DE VISIONS EN PERSPECTIVES,

ou:

VUES SUR LES FONDEMENTS D'UNE ÉPICTUROLOGIE RELATIVE.

Georges COPPEL,
Mai 1986[0].

À Jean-Marie Souriau.

PROLOGUE

On a pu penser[1] que Dieu était un mathématicien concis et qu'il s'exprimait par des " $E = Mc^2$ " ou " $e^{i\pi} = -1$ ".

---

[0] NDLR. Ce texte nous a été proposé par G. Coppel dès la mi-1986, suite aux contacts pris lors de l'exposition *Le Pérugin, exercices sur l'espace,* qui s'est tenue au printemps 1984, au Musée des Beaux-Arts de Caen. La rédaction n'était que trop heureuse de publier ces pages dans *Les Cahiers,* mais les rigueurs budgétaires (et autres contractions temporelles) n'aidant pas, leur auteur eut l'infinie patience d'attendre ce numéro de la revue pour les voir publiées, acceptant aussi qu'elles restent inchangées, bien que datées et dépassées dans sa pensée, après les avoir simplement revues et corrigées.

[1] On en est moins sûr aujourd'hui. Le fameux "théorème des quatre couleurs" illustre de manière exemplaire cette inquiétude des mathématiciens. En 1852, un étudiant anglais, Francis Guthrie suggère à A.Morgan que quatre couleurs pourraient suffire à colorier une carte géographique de manière à différencier deux pays limitrophes. De nombreux mathématiciens de talent ont consacré des années de leur vie à tenter de démontrer cette conjecture. L'un deux, Sir Alfred Kempe, découvrit vers 1880, le principe d'une typologie des cartes qui, après près de cent ans de recherches, devait permettre en 1976 de publier une démonstration déconcertante. Elle est due à Wolfgang Haken et Kenneth Appel, secondés par une équipe de mathématiciens et d'informaticiens. La démonstration a utilisé un ordinateur IBM 360 pendant 1 200 heures pour passer en revue tous les cas de figure de la typologie des cartes. Cela pose un certain nombre de questions:

i) Trouvera-t-on un jour une solution manuelle élégante et simple pour le théorème des quatre couleurs ? W.Haken et K.Appel pensent que c'est possible mais peu probable.

ii) Y a-t-il des théorèmes dont l'énoncé et la démonstration ne peuvent se faire que par une exploration très longue ? Les récents développements de la théorie de la complexité permettent d'affirmer qu'il y en a. Il est même probable que, dans certains cas, un ordinateur idéalement rapide demanderait un temps de calcul incompatible avec les possibilités de l'humanité. Rappelons qu'il ne s'est écoulé que $5 \cdot 10^{17}$ secondes depuis que, dans un "grand boum" (Big Bang) notre univers a été créé, et que ce chiffre est du même ordre de grandeur que

C'est cette ellipse de Dieu que l'on aime trouver dans la Peinture: quand elle est bonne, on dit qu'elle est "silencieuse", alors que l'on trouve "bavarde" une peinture maladroite. Cela ne suffit pas à prouver qu'il y a entre les Mathématiques et la Peinture des relations étroites et, pourtant, j'aime à penser que ces liaisons existent dans les arcanes de la conception.

Il m'a semblé que l'on pourrait parler de la Peinture dans des termes qui rappellent ces liaisons secrètes.

---

le nombre des combinaisons d'une vingtaine de facteurs... Il est aussi probable que le nombre des énoncés complexes est beaucoup plus grand que celui des énoncés élégants.

iii) Les énoncés courts sont-ils plus importants (ou plus "vrais") que les énoncés longs ? Toute la science classique répond: "Oui !"...

Einstein (que l'on peut considérer comme le dernier physicien classique) a travaillé entre 1905 et 1915 à la Théorie de la Relativité généralisée. En 1912, alors qu'il avait déjà établi les principaux résultats, il écrit à un de ses amis: "... je n'ai jamais tant travaillé... En comparaison, la première théorie était un jeu d'enfant". Pourquoi cette inquiétude chez Einstein ? Parce que la formulation n'avait pas encore l'élégance qui, à ses yeux, est le signe de la vérité. Dans le même ordre d'idées, on peut se demander si le chiffre 5 est fondamentalement plus important que 2147483647. Pour l'arithméticien, ce sont deux nombres "premiers" pris tous deux (au hasard ?) dans la suite des nombres entiers. Si l'un d'eux devait présenter plus d'intérêt, ce serait plutôt le second car c'est un nombre de Mersenne: $2^n - 1$; c'est, de plus, celui qui a longtemps tenu le record du plus grand nombre "premier" connu: c'est le nombre d'Euler. Mais pour le physicien, qui ne songerait pas à assimiler 5 à 4 ou à 6, le nombre d'Euler, lui, peut très bien être confondu avec ses voisins. Il est clair qu'en Physique, les grands nombres n'ont pas une personnalité aussi importante que les petits. Cela tient-il à une loi universelle [*] ? Alors, on pourrait dire que Dieu aime la concision. Mais cela tient peut être à une inclination de l'esprit humain... à une paresseuse incapacité d'admettre la complexité des choses ? Alors, Dieu serait un bavard éternel: l'essentiel de son discours ne sera jamais entendu par l'Homme.

Nota: afin de ne pas trop allonger cette note je n'ai pas évoqué la passionnante question de la validité des preuves: pour certains mathématiciens, la méthode Haken-Appel n'a pas valeur de preuve.

<u>Notule de la note.</u>

[*] Je viens de lire un article sur la "loi de Benford": ce physicien anglais, remarque, en 1937, que les premières pages des livres de logarithme de son laboratoire sont plus usées que les suivantes. Cela l'incite à se demander si la nature préfère les petits chiffres aux grands. Il s'amuse à faire des observations et constate que le chiffre 1 se rencontre deux fois plus que le chiffre 3. Il continue à collecter des données et il lui apparaît qu'elles peuvent être modélisées selon la formule:

$P\{n\} = \log(n+1) - \log(n)$; où $P\{n\}$ est la probabilité qu'une mesure physique commence par "n". Cette loi a intrigué de nombreux savants; ils ont pu la vérifier sur les cas les plus saugrenus. Par exemple, sur les longueurs des fleuves du monde. Serait-ce une simple coïncidence due à l'unité de mesure ? On passe donc des miles aux kilomètres: la loi de Bedford s'applique encore !

À mes yeux, il y a, dans les mathématiques plus de mystère que dans les tropes des critiques d'art: elles laissent percevoir qu'aucune tentative de rigueur ne réduira l'étrangeté fondamentale de l'univers.

Peut-être la quintessence de cet attrait se trouverait-elle dans un texte ayant les apparences d'une démonstration exacte, faite par des mathématiques factices, sur des données illusoires...

* * * * *

"NON MI LEGGA, CHI NON E MATEMATICO, NELLI MIA PRINCIPI"
Leonardo da Vinci (*Les Carnets*).

* * * * *

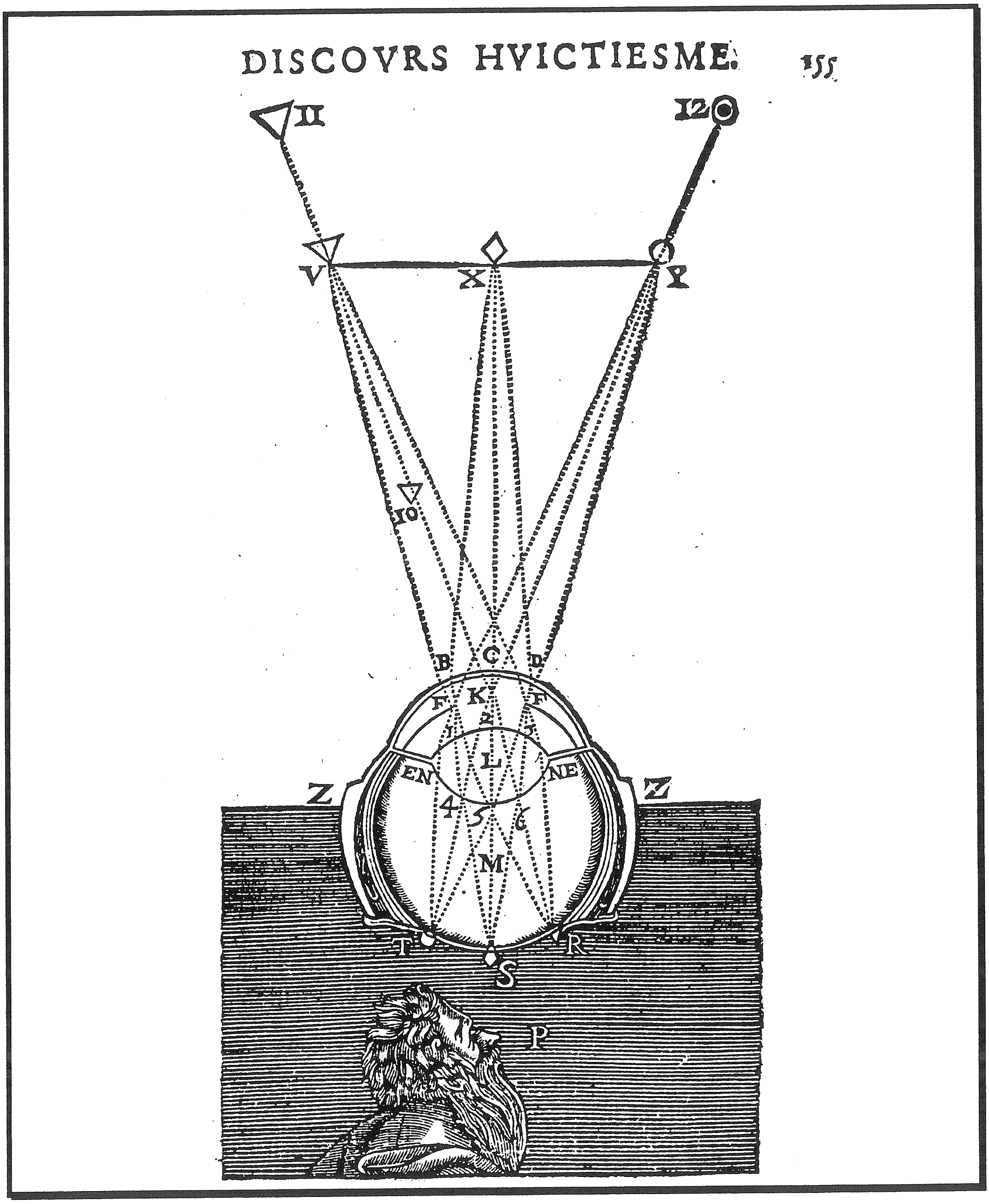
DE VISIONS EN PERSPECTIVES

Il n'existe pas de dessin humble: le plus simple est déjà un acte de connaissance. Il témoigne sur le fonctionnement de l'esprit: en effet, il n'y a aucune raison qu'une intelligence non-humaine reconnaisse un oiseau dans le célèbre tableau de Karel Fabritius représentant un chardonneret "en trompe-l'œil": elle pourrait trouver plus normal d'y reconnaître une planche de bois recouverte de taches de vernis plus ou moins colorées. En fait, c'est le mécanisme humain de reconnaissance qui se dévoile (partiellement !) dans l'identification d'une image: le cerveau mémorise, compare, abstrait, découvre des règles de permanence et peut donner un nom à chaque permanence. Pour en rester aux chardonnerets, j'en avais vu un, il y a une quinzaine d'années, en Touraine, perché sur une brindille de tilleul. Qu'avait-il en commun avec celui que j'ai vu, ce printemps, en Normandie, papillonner autour d'une bulle de graines de pissenlit ? Juste ce qu'il faut pour que je puisse identifier et fixer mes sensations sur le mot "chardonneret".

Oui, le mot fixe la chose. À tel point qu'un objet fixe (le tableau de Karel Fabritius) nous paraît plus représentatif de l'oiseau que sa manière de papillonner. L'image est fixe; elle est aussi plane (deux dimensions) alors que l'oiseau a un volume (trois dimensions). Pour figurer un volume sur un plan, il faut une convention de perspective[2].

---

2 À propos de peinture et d'oiseaux, on connaît le récit de Pline: Zeuxis (- Vème siècle) avait peint des grappes de raisin avec tant de vérité que les oiseaux venaient les picorer;



Parrhasios, relevant le défi, peignit le drapé d'un rideau avec tant d'art(ifice) qu'il réussit à tromper les hommes (qui sont tellement plus intelligents que les oiseaux); Zeuxis, lui-même, croyant que le rideau dissimulait un tableau, tenta de l'ouvrir ! Ce récit est une blague ! Nous allons constater, dans la suite de ce texte, qu'une image plane ne peut jamais passer pour un objet (à trois dimensions). Devant un trompe-l'œil (représentant, par exemple: une pipe), le spectateur sait très bien qu'il n'est pas devant une pipe mais devant un tableau dont il pourrait dire le format, le support et la technique: gouache, huile ou acrylique.

Figure 1.
Planche de la *Dioptrique*, essai pour faire suite au *Discours de la Méthode* de Descartes (1637).

Pendant plusieurs siècles, on a assimilé l'œil à une *camera scura*. Descartes a très clairement exposé cette opinion dans les cinquième et sixième "discours" ("*Des images qui se forment au fond de l'œil*" et "*De la vision*"). Rappelons que ces "discours" ont pour but de montrer comment s'applique la "*Méthode*" de Descartes.

Nous reproduisons, ici, l'illustration que l'on voit dans la première édition du *Discours de la Méthode* de Descartes (1637). Suivant ce troisième précepte de la "*Méthode*", les discours qui nous intéressent sont préparés par l'examen des "objets plus simples" (discours premier: "*De la lumière*", second: "*De la réfraction*", troisième: "*De l'œil*", quatrième: "*Des sens*"). Le cinquième discours commence par les instructions pour une expérience: sur "*un œil de bœuf ou de quelque gros animal, vous coupez dextrement vers le fond les trois peaux qui l'enveloppent, en sorte qu'une partie de l'humeur M, qui y est, demeure découverte... puis, l'ayant recouverte de quelque corps blanc (translucide)*", on fixe l'œil ainsi préparé à l'ouverture ZZ d'une paroi qui sépare l'espace en: d'une part, un local noir où se trouve l'observateur P; d'autre part, une scène éclairée où se trouvent des objets V, X, Y. L'observateur P voit sur le corps blanc du fond de l'œil "*la peinture*" des objets "*quasi en même façon que dans un tableau en perspective*". Descartes discute les conditions de "*perfection de l'image*" et complète ses hypothèses du discours premier sur la nature de la lumière (ondulatoire ? corpusculaire ?) et du quatrième discours sur la perception des sensations: transfert des perceptions vers le cerveau, puis construction d'une image dans la conscience (Descartes dit: "*dans l'âme*"). Le texte est ravissant: c'est le Descartes concis, vivant, familier qui pour un peu, nous enjôlerait encore. L'illustration est aussi belle que le texte: elle présente la poétique qualité de se prêter à plusieurs lectures.

Par exemple, on pourrait la regarder comme une illustration du texte d'Alberti. La droite VXY serait une coupe du plan du tableau (ou de la fameuse "*fenêtre*"), sur lequel le peintre-perspectiviste veut représenter les objets 11, X et 12 (ou 10, X et 12). L'objet X figurerait, dans la peinture, en grandeur réelle (comme les pieds du **Christ mort** de Mantegna, que nous analyserons plus loin). Il serait peint en raccourci et (comme l'observe Descartes) en valeurs atténuées (perspective aérienne). L'objet 10 serait agrandi (cf. les premiers plans de la **Boutique de la Goulue** de Toulouse-Lautrec).

Autre chose: pourquoi Descartes a-t-il désigné l'observateur par "P" ? Je regarde mieux ce barbu (philosophe ?)... mais, c'est Platon !! Il est enfermé dans l'espace sombre. C'est une caverne où, avec d'autres prisonniers, il est enchaîné depuis sa naissance. Reportons-nous à ce qu'il en dit à Glaucon (cf. *La République*, VII, 314, trad. L. Robin & M.J. Moreau, Éd. Pléiade): [si ces prisonniers conversaient entre eux] "*Ne croiras-tu pas qu'en nommant ce qu'ils voient ils penseraient nommer les réalités même ? - C'est tout à fait forcé !* [répond Glaucon, qui dit, ailleurs:] *Tu fais là une étrange description et tes prisonniers sont étranges ! - C'est à nous qu'ils sont pareils* [répond Platon]".

Les physiologistes modernes (Hübel, Wiesel et alia) trouvent, sans doute, comme Platon, que nous sommes pareils aux prisonniers de la caverne: à partir des reflets de réalité saisis au fond des yeux, notre système nerveux construit des images conscientes (il renforce les effets de bord, il utilise les souvenirs des perceptions et des connaissances réparties dans ses mémoires, etc.). Si bien que tout ce que nous croyons voir de manière naïve n'est que construction de l'esprit. L'esprit du personnage P que Descartes a placé sur son illustration fait sur les reflets TSR un travail similaire à celui qu'il ferait sur les objets VXY: c'est pourquoi l'expérimentateur peut s'émerveiller de la "*perfection du tableau*".

Cette convention peut être implicite (c'est une affaire de culture); ou explicite: c'est alors une technique. Cette technique (au service de l'Art), peut être basée sur la Science et susciter des réflexions qui développent les Techniques, les Arts et les Sciences.

C'est le cas de la Perspective "scientifique" inventée par les hommes de la Renaissance[3]. Ils ont commencé par concevoir une théorie sur la physiologie de la vision:

Les objets émettent des rayons rectilignes qui, dans l'œil, convergent vers un foyer. À partir de ce foyer, l'image des objets vient se projeter au fond de l'œil, sur un écran (la rétine). Cette théorie semblait confirmée par la dissection des organes et par la ressemblance entre l'anatomie de l'œil et la *"camera scura"* [4] (boîte optique) bien connue des peintres de l'époque (figure 1).

---

3 C'est probablement entre 1430 et 1440 que Fillippo Brunelleschi a conçu les règles de la perspective projective. Il laissa à son ami Leo Battista Alberti le soin de les rédiger (vers 1435). Bien qu'elles n'aient été publiées qu'en 1511, elles étaient depuis longtemps connues et appliquées dans les ateliers des artistes du nord de l'Italie. Entre 1495 et 1506, Dürer fait plusieurs séjours en Italie pour apprendre "la perspective secrète". Pendant les quatre siècles qui suivirent, la perspective "légitime" (Alberti l'appelle "prospettiva leggitima") sera considérée comme une vérité scientifique. J'aime à croire que Brunelleschi a eu une vue plus juste. En effet, alors qu'il proposait la perspective "légitime" pour donner un effet de volume aux images planes, il inventait le dessin industriel pour les projets d'architecture. Or c'est l'architecture qui lui tenait à cœur. Pour la coupole de Santa Maria del Fiore (à Florence), il avait imaginé une coupole basée sur des arêtes. Aucun maçon ne savait comment construire une coupole aussi nouvelle. Brunelleschi ne pouvait donc pas se contenter de donner des instructions générales, comme celles que les architectes donnaient aux maçons qui connaissent tout de leur affaire. Avec des dessins plus précis et rigoureux (plan, profil, élévation, coupes), il a inventé un nouveau traitement des informations. Les maçons ont dû apprendre des techniques plus modernes de communication ! Cela n'est pas allé sans mal: il y a eu des "troubles sociaux" (grèves, etc.). Mais Brunelleschi a réussi à imposer le système de représentation qui fait encore la loi sur les chantiers et dans les ateliers. Il me semble évident que pour lui, la perspective des peintres (projection à partir d'un centre situé à faible distance du sujet) ne donnait satisfaction qu'à un regardeur peu exigeant. On peut prêter à Brunelleschi une intention encore plus profonde: l'ambiguïté conviendrait bien à l'objet poétique (la fresque ou le tableau) mais la rigueur est nécessaire au succès d'un grand projet qui implique la collaboration de beaucoup d'hommes. Surtout si ces hommes ont des rêves différents.

4 La *camera scura* était connue depuis longtemps, mais elle a souvent été oubliée, si bien qu'on lui attribue (toujours à tort) plusieurs inventeurs (Giovanni Battista della Porta Vera 1553; même parfois L. de Vinci qui l'a finement dessinée et décrite). L'*Encyclopedia Britannica* donne d'intéressantes précisions sur ce cyle de redécouvertes. Notons que Vitello (né en Pologne vers 1230) et Roger Bacon (1214-1294) l'ont utilisée pour leurs recherches sur la perspective et sur la physiologie de la vision. Il n'est pas certain que Leo Battista Alberti l'ait connue. Vers 1794, T. Wedgwood et H. Davy ont utilisé le chlorure d'argent pour fixer l'image obtenue par la *camera*. Mais comme ils n'ont pas su stabiliser le résultat, ils n'ont pas tout à fait inventé la photographie.

Ces constatations étaient si convaincantes que même ceux qui ont été troublés par des paradoxes du système n'ont pas fondamentalement remis en cause sa vérité. Et cela a probablement été une chance car jusqu'au milieu du XXème siècle, les savants ne disposaient pas d'outils suffisants pour proposer une meilleure théorie de la vision. La réflexion des hommes sur ces sujets aurait donc été gênée. Or les idées de la Renaissance ont été étonnamment fécondes, puisque pendant quatre cents ans elles ont suscité des découvertes dans des domaines aussi variés que les mathématiques, la physique, les techniques... et l'art.

Figure 2.
L'une des quatre tables à perspective d'Albrecht Dürer.
***Underweysung der Messung,* Nüremberg, 1525.**

Dans son *Discours de la Mesure* (*Underweysung der Messung*), le "Maître" Albert Dürer enseigne un procédé que, dans son Traité *De la Peinture* (*De Pictura* ou *Della Pittura*), L. B. Alberti (1404-1476) avait décrit avec alacrité.

Je tiens sur un cadre un voile de tissu de fils très fins et tissés très lâche ... Je l'interpose entre mon œil et ce que je veux représenter de façon que la pyramide visuelle pénètre au travers du voile... Il permet de dessiner la position des contours.

Je ne veux pas écouter ceux qui prétendent qu'un peintre ne doit pas s'habituer à de semblables moyens, prétextant qu'ils devraient avoir l'adresse de faire sans assistance une mise en place juste... Mais nous n'avons pas à demander aux peintres de prendre une peine infinie, mais seulement de nous rendre en peinture les reliefs exacts que nous voyons dans les objets. (Trad. fr. de Cl. Popelin, Éd. A. Levy, Paris, 1868).

... Et voici justifiés nos hyper-réalistes modernes qui utilisent en peinture des procédés photographiques !

À première vue, la "perspective scientifique" a nui à l'art. Un examen plus attentif révèle qu'elle a forcé les artistes les meilleurs à un effort de méditation difficile et fertile chaque fois que leur génie les incitait à se détourner du naturalisme étroit.

Cette perspective "scientifique" a été exposée pour la première fois par L.-B. Alberti (1404-1472); c'est pourquoi nous l'appellerons "perspective albertienne" dans la suite de ce texte. Elle consiste à faire, sur le plan du tableau (à deux dimensions), la projection d'une scène (modèle), située dans l'espace à trois dimensions. Le pôle de projection est le centre optique de l'œil (figure 2). Alberti pense que celui qui posterait son œil (il est donc borgne !) en ce point aurait, en regardant le tableau, l'illusion de voir la scène véritable.

Le système d'Alberti tient dans ce que l'on nommera plus tard la géométrie projective.

En fait, même quand les peintres visent au réalisme le plus trivial (le trompe-l'œil), la perspective albertienne donne parfois des images qui semblent absurdes. Cette impression vient de ce que le système de vision de l'homme ne fonctionne pas uniquement selon la géométrie projective: l'œil n'est pas une *"camera scura"*, la rétine n'est pas une surface homogène. En réalité, l'image se forme dans le cerveau et non pas sur la rétine. Cette image est construite, d'une part, grâce à des perceptions petites, nombreuses et palpitantes, d'autre part, avec des matériaux fournis par des expériences antérieures. Parmi celles-ci, il y a la connaissance de la mesure des choses: dimensions des visages, des êtres et des objets. Cette connaissance s'organise dans l'esprit selon un système que l'on peut nommer: géométrie métrique.

Or, pour le mathématicien, la géométrie métrique appartient à un univers axiomatique différent de celui de la géométrie projective.

Mantegna (1431-1506) avait constaté les paradoxes de la perspective. Dans son tableau: le **Christ mort** il a tenté de donner à chacune de ces géométries une part telle que le tableau satisfasse le regard.

Le **Christ mort** (figure 3) se trouve à la Pinacothèque Brera de Milan. C'est un tableau de 68 cm de haut et de 84 cm de large. On y voit le christ dans un raccourci dramatique, comme si l'axe du corps était perpendiculaire au plan du tableau, les pieds devant.

Ces pieds, sur le tableau, ont une largeur de 10 cm: c'est la dimension normale des pieds d'un homme d'environ 1,75 m (l'ordre de grandeur de la taille que beaucoup d'écrits religieux de l'époque prêtaient au christ). Selon les règles d'Alberti, pour qu'un objet soit représenté en grandeur réelle, il faut qu'il affleure le plan du tableau. L'œil du peintre est alors à environ deux mètres du visage du modèle. Si ce visage a 16 cm de large (dimension courante), son image devrait avoir 3 cm (figures 4 et 5). Or la tête du christ, sur le tableau, a 16 cm de largeur. Malgré les raccourcis, Mantegna a donc conservé aux largeurs du corps les dimensions véritables du modèle: dans le sens horizontal, le tableau est construit selon la géométrie métrique.

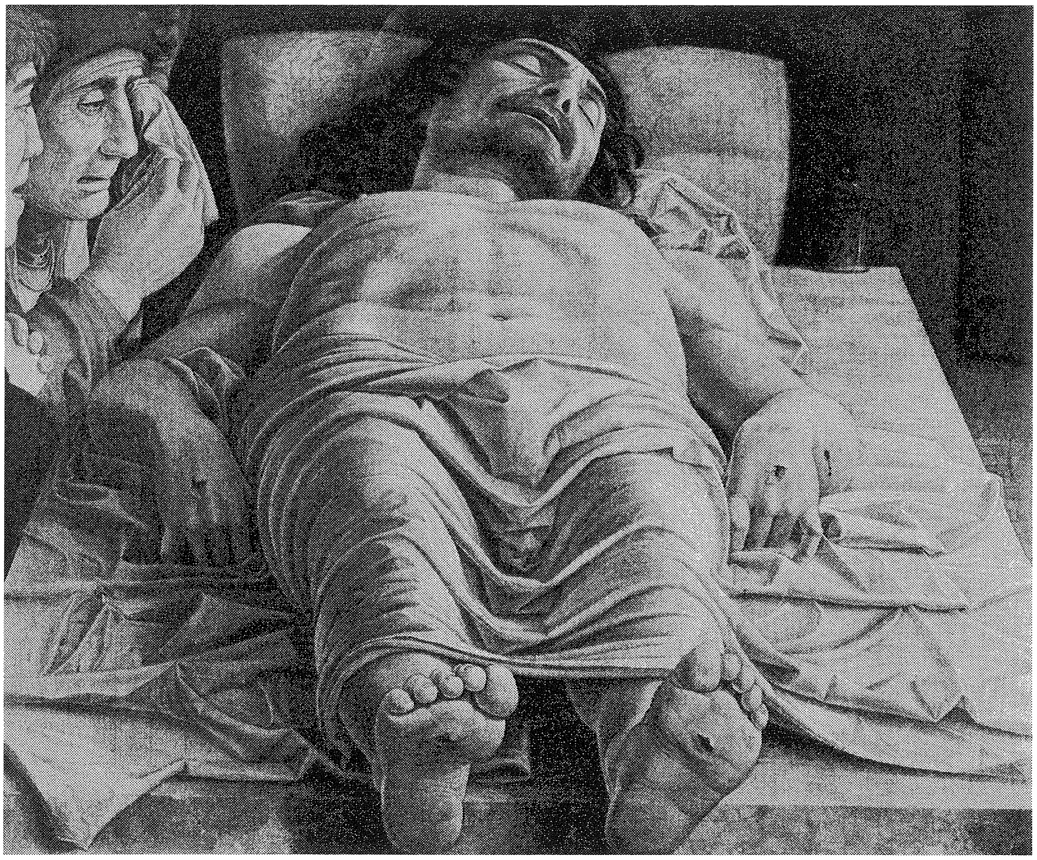
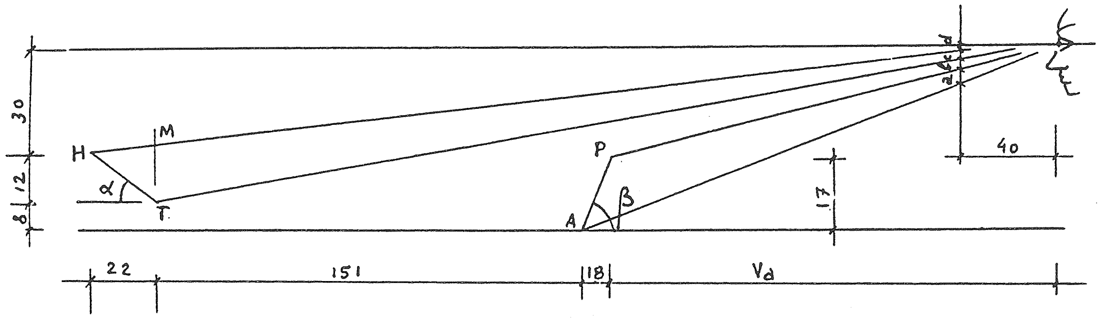


Figure 3.
Le CHRIST MORT d'Andrea Mantegna (ca. 1470-80).
Milan, Pinacothèque de la Brera (dim.: 68 x 84 cm).

Ce tableau a été exécuté à l'époque où les règles de la perspective étaient encore un "secret professionnel". On y voit que certains concepteurs de la perspective "légitime" ont voulu créer chez les spectateurs l'illusion de vision d'une scène réelle. Nous verrons plus loin que ce but ne peut pas être atteint par la peinture.



$$\text{Sur le tableau de Mantegna: } \frac{\text{hauteur tête}}{\text{largeur tête}} = \frac{12 \text{ cm}}{16 \text{ cm}} = \frac{25}{14} \,.\, \sin\alpha \;(\alpha = 27°).$$

$$a + b + c + d = 40 \,.\, \frac{50}{18 + V_d}$$

$$b + c + d = 40 \,.\, \frac{30}{V_d} \qquad \beta = 43° \begin{cases} \text{hauteur du pied: } 17 \text{ cm} \\ 25 \,.\, \sin\beta = 17 \end{cases}$$

$$c + d = 40 \,.\, \frac{42}{18 + 151 + V_d}$$

$$d = 40 \,.\, \frac{30}{18 + 151 + 22 + V_d}$$

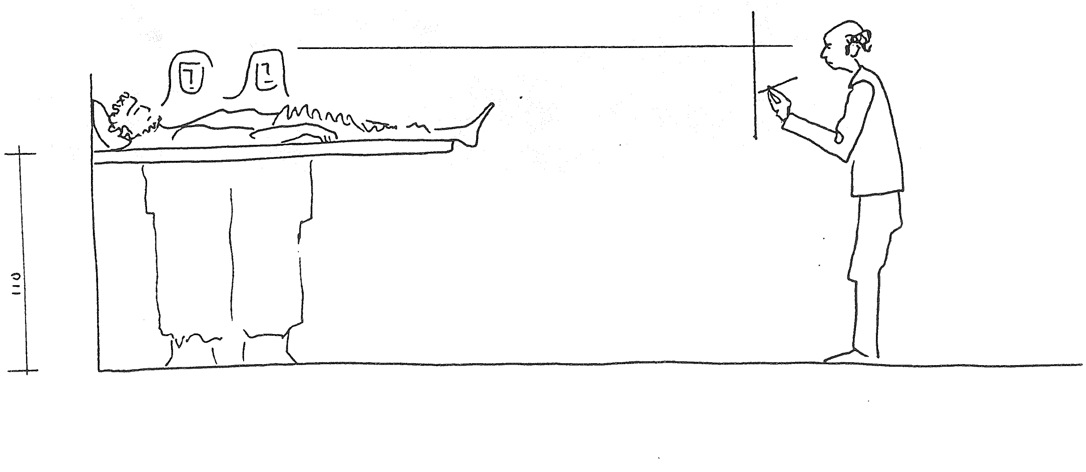


Figure 4.
Le CHRIST MORT de Mantegna:
étude perspective.

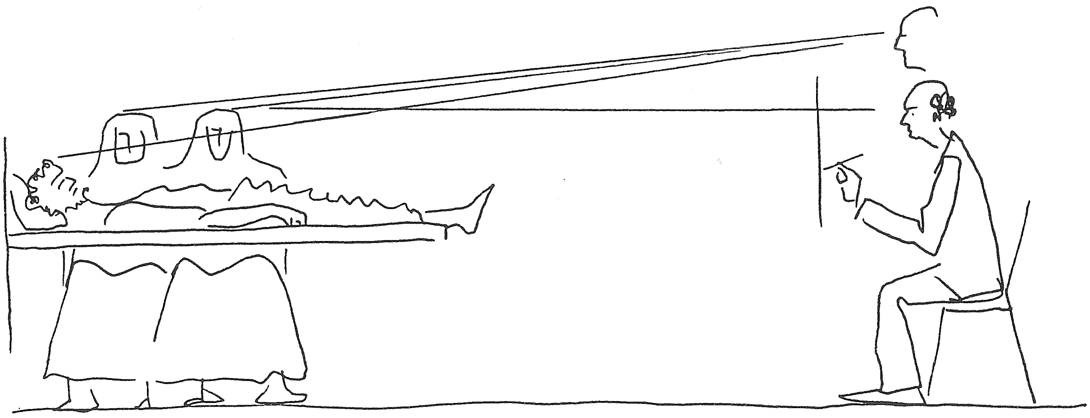


Figure 5.
Le CHRIST MORT de Mantegna:
position du point de vue.

Si les Saintes Femmes sont assises, il faut que le peintre soit, lui aussi, assis, sinon la tête de la femme la plus proche devrait être située plus bas, sur le tableau.

Dans l'autre sens, les dimensions sont très raccourcies puisque l'image du corps a 62 cm alors que le modèle mesurait environ 1,75 m. Dans le sens vertical, le tableau est donc organisé selon la géométrie projective. Cette dualité ne nous frappe pas car, nous l'avons dit, elle existe aussi dans notre processus mental.

On pourrait ajouter d'autres remarques. Notamment: pour voir la couleur et les détails (c'est ainsi que l'amateur regarde un tableau), il faut utiliser la zone de la rétine où se concentrent les capteurs fins. C'est la *fovea*. Elle donne un angle de vision de 4°. Cela veut dire qu'à 2,25 m du tableau, un seul regard ne voit qu'une zone de 16 cm de diamètre. Pour examiner tout le tableau, il faut balayer sa surface en fixant le regard au moins sur trente points différents. Quand on fixe la tête du christ, on la voit entière (16 cm) et elle a la largeur d'une tête véritable. Quand on fixe les pieds, on constate qu'ils ont la largeur normale. À partir de ces perceptions séparées, le cerveau bâtit l'image mentale du corps du christ suivant un procédé qui lui est familier. Imaginons, en effet, un visiteur qui entre dans une chambre où un homme parle en gesticulant. Le visiteur regarde le visage du discoureur; son cerveau enregistre les traits et leurs dimensions. Il vient de construire une image mentale qui lui servira à reconnaître le personnage (même si par la suite il l'aperçoit sous un nouvel angle). Continuant son exploration, le regard du visiteur se pose sur une autre partie (disons: la main gauche). Son cerveau estime la taille de cette main et la met en place dans l'image mentale du corps, même si le discoureur a bougé entre les deux observations. Or pour un déplacement d'un mètre, l'image projective, sur la rétine, peut avoir changé de grandeur, allant du simple au double !

En cherchant à réunir dans un même tableau une vision métrique (en largeur) et une vision projective (en hauteur), Mantegna a probablement été guidé par des préoccupations plastiques plutôt que par des questions d'axiomatique en géométrie.

En fait, les tentatives d'axiomatisation des géométries sont aussi anciennes que les mathématiques. Euclide rêve déjà d'un exposé fondé, complet et cohérent. Les étapes les plus marquantes de l'histoire de ce rêve sont la théorie des groupes par Évariste Galois (1832) et le programme de David Hilbert (1900) qui a permis une bonne formulation. À partir de cette date, on peut dire pourquoi et comment la géométrie métrique et la géométrie projective n'appartiennent pas au même univers[5].

---

5 C'est grâce à la théorie des Groupes d'Évariste Galois (1811-1832) que les mathématiciens ont commencé à formuler la différence entre la géométrie projective et la géométrie métrique. Cette découverte est curieusement liée aux grands courants de l'histoire des idées. Nous sommes devant un mystérieux grand œuvre (un grand *opera* !): les thèmes sont suggérés par les peintres théoriciens de la Renaissance. Ils sont repris discrètement dans plusieurs tonalités (physiologie de la vision, mathématiques, architecture) jusqu'à ce que, cent ans après, Desargues (1591-1661) leur trouve une notation "harmonique". Avec Galois, dans un mouvement passionné, on croit partir sur un thème différent: la théorie des équations. Mais les idées de Galois débouchent, à partir de 1910, de manière fulgurante sur un accord: dans une large vision, les géométries s'organisent, les bases mathématiques de la mécanique quantique et de la Relativité sont constituées, les fondations de la logique mathématique et de l'axiomatique sont établies. Pour la scène de la mort, nous sommes au dernier acte d'un grand *opéra* romantique: le Génie, les Causes Généreuses, les Idéaux, la Liberté, l'Amour... le duel funeste. Le premier juin 1832, Évariste sait qu'il sera tué demain, à l'aube. Il passe sa dernière nuit à écrire la théorie des Groupes. Il trouve encore le temps pour une conclusion où il dévoile hâtivement les liaisons secrètes entre les questions qui ressortissent à des opérations similaires. Ces correspondances abstraites se sont révélées plus "vraies" que les descriptions figuratives et anecdotiques. Tout cela est si important que nous allons tenter d'illustrer la théorie des groupes par une de ses applications: le classement des géométries.

Définition: " Un ensemble d'opérations constitue un groupe si:

i) le produit de deux de ces opérations est encore une opération de l'ensemble,

ii) l'inverse d'une opération de l'ensemble est encore une opération de l'ensemble."

Géométrie métrique. Les opérations de la géométrie métrique sont les translations, les rotations et les symétries (par rapport à une droite ou par rapport à un plan). Il est facile de vérifier que ces opérations constituent un groupe. Appelons le GM. Nous pouvons maintenant définir la géométrie métrique comme "l'étude des propriétés des figures qui sont invariantes pour les opérations du groupe GM".

Géométrie euclidienne. En plus du groupe GM, la géométrie euclidienne étudie les figures semblables. Il suffira d'ajouter aux opérations du groupe GM une opération supplémentaire: l'homothétie. Celle-ci fait correspondre à un point M un point M' par un centre O grâce à la relation: $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$. Il est facile de vérifier que l'ensemble constitué par l'homothétie plus GM, a toutes les propriétés d'un groupe. Appelons-le GE. Nous pouvons maintenant définir la géométrie euclidienne comme "l'étude des propriétés des figures qui sont invariantes par rapport aux opérations du groupe GE".

Géométrie analytique. Considérons un trièdre trirectangle Oxyz. C'est le trièdre de référence. Dans l'espace défini par ce trièdre, plaçons une figure F. Considérons ensuite un deuxième trièdre O'x'y'z' qui d'abord se superpose au trièdre de référence. Puis, faisons subir au trièdre O'x'y'z' des opérations du groupe M. Il arrive en O"x"y"z". Les coordonnées de F dans O"x"y"z" s'obtiennent grâce aux formules classiques de changement de coordonnées. Il est clair que, dans F, les distances et les angles n'ont pas changé. Le changement de coordonnées est donc l'équivalent analytique de la géométrie métrique. L'équivalent analytique de la géométrie euclidienne s'obtiendra en ajoutant la transformation d'homothétie: $x' = k.x$, $y' = k.y$, $z' = k.z$. On appelle parfois cela: l' "espace cartésien". L'espace cartésien établit une correspondance biunivoque entre les points de l'espace et les groupes nombres x, y, z, qui sont supposés finis. En d'autres termes l'espace cartésien exclut les points à l'infini.

Géométrie arguésienne. Quand on ajoute à l'espace cartésien les points situés à l'infini on obtient l'espace arguésien. Le mot est une référence à Desargues qui, le premier, a eu l'idée qu'une série de droites parallèles était analogue à une série de droites concourantes, le point de concours étant à l'infini. Pour mettre en évidence, de manière analytique, les points à l'infini, on peut choisir une droite définie par deux de ses points A et B, dont les coordonnées sont respectivement: x_1,y_1,z_1 et x_2,y_2,z_2. On peut écrire les coordonnées d'un point M de cette droite sous la forme: $\frac{x_1 + kx_2}{1+k}, \frac{y_1 + ky_2}{1+k}, \frac{z_1 + kz_2}{1+k}$, où k est un coefficient qui donne la situation de M par rapport à A et B. Il est clair que plus k se rapproche de la valeur: -1, plus le point M s'éloigne de A et B, si bien que l'on peut dire que M aura atteint l'éloignement infini quand k aura atteint la valeur: -1. On voit que pour faire intervenir le point à l'infini (appelé parfois "point impropre"), nous avons dû utiliser une donnée de plus que les trois: x,y, et z. Rien d'étonnant donc que, pour introduire ces notions avec rigueur, la géométrie analytique arguésienne fasse appel à des coordonnées "homogènes": X, Y, Z, U, définies à un facteur de proportionalité près. Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées arguésiennes est fixé par: $X = x.U$, $Y = y.U$, $Z = z.U$. Les points à l'infini étant caractérisés par $U = 0$, on voit que leurs coordonnées sont proportionnelles à $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$, et 0; ils sont caractérisés par $U = 0$ si bien que, comme l'a fait remarquer Poncelet (1788-1867), ils définissent un "plan de l'infini". On définit également un "cercle imaginaire de l'infini" par l'intersection d'une sphère avec le plan de l'infini. Un cercle C de l'espace coupe ce cercle de l'infini en deux points qui sont les "points cycliques" du plan de C. Toutes ces conventions ont permis de simplifier les écritures et de généraliser les résultats. La géométrie arguésienne se distingue donc de la géométrie cartésienne par sa plus grande puissance et sa plus grande élégance. Ces deux géométries sont différentes par les conventions d'écriture, mais elles utilisent les mêmes opérations: elles ressortissent donc au groupe GE.

La géométrie affine. Quand on examine les équations de changement de coordonnées dans l'espace arguésien, on constate que les éléments de l'infini sont indépendants du choix du trièdre de référence (cette constatation est d'ailleurs intuitivement évidente). Elle inspire des formules simplifiées de changement de coordonnées qui privilégient l'écriture des propriétés des figures par rapport aux éléments de l'infini: c'est la géométrie affine. Les notions affines sont conservées lors des changements de coordonnées (même si le nouveau

En 1905, Einstein publie la *Théorie de la Relativité restreinte.* Sa démonstration propose, à deux observateurs en mouvement, une méthode pour s'accorder sur le récit d'un événement dont ils sont tous deux témoins.

---

trièdre n'a pas une base orthogonale). C'est ainsi que le parallélisme des droites et des plans est un invariant en géométrie affine alors que les angles ne le sont généralement pas. On démontre que l'affinité conserve le rapport anharmonique de quatre points d'une droite ou de quatre droites d'un faisceau. Cette propriété avait servi pendant longtemps à définir la géométrie projective (von Staudt, 1798-1867). La projectivité décrite par les perspectivistes correspond bien à la géométrie affine. Nous avons inclus dans la Relativité restreinte la double description métrique et projective du spectacle d'une scène picturale. En fait, c'est plutôt la géométrie affine que la géométrie projective que nous avons introduit dans la Relativité... ou, plus exactement, les opérations que ces deux géométries ont en commun; ce sont les transformations par homographie. On vérifie que les homographies sont un groupe. En fait, les formules analytiques de changement de coordonnées de la géométrie affine suffisent à définir un groupe GA qui sert à définir la géométrie affine comme "l'ensemble des propriétés des figures qui sont invariantes pour les opérations du groupe GA".

La géométrie projective. Elle comprend les opérations de la géométrie affine, et y ajoute les réciprocités. Il s'agit, en fait, d'introduire la puissante notion de "dualité". Ce principe définit des familles de propositions quand elles restent vraies par l'inversion de certains termes. Par exemple, en remplaçant le mot "point" par le mot "plan" et réciproquement. Le principe de dualité apparaît, notamment dans les théories des pôles et polaires que l'on inclue dans la géométrie projective. On vérifie facilement que les réciprocités sont un groupe. Ajouté à GA, nous obtenons donc le groupe GP des opérations projectives. La géométrie projective sera définie comme "l'ensemble des propriétés des figures qui sont invariantes pour les opérations du groupe GP".

La topologie. Elle étudie des opérations dont on démontre qu'elles forment un groupe GT. Ces opérations font correspondre:

i) de manière biunivoque: un point P' à un point quelconque P (et réciproquement);

ii) aux points P d'une courbe, les points P' d'une courbe;

iii) à deux couples de points A,B et C,D se séparant sur une courbe, deux couples de points A', B' et C', D' se séparant sur la courbe homologue.

Les transformations dues aux opérations du groupe GT sont appelées "homéomorphismes". On peut définir la topologie comme: "l'étude des figures invariantes pour les opérations du groupe GT".

Hiérarchie des géométries. Nous avons vu que l'on passe de la géométrie métrique à la géométrie euclidienne (ou de la géométrie arguésienne à la géométrie projective) en ajoutant des opérations supplémentaires. On peut également remarquer que les affinités sont des projectivités qui transforment le plan de l'infini en lui même. De même que les similitudes sont des affinités conservant les mesures d'angles, si bien que l'on peut dire, par exemple, que la géométrie métrique est subordonnée à la géométrie euclidienne, celle-ci à la géométrie affine, enfin, cette dernière à la géométrie projective. Félix Klein (1849-1925) qui, le premier dans le programme d'Erlangen (1872) a établi cette hiérarchie, a proposé une géométrie abstraite qui incluerait toutes les géométries possibles. Suivant cette idée, on a pu définir une géométrie métrique générale ayant même rang que la géométrie projective. Selon cette classification, due à F.Enriques (1871-1946), la topologie inclut la géométrie projective et la métrique générale (placées sur le même rang); au-dessous, Enriques situe la géométrie élémentaire. *Nota: Pour ne pas trop allonger cette note, nous nous sommes bornés aux géométries les plus courantes. Nous n'avons pas évoqué les extensions de la géométrie projective aux hyperespaces.*

J'ai appliqué cette méthode pour mettre d'accord deux êtres intelligents. L'un est voué à l'immobilité: il ne peut donc pas entreprendre des mesures directes sur l'espace qui l'entoure. Son moyen d'observation est une lentille fixée à une boîte noire. C'est, en somme, une *camera scura*. Son expérience de l'univers lui inspire une description caractérisée par les invariants de la géométrie projective. Pour faciliter l'exposé, nous lui donnerons un nom: "Albert".

L'autre, que nous nommerons "Franz", peut se déplacer dans l'espace. Il peut donc aller vérifier l'invariance des angles et des longueurs: cela lui inspire une description en géométrie métrique.

En nous inspirant étroitement des démonstrations (et même du style) de Einstein, nous allons d'abord écrire comment "Albert" peut observer les événements ponctuels qui ont lieu sur une droite xx'. Ils constituent un ensemble à trois dimensions où chaque événement est caractérisé par le temps (t), la position (x) et la vitesse (v) (figure 6).

Nota: *ces variables ont été choisies pour rendre élégantes les expressions où doit intervenir le rapport c/v ("c" est la vitesse de la lumière). Dans la figure qui montre cet espace-temps, Einstein a dessiné Ox horizontalement et Ot verticalement. Cette position inhabituelle a une vertu pédagogique: elle suffit à débarrasser le lecteur des enchaînements triviaux de la pensée à propos de déplacements dans l'espace et le temps.*

On sait que Michelson a tenté sa célèbre expérience afin de savoir s'il y avait, dans l'univers, un système de référence fixe dans lequel tous les mouvements auraient pu être décrits. À partir de 1887 (résultats définitifs de Michelson-Moreley), il a été établi qu'il n'y en avait pas.

Chaque observateur a le droit de considérer qu'il est au repos et que ce sont les autres qui ont la bougeotte. Pour simplifier les écritures, nous admettons que l'univers d'Albert et de Franz se limite à l'axe xx'.

Albert a le droit d'y fixer une origine O. Il est naturel qu'il choisisse un point qui n'est pas en mouvement par rapport à lui. Sa propre histoire sera donc représentée dans le plan (x_A,t_A), puisque sa vitesse est nulle dans son système de références. Dans le même plan (x_A,t_A), Albert pourra témoigner des déplacements de Franz, en portant en abscisse "x_A" (la distance séparant Albert et Franz à l'instant "t"). En ordonnée, Albert portera "t_A". Il obtiendra, pour image du mouvement de Franz, une droite OF où $\operatorname{tg} \alpha = \frac{t}{v}$.

Ce qui suit est le récit du travail intellectuel d'Albert qui arrive, par la seule puissance de son esprit, à interpréter les phénomènes d'un univers où son corps infirme ne peut accéder.

Albert, ayant un sens de l'équité, juge que Franz a, autant que lui, le droit de choisir des axes de référence fixes par rapport à lui: Franz. Puisque l'histoire d'un être au repos est représentée par l'axe des "t", il suffira de prendre OF comme axe des "t_F" et Ox_F perpendiculaire à OF.

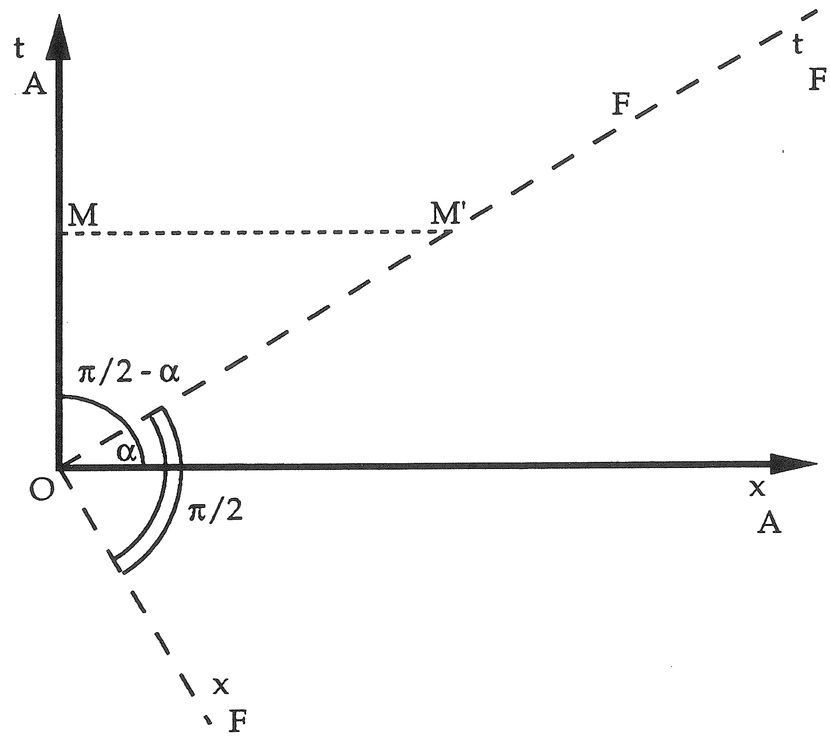


Figure 6.
Les repères de Franz et d'Albert.

Quand Einstein a choisi de disposer les axes de coordonnées de manière inhabituelle (le temps mis en "ordonnées"), il a sans doute voulu libérer l'esprit du lecteur de certains préjugés concernant les liens de causalité.

C'est par des formules classiques de changement d'axes qu'Albert peut construire l'histoire de Franz:

[1]
$$\begin{cases} x_A = x_F \,.\, \sin\alpha + t_F \,.\, \cos\alpha \\ t_A = t_F \,.\, \sin\alpha - x_F \,.\, \cos\alpha \end{cases}$$

Afin de rendre ces formules homogènes par rapport à "x_A" et "t_A", on peut prendre, pour mesure de t_A, l'espace parcouru dans ces intervalles par un mobile de vitesse "a", les formules deviennent:

$$\begin{cases} x_A = x_F \,.\, \sin\alpha + a \,.\, t_F \,.\, \cos\alpha \\ a \,.\, t_A = a \,.\, t_F \,.\, \sin\alpha - x_F \,.\, \cos\alpha \end{cases}$$

et puisque:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{v}$$

c'est-à-dire:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{v}{a}}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{a^2}}} \; ; \qquad \text{et} \qquad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{a^2}}} \, .$$

$$x_A = \frac{vt_F + x_F}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{a^2}}} \; ; \qquad \text{et} \qquad t_A = \frac{t_F - \frac{x_F . v}{a^2}}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{a^2}}} \qquad [2]$$

$$x_F = \frac{x_A - vt_A}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{a^2}}} \; ; \qquad \text{et} \qquad t_F = \frac{t_A + \frac{x_A . v}{a^2}}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{a^2}}} \qquad [2bis]$$

Personne ne s'étonnera de constater que l'on passe de [2] à [2bis] en changeant "v" en "- v": le mouvement de Franz par rapport à Albert étant égal et de sens contraire à celui d'Albert par rapport à Franz.

Figé dans son immobilité minérale et postulée, Albert, dans l'impossibilité où il se trouve d'aller faire des mesures directes, ne peut continuer sa réflexion qu'en confrontant avec Franz ses observations d'un même phénomène. Par exemple, le déplacement d'un mobile. On écrit facilement les deux séries d'observations en écrivant les compositions des vitesses que l'on déduit de [2]:

$$\frac{dx_A}{dt_A} = \frac{v.dt_F + dx_F}{dt_F - \frac{v}{a^2}.dx_F} = \frac{v + \frac{dx_F}{dt_F}}{1 - \frac{v}{a^2} . \frac{dx_F}{dt_F}} \qquad [3]$$

Réciproquement, une expérience qui démontrerait l'exactitude de la formule [3] entraînerait celle de [2].

Cherchons, en effet, les fonctions $x_A = f(x_F, t_F)$ et $t_A = \phi(x_F, t_F)$ telles que la relation [3] soit vérifiée. On a:

$$\frac{dx_A}{dt_A} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_F}.dx_F + \frac{\partial f}{\partial t_F}.dt_F}{\frac{\partial \phi}{\partial x_F}.dx_F + \frac{\partial \phi}{\partial t_F}.dt_F} = \frac{\frac{\partial f}{\partial t_F} + \frac{\partial f}{\partial x_F} . \frac{dx_F}{dt_F}}{\frac{\partial \phi}{\partial t_F} + \frac{\partial \phi}{\partial x_F} . \frac{dx_F}{dt_F}} = \frac{v + \frac{dx_F}{dt_F}}{1 - \frac{v}{a^2} . \frac{dx_F}{dt_F}}$$

d'où:

$$\frac{\partial f}{\partial t_F} = K(x_F,t_F).v \ ; \frac{\partial f}{\partial x_F} = K(x_F,t_F) \ ; \frac{\partial \phi}{\partial t_F} = K(x_F,t_F) \ ; \frac{\partial \phi}{\partial x_F} = -\frac{v}{a^2} . K(x_F,t_F)$$

relations dans lesquelles "v" est une constante et K une fonction de x et de t. Nous allons avoir quelque précision sur K dans la suite, mais sa connaissance complète n'est pas utile à notre propos.

On sait que: $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Ce qui permet d'écrire les équations différentielles partielles:

$$v . \frac{\partial K(x_F,t_F)}{\partial x_F} - \frac{\partial K(x_F,t_F)}{\partial t_F} = 0 \ ; \ \text{et} \ \frac{\partial K(x_F,t_F)}{\partial x_F} + \frac{v}{a^2} . \frac{\partial K(x_F,t_F)}{\partial t_F} = 0$$

de la première de ces équations on déduit:

$$K(x_F,t_F) = F_0(x_F, v.t_F)$$

de la deuxième:

$$K(x_F,t_F) = F_1(x_F, \frac{-a^2}{v}.t_F)$$

d'où:

$$F_0(x_F, v.t_F) = F_1(x_F, \frac{-a^2}{v}.t_F)$$

"v" étant quelconque, cette identité ne peut être vérifiée que si F_1 et F_0 (donc: K) se réduisent à une même constante: k.

De ce fait, on a:

$$\frac{\partial f}{\partial t_F} = k.v \ ; \frac{\partial f}{\partial x_F} = k \ ; \frac{\partial \phi}{\partial t_F} = k \ ; \frac{\partial \phi}{\partial x_F} = -\frac{k.v}{a^2}$$

On en déduit:

$$dx = df = \frac{\partial f}{\partial t_F} . dt_F + \frac{\partial f}{\partial x_F} . dx_F = k.v.dt_F = k.dx_F$$

$$dt = d\phi = k.dt_F - \frac{k.v}{a^2}.dx_F$$

et:

$$x = k.v.t_F + k.x_F + A$$

$$t = k.t_F - \frac{k.v}{a^2}.x_F + B$$

ou sous une autre forme:

$$x_F = \frac{x_A - v.t_A - (A - v.B)}{k.\left(1 + \frac{v^2}{a^2}\right)} \; ; \qquad t_F = \frac{\frac{x_A.v}{a^2} + t_A - A.\frac{v}{a^2} - B}{k.\left(1 + \frac{v^2}{a^2}\right)}$$

Or, ces expressions devraient se déduire des précédentes par un changement de "v" en "- v". Cette remarque permet d'écrire:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{a^2}}} \; ; \qquad A = B = 0$$

d'où:

$$x_A = \frac{v.t_F + x_F}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{a^2}}} \; ; \qquad t_A = \frac{t_F - \frac{x_F.v}{a^2}}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{a^2}}}$$

Nous retrouvons bien les formules [2] et [2bis].

Nous sommes donc amenés à imaginer une expérience qui vérifie l'exactitude de [3]. Il suffit de se reporter à celle de Michelson qui est l'une des plus précises qu'on ait imaginées, puisqu'elle a permis de détecter des différences de l'ordre de grandeur du centième de longueur d'onde lumineuse. Cela correspond, pour le temps, à 10^{-17} seconde.

Proposons-nous donc d'examiner une valeur "c" telle que:

$$c = \frac{dx_A}{dt_A} = \frac{dx_F}{dt_F}$$

On a: $$c = \frac{v + c}{1 - \frac{v.c}{a^2}} \qquad \text{ou: } v\left(1 + \frac{c^2}{a^2}\right) = 0$$

On en déduit: $c = i\,.\,a$ (où $i = \sqrt{-1}$)

Conformément à l'expérience de Michelson, les formules [2] et [3] deviennent:

$$x_A = \frac{v.t_F + x_F}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \; ; \qquad t_A = \frac{t_F + \frac{x_F.v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad [4]$$

$$\frac{dx_A}{dt_A} = \frac{v + \dfrac{dx_F}{dt_F}}{1 + \dfrac{v.\dfrac{dx_F}{dt_F}}{c^2}} \qquad [5]$$

Ces formules "relativistes" sont contradictoires selon la mécanique newtonienne dans un espace euclidien. La contradiction disparaît dès lors qu'on admet, comme postulat, la constance de la vitesse de la lumière. Les descriptions "relatives" que les observateurs donnent d'un même phénomène deviennent les représentations en perspective selon deux points de vues différents.

Albert a maintenant réussi, grâce à l'écriture einsteinienne, à faire correspondre ses observations du monde avec celles de Franz.

Remarquons, en outre, que les formules [4] et [5] permettent de délimiter l'univers des événements pouvant être liés par une causalité. Supposons, en effet, qu'Albert observe simultanément deux phénomènes (A et B). Posons que dans l'espace-temps, ils sont séparés par une distance "ab". Pour Franz, les deux phénomènes ne sont pas simultanés, ils sont distants de "a'b' ".

Le maximum de vitesse possible étant "c", on a, d'après [4]:

$$c = a\,.\sqrt{-1}\,;$$

il s'ensuit que l'angle α (figure 6) ne peut être inférieur à $\frac{\pi}{4}$.

Si, donc, deux autres phénomènes (D et E) sont tels que la droite qui les unit fait avec l'axe Ox_A un angle supérieur à $\frac{\pi}{4}$, on pourra toujours construire, par O, une droite parallèle à AB qui serait l'axe des t_F (c'est-à-dire l'axe d'un système en mouvement).

Dans ce système, les deux phénomènes D et E coïncident dans l'espace en un point λ (figure 7).

Si, au contraire, la droite DE fait avec l'axe Ox_A un angle inférieur à $\frac{\pi}{4}$, on peut d'une manière analogue trouver un point μ dans le système d'axes duquel les phénomènes D et E soient simultanés.

On conçoit facilement que, dans ce dernier cas, des systèmes ayant des vitesses inférieures à celle de μ verront les phénomènes D et E se succéder dans un ordre inverse à celui de μ.

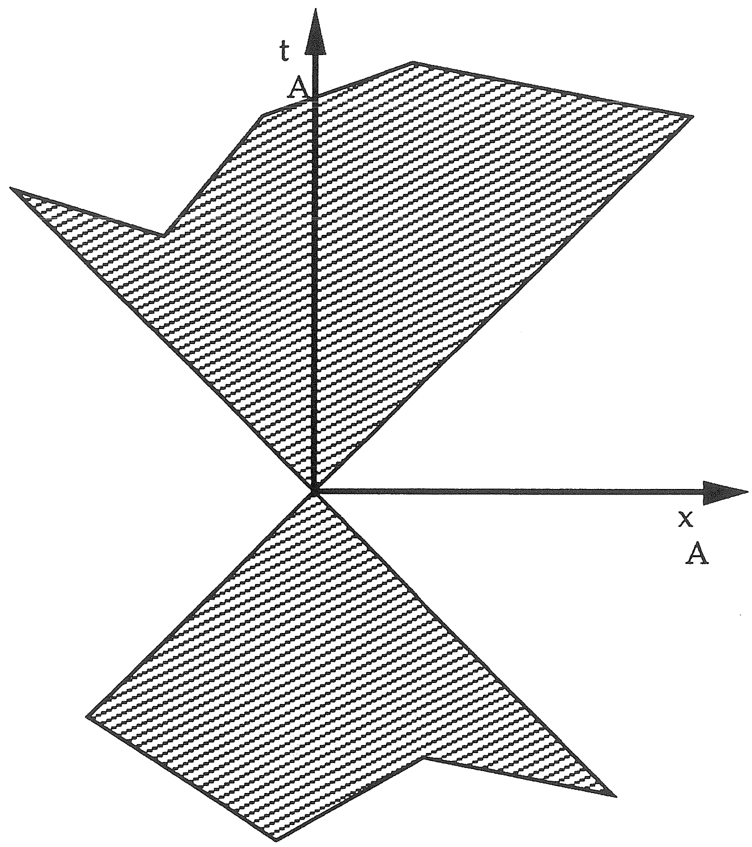


Figure 7.

L'esprit humain aime à distinguer dans les phénomènes des causes et des effets. Cela n'est possible que si, pour tout observateur, un événement est toujours perçu avant l'autre. Or, il y a une région de l'espace-temps dans laquelle la succession des évènements dépend du point de vue de l'observateur. Il est clair que dans cette région, au moins, la notion de causalité ne peut être valable; c'est la partie hachurée de la figure.

Aucun lien de causalité ne peut donc exister entre ces phénomènes puisque le propre d'un tel lien est d'établir un ordre de succession fixe des phénomènes.

Les bissectrices de l'angle xOt partagent donc le plan en deux régions:

i) la région hachurée est celle où les phénomènes sont susceptibles d'avoir avec l'événement O un lien de causalité,

ii) la région non hachurée est celle où les phénomènes sont nécessairement indépendants de O.

L'existence de l'angle LOL' (cône dans le cas des quatre dimensions: x, y, z, t) paraît être imposé à notre esprit dans la mesure où nous acceptons la notion de causalité.

C'est, d'ailleurs, parce que nous avons admis ce principe de causalité que nous avons, plus haut, choisi la vitesse comme une des dimensions de l'espace (x, t, v), cela impliquait, en effet, que la vitesse instantanée (rapport entre deux différentielles) traduit un lien d'ordre entre la position actuelle du mobile et la position suivante.

L'univers que nous avons choisi est limité à une droite (x, x'). Si nous avions voulu traiter de l'espace physique à trois dimensions, nous aurions dû remplacer l'axe x x' par un trièdre Ox, y, z. La figure 4 serait devenue impossible (ou du moins très complexe). Les calculs auraient été aussi élémentaires mais les formules beaucoup plus lourdes. La valeur démonstrative n'aurait pas été plus grande.

Nous aurions pu situer l'un des observateurs dans un espace à trois dimensions, l'autre sur une surface ou un plan. En effet, on sait, depuis Cantor, faire correspondre les points d'un volume avec ceux d'une surface. Le reste de notre démonstration aurait suivi la même démarche (avec des formulations beaucoup plus lourdes). Cela aurait décrit la perspective des peintres qui veulent représenter sur la surface d'un tableau des objets ayant un volume.

Il est clair que l'enchaînement des formules que nous avons vues peut être facilement généralisé afin de permettre de faire une description d'un univers à "n" dimensions destiné à un être habitué à "d" dimensions ($n > d$).

Tous ces développements algébriques un peu fastidieux seraient justifiés si l'on ne savait pas qu'il y a quelque chose qui cloche dans notre démonstration[6]. En effet, Hilbert a délimité de manière certaine, d'une part

---

6 En fait, ma démonstration a tenté de vous convaincre. Cette démonstration a été écrite dans un style qui cherche à imiter celui d'Einstein. On sait combien il s'efforçait de convaincre tous les publics. Pour l'imiter, il ne suffit pas d'employer une écriture algébrique un peu démodée; il faut surtout éviter les raccourcis et les sous-entendus, afin d'être clair et didactique. Mais même si ces qualités peuvent contribuer à influencer le lecteur, il n'est pas certain qu'elles suffisent à établir la vérité. En effet, les démonstrations d'Einstein sont basées sur un langage mathématique du début du XXe siècle. Il ne satisfait pas aux critères modernes de rigueur et de cohérence. Il faudra donc que nous nous posions les questions: "Pourquoi la pensée d'Einstein se présente-t-elle avec une si grande séduction ? Pourquoi a t-elle été si féconde ? Pourquoi arrive-t-elle à des conclusions si surprenantes constamment vérifiées ?". Mais avant de tenter de penser à ces questions, il faut évoquer les évolutions de la pensée mathématique entre l'époque d'Einstein et la nôtre. Pendant qu'Einstein concevait la "Relativité restreinte", David Hilbert proposait un "programme" qui devait, espérait-il, permettre aux mathématiciens de réaliser leur rêve antique[*] d'un discours fondé, cohérent et complet. Cela a marqué le début d'une réflexion qui, en trente ans devait bouleverser les mathématiques et l'épistémologie en projetant sur les notions de "Vérité" et de "Démonstration" des lueurs inquiétantes. Vers 1920, il était déjà établi:

i) qu'il est absurde de vouloir définir les principes de base;

ii) que même quand on a choisi des axiomes qui s'imposent à l'esprit comme des évidences, ils n'offrent aucune garantie de vérité;

iii) que l'enchaînement formel des propositions est plus important que les images que celles-ci pourraient évoquer.

Bref, on constatait que les démonstrations du passé avaient naïvement utilisé des définitions fallacieuses, des postulats défectueux et des règles entachées d'axiomes informulés. Leur pouvoir de conviction était illusoire: la Mathématique classique apparut alors comme une rhétorique conçue pour convaincre un public sophistiqué. Les divers degrés de rigueurs des ouvrages peuvent servir à déceler le stade de raffinement des lecteurs. Pendant ce temps (plus précisément, entre 1905 et 1915), Einstein passait de la Relativité Restreinte à la Relativité Générale. Il a utilisé de nouveaux outils mathématiques, notamment, le calcul tensoriel (conçu vers 1900 par C.G.Ricci et T.Levi-Civita). Mais tout ce qu'il a écrit porte une marque si nette que l'on peut parler d'un "langage einsteinien" où le critère de vérité est l'élégance de la formulation plutôt que la rigueur axiomatique. La beauté est-elle une marque de la Vérité ? Je serais prêt à me laisser convaincre si on m'expliquait le mécanisme de cette "esthétique" et la cause de son succès. On peut constater, dans la période glorieuse de l'histoire de la Physique (de Copernic à Nils Bohr), une croyance permanente à la Vérité des modèles mathématiques. Ce postulat a été souvent exprimé; Galilée écrit: "La nature est un grand livre ouvert devant nos yeux. Mais pour le lire il faut d'abord apprendre les caractères avec lesquels il est écrit: ce sont ceux de la langue mathématique où les mots sont des droites, des cercles et des carrés..." (Je cite de mémoire). C'est une belle métaphore... mais une proposition pour le moins imprécise ! Quand la Physique explore l'immensité de l'univers ou scrute les infimes détails des atomes, elle sort des régions accessibles à l'imagination concrète des hommes: il faut donc pour parler du "spin" de l'électron ou de la "courbure" de l'espace-temps un autre langage que celui de tous les jours. Pourquoi les mathématiques seraient-elles ce langage ? Avant d'oser dire que la Physique se parle en mathématique, il faudrait pouvoir dire de quelle mathématique il s'agit, il faudrait avoir décelé les axiomes, énoncé les régles, et justifié les options faites pour les propositions indécidables que le système comporte inévitablement. Sinon on reconnaît que la Vérité se découvre par d'autres voies que celle de la rigueur: peut-être par ce mystérieux sens esthétique qui guidait Einstein ? Or, le vieux proverbe moldo-valaque: "Il ne faut discuter ni des goûts ni des couleurs" rappelle qu'il peut y avoir beaucoup de critères de Beauté. Y aurait-il autant de critères de Vérité ? Examinons la partie de la Physique qui traite de l'organisation de l'univers: pendant des millénaires les Égyptiens d'Héliopolis ont pu avoir de nombreuses confirmations concrètes de leur croyance que l'univers est géré par trois divinités: Khepri (soleil levant), Rê (soleil de midi) et Atoum (soleil couchant). Quand les observations faites par les hommes ont atteint un certain degré de finesse, cette théorie n'a plus été suffisante; elle a été remplacée par des vues plus proches des nôtres. L'histoire de la Physique décrit une succession de théories correspondant à des ensembles d'observations de plus en plus fines. La question que nous posions peut se formuler ainsi: "À un stade donné des connaissances, aurait-on pu avoir une Physique différente ?" Il suffit d'imaginer que la Nature est si complexe qu'elle peut toujours donner à l'observateur les confirmations qu'il demande. À condition, bien sûr, que la théorie qu'on veut vérifier correspond au stade de finesse de l'observateur. La Nature, bonne fille [**] aurait donc fourni à Einstein des faits qui confirment les théories qu'il avait imaginées pour elle (Relativité et Quanta). Que serait-il arrivé si la Nature avait trouvé parmi les hommes de ce temps quelque théoricien qu'elle eût préféré à Einstein [***] ?

<u>Notules à la note 6</u>:

[*] On sait que Kurt Gödel a mis définitivement fin à ce rêve, en 1930, par son "théorème d'incomplètude" qui démontre que dans tout système formel il y a des propositions "indécidables" (c.à.d. que pour chacune d'elle, on peut développer deux branches, l'une qui accepte la proposition comme "vraie", l'autre qui la considère "fausse"). En d'autres termes, si un système n'est pas contradictoire c'est qu'il n'est pas

la géométrie métrique, d'autre part, la géométrie projective (ou plus précisément: affine). Toutes les limites que l'on a découvertes depuis à l'axiomatique (théorèmes de Gödel, Skolem, Turing, etc.) ne changent rien à cette certitude.

Il faut donc se demander où notre raisonnement a introduit la métrique dans le projectif. Sans prétendre faire une analyse approfondie, il est clair que ce ne peut pas être dans les opérations d'algèbre élémentaire. En formulant les vitesses, nous avons pu implicitement utiliser des axiomes sur le continu... mais cela n'a pas d'incidence sur notre conclusion.

---

complet. Le théorème de Gödel établit, en outre, qu'on ne peut pas démontrer qu'un système donné est non contradictoire. On peut citer d'autres théorèmes (dus à Skolem, Turing, etc.) qui ont dévasté {°} le programme formaliste de Hilbert et du groupe Bourbaki; mais c'est celui de Gödel qui a eu le plus de retentissement à cause de ses conséquences évidentes en épistémologie.

[**] La nature n'a pas été bienveillante à l'égard des contradicteurs d'Einstein: Bouasse, Bergson, etc. Quand le physicien allemand W.Kaufmann a cru trouver expérimentalement que les hypothèses de Lorentz-Einstein étaient fausses, il a réussi à troubler Lorentz, mais Einstein est resté inébranlable: son sens aigu de l'état de la science lui indiquait que Kaufmann était dépassé.

[***] Par cette question volontairement saugrenue, j'ai voulu faire une allusion au doute épistémologique qui frappe les hommes de science. Le titre d'un récent livre de Bernard d'Espagnat en témoigne: "Une incertaine réalité". Cette inquiètude "fin de siècle" que l'on voit aussi chez R. Thom, I. Prigogine, I. Lakatos, O. Costa de Beauregard se trouve déjà chez Wittgenstein. Dans "*La méthode*", E. Morin a tenté de rendre compte de cette perplexité et d'y porter remède. En vérité, il est une chose que l'on sait avec certitude: c'est qu'on ne peut être certain d'aucun savoir.

<u>Notullule à la notule [*] de la note 6.</u>

{°} Je ne voudrais pas qu'on se méprenne: le programme de Bourbaki est dévasté, mais sa pensée n'en est pas diminuée. Au contraire: elle a gagné en grandeur et en poésie. A-t-elle perdu quelque chose ? Certes, elle n'est plus le support absolu de la Vérité ! Mais aucun système n'a pris sa place car il n'y a plus de Vérité absolue. L'incertitude épistémologique contemporaine a posé de nouveaux rapports entre la pensée et la connaissance: c'est ce qu'I. Prigogine a voulu dire en choisissant le titre de son grand ouvrage d'épistémologie: *La nouvelle alliance*. Pour les bourbakistes, les préoccupations d'épistémologie pèchent par présomption. Ils veulent qu'on ait l'humilité de se contenter de chercher à démontrer des théorèmes avec la rigueur dont ils ont défini les règles et dont ils ont montré l'exemple. Qu'importe si ces théorèmes semblent aux philosophes des fariboles sans conséquences: "Laissons-les penser que le théorème des quatre couleurs n'est bon que pour les imprimeurs spécialistes en quadrichromie !" Les bourbakistes trouvent la récompense de leur humilité quand un théorème rigoureux suscite de nouvelles conjectures, recherches et théories. Bref, que la pensée s'enchaîne et continue. C'est là pour J. Dieudonné (éminent bourbakiste), l'*Honneur de l'esprit humain*. Il laisse, avec une dédaigneuse hauteur, les philosophes discourir sur les mathématiques, la logique... et même la métaphysique, car il sait qu'il ne suffit pas d'être prétentieux pour être juste, ni de manquer de raffinement pour être rigoureux.

Le passage litigieux est évidemment celui où nous avons utilisé les formules de changement de coordonnées: nous avons là introduit les notions d'invariance de longueur et d'angles au cours de translations et rotations. Ces invariants caractérisent la géométrie métrique.

Mais de telles écritures sont fréquentes chez Einstein... Faut-il donc admettre que les développements non axiomatisés que l'on rencontre dans la théorie de la Relativité ne sont qu'un ensemble de sophismes ? Quel pacte Einstein a-t-il conclu avec la Nature pour qu'elle ait accepté, depuis 80 ans de confirmer, par des faits, les conclusions de cette étrange rhétorique ?

Ou plutôt, quelle est la caractéristique qui confère à la Relativité sa corrélation avec les Mystères de la Réalité et qui, en outre, lui donne sa vertu heuristique ? Le théorème de Skolem laisse entendre qu'en dehors des systèmes formels (dont l'ensemble est dénombrable), il peut exister d'autre systèmes de pensée valables (ils se compteraient, par exemple, selon la puissance du continu). Le caractère visionnaire et esthétique de la pensée d'Einstein est-il un exemple de ces systèmes merveilleux ?

Les formules qui permettent de passer de la vue perspective d'Albert à celle de Franz, pourraient s'appliquer à deux familles de problèmes que nous allons brièvement rappeler maintenant:

i) Unification des forces: les physiciens distinguent quatre classes de forces selon qu'elles ressortissent à la gravitation, à l'électromagnétisme, aux liaisons internes des atomes (on parle alors "d'interactions fortes") ou aux désintégrations radioactives ("interactions faibles").

Or, la notion de "force" n'est pas claire. Certains physiciens espèrent l'élucider en découvrant une théorie qui révèlerait l'unité de nature des quatre types de force.

Dès les années vingt on a proposé des théories unificatrices pour les forces de gravitation et d'électromagnétisme (théories de Kaluza, Klein, Weyl, ...). Elles étaient basées sur des considérations géométriques: ce sont les théories de "supergravité"; elles ont recours à cinq dimensions. Si l'on veut tenir compte de l'interaction forte et de l'interaction faible, les raisonnements géométriques conduisent à un plus grand nombre de dimensions (probablement onze). D'autre types de raisonnements ont été tentés afin de trouver une théorie d'unification des forces. Quand on cherche à tenir compte du nombre de types de particules élémentaires et de leurs masses, on est conduit à des hypothèses de description de l'univers en un nombre de dimensions plus grand (26 ?).

Ces théories décrivent un univers à "n" dimensions (n = 5 ou 11 ou 26...) à des êtres humains qui ne peuvent pas se faire une image à plus de trois dimensions: il s'agit bien de perspectives !

ii) Analyse des données: dans les techniques de l'action, il est fréquent d'avoir à prendre des décisions selon plusieurs critères dans des situations qui dépendent d'un grand nombre de facteurs. Les critères et les facteurs se combinent de manière que le nombre des variantes dépassent les bornes de la patience de l'homme d'action. L'analyse des données se propose d'éclairer ce genre de problèmes grâce à des méthodes de statistiques (c'est-à-dire de calcul de probabilités).

Quand un type de conjoncture dépend de "n" facteurs et qu'on dispose d'un grand nombre de cas semblables, on peut représenter chaque cas par un point dans un espace à "n" dimensions. Le "nuage" de ces points offre à l'homme d'action une assez bonne image statistique du phénomène sur lequel il veut agir... mais l'homme ne sait pas le déchiffrer car son imagination se limite à trois dimensions ! On va donc projeter ce "nuage" sur des plans spécialement choisis pour offrir à l'homme les images à deux dimensions les plus parlantes et les moins infidèles.

C'est encore une affaire de perspective.

Toutes ces "perspectives" décrivent à des êtres des dimensions d'espaces auxquelles ils n'ont pas accès. Elles enfreignent donc ce que Leibniz appelle le "Principe d'observabilité": décrire une face de l'univers qui serait à jamais soustrait à nos mesures, c'est, pour Leibniz, parler de purs fantômes.

Cette objection ne peut pas être écartée avec désinvolture. Même si on établit des systèmes formels qui acceptent la perspective comme moyen de connaissance, nous savons qu'il peut se glisser dans les images des illusions de perspectives qui seraient les anamorphoses du système.

Il serait facile (quoiqu'un peu fastidieux) de trouver des exemples de telles anamorphoses dans des cas d'analyse des données: rappelons simplement qu'il suffit que des points-événements soient situés sur une droite perpendiculaire à un plan de référence pour que, dans ce plan, tous ces événements se confondent.

Dans le cas des "théories unifiées", on notera que bien qu'elles constituent depuis des années un des problèmes essentiels de la physique, les spécialistes continuent à chercher de nouvelles manières de traiter de nouvelles dimensions cachées de l'univers: selon un des points de vue, il y en aurait vingt-six alors que, selon un autre point de vue, on aurait démontré que le maximum serait de onze. Je me contenterai de demander aux spécialistes: "Ne s'agirait-il pas d'illusions de perspectives ?"

De même Albert, l'intelligent observateur immobile, peut énoncer que l'ensemble des cônes (que le principe de causalité attache à chaque point-événement) constitue une description complète de la réalité.

Toute perspective qui respecte ce principe est légitime.

Or - et ceci est un point essentiel ! - toutes les perspectives légitimes se valent car chacune épuise la réalité accessible.

* * * * *

Ah ! que la vie est simple pour ceux qui se contentent d'agir !

Si le champ de leurs occupations est semé d'obstacles, ils savent d'instinct comment les surmonter ou les contourner. Pour eux, les êtres et les choses se meuvent selon des lois familières, pendant le cours d'un temps silencieux, régulier et fidèle, dans un espace ordonné, placide et lumineux. Mais il suffit parfois d'un éclair noir pour que, derrière cette apparence, on aperçoive des mécanismes inquiétants et que l'on devine que la Réalité est concentrée, inhumaine et mystérieuse.

Les idées qui naissent dans cette lumière étrange sont marquées d'un signe. Elles pourraient bien être issues d'une même pensée qui chemine à travers les siècles et vient parfois s'incorporer dans Einstein, dans Mantegna... dans bien d'autres aussi (mais moins nombreux qu'on ne le croit souvent). On reconnaît cet esprit à sa manière élégante et rapide de dépouiller la Nature du maquillage que les savants et autres artistes ordinaires lui avaient appliqué afin de la rendre visible à leurs pauvres yeux.

C'est ainsi qu'Einstein a hardiment bousculé les laborieuses théories imaginées pour apprivoiser les résultats de Michelson.

Mantegna, lui, a exposé les paradoxes de la perspective projective: ceux que les recettes d'atelier s'efforçaient de dissimuler.

L'esprit s'est concentré sur les éléments de base (chez Einstein: le temps, l'espace, l'événement; chez Mantegna: les perceptions de l'œil et leur identification). Einstein et Mantegna ont utilisé le même procédé didactique: ils ont imaginé un phénomène décrit par deux observateurs et ont montré comment on pouvait harmoniser les différences de leurs témoignages.

Pour Mantegna, nous savons qu'un des observateurs (appelons-le "Arpenteur") peut se déplacer sur la scène afin de mesurer, sur le vif, les dimensions des éléments du "sujet" grâce à un mètre (assujetti à une condition: rester horizontal).

Appelons l'autre observateur "Camera" car il fournit une image projective. Si Camera appliquait les règles d'Alberti, il ne pourrait pas bouger et l'axe de son regard serait horizontal. Si on connaît les dimensions des éléments du sujet (notamment, celles du corps du modèle), on peut calculer les positions relatives du modèle, du peintre (ou de Camera) et de la toile (Figure 4).

Eh bien, quand on fait ces calculs en partant du tableau le **Christ mort**, on trouve des résultats paradoxaux: selon les parties du corps que l'on choisit de comparer, on trouve, pour la distance du peintre à la tête du modèle, des valeurs entre 1,50 et 4,50 mètres.

Les propositions du tableau deviennent plus cohérentes si on suppose que l'axe du regard de Camera change et peut se porter soit sur la tête, soit sur les pieds du modèle. Pour faire cette hypothèse, il suffisait à Mantegna de prendre conscience de sa propre manière de voir. En effet, un peintre porte successivement son regard sur chaque détail du modèle, afin que l'image de ce détail se fasse sur la *fovea*. Selon cette hypothèse, on trouve, pour V_d des valeurs situées autour de 50 cm. Nous avions déjà rencontré cette grandeur lors de nos considérations sur la largeur des pieds; cette rencontre prise comme une confirmation est satisfaisante pour l'esprit.

En revanche, l'esprit est moins satisfait de constater que les lignes droites de l'image des bords de la dalle mortuaire convergent. Or il est clair que, pour Mategna, cette dalle est rectangulaire. Nous devons donc constater que la largeur de la dalle subit une réduction par perspective projective, alors que le corps qui repose dessus n'en subit pas. Selon les règles d'Alberti, si la dalle est horizontale, les bords doivent converger au point de fuite situé sur la ligne d'horizon, à la hauteur des yeux du peintre (et du spectateur). Dans le **Christ mort**, les bords de la dalle convergent en un point situé à 30 cm au-dessus du bord supérieur du tableau. C'est aussi sur la ligne d'horizon que devraient converger toutes les lignes horizontales parallèles entre elles. Notamment, celles qui relient, d'une part, les bas, d'autre part, les sommets des visages des deux Saintes Femmes. Or ces lignes-là convergent vers le centre du visage du christ.

Cela est conforme aux règles classiques de composition des tableaux: les lignes de fuite guident le regard vers le point du tableau qui constitue le centre d'intérêt.

Nous nous trouvons donc devant deux points de fuite[7]: celui des bords de la dalle qui ne s'explique que si on regarde la scène d'une vue plongeante, et les visages des Saintes Femmes qui suppose un axe de vue

---

7 Les perspectivistes ont souvent utilisé plusieurs points de fuite dans la construction de la composition de leurs tableaux:

i) soit, (comme Mantegna pour le **Christ mort**) quand les règles de la perspective entraînaient des résultats choquants;

ii) soit par la suite d'une recherche artistique (on dit souvent: "plastique") qui s'impose plus fort que la règle, la convention ou l'anecdote;

iii) soit pour donner à voir plusieurs images différentes selon des points de vue plus ou moins dissimulés.

Ce sont des "anamorphoses". La technique de ces images secrètes n'est, depuis longtemps, plus un secret pour personne. Elles ont servi à des messages de sagesse (un peu banale: "Derrière les fastes de la vie, se cache la Mort"...), de politique ("Malgré les temps, je reste fidèle à mon roi"), ou de sexualité ("Qu'est-ce que je cache sous ma jupe ?"). Parfois l'image secrète doit se lire grâce à un miroir cylindrique. On connaît les anamorphoses chinoises ou hindoues datant du XVIème siècle de notre calendrier. Pour moi, les plus mystérieuses et les plus belles anamorphoses sont celles qui n'ont pas de message, celle qui n'ont qu'un but "plastique" dans les "Noces de Cana" de Véronèse, on a, entre les quatre points de fuite, un espace pictural où le regard, libéré des lourdeurs vulgaires, circule avec une inquiétante étrangeté.

horizontal. Les deux points de vue sont inconciliables dans la théorie albertienne, sauf si on admet que l'abaissement du point de fuite est dû à ce que la Femme la plus proche est plus grande que l'autre et qu'elle a un visage moins long. Sur le tableau, l'image de sa tête est la plus longue mais rien ne nous permet de deviner si cela est dû aux variations naturelles entre les êtres ou à une fuite de perspective. Car Mantegna nous a ôté tout repère permettant d'estimer les positions des Saintes Femmes. Oui, Mantegna est embarrassé: pour le christ, il avait conservé les dimensions métriques en largeur et avait appliqué une projection pour la longueur: cela ne choquait pas le regard car le christ est vu en raccourci. S'il avait utilisé les mêmes conventions pour les visages des Femmes (vus de profil), il aurait obtenu des faces d'autant plus écrasées que le modèle est situé plus loin du "point de vue". Or cela aurait été très choquant pour l'œil. Mantegna a dissimulé ces paradoxes de deux manières, d'une part, en ne dotant les images des Femmes d'aucun repère de dimension. D'autre part, en coupant l'un des visages par le bord du tableau de manière à ce qu'il n'apparaisse que sur 3 cm !

Tentons maintenant d'imaginer l'impression que donnerait le **Christ mort** si le bas du corps n'était pas couvert d'un suaire.

Pour examiner le tableau, chaque regardeur utilise plusieurs méthodes de vision, selon une combinaison qui constitue la personnalité de son regard. Ces méthodes de vision peuvent se classer en trois familles:

1) À 2,50 m de distance du tableau de Mantegna, le regardeur scrute les zones qui apparaissent dans sa *fovea*. Nous avons vu qu'il devra arrêter l'axe de son regard sur une trentaine de points s'il veut avoir observé tout le tableau. La vision d'ensemble se reconstitue dans son cerveau à partir d'éléments dont il aura constaté la vraisemblance métrique. Le **Christ mort** lui semblera un tableau cohérent.

2) Le visiteur pressé se place à une distance suffisante pour que la tête et les pieds du Christ soient vus par la *fovea*: 0,62 / tg 4° = 8,86 m. Il devrait arrêter quatre fois l'axe de son regard pour avoir couvert tout le tableau... mais il est peu probable qu'un visiteur assez frivole pour se placer si loin fasse un tel effort !

3) En utilisant la zone qui entoure la *fovea*, le regardeur peut avoir une vision plus globale. Par exemple, à 2,50 m, six points d'arrêt suffisent au regard pour couvrir tout le **Christ mort** grâce à la *macula*. On peut d'ailleurs, élargir encore la zone sur laquelle se fixe l'attention, mais alors, la rétine captera mal les couleurs des points périphériques.

S'il utilisait les méthodes 2) et 3), le regardeur aurait, devant le christ déshabillé, une impression désagréable parce que son instinct de la perspective lui inspire l'intuition que les parties "éloignées" devraient être de dimensions réduites. C'est pourquoi, sur le tableau de Mantegna, il verrait, sous une tête puissante et un torse assez athlétique, des cuisses fluettes et des mollets chétifs. C'est pour éviter cette sensation que

Mantegna a posé le drap entre le point où l'affaiblissement commence et celui où il finit. On n'est pas tenté de donner une interprétation perspective à la vision des plis du drapé, car ils n'ont pas de référence dimensionnelle: le hasard a pu former des plis plus ou moins serrés autour des chevilles et plus ou moins amples autour de la taille.

Il est clair que le suaire n'a pas été placé uniquement pour cacher les parties secrètes du corps du christ: le petit pagne du **Christ mort** de Philippe de Champaigne y aurait suffit !

Il y a dans le tableau de Mantegna d'autres motifs de perplexité: je me limiterai à celui qui intéresse le conservateur de la Brera: "À quelle hauteur faut-il accrocher le tableau ?"

Selon les règles d'Alberti, la ligne d'horizon doit se trouver à la hauteur des yeux du public. Or nous avons trouvé deux lignes d'horizon:

- l'une, située à 30 cm au-dessus du tableau: si l'on se base sur elle le tableau serait accroché trés bas (la partie inférieure, à environ 50 cm du sol);
- l'autre située sur le visage du christ. La partie supérieure du tableau serait accrochée à environ 1,65 m du sol (pour le public contemporain dont la taille moyenne est de l'ordre de 1,75 m).

Je crois que c'est le type d'accrochage que Mantegna avait voulu (mais, sans doute, de quelques centimètres au-dessous, car, de son temps, la taille moyenne du public était inférieure à ce qu'elle est aujourd'hui).

On sait combien Mantegna dans le reste de son œuvre a appliqué avec rigueur les règles d'Alberti. On peut donc se demander quel a pu être son propos, quand, regroupant ici plusieurs "problèmes", il leur apporte des solutions équivoques. Nous avons vu que la réflexion d'Alberti (et *alia*) avait une prétention scientifique: il suffit donc d'y déceler une seule contradiction pour que tout le système s'effondre. Je ne crois pas que Mantegna ait été aussi radical; néanmoins, en proposant des solutions qui "satisfont l'œil", il a fait un travail d'analyse des mécanismes de la vision.

Il l'a fait à la manière d'un peintre: en se concentrant sur ses propres perceptions.

Mantegna propose donc une nouvelle théorie scientifique dont les idées maîtresses sont:

1) Les images ne se forment pas dans l'œil, mais dans le cerveau. Elles résultent de combinaisons entre les perceptions visuelles, les connaissances antérieures (Figure 9) et les lois de fonctionnement du système nerveux.

Les géométries (métriques, projectives, etc.) prennent part à la construction des images parce qu'elles sont des fruits normaux de la pensée (c'est-à-dire: du cerveau en action).

2) Certaines parties de la perspective projective font partie des intuitions humaines immédiates. C'est le cas des raccourcis (on en trouve sur des vases grecs du VIème siècle av. J.-C.), ou de l'inclinaison des lignes horizontales vers une "fuite". C'est la systématisation de ces notions de perspective qui peut conduire à des paradoxes (Figure 12).

3) L'esprit humain ne supporte pas les perceptions lacunaires: devant des images incomplètes, le cerveau apporte inconsciemment une interprétation et fournit les éléments manquants qui l'étayent.

4) Le champ de la vision n'est pas uniforme. Mantegna a senti avec une conscience étonnante le topographie de la rétine. Vu à une distance de 2,50 m, le tableau le **Christ mort** s'inscrit dans un cône de 20° dont le sommet est le centre optique de l'œil. Or, du côté de la rétine, ce cône définit, autour de la *fovea*, un cercle de relativement bonne vision. C'est-à-dire, une zone où il y a une assez grande densité de cellules visuelles, avec une proportion suffisante de cône (cellules sensibles à la couleur). En fait, la plus grande partie de cette zone (notamment, sa périphérie) ne donne pas une définition assez fine pour satisfaire le regard du peintre. C'est dans la *fovea* qu'il place la partie du modèle sur laquelle il travaille. Or, vu à 2,50m de distance, c'est sur la *fovea* que s'inscrivent séparément les éléments dramatiques du tableau de Mantegna (les visages, les mains et les pieds).

5) L'image d'une ligne droite est une ligne droite. Nous avons déjà vu qu'il y avait des raisons pour qu'il n'en soit pas ainsi: quand l'œil balaye une scène dont il prend connaissance, il promène le point de fuite vers chaque arrêt du regard: pour suivre ce parcours, les lignes droites devraient se tortiller en nombreuses courbures[8]. Or, ce n'est évidemment pas ainsi que le cerveau construit l'image mentale: il marque une telle prédilection pour la ligne droite que, dès lors qu'il en a identifié une, il l'impose dans

---

8 Déjà, Jean Fouquet avait remarqué que si l'on est au bord d'une route droite et que l'on regarde vers la gauche, on voit les lignes qui limitent la route converger vers la gauche. Mais quand on regarde vers la droite, c'est dans cette direction qu'elles convergent. Selon le modèle euclidien, cette double convergence est impossible avec des lignes droites. Jean Fouquet a donc tenté d'inventer une perspective curviligne. Erwin Panofsky, Guido Hauck ont tenté de donner à cette idée des bases théoriques. André Barre et Albert Flocon y sont arrivés. Les images que l'on obtient ainsi évitent certains paradoxes des perspectives habituelles... Mais le gros bon sens ne se laisse pas convaincre: là où, dans le paysage, il avait discerné une droite, l'image lui montre une courbe ! Or il tient à sa droite comme il tient à ses notions métriques. Les démonstrations mathématiques d'Albert Flocon ne peuvent rien devant cette obstination (ni devant l'écœurement de beaucoup d'artistes pour un système théorique abstrait). En vérité, puisqu'il y a une différence fondamentale entre un espace et une surface, il faut bien qu'il y ait des défauts dans tout système de représentation de l'un sur l'autre. Il en va de même en cartographie: les cartes "Mercator" permettent de tracer le plus court chemin avec une règle, mais si on désire conserver les équivalences des surfaces, il faut utiliser les cartes "Sanson"... où le plus court chemin n'est pas facile à établir.

Figure 8.
Dessin de Mantegna:
étude perspective pour le CHRIST MORT ?
British Museum, Londres.

Ce croquis de Mantegna représente, évidemment, le jeune homme qui a posé pour le **Christ Mort**. Dans ce dessin, moins élaboré que le tableau, on peut voir que Mantegna était troublé par la perspective projective. C'était, à l'époque, une découverte récente: elle donnait à voir des images nouvelles. Les hommes s'y sont vite habitués. Mais on voit, encore au XIXème siècle, des peintres que ces images gênent (voyez, par exemple, Ingres: les mains du portrait de Madame de Senonnes, au Musée de Nantes). Les déformations dues à la projection ne nous gênent plus: nos cerveaux disposent d'un stock énorme de telles images fournies par la photo, la T. V., le cinéma, etc.

toute la suite des images. Cette étrange exigence ne s'harmonise pas bien avec d'autres lois de construction des images. Dans le **Christ mort**, Mantegna a tenté de trouver des compromis acceptables pour l'œil. Son œil n'a probablement pas été entièrement satisfait par la convergence des images des bords de la dalle mortuaire. En effet, il a partiellement masqué l'une d'elles par un bras du modèle et par les plis du suaire. Il a aussi détourné l'attention en créant dans le voisinage, un nouveau centre d'intérêt: les visages des Saintes Femmes.

Il est probable que Mantegna a conçu son tableau pour un regardeur debout. On peut donc adopter la disposition de la figure 4 avec: $V_d = 50$ cm.

Le dessin de la figure 8 représente évidemment le modèle, entre deux séances de travail pour le **Christ mort**. Or, ce dessin est une vue plongeante. On peut penser que le peintre, debout, a dessiné le modèle qui était sur un plan de repos situé à environ 60 cm du sol. Cette remarque conduit à penser que le peintre et les modèles ont pu être placés comme sur la figure 5 (avec une distance $V_d = 50$ cm). Mantegna a pu penser que la différence entre les deux situations (figure 4 et figure 5) n'avait pas d'importance pour le tableau puisque l'on passe d'un faisceau visuel à l'autre par une translation de 50 cm en hauteur. En réalité, le fait que Mantegna a dessiné (c'est-à-dire: fixé avec le regard du peintre) son modèle en "vue plongeante" a imprimé dans ses circuits cérébraux des traces que l'on peut déchiffrer dans le tableau.

Le **Christ mort** montre aussi que Mantegna a découvert la valeur rhétorique des perspectives théâtrales. Il a voulu susciter la surprise et l'effroi: on entre dans un local (oratoire, cellule, chambre...) et on aperçoit, horreur !: un mort... et (Seigneur Dieu !) c'est le christ lui même !!!

Pour obtenir cette terrifiante surprise, le tableau devait être un trompe-l'œil[9]. Or on ne peut pas tromper l'œil car jamais une image plane

---

9 Le temps qui sépare l'ancien Pline de l'archaïque Lévi-Strauss ne marque pas les bornes de l'interprétation naturaliste de la peinture. Les littérateurs qui ne voient que l'anecdote ne manquent pas avant et après: Homère vante le réalisme du visage de la Méduse qui orne le bouclier d'Agamemnon (Chant XI de l'*Illiade*); Michel Serres, dans *Esthétiques sur Carpaccio* décrit les images (notamment: le **Christ mort**)... il est vrai qu'il fait aussi des jongleries verbales: *"le signe de la mort"* balance *"la mort du signe"*... enfin, ne boudons pas notre amusement ! J'aurais pu commencer par Platon, car il est le premier dont on connaisse le jugement sur la Peinture: art de mensonge qui cherche à faire prendre des apparences pour des réalités (Cf: *La République*). J'ai choisi Lévi-Strauss car un de ses récents jugements sur la Peinture a été publié dans des circonstances curieuses. Le *Centre Georges-Pompidou* a exposé en 1981 des œuvres figuratives produites entre 1919 et 1939. Pour l'Allemagne et l'Italie, cette période comprend les persécutions contre les peintres "dégénérés", qui s'écartaient du réalisme et du métier académique. L'exposition a donc donné une large place aux artistes nazis et fascistes. L'organisateur de cette opération ambiguë (c'est le talentueux Jean Clair) a sans doute jugé habile d'obtenir la caution d'un juif. C'est Claude Lévi-Strauss qui a accepté

ne pourra être prise pour un objet (à trois dimensions). Si vous n'en êtes pas convaincu, regardez donc, à bout de bras, les doigts de votre main:

i) Si vous regardez votre pouce, les autres doigts vous sembleront flous. C'est qu'à 50 cm de distance la profondeur de votre champ visuel est de 1 ou 2 cm: si vous fixez le pouce, les autres doigts sortent de ce champ.

Sur une image plane, tous les doigts apparaissent nets, dès lors que l'œil s'est réglé sur la distance du plan.

---

de la lui donner sous la forme d'une interview à Jean-Marie Benoist, dans le *Magazine du Centre Georges-Pompidou*. Il y répète des opinions qu'il avait souvent exprimées depuis la *Pensée magique* jusqu'à sa préface pour le catalogue de l'exposition d'Anita Albus. Pour lui, *"la nature fait mieux que nous n'y parviendrons jamais"*, il est donc *"absurde et déraisonnable de ne pas demander à cette nature* [...] *toutes les leçons..."*, *"le summum de l'art du peintre, c'est d'arriver à faire sur le papier et sur la toile, une rose qui a toutes les infinies subtilités et la perfection de l'objet naturel lui-même"* [*] (Nous verrons dans la suite de notre texte ce qu'il faut penser du "trompe-l'œil"). Mais rappelons que les roses que nous admirons aujourd'hui ne sont pas très naturelles: elles ont presque toutes été créées par les artifices de rosiéristes au cours des cinquante dernières années. Les roses anciennes qu'on voit sur les tableaux n'étaient pas plus naturelles: l'art des jardiniers n'est pas nouveau. Quand J.-M. Benoist l'interroge au sujet du *Bello mestiere*, C. Lévi-Strauss répond: *"C'est un aspect auquel un ethnologue qui s'intéresse au premier chef aux techniques comme partie essentielle de la culture ne peut que prêter beaucoup d'attention. La peinture* [...] *a représenté un savoir-faire absolument extraordinaire* [...] *Voir tout cela disparaître m'affecte* [...] *Il y a là des choses* [...] *que nous n'avons pas le droit de laisser périr."* C. Lévi-Strauss répète ici ce qu'il a dit et écrit plusieurs fois, notamment dans l'article *"Le Métier perdu"* publié dans le n°10 de *Débats*. Pour lui, le métier a atteint son apogée avec la peinture flamande du XVème siècle. Il aurait amorcé son déclin avec les Italiens du XVIème siècle, mais, c'est avec l'impressionnisme que la perte du Métier est devenue si désastreuse qu'une tentative de sauver les restes devient aussi urgente et désespérée que de tenter de préserver le loup de Tasmanie, ce marsupial carnivore qui répond (mal) au nom de "thylacine". Les spécialistes discutent pour savoir s'il en reste. Il est vrai que des choses disparaissent: l'écoulement du temps est irréversible. Ronsard dans des sonnets, Boltzmann avec l'entropie, le disent chacun à sa manière. Des métiers disparaissent eux aussi. C. Lévi-Strauss a donc beaucoup de motifs de déploration. C'est la peinture qui lui en donne le moins car c'est une des rares activités de l'homme qui ait subsisté depuis l'aurore de l'humanité. Il y a évidemment quelques changements: on ne peint plus souvent sur les parois des cavernes, etc. Mais le peintre moderne utilise encore certains pigments paléolithiques: oxydes métalliques, charbon, etc.

Notule à la note 9:

[*] Parce qu'il aime les roses C.Lévi-Strauss voudrait que les peintres sachent les contrefaire dans des tableaux. En outre, il proclame qu'il aime certaines peintures (celles de Van der Weyden...). Il me semble qu'il devrait modérer son admiration pour les roses tant qu'elles n'auront pas réussi une bonne reproduction des tableaux qu'il aime {°}.

Notullule à la notule de la note 9.

{°} Van der Weyden a-t-il bien peint des roses ?

ii) Quand vous fermez l'œil gauche, vous obtenez, pour l'œil droit, une certaine disposition relative des doigts de la main. Si, ensuite, vous fermez l'œil droit, vous constatez que la disposition relative des différents doigts a changé. Le cerveau construit une image du volume de la main à partir de ces deux perceptions différentes dus à la vision binoculaire. Sur une image plane, les deux yeux voient la même chose.

En vérité, la vision, fonction riche et complexe, demande un travail nerveux, mental et psychologique énorme. Ce travail se fait en permanence, vite et sans fatigue. L'homme n'en est pas conscient. Si les rouages du cerveau faisaient le moindre grincement à chaque opération nous vivrions dans un vacarme intérieur incessant. Cela serait désagréable mais, du moins, nous saurions qu'il se passe quelque chose ! Nous saurions mieux distinguer nos manières de voir:

i) celle, utilitaire, de l'homme d'action. Il cherche où il a garé sa voiture rouge: dès que son œil trouve le rouge voulu il est satisfait;

ii) la vision du peintre: cette voiture est un assemblage de couleur, car elle reflète ici le ciel, là une devanture de boutique. Il n'y a qu'une petite partie de sa surface qui laisse voir la couleur "locale" (le rouge)... et cela ne se fait pas de manière fidèle: la nuance du rouge change avec la qualité de la lumière ambiante;

iii) la réaction du carrossier: cette voiture a été mal peinte ! Elle fait "la peau d'orange" (ce sont des irrégularités d'épaisseur de l'ordre du centième de mm);

iv) je pourrais allonger la liste. Je me contenterai d'inviter le lecteur à méditer sur la différence de ces visions. Il pourra chercher d'autre visions spécialisées (le gemmologue, l'œnologue, le polisseur, le médecin...) dont la juxtaposition illustre la subtilité des perceptions visuelles et la variété d'information que l'on peut en tirer quand l'éducation a inscrit dans le cerveau des images mentales[10].

---

10 Le fonctionnement de la vision est admirable, certes, mais on peut aussi s'étonner de constater combien il diffère selon les individus. Ou peut-être faut il s'étonner de la force de l'instinct de vie sociale qui pousse chaque homme à croire que les autres voient les choses comme lui. Quand on perçoit une différence, on est toujours surpris (presque scandalisé). C'est, par exemple, un peintre qui constate que l'amateur, qui vient de prouver son admiration en achetant un tableau, dit soudain une phrase où il montre qu'il n'avait pas su voir l'œuvre qu'il avait acquise. Le peintre prend alors la mesure de sa solitude et de la singularité essentielle de chaque regard. On peut aussi être étonné qu'il suffit de voir très peu de chose pour accomplir correctement les gestes de la vie: j'ai un ami qui ne connaît pas la couleur des yeux [*] de sa femme... et pourtant, il ne la confond presque jamais avec une autre.

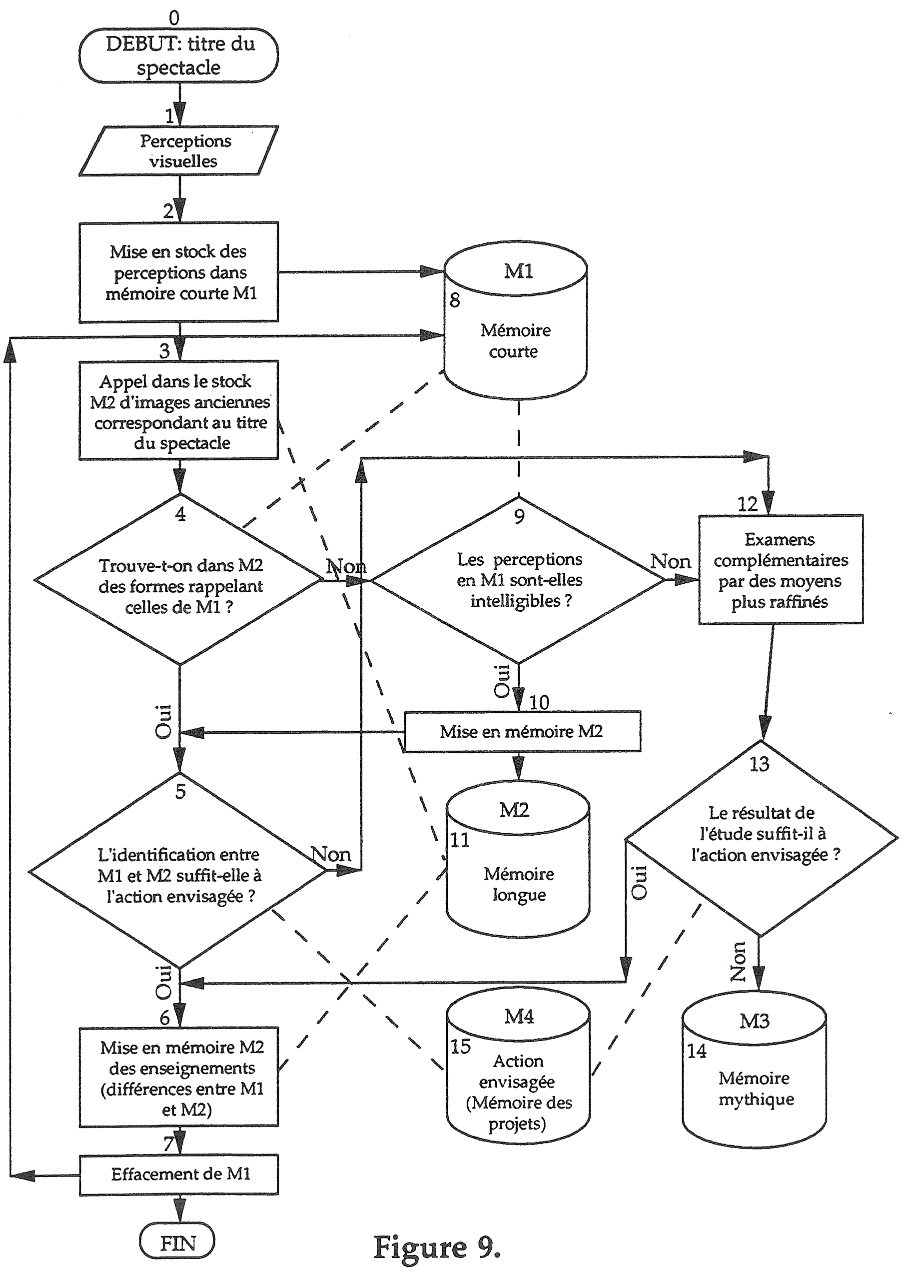


Figure 9.

Cet ordinogramme est, évidemment, trop simpliste pour représenter les véritables opérations mentales qui servent à reconnaître les objets perçus par la vue. Nous avons, entre autres lacunes, omis de représenter des liaisons avec les fonctions du langage. Or il est clair que, chez l'homme, elles sont essentielles... et pas seulement pour nommer ce qu'on a reconnu !

Tous les automaticiens savent que, pour qu'un mécanisme soit sûr, il faut le doter de redondances: il y en a certainement dans le cerveau. On en constate les effets quand, après un accident qui a détruit du tissu cérébral, un malade arrive à se réadapter. On ne connaît pas ces circuits complexes, mais on peut en soupçonner la finesse et en admirer l'efficacité.

Voici, en action, les images mentales d'un vieux marin qui parle: "Voyez, donc ! là-bas ! C'est une baleine bleue ! Ah !... ce sont les plus gracieuses !... je le sais bien: j'en ai déjà vue une... en 1939. Mais, regardez donc: la voici qui ouvre la bouche..." s'adressant à un passager qui a beau écarquiller les yeux: il ne voit rien, rien !

C'est qu'il n'a pas fallu grand'chose pour déclenche chez le marin l'exhumation d'une image mentale qui, malgré le temps passé, était restée très nette dans un coin de son cerveau. Si parmi les perceptions que lui a fournies la mer il y en avait eu une autre, assez semblable pour permettre un doute, le marin aurait dit: "Je vois quelque chose à l'horizon. Je vais prendre mes jumelles pour vérifier si ce n'est pas un effet de lumière sur une vague de sargasse... avec un peu de chance: ce serait une baleine bleue au repos..."

Si le marin n'arrive pas à identifier ce qu'il voit, il peut examiner la chose de plus près, utiliser des instruments variés, consulter des spécialistes ou des banques de données. Selon le résultat de cette étude, il aura accru son expérience: "Le 23 juillet 1982, par 62°12' de longitude et 18°7' de latitude nord, j'ai eu la chance de voir surgir, pendant une éruption volcanique sous-marine, l'îlot auquel on a donné mon nom". Si son enquête n'avait donné aucun résultat, il aurait pu dire: "J'ai vu le monstre comme je vous vois: il surgissait des flots, dévorant des pucelles, et hurlant: je suis un échappé du Loch !".

Ce processus de reconnaissance par la vision est schématisé sur la figure 9.

Notule à la note 10:

[*] Flaubert connaissait-il la couleur des yeux d'Emma Bovary {°} ?. Il les décrit tantôt bruns, tantôt noirs; mais Charles Bovary les trouvait noirs à l'ombre et bleu foncé au grand jour. Il avait probablement raison: à l'ombre, les pupilles dilatées accentuent la noirceur des yeux. Il semble que, plus que mon ami, Bovary mettait de l'attention à regarder sa femme. La véritable question n'est pas de savoir quel type d'amour tel ou tel mari a pu avoir pour sa femme: c'est de savoir si on peut comparer un mari de roman (regardant les yeux de sa femme par ceux de l'auteur) avec un mari réel. Eh bien, je crois que dans les deux cas, les images mentales sont de même nature. C'est l'ajustement de l'image qui n'a pas lieu chez l'auteur alors qu'il est possible chez le mari vivant. Au fait, ai-je prétendu que mon ami était réel ?

Notullule à la notule de la note 10:

{°} Dans le *Perroquet de Flaubert,* Julian Barnes consacre un des plus ravissants chapitres aux yeux d'Emma et aux critiques littéraires. Aragon, lui, ne se hasarde qu'une fois sur la couleur (lavande) des yeux d'Elsa.

En vérité, on ne sait pas où et comment les images mentales sont stockées. On sait, en revanche, que l'on ne peut pas reconnaître une chose que l'on n'avait jamais vue. Alors, comment fait-on pour structurer une première impression ? Probablement à partir d'éléments déjà vus. (Donc: d'un ensemble existant. Mais, peut-on faire du neuf avec du vieux[11] ? Et comment l'enfant a t-il commencé à réunir ses premiers éléments ?). Ces images mentales se forment très vite, à partir de peu d'information: elles restent longtemps dans la mémoire et viennent à l'esprit au moindre appel. Les appels sont provoqués par la perception de spectacles.

Un spectacle actionne d'abord les cellules des rétines des yeux où l'information subit un premier traitement. Les résultats sont transmis à plusieurs zones du cerveau par les nerfs optiques.

Afin d'explorer le travail des parties du système, les physiologistes ont construit une micro-sonde qui, introduite dans un neurone, permet d'enregistrer son état d'excitation devant des spectacles divers: lignes plus ou moins inclinées, bords, fentes, etc.

i) Ces recherches rejoignent celles des mathématiciens travaillant sur la typologie et la reconnaissance des formes;

ii) Elles expliquent beaucoup des illusions d'optique sur lesquelles les gestalistes avaient travaillé afin de comprendre les mécanismes de la vision;

iii) Elles confirment les observations sur les aberrations de la vision des victimes de mutilations nerveuses;

iv) Elles correspondent aux recherches des informaticiens qui construisent des machines-qui-voient.

Il est rare de rencontrer une telle convergence entre des disciplines aussi différentes[12].

Ces découvertes apportent aux recherches sur la perspective un trésor de données. Elles suscitent une première remarque: nous devons nous méfier de nos perceptions visuelles. Elles ont été faussées ! En effet, des associations de neurones agissent afin de renforcer certains caractères du spectacle. Par exemple, dans la rétine, les cellules "horizontales", "bipolaires", "amacrines" et "ganglionnaires" se partagent des fonctions d'excitation et d'inhibition qui sélectionnent et renforcent les perceptions de "bords" des objets. Dans le cortex strié, le traitement de la perception des lignes (et des bords) se fait dans des neurones spécialisés selon l'inclination

---

11 Nous n'avons aucune idée du spectacle naïf que l'univers donne à un regard objectif: il est probable que c'est un chaos de signaux lumineux. On peut se demander comment le premier regardeur, dans un premier regard, a su fixer des contours au premier objet. Cette question nous ramène probablement à la veille *"Dispute des Universaux"*.

12 À propos des théories des savants de la Renaissance j'ai dit, au début de ce texte, qu'à défaut d'être vraies, elles ont le mérite d'avoir fécondé de nombreux domaines de la pensée. Il semble que les nouvelles théories sur la physiologie de la vision aient une fécondité encore plus grande.

de la ligne[13].

En renforçant les perceptions de "bords" et en relativisant, sur les surfaces, les effets des ombres, le système visuel impose les notions de "CONTOURS", de "LIGNE"[14] et d'"OBJET".

Pour reconnaître un objet, le regardeur compare le spectacle à une image mentale stockée dans sa mémoire: à cette image-type on peut associer un mot. Cela constitue une première parenté entre la vision et le discours. Il y en a d'autres.

Les délimitations des objets étant perçues comme des lignes: on peut naturellement penser à les représenter par le simple tracé des contours. Cela se traduit par des dessins schématiques (comme les images de Tintin). Dans ce type de dessin, chaque trait a un nom: le nez de Tintin, le bouchon du radiateur de l'auto, etc. Ces nomenclatures sont utiles pour donner des instructions de montage à des mécaniciens.

Les livres modernes destinés aux petits enfants sont illustrés de cette manière. On y représente une balle par un cercle. Or, un cercle peut représenter d'autres objets: le soleil, une orange, un cerceau, etc. Il faut donc, pour interpréter, avoir recours à des informations complémentaires: "C'est un ballon car le dessin montre des enfants qui jouent au football". Il y a cent ans, aucun dessinateur n'aurait osé proposer des représentations aussi abstraites: il aurait marqué des ombres (fondues pour une balle lisse, grenues pour une orange......). Quand les "valeurs" des ombres et des lumières sont correctement indiquées, on peut supprimer les lignes des contours: le dessin reste tout à fait lisible (comme une photographie). Mais les objets n'y sont plus aussi clairement définis: cette représentation ne convient pas bien à une notice technique. Les enfants qui ont constitué leurs références de déchiffrement visuel à l'aide de telles images ne voyaient pas comme les enfants modernes. Pour ceux-ci, les objets se détachent mieux mais la lecture réclame que, (comme pour les phonèmes) il soit fait appel au contexte.

---

13 À une zone rétinienne de mille cellules réceptrices (cônes ou bâtonnets) interconnectées, correspond, dans le cortex strié, une "hypercolonne" d'environ un demi-million de neurones de formes différentes, répartis entre une dizaine de couches spécialisées. La zone de l'hypercolonne où une perception de ligne est traitée dépend de l'inclination de cette ligne. La sensation donnée par une ligne verticale a donc une nature différente de celle d'une ligne horizontale. Mondrian l'avait senti: il qualifiait de "femelles" les lignes couchées et de "mâles" les lignes érigées ! L'image traitée par la rétine et par l'hypercolonne aura perdu beaucoup de sa fraîcheur naïve avant d'arriver aux zones qui distillent l'identification des formes. L'utilité de ces traitements est claire: les images dont nous prenons conscience sont trafiquées en vue de l'action.

14 Cézanne a écrit: *"Les lignes n'existent pas dans la nature"*. Léonard de Vinci remarque, dans ses carnets, que dans les dessins, il faut éviter de donner trop d'importance aux contours. D'abord parce qu'ils n'existent pas dans la nature (les objets se délimitent par des surfaces); ensuite, parce que, dans des dessins où les objets sont "cernés", il est impossible de poser les valeurs de gris qui donnent l'impression de volume. Quintillien (auteur latin du Ier siècle) écrit que Zeuxis (peintre grec du Vème siècle av J.C) a découvert les rapports de la lumière et des ombres pour donner l'illusion des volumes.

On peut probablement caractériser une culture par la description des moyens qui transforment les perceptions en représentations.
L'ensemble de ces moyens constitue ce qu'on pourrait appeler la "PERSPECTIVE CÉRÉBRALE".

Ce que je viens de remarquer dans les dessins pour enfants n'épuise pas le sujet: chaque dessinateur a son style. Pour parler de celui des peintres, il faudrait analyser autant de manières qu'il y a d'œuvres artistiques.

Le public n'accorde pas une valeur égale à toutes les manières de représenter des visions. Les critères changent avec les régions, les mœurs et les temps. À l'époque de la Renaissance, les savants ont accordé un grand poids aux réflexions basées sur des expérimentations: c'est pourquoi ils ont tant cru à la vérité de la perspective albertienne.

Ils avaient pourtant beaucoup de raisons d'en voir les faiblesses. Mantegna, dans le **Christ mort**, propose pour quelques unes d'entre elles, des solutions qui tiennent compte de certains mécanismes de la vision. Il y a pourtant deux importants mécanismes visuels qu'Alberti a omis et qui ne font pas partie des recherches du **Christ mort**:

1) Pour Alberti, l'axe du regard est fixe et horizontal; pour Mantegna, l'axe du regard se déplace dans un plan vertical. En réalité, le regard est doué de mobilités supplémentaires:

i) quand le regardeur veut voir ce qui l'entoure, il bouge la tête sur son cou et fait tourner ses yeux dans leur orbite;

ii) quand l'œil fixe un point, il est animé d'un petit frémissement dont la fréquence varie de 30 à 150 cycles par seconde: c'est le micronystagmus qui permet aux cellules réceptrices de la rétine de se recharger en neurotransmetteurs;

iii) l'œil a probablement encore d'autres palpitations qui contribuent à explorer les volumes et à distinguer la couleur propre des objets parmi les couleurs induites.

2) Sauf s'il est borgne, le regardeur utilise deux yeux pour voir un seul spectacle. Les deux yeux ne voient pas tout à fait la même chose; (en d'autres termes: les images des deux yeux ne sont pas superposables), mais le regardeur n'a conscience que d'une seule image. C'est la calme synthèse que lui offre son cerveau. On sait que la vision binoculaire participe à la perception des distances (notamment, du relief).

En vérité, les deux yeux ne couvrent pas exactement le même champ visuel: l'œil gauche reçoit, de l'extrême gauche des perceptions que l'œil droit ne perçoit pas (et réciproquement). Cette différence se modifie avec la grandeur de l'angle de convergence des axes de regard des deux yeux. Cet angle varie de 0° à 20° quand le regard passe d'un point situé très loin, à l'examen d'un objet proche (25 cm)[15].

Simultanément, un effort musculaire accroît les courbures du cristallin afin de diminuer de 2 mm la distance focale du système optique oculaire. Enfin, pour pouvoir analyser la vision binoculaire, il faudrait savoir ce qui se passe entre les deux hémisphères du cerveau; les physiologistes sont à l'œuvre pour élucider ces transactions.

Bref, la vision binoculaire met en jeu les combinaisons de nombreux facteurs dont la plupart sont encore mal connus.

En réalité, les défauts de la perspective albertienne ont été perçus dès le début par deux catégories de critiques:

1) Le public ingénu qui s'étonnait de voir, sur les tableaux, converger des lignes qui représentent des choses parallèles. Nous savons que leur stock d'images mentales n'avaient pas encore incorporé les règles d'Alberti. Les Maîtres de l'époque (Vinci, Piero, Filarete) ont trouvé leurs doutes bien naturels. Ils ont cherché des arguments pour les convaincre; ils leur conseillaient, par exemple, de dessiner les poutres d'un plafond sur une plaque de verre interposée devant leurs yeux. Après avoir souligné à l'encre les positions des poutres sur le verre, ils verraient bien que sur l'image, les lignes sont convergentes. Pour réaliser cette expérience, il suffit, expliquait-on, de maintenir la tête en position fixe (grâce à un support rigide), de fermer un œil, de ne pas tourner l'autre... Et le public naïf fut vite convaincu... Car le système de lecture des images est ainsi fait qu'il ne faut pas longtemps pour apprendre et admettre de pratiquer de nouvelles façons de voir.

2) Les peintres qui étaient doués d'un esprit de curiosité et qui ont su prendre conscience de certains mécanismes de leur système visuel. Léonard de Vinci s'interroge souvent dans ses carnets (Figure 10). Ces questions ont conduit des peintres à inventer des anamorphoses (Figure 11).

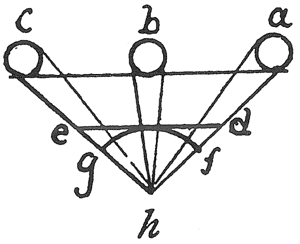
---

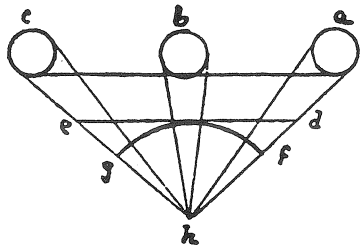
15 Quand le visiteur de la Pinacothèque Brera examine le **Christ mort**, à une distance de deux mètres, ses deux yeux convergent vers la zone scrutée (nous avons vu qu'elle a environ 15 cm de diamètre). Pendant qu'il promène son regard sur toute la surface du tableau, les axes optiques de ses yeux conservent à peu près la même convergence: environ 3°. Cette constance de la convergence confirme au regardeur qu'il voit un objet plan. En effet, s'il avait regardé un homme couché (Figure 4 avec Vd = 2m), la convergence serait passée de 1,5 à 3° selon qu'il aurait fixé la tête ou un pied. Pendant ce temps, la focale des yeux aurait passé de 15 à 16 mm. Quand le regardeur fixe un pied véritable, la tête apparaît à la fois en vue double (mauvaise convergence binoculaire) et floue (mauvaise mise au point de la focale). Voici un exemple de redondance des informations lues par le cerveau. Il y a des spectacles d'images planes (tableaux, cinéma, télévision), où le regardeur renonce à cette redondance. Son éducation lui permet de choisir la sensation qui donne l'interprétation voulue.

107.

e questa tal pariete sia *d e* nella qual si figura 3 circoli equali che son dopo essod *e*, cioè li circoli *a b c*; ora tu vedi che l'ochio *h* vede sulla pariete retti linia li tagli del le spetie maggiori nelle maggiori distantie o minori nelle vicine.

Que soit en *d e* cette paroi sur laquelle sont figurés trois cercles égaux qui sont derrière la dite *d e*, à savoir les cercles *a b c*; alors tu vois que l'œil *h* voit sur le plan vertical des lignes de section des images, plus grandes pour les plus éloignées, ou plus petites pour les plus proches.





108.

Qui seguita quel che manca in margine, da piedi dirieto a questa faccia.

Il che natura nella sua prospectiva adopera in contrario con ciosiachè nelle maggiori distantie la cosa veduta si dimostra minore e nella distantia minore la cosa par maggiore.

Suit ici ce qui manque dans la marge, au pied du recto de cette page.

À savoir que la nature, dans sa perspective, procède a contrario, qui fait paraître plus petite la chose vue à grande distance et plus grande celle vue à distance plus courte.

Figure 10.
Léonard de Vinci: deux pages des *Carnets*.

Dans les §§ 107 et 108 des *Carnets* de Léonard de Vinci, on trouve l'auteur troublé par une constatation qui lui semble paradoxale: la vue perspective qui projette l'espace sur le plan du tableau à partir d'un "point de vue" donne aux objets une déformation d'autant plus grande qu'ils sont situés à une plus grande distance angulaire de la direction du regard. Cette déformation, une des premières anamorphoses, est perceptible quand l'angle de vue a une ouverture supérieure à 30 degrés. Pour éviter ce paradoxe de la perspective, les académies de peinture fixaient cet angle comme le maximum admis pour la "pyramide visuelle" d'un tableau. En fait, dans la nature, cet angle n'est jamais atteint puisque l'œil de l'homme ne voit clairement qu'à l'intérieur d'un cône de quatre degrés (*fovea*).

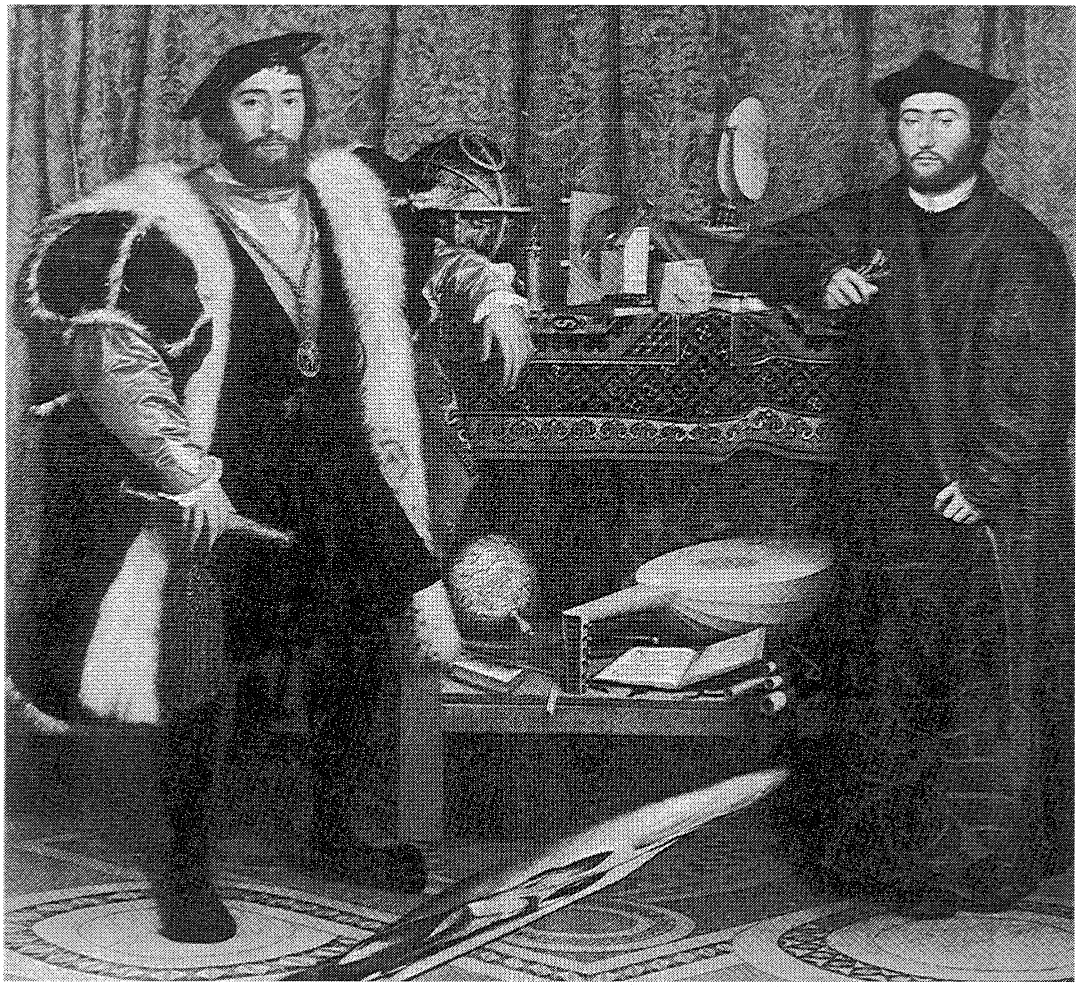


Figure 11.
LES AMBASSADEURS de Hans Holbein.
National Gallery, Londres.

La plus célèbre des anamorphoses est située dans la partie inférieure du tableau de Hans Holbein que l'on nomme **Les Ambassadeurs.** La forme oblique bizarre et blanchâtre que l'on voit au sol, entre les deux personnages, apparaît comme un crâne soit quand on la regarde à partir d'un point de vue situé à droite, au ras du mur, soit quand on l'aperçoit à travers un verre cylindrique: c'est ce que pourrait voir un bon vivant qui lèverait sa flûte de champagne en l'honneur des personnages (comme le remarque Edgar R. Samuel dans son article "*Death in the glass, a view of Holbein's Ambassadors*" dans *The Burlington Magazine*, oct. 1963).

Ce tableau, peint en 1533, représente Jean de Dinteville (à gauche, envoyé par François I^{er} en mission auprès de Henry VIII) et Georges de Selve, Évêque de Lavaur. Il est une des premières "vanités": lorsque ce sont des portraits, on y voit le personnage entouré d'objets qui rappellent ses intérêts ou ses joies (sciences, musique, poésie...) pendant qu'un symbole de mort invite à une réflexion métaphysique sur la durée de la vie et l'usage que l'homme en fait.

Beaucoup de livres sont consacrés à ce tableau fascinant et énigmatique: citons seulement *Holbein, Les Ambassadeurs, Anatomie d'un chef-d'œuvre*, de J.-L. Ferrier, Paris, 1977, où l'on trouvera une bibliographie.

À d'autres (comme Véronèse), les incertitudes de la science ont donné des libertés qu'ils ont utilisées pour donner la primauté à l'organisation plastique des tableaux. Mais, même quand ils ont bien vu les contradictions de la théorie, curieusement, ils n'en ont pas mis en doute la vérité.

Les hommes de science (peut-être moins attentifs que les peintres aux perceptions visuelles) ont adopté les idées projectives avec enthousiasme. Ceux qui, comme Mersenne ou Niceron, ont réfléchi aux paradoxes de la théorie, ont trouvé dans les anamorphoses le même plaisir ludique que les mathématiciens modernes dans les œuvres de Maurits Escher (Figure 12).

Aujourd'hui, la "perspective légitime" a perdu ses bases scientifiques. Les progrès de la Science ont montré combien la physiologie de la vision était mystérieuse et complexe; les nouvelles connaissances n'ont fait que dévoiler des questions nouvelles ! Mais la perspective des peintres s'impose à nous avec plus de force que quand elle résumait une connaissance scientifique. C'est que nous sommes, dès l'enfance, entourés par une multitude d'images fabriquées par des "Cameras". En effet, les prises de vues des photos[16], des films[17] et de la télévision se font toutes par

---

16 Avant la photo, des peintres du XIXème siècle se sont efforcés de suivre avec exactitude les principes de la "perspective légitime". En écrivant ces lignes, j'ai, par hasard, sous les yeux une reproduction du portrait de Madame de Senonnes par Ingres: elle a un bras droit démesurément long finissant sur une petite main. On imagine comment Ingres en est arrivé à ces monstrueuses greffes anatomiques: il était à deux ou trois mètres de son modèle et mesurait les proportions en marquant de l'ongle du pouce le crayon qu'il tenait au bout de son petit bras. Quand tout fut mis en place, la main droite de Madame de Senonnes était deux fois plus longue que la main gauche. La perspective le voulait ainsi: la main gauche était plus éloignée... mais sur le tableau, elles sont voisines. D'autre part, Ingres ne pouvait pas raccourcir le bras droit sans modifier la pose choisie... Les peintres qui ont connu la photo n'ont plus eu ce genre de remords: en cas de doute, la caméra disait le vrai. Personne n'a mis en doute la valeur scientifique de l'image ainsi obtenue. Quand les peintres ont trouvé des différences entre un tableau et la photo, c'est le tableau qu'ils ont corrigé: Meissonnier a repeint les pattes de ses chevaux; Degas a changé ses mises en pages, ses éclairages et, lui aussi, les pattes de ses chevaux. Monet a photographié pour étudier la nature (j'aurais préféré que la nature étudiât Monet... mais c'est ce que nous avons fait à sa place car nous ne saurions plus la voir comme avant !). Plus près de nous, vers 1970, des dessinateurs (Gäfgen, Titus-Carmel, etc.) ont travaillé sur photos pour découvrir le mystère des choses. Ernest Pignon-Ernest a eu, à ce sujet une évolution plus "artistique": il a commencé par travailler sur photos: les résultats lui ont paru trop prosaïques; revenant à des corps imaginaires, il a atteint l'intensité dramatique cherchée.

17 Il faut, dit-on, beaucoup de temps et d'efforts à un Persan pour apprendre à distinguer un Château-Margaux d'un Château-Petrus... mais n'importe quel bon sauvage venu de sa brousse s'habitue à voir des films. Il regarde sans surprise les visages de Fred Astaire embrassant Ginger Rogers; c'est un "premier plan": ces visages ont plus de deux mètres de hauteur ! Le système visuel s'est accommodé sans douleur et sans délai à la magie du cinéma. Les films exigent de notre système visuel d'autres concessions importantes que nous lui accordons sans même en avoir conscience. Par exemple: il est fréquent qu'un film commence par la vue d'une foule au milieu de laquelle un homme marche... c'est le héros. Le metteur en scène commence par filmer les premières images avec une grande profondeur de champ. Puis,

des appareils qui fonctionnent selon la vielle théorie de l'œil: à partir d'un centre (le foyer de l'objectif), l'image est une projection, sur le plan du film sensible, de l'espace à trois dimensions.

Cela nous donne une telle accoutumance à ce type de perspective qu'elle s'impose comme une vérité *a priori*. Ce qui paraissait paradoxal à Mantegna ne nous trouble pas: nous admettons toutes les déformations de forme ou d'échelle pour peu que nous les voyons à la télévision. Nous savons déchiffrer ces images même si nous n'avons pas placé notre œil au "point de vue". Si bien qu'au cinéma, nous savons voir le film à partir de toutes les places de la salle. Or, pour le spectateur du premier rang, l'image apparaît sous un angle cinq fois plus grand que pour celui du quinzième rang.

Beaucoup d'artistes modernes contestent la "perspective légitime". Il en est qui invoquent la perspective *zen*, certains cherchent des espaces psychiques ou mystiques, d'autres, enfin, ne veulent pas d'autre loi que la cohérence plastique.

Aucun, dans leur vie courante, ne doute de la vérité de l'image projective. Cette persistance, dans les occupations prosaïques, d'une théorie révolue montre combien elle avait été bien adaptée à l'action. Or, c'est au moment où la perspective projective s'impose au bon sens avec le plus de force que les artistes l'ont rejetée le plus radicalement dans leurs œuvres. Cela dévoile un aspect de la réflexion de l'artiste. Pour lui (comme pour le penseur), l'évidence n'est pas un critère de vérité: c'est dans les profondeurs les plus secrètes qu'il faut chercher les principes de l'Art.

On comprend pourquoi de telles œuvres d'art ne satisfont pas ceux qui, dans le public, attendent des plaisirs faciles.

La diversité des images, des pensées et des œuvres modernes entraîne une rapide augmentation du nombre des visions et des perspectives. C'est pourquoi nous pouvons généraliser la phrase qui servait dans la première partie de cet article à conclure les considérations sur la théorie de la Relativité.

---

il change le réglage de la caméra, la foule devient floue et le visage du héros se détache. Dans la vie, quand nous cherchons un homme dans la foule, nous la parcourons des yeux en changeant les focales de nos cristallins et la convergence des axes de regard de nos yeux. Au cinéma, nous suivons docilement les intentions de l'auteur (nous aurions pu désirer suivre des yeux tel figurant devenu flou), mais surtout, nous renonçons à des réflexes musculaires aussi vieux que l'œil fossile: nos yeux gardent leur première convergence et leur mise au point sur la distance du fauteuil à l'écran. Dans l'image projective du cinéma nous ne cherchons pas à mettre l'œil à la place du centre optique de la caméra. D'ailleurs, la ligne d'horizon de l'image (à environ 3,50 m de hauteur) est située à plus de deux mètres au-dessus de la nôtre. Rien d'étonnant que le cinéma soit différent de la vie: ce qui est remarquable (et

"TOUTES LES VISIONS LÉGITIMES SE VALENT CAR CHACUNE ÉPUISE SA PROPRE RÉALITÉ".

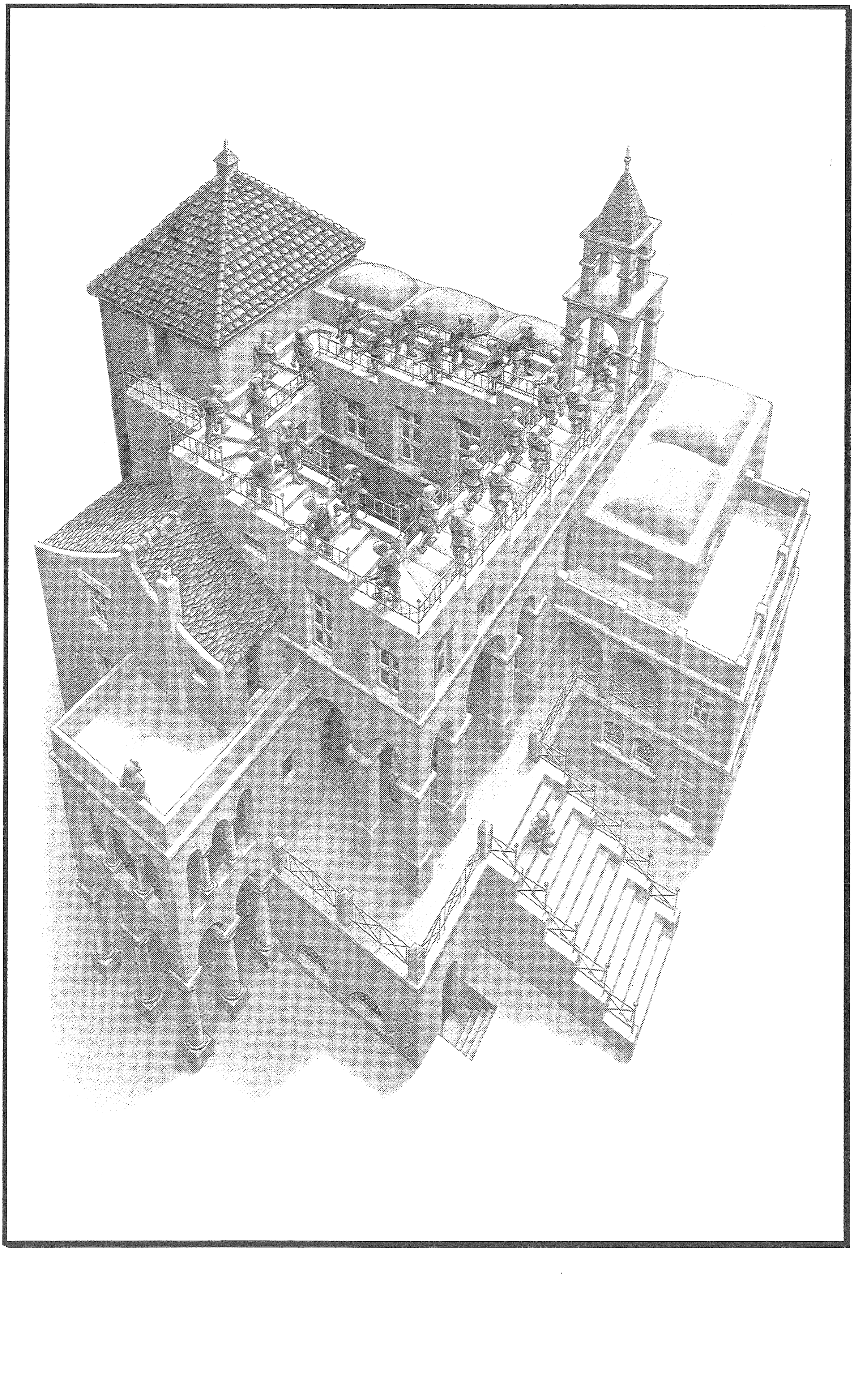
* * * * *

Figure 12.
MONTÉE ET DESCENTE, de Maurits Escher.

Si on suit les personnages qui montent l'escalier, on constate avec surprise qu'après avoir parcouru les quatre côtés de la tour en montant sans cesse, ils se retrouvent à leur point de départ. Ceux qui descendent arrivent, eux aussi, à l'étage d'où ils étaient partis. Cette illusion peut intriguer, mais elle est explicable: pendant que l'attention était captée par les personnages, Escher a subrepticement changé de système de perspective. Ce tour d'illusioniste prouve seulement que notre cerveau n'est pas très exigeant quant à la cohérence des perspectives. Avec les perceptions qu'il a enregistrées, il reconstitue, vite fait, une scène qui lui paraît plausible. En général, cette reconstitution n'entraîne pas de contradiction: le regardeur croit qu'il a tout vu, et bien compris. Parfois, en comparant les récits de deux témoins d'une même scène, on constate qu'ils n'ont pas perçu les mêmes éléments et que leurs reconstructions sont différentes. Chacun jure alors qu'il a bien vu et que l'autre est un imbécile ou un menteur. C'est, entre autres choses, un des signes de cette présomption fondamentale qui permet aux hommes d'agir et d'avoir les certitudes nécessaires à leur survie. Pour ceux qui voudraient découvrir les truquages de **Montée et descente**, signalons que la base de la tour n'est pas un rectangle, mais un quadrilatère très irrégulier. En effet, les côtés opposés ont, d'une part, 11 et 3 marches, d'autre part, 6 et 10 marches. Les points de fuite des côtés de la tour ne sont donc pas ceux de droites parallèles. Néanmoins, elles convergent à peu près avec les droites horizontales parallèles que l'on trouve dans les parties rectangulaires du bâtiment (escaliers, terrasses, colonnades, etc.). Les lignes verticales convergent normalement, cela accrédite l'idée d'une image entièrement projective.

---

symptomatique du fonctionnement de la vision), c'est que l'on accepte si vite ces nouvelles conventions... et qu'on ne soit pas conscient de l'effort d'apprentissage.



POSTFACE

Je ne crois pas que beaucoup de lecteurs arriveront à cette page.

Ils auront été lassés avant ! Mais il y en aura au moins un: l'imprimeur.

C'est ici que je veux lui exprimer ma confusion. Je ne peux pas employer le mot "excuse", car je n'en ai pas. C'est, égoïstement, et pour mon seul amusement que j'ai voulu cette édition où il y a plus de notes que de texte. J'ai souhaité que le lecteur soit forcé de lire plusieurs parties à la fois, comme sur une partition d'orchestre pour qu'il entende le petit clarin se moquer, en contrepoint, du thème majestueux énoncé par les cordes. Oui ! pour moi c'est bien cela: dès lors qu'un énoncé est exprimé, il perd de sa vérité. Celle-ci se transfère dans un autre énoncé (parfois inverse), car comme le répétait un auteur dont j'ai oublié le nom: *"La vérité est fuyante et complexe"*.

* * * * *
* * *
*

BIBLIOGRAPHIE

- L.B. ALBERTI: *De pictura*. Trad. du latin par C. Popelin. Éd. A.Lévy, Paris, 1868.
- R. ARNHEIM: *Art and visual perception*. Berkeley Univ. Press, 1954
- R. ARNHEIM: *"Perception of Perspective Pictorial Space from Different Viewing Points"*, in *Leonardo* 10, 1977.
- N. BOURBAKI: *Éléments d'histoire des mathématiques*. Éd. Hermann, Paris, 1960.
- E. CASSIRER: *La philosophie des formes symboliques*. Éditions de Minuit, Paris, 1972.
- A. EINSTEIN: *La théorie de la relativité restreinte et générale*. Éd. Gauthier-Villars, Paris, 1964.
- B. d'ESPAGNAT: *Une incertaine réalité*. Éd. Gauthier-Villars, Paris, 1985.
- R. P. FEYNMAN: *The Character of Physical Law*. M.I.T. Press, 1965.
- A. FLOCON & R. TATON: *La perspective*. Coll. *Que sais-je ?* P.U.F., Paris, 1963.

- J. P. FRISBY: *De l'œil à la Vision*. Trad. P.Guilhon, Nathan, Paris, 1979.
- L. GODEAUX: *Les géométries*. Éd. Armand Colin, Paris, 1937.
- D. JAMESON & L. M. HURVICH: *"From Contrast to Assimilation in Art and in the Eye"*, in *Leonardo* 8, 1975.
- L. D. HENDERSON: *The fourth Dimension and Non-Euclidian Geometry in Modern Art*. Princeton University Press, 1983.
- D. R. HOFSTADTER: *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*, The Harvester Press, 1979. Traduction française, Inter Éditions, Paris, 1985.
- D. KATZ: *Gestaltpsychologie*. Éd. B.Schwafe, Bâle, 1950.
- M. LIVINGSTONE: *"Art, illusion et système visuel"*, in *Pour la Science*, Mars 1988, (pp. 44-53).
- E. MACH: *Erkenntnis und Irtum*. Éd. Bart, Leipzig, 1905.
- E. F. Mc NICHOL: *"Three-Pigment Color Vision"*, in *Scientific American* 211, Déc. 1964, (pp 48-56).
- E. PANOWSKY: *La Perspective comme forme symbolique*. Trad. de G. Ballangé. Éd. de Minuit, Paris, 1975.
- I. PRIGOGINE et I. STENGERS: *La Nouvelle alliance*. Éd. Gallimard, Paris, 1979.
- H. A. SIMON: *Models of Thought*. Yale University Press, 1977.
- J.-M. SOURIAU: *Géométrie et relativité*, Éd. Hermann, Paris, 1964.
- G. VASARI: *Le vite*. - Éd. Ragghianti, Milan, 1942-50. Trad. française sous la direction d'A. Chastel, 12 vol., Éd. Berger-Levrault, Paris, 1981-1989.
- L. da VINCI: *The note books of Leonardo da Vinci*. Texte original italien avec trad. et notes par J. P. Richter. Éd. Sampson, Low, Marston, Searle & Rivington, Londres, 1883. Reproduit en fac-simile par Dover Publications Inc., New-York, 1970.
- T. VOGEL: *Physique mathématique classique*. Éd. Armand Colin, Paris, 1956.
- M. WERTHEIMER: *"Experimentelle Studien über das Sehen von Bewegung"*, in *Zeitschrift Psych.* 61, 1912, (pp 161-265).
- H. WEYL: *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Princeton University Press, 1949.

* * * * *

* * *

*