisième ordre, quel que soit, à priori, le nombre de ses côtés d'inflexion, puisque, dans l'hypothèse où ce cône en contiendrait un ou trois, il suffirait de couper un tel cône par un plan parallèle au seul côté d'inflexion, voire à deux de ses trois côtés d'inflexions coplanaires, pour qu'un ou trois des

⁶⁴ I.-e. dans un *angle droit solide*, tel que Clairaut en use dans ses *Recherches...* de 1731.

65 La mention *s'ils sont trois*, peut être écartée, si l'on considère, projectivement, certains points à l'infini sur la cubique comme des points d'inflexion: l'alignement des trois points se traduit par exemple par le parallélisme d'une asymptote avec la ligne qui joint deux points d'inflexion.

66 Voir la note 56.

points d'inflexions de sa cubique génératrice, soient "envoyés" à l'infini, produisant une ombre du type (i') souhaité;

- ces cubiques particulières, à deux ou sans points d'inflexions, appartiennent à un cône d'équation:

$$[xy^2 = ax^3 + bx^2z + cxz^2 + dz^3],$$

par homogénéisation⁶⁷;

- toute cubique à deux ou sans inflexions, étant dans un tel cône, est nécessairement l'ombre de l'une des paraboles divergentes que l'on obtient d'évidence par section parallèle à yOz de ce cône; en effet, faisant $[x = e]$, on obtient les équations d'une telle cubique, dont l'une est d'ailleurs l'équation de son cylindre projetant:

$$[ey^2 = ae^3 + be^2z + cez^2 + dz^3],$$

qui est de la forme (ii) souhaitée:

$$[y^2 = D + Cz + Bz^2 + Az^3];$$

- l'ombrage étant transitif, toute cubique est nécessairement, par cubique du type (i') interposée, l'ombre d'une des cinq paraboles divergentes.

Clairaut achève son mémoire par des considérations géométriques sur la correspondance qu'il faut établir entre la direction des branches paraboliques d'une parabole divergente et celle du troisième côté d'inflexion de son cône d'ombrage: ce dernier détail renforce l'impression, sensible à la lecture au long de ce mémoire, que la signification géométrique de ses procédures analytiques ne lui échappe à aucun moment, et que l'intuition géométrique précède souvent les calculs, voire même les gouverne par moments.

* * * * *

⁶⁷ C'est la conséquence déjà énoncée par Clairaut d'une remarque de ses *Recherches*...: tout cône s'appuyant sur une courbe quelconque peut, dans un repère d'origine son sommet, s'écrire *sans constante*, c'est-à-dire de façon homogène.

BIBLIOGRAPHIE.

SOURCES.

- ARNAULD, A., *Nouveaux Éléments de Géométrie, contenant, Outre un ordre tout nouveau...*, Paris, 1667.
- BERNOULLI, J., "*In superficie quacunque curva ducere lineam inter duo puncta brevissima*", in *Acta Eruditorum*, Leipzig, 1728, et in *Opera*, Lausanne, t. IV, 1742, pp. 108-128.
- BÉZOUT, É., *Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine*, Paris, 1764-1769.
- BÉZOUT, É., *Cours de Mathématiques à l'usage du Corps Royal de l'Artillerie*, Paris, 1770.
- CHASLES, M., *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie...*, Paris, 1837 (2^e éd. 1875, 3^e éd. 1889), pp. 144 à 153, et 348 à 350.
- CHATELET, Marquise du, *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, en 2 vol., par feu M^{me} la marquise du Chastellet, Paris, 1756-1759.
- CLAIRAUT, A.-C., *Recherches sur les courbes à double courbure*, Paris, 1731.
- CLAIRAUT, A.-C., "*Quatre problèmes sur de nouvelles courbes*", 1725, in *Miscellanea Berolinensia*, Berlin, t. 4, 1734.
- CLAIRAUT, A.-C., "*Sur les courbes Que l'on forme en coupant une surface courbe quelconque, par un plan donné de position*", 1731, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, 1733, pp. 483 à 493 et 8 figures en une planche (n°30 du volume, insérée en p. 492).
- CLAIRAUT, A.-C., "*Des épicycloïdes sphériques*", 1732, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris.
- CLAIRAUT, A.-C., "*Manière de trouver des courbes algébriques et rectifiables sur la surface d'un cône*", 1732, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris.
- CLAIRAUT, A.-C., "*Solution d'un problème de géométrie proposé par M. Cramer, professeur de mathématiques à Genève*", 1732, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris.
- CLAIRAUT, A.-C., "*Sur quelques questions de maximis et minimis*", 1733, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris.
- CLAIRAUT, A.-C., "*Solution de plusieurs problèmes où il s'agit de trouver des courbes dont la propriété consiste dans une certaine relation entre leurs branches, exprimée par une équation donnée*", 1734, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris.
- CLAIRAUT, A.-C., "*Sur la méthode de M. Fontaine pour résoudre le problème où il s'agit de trouver une courbe...*", 1734, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris.
- CLAIRAUT, A.-C., "*Recherches générales sur le calcul intégral*", 1739, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris.
- CLAIRAUT, A.-C., "*De la spirale d'Archimède décrite par un mouvement pareil à celui qui donne la cycloïde et de quelques autres courbes du même genre*", 1740, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris.
- CLAIRAUT, A.-C., "*Sur l'intégration ou la construction des équations différentielles du premier ordre*", 1740, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris.
- CLAIRAUT, A.-C., *Éléments de Géométrie*, Paris, 1741.
- CLAIRAUT, A.-C., *Éléments d'Algèbre*, Paris, 1746.
- CLAIRAUT, le Cadet, *Diverses quadratures circulaires elliptiques et hyperboliques*, Paris, Quillau, 1731, in-12°, IV-56 pages.
- DE GUA de MALVES, voir GUA de MALVES.
- DE LAGNY, voir FANTET de LAGNY.
- DE LA HIRE, voir LA HIRE.
- DESCARTES, R., *La Géométrie*, pour faire suite au *Discours de la Méthode*, Paris, 1637; en particulier dans le Livre second, pp. 368-369.

- FANTET de LAGNY, Th., *"Analyse Générale ou Methodes Nouvelles pour resoudre les Problèmes de tous les Genres & de tous les Degrez à l'infini"*, par M. de Lagny, par les soins de M. Richer, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, T. XI, 1733.
- FERMAT, P. de, *Œuvres de Fermat*, éd. de P. Tannery et Ch. Henry, T. 3, 1896, pp.102-108. Texte latin original, T. 1, 1891, pp. 111-117.
- GUA de MALVES, (L'abbé) J.-P. de, *Usage de l'analyse de Descartes pour découvrir sans le secours du calcul différentiel, les propriétés, ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres*, Paris, 1740.
- GUISNÉE, *Application de l'Algèbre à la Géométrie, ou Méthode de démontrer par l'Algèbre, les Théorèmes de Géométrie, & d'en résoudre & construire tous les Problèmes. L'on y a joint une Introduction qui contient les Règles du Calcul Algébrique. Par Mr Guisnée de l'Académie Royale des Sciences, Professeur Royal de Mathématique, & ancien Ingénieur ordinaire du Roy. A Paris, 1705.*
- LACROIX, S.-F., *Cours de Mathématiques*, en 4 vol., Paris, An VIII (1800).
- LAGNY, voir FANTET de LAGNY.
- LA HIRE, Ph. de, *Nouveaux Elemens des Sections Coniques, Les Lieux Geometriques, La Construction, ou Effectio des Equations*, Paris, 1679.
- LEGENDRE, A.-M., *Éléments de Géométrie*, Paris, 1794.
- MACLAURIN, C., *Geometria Organica: sive Descriptio Linearum Curvarum universalis*, Londres, 1720.
- MURDOCH, P., *Neutoni Genesis Curvarum per Umbras, seu Perspectivæ Universalis Elementa; Exemplis Coni Sectionum et Linearum Tertii Ordinis illustrata*, Londres 1746.
- NEWTON, I., *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis*, à la suite d'*Opticks*, Londres, 1704. Une 2de éd. de l'*Enumeratio* fut publiée en 1711 par D. Jones.
- NICOLE, F., *"Manière D'engendrer dans un Corps solide toutes les lignes du troisième ordre"*, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, 1731, pp. 494 à 510 et 14 figures en trois planches (n^{os} 31 à 33, insérées en page 510).
- PAPPUS d'Alexandrie, *La Collection mathématique*, trad. P. Ver Eecke, Bruges, 1933, réed. Paris, 1982.
- PARENT, A., *Recherches de mathématiques et de physique*, 1705, t. 1; en part.: 3^e partie, pp. 181-200. 2de éd.: 1713; en part.: 2d vol., pp. 181-200.
- PITOT, H., *"Sur la quadrature de la moitié des arcs d'une courbe appelée compagne de la cycloïde"*, in *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, 1724, pp. 107-113.
- RICHER du BOUCHET, (Le chanoine) Cl., voir FANTET de LAGNY.
- STIRLING, J., *Linæ Tertii Ordinis Newtonianæ, sive Illustratio Tractatus Domini Neutoni De Enumeratione Curvarum Tertii Ordinis*. Oxford, 1717. Édition française par Duprat, Paris, 1797 (d'après Chasles).

BIBLIOGRAPHIE SECONDAIRE.

- BERTRAND, J., *"Clairaut. Sa vie et ses travaux"*, in *Éloges académiques*, 2de série, Paris, 1902, pp. 231-261; extrait du *Journal des Savants*, 1866, pp. 117-138
- BRUNET, P., *La vie et l'œuvre de Clairaut (1713-1765)*, Paris, Centre International de Synthèse, 1952.
- GRANDJEAN de FOUCHY, *"Éloge de Clairaut"*, in *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, 1765, pp. 144-159.
- HENRY, Ch., voir FERMAT.
- LACROIX, S.-F., *Notice sur Clairaut*, in *Journal des Sçavans*, 1765.
- LANIER, D., LE GOFF, J.-P., *"L'héritage arguésien"*, in *Scholies*, Actes du Séminaire Interdisciplinaire d'Histoire des Sciences du Lycée Malherbe de Caen, numéros 7 & 8, février & juin 1989, et *Cahiers de la Perspective* de l'IREM de Basse-Normandie, n° 5, Caen, 1991; à paraître dans les *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences*, Actes des colloques de Lille et Paris organisés en 1989 par le Séminaire d'Histoire, Théorie et Pratique de la Perspective.

- LE GOFF, J.-P., "*La perspective dans les pays anglo-saxons*", Actes du Séminaire Interdisciplinaire d'Histoire des Sciences du Lycée Malherbe de Caen, numéros 10 & 11, février & juin 1990, et *Cahiers de la Perspective*, n° 5, Caen, 1991.
- LE GOFF, J.-P., "*Un mémoire d'Alexis-Claude Clairaut: Sur les Courbes que l'on forme en coupant une Surface quelconque par un Plan donné de position (1731), et sur l'ombragement des courbes du troisième ordre*", in Actes de l'Université d'été inter-IREM d'Histoire des Mathématiques de Lille (1990), à paraître, et dans le présent numéro des *Cahiers*.
- LE GOFF, J.-P., "*La classification des courbes du troisième ordre. Aspects algébriques et aspects projectifs: l'abbé de Gua de Malves et Patrick Murdoch*", in Actes du Colloque inter-IREM d'Histoire des Mathématiques de Lyon (1991), à paraître, et dans le présent numéro des *Cahiers*.
- MARIE, M., *Histoire des sciences mathématiques et physiques*, t. 8, Paris, 1886, pp. 150-155.
- MICHAUD, *Biographie universelle*, t. 8, Paris, 1813, pp. 593-598.
- MONTUCLA, J. F., *Histoire des Mathématiques*, t. II, Paris, An VII (1799) et t. III, Paris, An X (1802).
- STRUIK, D.J., *A Source Book in Mathematics*, Harvard, 1969, pp. 168 à 178.
- TANNERY, P., voir FERMAT.
- TATON, R., *L'œuvre scientifique de Gaspard Monge*, Paris, 1951, en particulier, pp. 101 à 147.

* * * * *

* * *

*