de M.C. ESCHER

aux...

Claudine HERVIEU

Roger LEGER

Françoise DEBART

Brigitte ROZOY

Paulette TRINQUET

...dessins à motifs répétitifs

S O M M A I R E

- Avant propos .....p 3

- En guise d'introduction : quelques pistes .....p 5
  (Brigitte ROZOY-SENECHAL)

- Compte-rendu des activités réalisées au C.P .....p 15
  (Paulette TRINQUET)

- Essai d'interdisciplinarité - Math Arts plastiques .....p 27
  (Roger LEGER)

- Recherche d'enveloppes sur des pavages .....p 43
  (Claudine HERVIEU)

- Dossier pour des élèves de 1er cycle .....p 55
  (Françoise DEBART)

- Appendice mathématique (Brigitte ROZOY-SENECHAL) .....p 91
  - 1. Des dessins répétitifs
  - 2. Identifications de transformation
  - 3. Etudier des compositions d'isomètries
  - 4. Comment produire de tels dessins ?

- Bibliographie .....p 120
- Planches .....p 122

°°°°°°°°°°°°°°°°°°

°°°°°°°°°°°°°°

°°°°°°°°°°

ILLUSTRATIONS

tirées de l'oeuvre d'Escher : pages 14-16-42-90-97 et en 1ère page couverture - Photos J.P LEGOFF

Page 26 - dessins de A.Wherlé

Dernière page de couverture : la naissance de Gargantua - G.Doré avec un aphorisme de Lichtenberg.

AVANT PROPOS

Depuis que la fameuse réforme de l'enseignement des mathématiques modernes dans a posé les problèmes que l'on sait, en particulier le premier cycle secondaire, de nombreuses tendances ont milité pour l'introduction dans les classes d'activités manipulatoires, prétextes et préludes à tout apprentissage mathématique. Ainsi, sous l'impulsion entre autre de l'APMEP et des IREM, on a vu surgir diverses techniques de construction de représentation, des études de papiers peints, des transformateurs multiples et variés qui les concrétisaient, et bien d'autres encore.

Depuis quelque temps se sont également répandues et multipliées des études géométriques, de coloriages en pavages, et d'ornementations en dessins à motifs répétitifs, toutes activités passionnante, riches et multiples, dont un des intérêt, et non le moindre, réside peut-être dans la globalité du travail possible.

A travers diverses expositions, colloques, séminaires, l'IREM de Basse-Normandie a présenté, commenté, disséqué, remanié, recommencé ..... de telles activités.

L'intérêt qui a été ainsi succité a été tel et la demande sur le sujet si grande et si persistante - que nous avons pensé réunir, quoique rapidement, quelques uns des divers éléments en notre possession actuellement.

C'est pourquoi nous vous proposons aujourd'hui ce fascicule ; il ne prétend pas être une étude exhaustive et organisée du sujet ; il ne présente que des indications mathématiques sommaires, des compte-rendus partiels, mais aussi des pistes possibles, et des planches pour un travail éventuel. Il pourra lui être associé des séries de diapositives rendant comote de certains aspects de la question, et des expositions réalisées. Vous en trouverez les commentaires à la fin de ce fascicule.

En publiant aujourd'hui cet opuscule, nous espérons seulement que les documents présentés pourront être, comme l'ont été nos expositions, des plate-forme pour des travaux divers (et peut-être aussi un point de départ pour des publications ultérieures !)

Je voudrais remercier ici tous particulièrement Pierre JULLIEN,

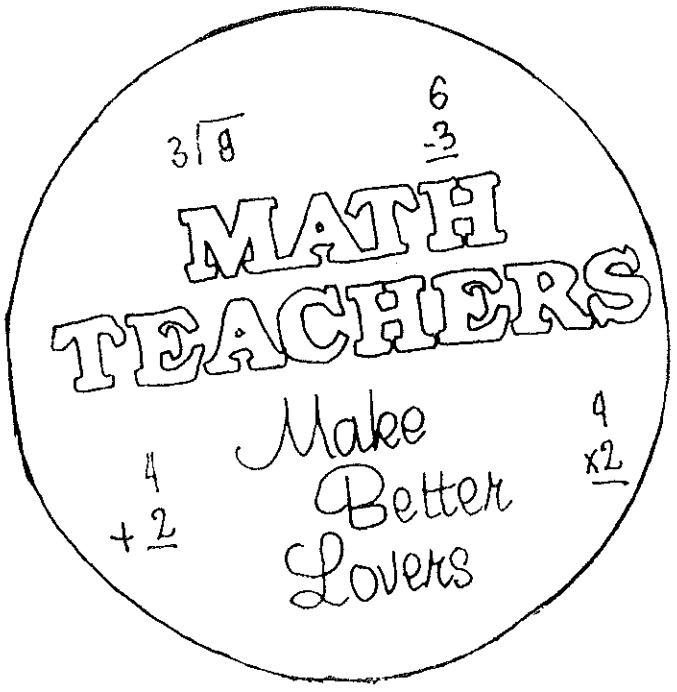
C'est lui qui, à l'université d'été de Grenoble, en Septembre 1978, m'a sensibilisée et initiée d'abord au sujet. C'est lui qui m'a ensuite communiqué

l'essentiel des dessins utilisés ici, ainsi qu'un fascicule théorique, hélas inédit, qui resta ma référence constante ; c'est lui enfin qui jamais ne ménagea son temps, chaque fois que des points obscurs avaient à être précisés.

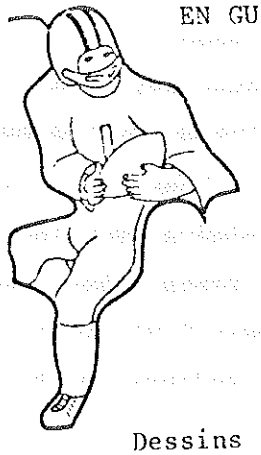
Ce travail lui est ici dédié.

Brigitte ROZOY-SENECHAL

Mars 1980.



Badge du NDCTM
(APMEP) Américaine



EN GUISE D'INTRODUCTION :

Quelques pistes

Dessins à motifs répétitifs, pavages du plan, papiers peints, rosaces, décors de l'alhambra de Grenade, dessins de M.C Escher, couvertures de journaux IREM, vous en avez souvent rencontrés !

LE CONTEXTE

Les motifs réguliers, répétés de façon plus ou moins systématique, ont depuis longtemps - peut-être vaut-il mieux ne pas dire toujours - été présents dans les décors architecturaux et artistiques. Qu'il s'agisse des bas-reliefs égyptiens, des frises grecques, des mosaïques romaines ou des tapis irlandais, la préoccupation de régularité par répétition reste persistante.
C'est certainement dans les cultures musulmannes qu'elle trouvera son plus grand développement, comme on peut le constater dans l'art de l'Islam, ou dans les riches décors de l'alhambra de Grenade (14è siècle).

Il faut peut-être y voir une conséquence de l'interdiction formulée dans le coran d'utiliser des représentations humaines, interdiction qui incita à un raffinement peu ordinaire des dessins géométriques. on peut également y trouver, au niveau architectural, les contraintes dues aux habitudes et aux modes de construction dans ces pays : elles étaient en effet effectuées par des ouvriers, souvent en l'absence du maître d'oeuvre. Il était alors plus simple de se limiter à une architecture des formes relativement simple, et de recouvrir l'ensemble par des panneaux décoratifs réalisés isolément.

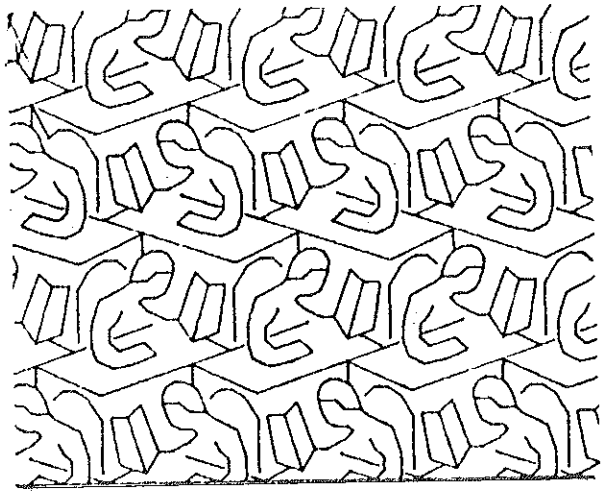
Chez un graveur comme le néerlandais M.C Escher (20è siècle) ce seront d'autres préoccupations, d'origines philosophiques et mystiques, qui prévalurent.

Escher était trés préoccupé par des problèmes de représentation: les choses peuvent être senties et montrées de plusieurs points de vue différents, du domaine de la réalité sensible courante, de l'univers intérieur de l'être, ou des obsessions fantasmatiques de l'auteur. Dans une même gravure, il associera ainsi souvent plusieurs points de vue différents, tournant de la

sorte autour de l'absurdité et de la multiplicité des mondes.
Son univers intérieur est trés marqué par une vision fantastique de l'univers où se mêlent, se fondent et s'entrelacent les entités, pour lui indissociables, que sont la terre, le ciel, l'eau, l'air et l'être humain. Les associations ainsi réalisées, associations qui reflètent le plus souvent pour Escher l'impossibilité d'une dissociation, sont dominées par trois obsessions fondamentales : celle de l'infini que l'on ne parvient jamais à atteindre, celle de l'opposition que l'on cherche à réduire, celle des reflets qui se confondent avec leurs objets.

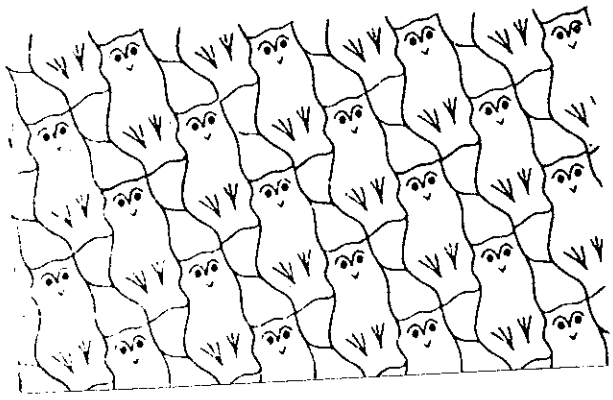
Ainsi Escher dessinera t-il des tritons qui, la nuit, s'échappent de la feuille de papier, pour y retourner ensuite ; de même les hommes noirs et blancs de la frise se sépareront-ils en 2 files distinctes, le noir opposé au blanc, qui se recontreront au premier plan de dessin. Enfin, et c'est cet aspect qui servira de prétexte aux études réalisées ici, Escher cherchera à atteindre l'infini en recouvrant sa feuille de papier par des dessins tous identiques, répétés à l'infini.

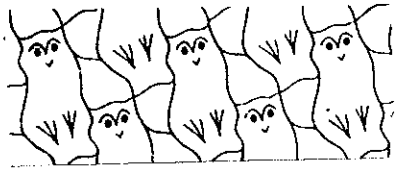
LES DESSINS REPETITIFS

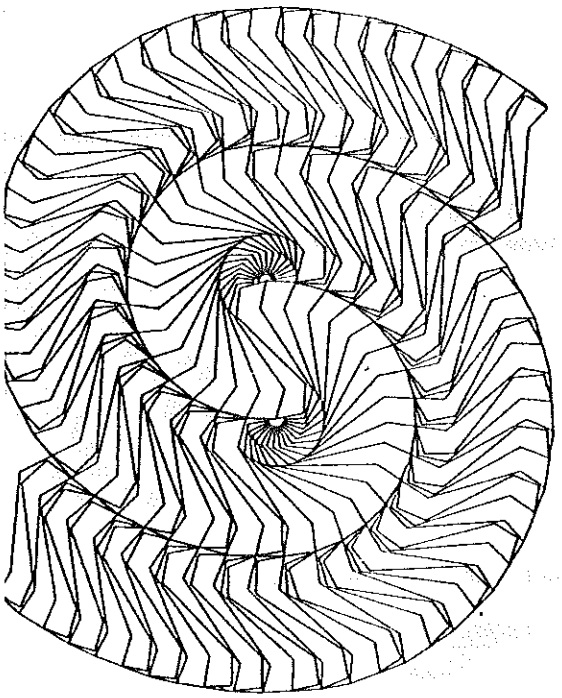


Ce seront des dessins, tel celui-ci, qui possède une régularité telle que l'on puisse facilement imaginer que l'on puisse, par un procédé mécanique immédiat, en recouvrir tout le plan.

Nous ne intéresserons pas ici à tou ces dessins, mais seulement à ceux qui sont stables par translation c'est-à-dire, intuitivement, tel q le plan puisse être totalement recouvert par report sur les 4 côtés d'un rectangle élémentaire, comme précèdent.

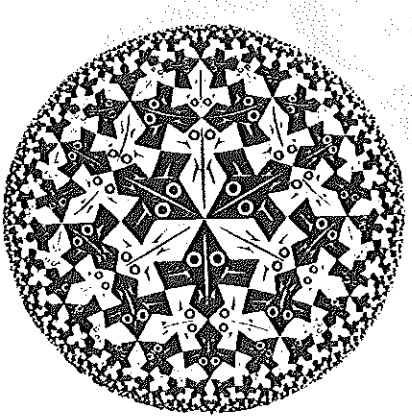






En ce sens les 2 dessins représentés ci-contre ne feront pas partie de notre étude, quoiqu'ils puissent être qualifiés de "géométriques" et de "réguliers".
Pour l'un, le motif de base n a pas une taille constante, pour l'autre le procédé de reproduction, en spirale, n'autorise pas les translations.

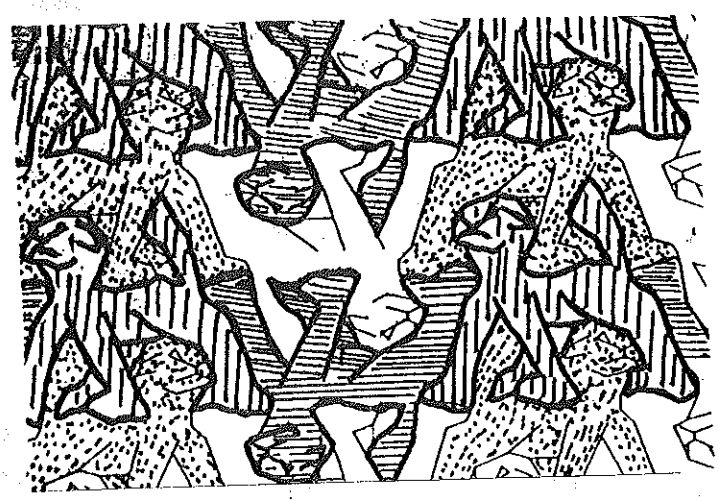
(Ils seraient cependant sujets d'études mathématiques évidemment passionnantes !)

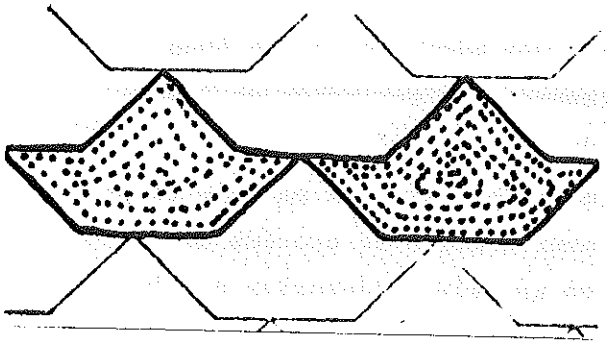


DES PISTES PEDAGOGIQUES

Ils ont été l'objet d'exploitations interdisciplinaires en Arts-plastiques et mathématiques ; on pourrait certainement aussi en imaginer en relation avec l'histoire, l'histoire de l'art, la philosophie...

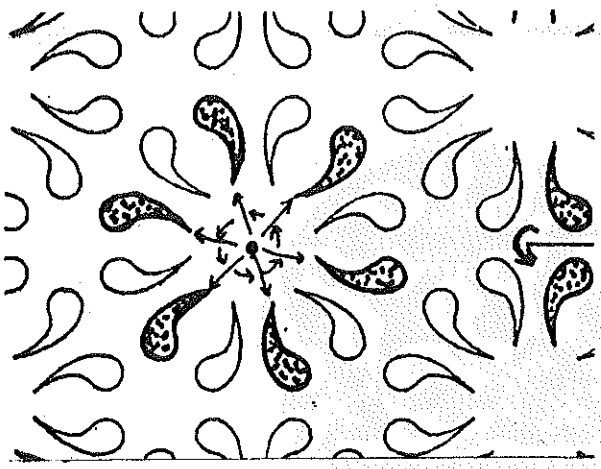
Ce peut-être comme ci-contre, des coloriages divers, ou la perversion de ces coloriages, telles qu'en réalisent certains élèves du 1er cycle (CES D'Orbec - Roger LEGER), ou de l'élémentaire (TRINQUET, GIRARD CP, CE_1)





Ce pourra être la détermination d'un motif de base, et observation par l'enfant de ses déplacements.

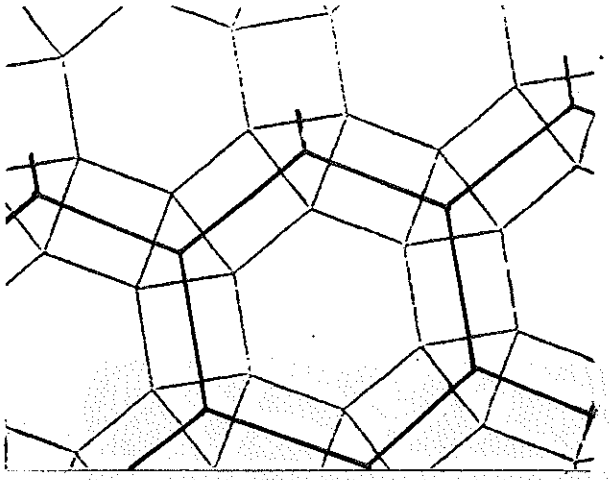
(ENF de Caen - GIRARD et TRINQUET
stage R6-EN Caen - Dô et DESHOTTES)



Ce sera l'identification, par des élèves du 1er cycle, des isométries du plan, telles que les rotations d'ordre 6 et les symétries axiales ci-contre.

On pourra aussi y illustrer des compositions d'applications, des inversions d'isométries..

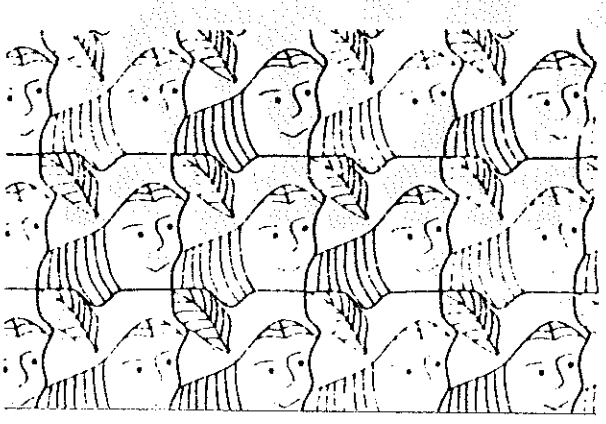
(CARTON - CONYNCK - DEBART - LEGER 1er cycle)

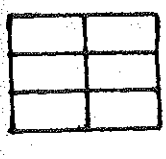


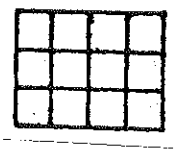
On pourra aussi, à partir du tracé du réseau de base , étudier les pavages réguliers possibles du plan.

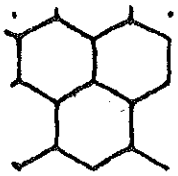
On trouvera qu'il est possible de paver le plan avec des parallélogrammes, des rectangles, des carrés, des losanges, ou rhombes, des hexagones.

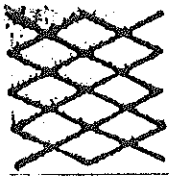
On remarquera que c'est impossible avec des pantagones !

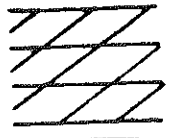


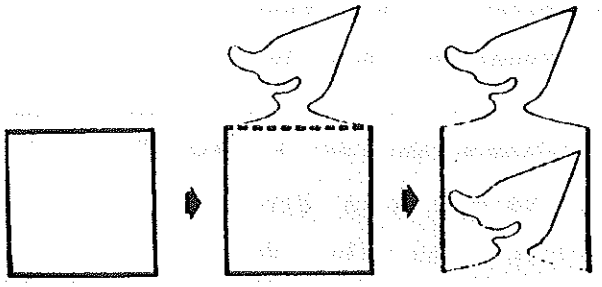






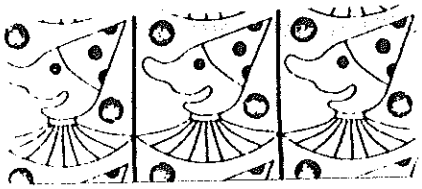


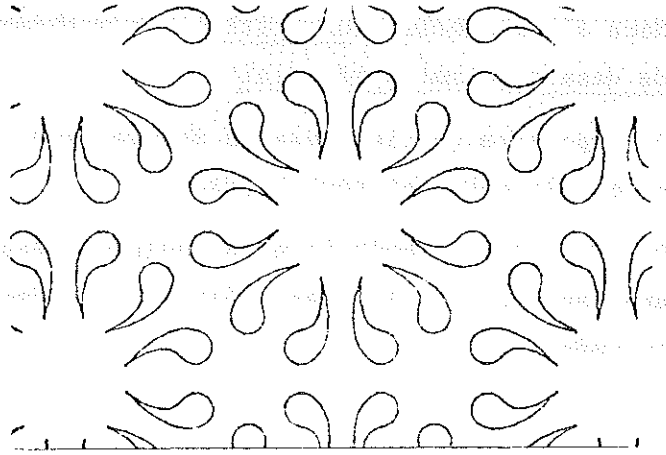




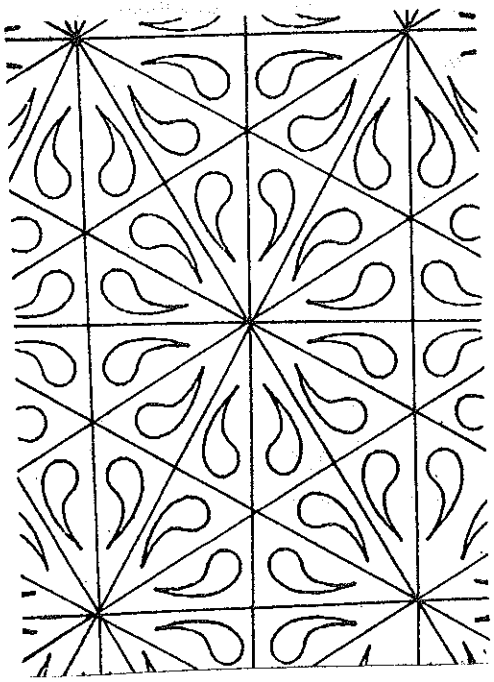
On se lancera aussi dans la production de tels dessins, par des procèdés classiques de déformation, ou plus originaux d'enveloppe (voir § de ce fascicule)
(primaire - 1er cycle) (Cl HERVIEU E.N)

Enfin l'étude des 17 groupes de paveurs du plan pourra occuper des élèves de 2d cycle, de l'université, et des stages de formation des maîtres.





UN ASPECT MATHEMATIQUES



Parmi tous les dessins que l'on a pu manipuler, découper, colorier, étudier... des ressemblances et des dissemblances apparaissent peu à peu.
Les panthères de la première page sont étroitement imbriquées l'une dans l'autre ; les larmes de la figure ci-dessus, si elles se répétent régulièrement ne recouvrent cependant pas tout le plan. Dans le premier cas on a affaire à un pavage du plan, dans le second à un dessin à motif répétitif. Mais, moyennant quelques adjonctions de traits, l'un peut parfais devenir l'autre, comme le montre la figure ci-contre.
Voilà un premier début de classification, et- mais ce ne sera pas notre propos ici - il serait nécessaire de préciser plus les termes employés pour l'approfondir ! Le professeur de math dira que des dessins admettent le même réseau fondamental.
Le plasticien fera remarquer qu'ils obéissent au même rythme.

Les deux dessins de la page de couverture, qui admettent le même réseau, ont aussi pu être coloriés de la même façon : ils réunissent donc les deux critères.

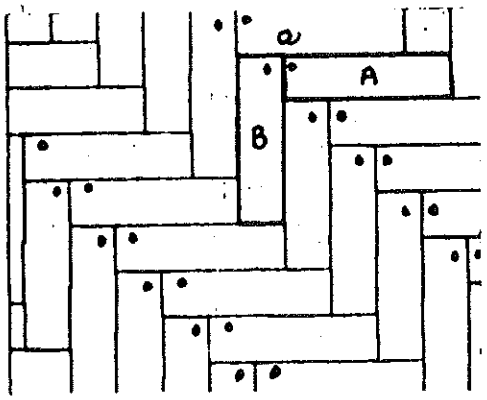
Oui, mais ..... le motif "chinois" admet des symétries axiales, pas le "tuile"!

C'est que, pour grouper les dessins en famille, il va maintenant être nécessaire de se fixer un critère précis (qui ne sera pas celui du plasticien), qui soit succeptible d'une caractérisation précise et stable.

(2) Nous allons choisir un critère (de mathématicien) relatif aux isométries de dessins à motif répétitif.

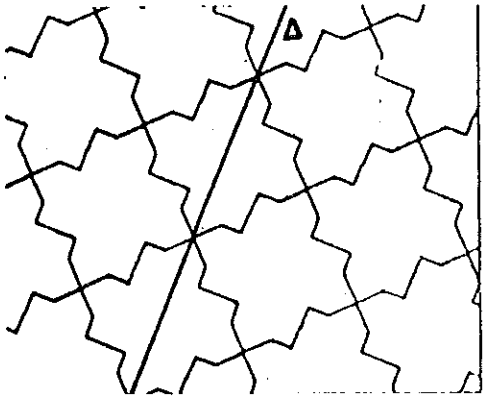
On supposera que les dessins étudiés sont des dessins à motifs répétitifs, et qu'ils couvrent tout le plan.

On dira d'une isométrie plane qu'elle conserve le dessin si cette isométrie, appliquée à tout le dessin (et pas seulement à un motif) le transforme en lui-même.



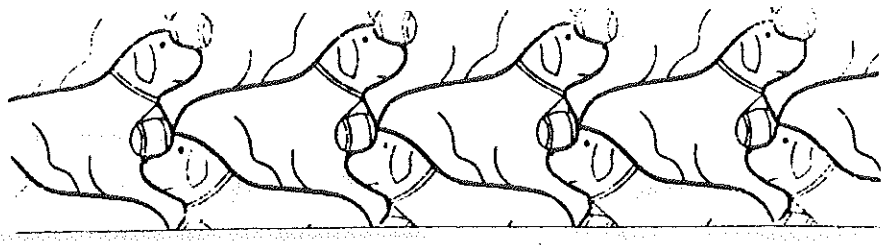
Par exemple la symétrie axiale d'axe Δ transforme le dessin de la figure 11 en lui-même, alors que la rotation d'un quart de tour, de centre a, si elle transforme le motif A en le motif B, ne conserve pas le dessin

(3)



On convient maintenant de dire :
deux dessins seront équivalents s'ils sont conservés par les mêmes isométries.

Ainsi, ignorant le motif d'un dessin, nous ne nous intéressons qu'à la façon qu'il y de le reproduire.



(4) Etudions alors pour un dessin les isométries qui le conservent
soit D un dessin, et J la famille des isométries qui le conservent.

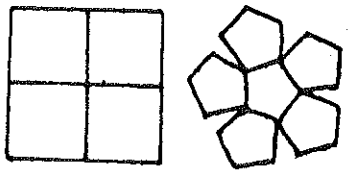
alors : $f \in J_D$, $g \in J_D \Rightarrow f \circ g \in J_D$)
$f \in J_D \Rightarrow f^{-1} \in J_D$) J_D est un groupe

Les isométries qui conservent un dessin forment un groupe.

Pour un dessin donné, ce groupe est déterminé, et c'est un sous-groupe du groupe des isométries du plan (rotations, translations, symétries axiales, et leurs composés).

(5) De plus, il n'y a qu'un nombre limité de tels sous-groupes
- ce résultat est mathématiquement trivial puisque ces sous-groupes sont des sous-groupes opérant discrétement dans E (à orbitres discrètes : les motifs qui se répétent ne se chevauchent pas)
- on peut sentir ce résultat en examinant les limitations imposées par la nécessité de recouvrir tout le plan:
- faisons d'abord une analogie avec le recouvrement du plan par des pentagones réguliers

On peut recouvrir le plan avec des carrés, car autour d'un sommet se placent exactement quatre carrés, sans trous ni recouvrement. On ne le peut avec des pentagones ;

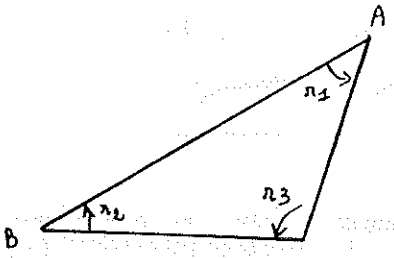


$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2\pi$ c'est à dire $\exists k \in \mathbb{N}$: $k \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$

mais : $\forall k \in \mathbb{N}$ $k\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) \neq 2\pi$ $\left[\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right)\right.$ est la mesure de l'angle d'un pentagone regulier$\left.\right]$

-Que se passe t-il alors pour un dessin à motifs répétitifs ?

Examinons simplement le cas des rotations.
Supposons maintenant qu'un dessin présente des rotations r_1 et r_2



Soit r_1 une telle rotation de centre A d'angle $\frac{2\pi}{\alpha}$ et soit r_2 une rotation de centre B, le plus proche possible de A d'angle $\frac{2\pi}{\beta}$.

Alors la rotation $r_1 \circ r_2$ conserve aussi le dessin, de même que $r_3 = (r_1 \circ r_2)^{-1}$

On doit donc avoir $(r_1 \circ r_2) \circ r_3 = Id$

Appellons $\frac{2\pi}{\gamma}$ l'angle de r_3

Alors $\frac{2\pi}{\alpha} + \frac{2\pi}{\beta} + \frac{2\pi}{\gamma} = 2\pi$

Soit $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1$

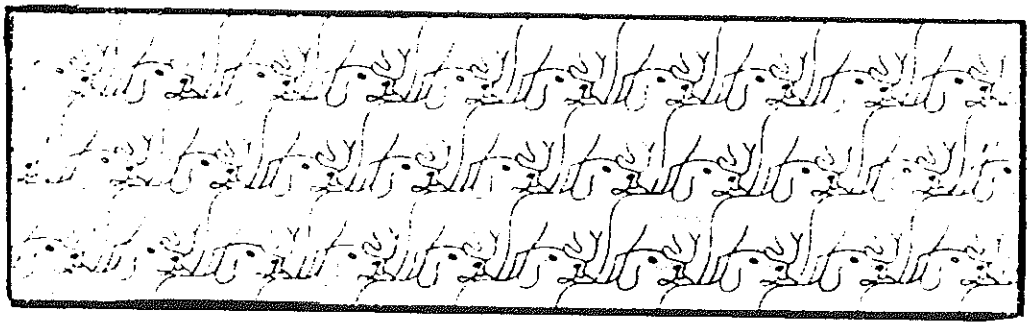
Ceci n'est pas possible pour n'importe quelle valeur de α et β.

On trouve que les valeurs possible sont

$1/\alpha$	$1/\beta$	$1/\gamma$
1/3	1/3	1/3
1/3	1/5	1/2
1/4	1/4	1/2
1/2	1/2	

On voit donc que les rotations possibles seront limitées, limitant ainsi le nombre des sous-groupes possibles.
On démontre qu'il y a exactement 17 groupes de paveurs possibles.

Mais c'est une autre histoire !



Ces 17 groupes sont bien connus en cristallographie, et ce sont les chimistes qui étudièrent les premiers leurs propriétés, leur associant aussi les 256 groupes spatiaux répétitifs

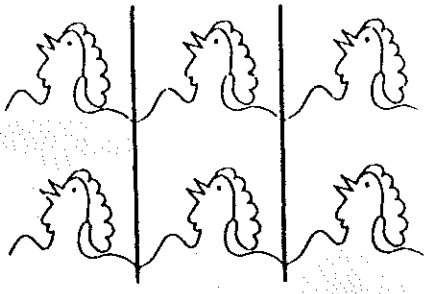
Un raffinement de la classification peut-être obtenu en considérant non seulement le mode de report des motifs, mais aussi les voisins de chaque pavé, c'est la classification de Grünbaum et Sheppard, qui aboutit à 81 familles.

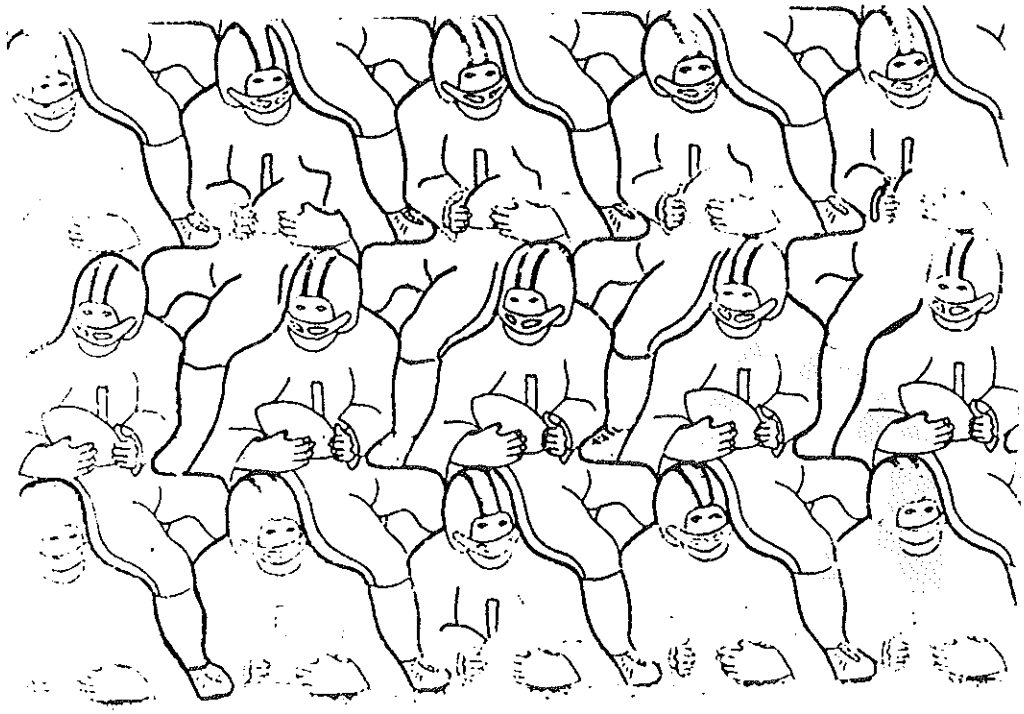
On pourrait imaginer d'autres critères, comme ceux par exemple introduit par des coloriages de ces dessins..

Pour plus de détails, on pourra se reporter à certains ouvrages, comme ceux signalés en bibliographie.

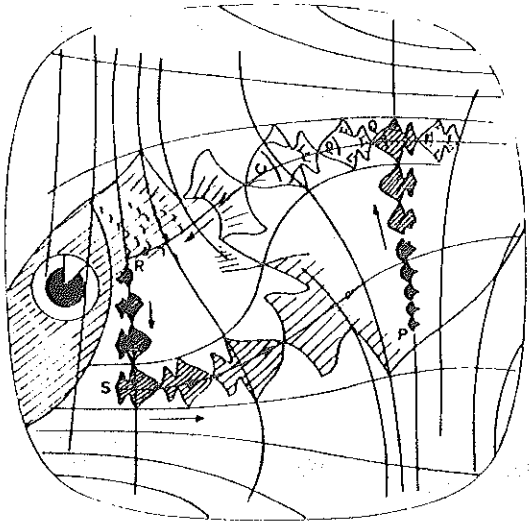
Brigitte

ROZOY-SENECHAL





62. *Poissons et Écailles.* xylogravure, 1959.



63. De l'écaille au poisson.

64 La grille pour *Poissons et Écailles.*

Escher

C O M P T E - R E N D U

D E S A C T I V I T E S

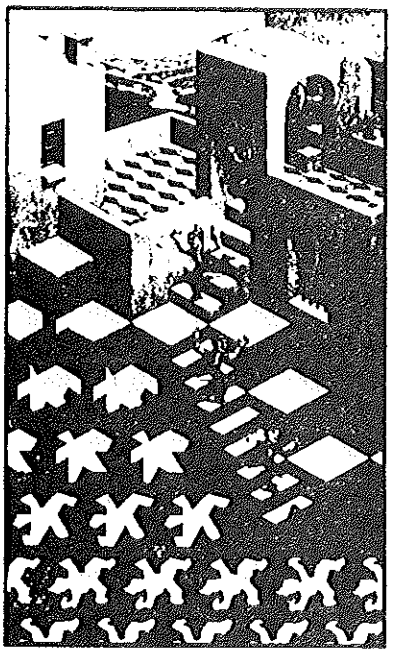
R E A L I S E E S A U C P

D E L ' E C O L E A N N E X E

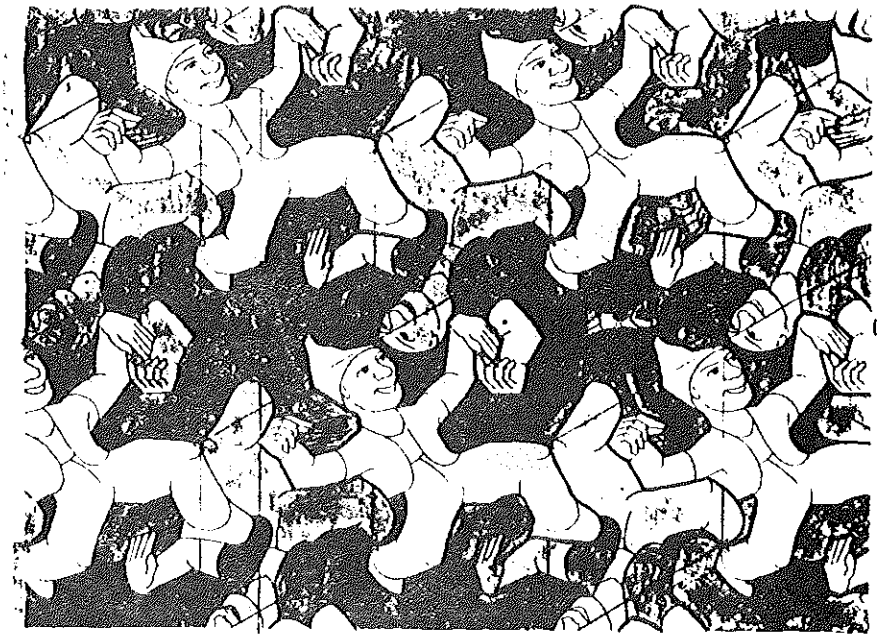
rue de la Délivrande - CAEN

AU COURS DU 1er SEMESTRE

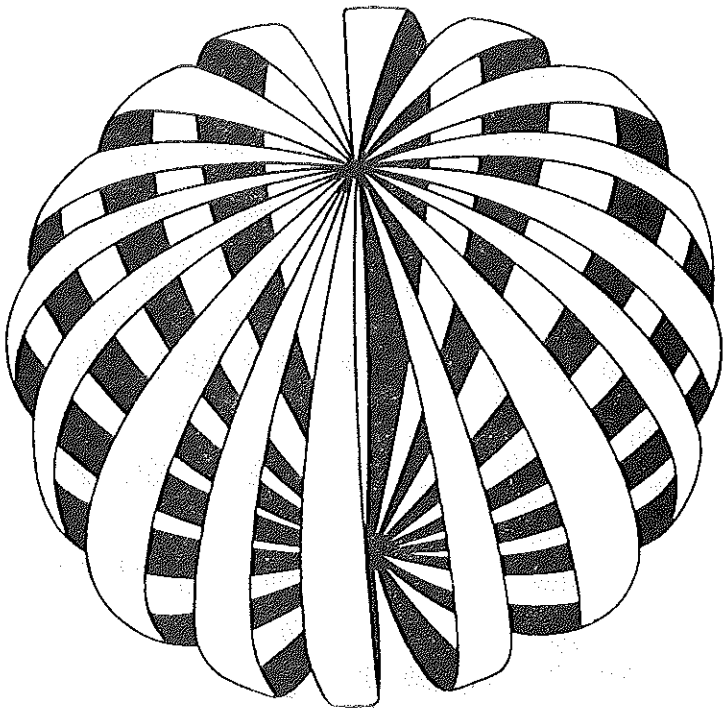
de l'année scolaire 1979-1980



73. *Evolution cyclique*, lithographie, 1938



74. Remplissage périodique d'un plan pour *Evolution cyclique*



Quarante enfants dans une salle,
Un tableau noir et son triangle,
Un grand cercle hésitant et sourd
Son centre bat comme un tambour.

Des lettres sans mots ni patrie
Dans une attente endolorie
Le parapet dur d'un trapèze
Une voix s'élève et s'apaise.

Et le problème furieux
Se tortille et se mord la queue
La mâchoire d'un angle s'ouvre.
Est-ce une chienne ? Est-ce une louve ?

Et tous les chiffres de la terre,
Tous ces insectes qui défont
Et qui refont leur fourmilière
Sous les yeux fixes des garçons.

Supervielle

Les enfants ont participé à deux types d'activité :

- coloriage libre ou avec consigne de dessins à motifs répétitifs qui leur sont proposés.
- fabrication par ces enfants de dessins à motifs répétitifs (à partir de gabarits), puis coloriage de ces dessins.

Ces deux activités ont été complèmentaires, la deuxième conduisant les enfants à observer la disposition des motifs les uns par rapport aux autres (les motifs étant d'ailleurs dans ce cas de grande taille). Il en a résulté une autre perception des motifs proposés pour les coloriages et une réflexion des enfants quand à la disposition des couleurs.

==========

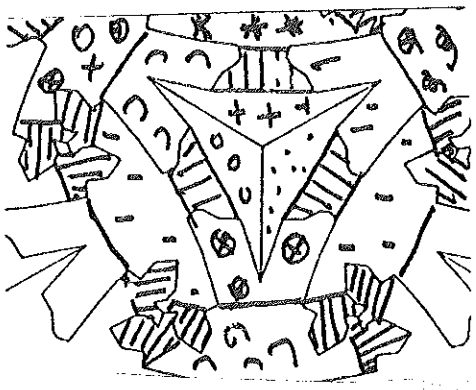
AVEC LES CHINOIS

Coloriage libre (début C.P)

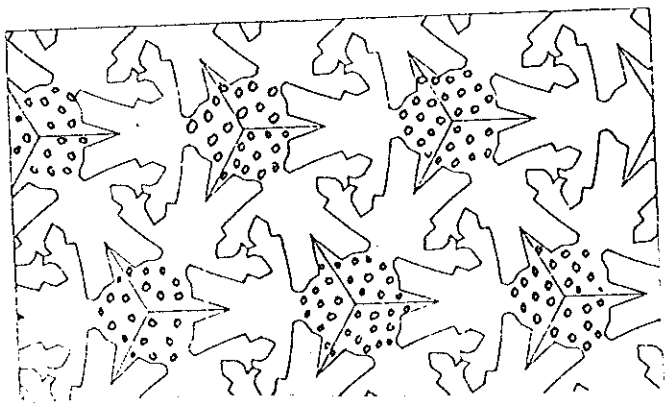
On trouve :

a) des chinois coloriés entièrement de la même couleur en utilisant une couleur par chinois

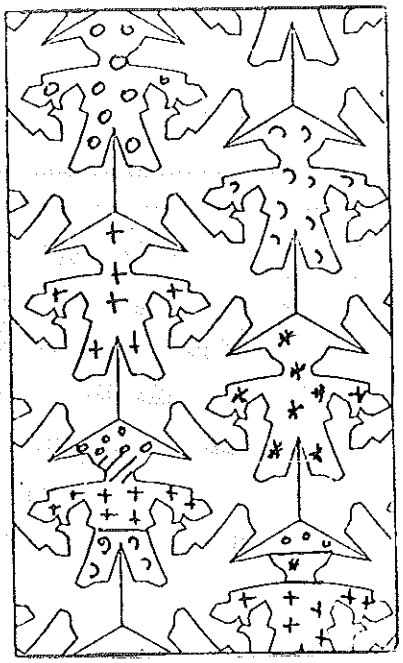
b) des chinois tête et mains roses, chapeau veste et pantalon de couleurs différentes



c) des chinois dont les têtes et chapeaux sont coloriés par groupes de 3



d) Seuls les chinois en direction correspondant à la verticale, sont coloriés en utilisant différentes couleurs.



1ère activité de pavage :

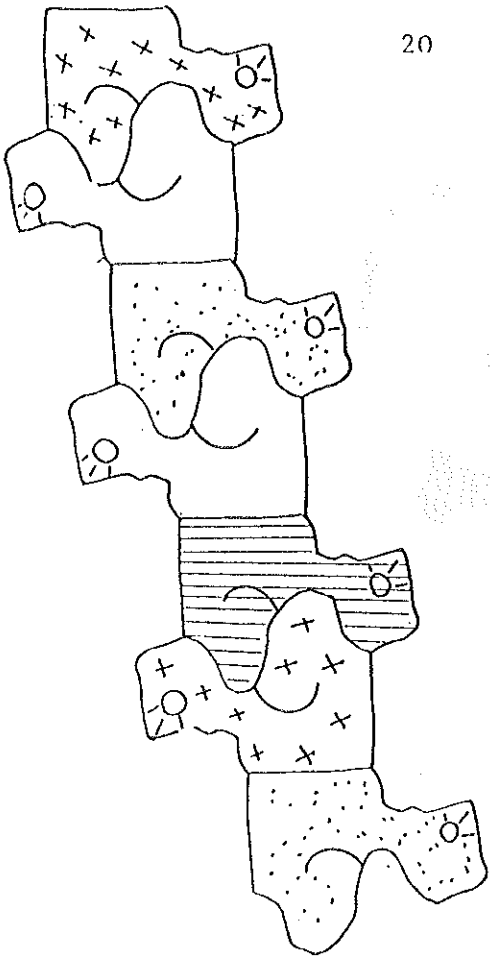
LES CANARDS

Les enfants disposent de feuilles polycopiés de 4 couleurs différentes.

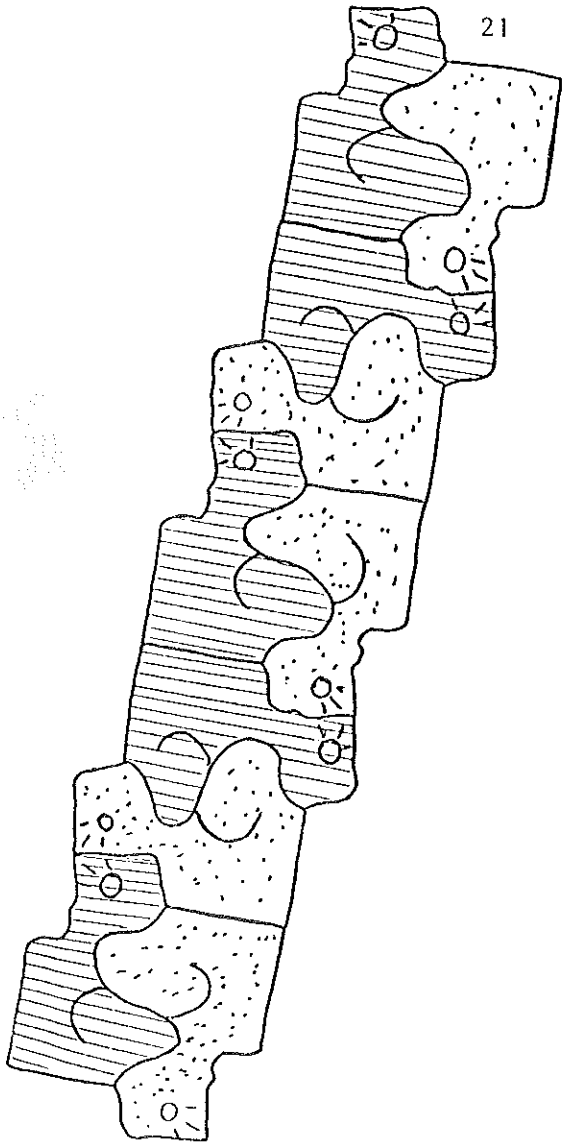
Ils découpent les canards qu'ils veulent et les collent sur une feuille blanche.

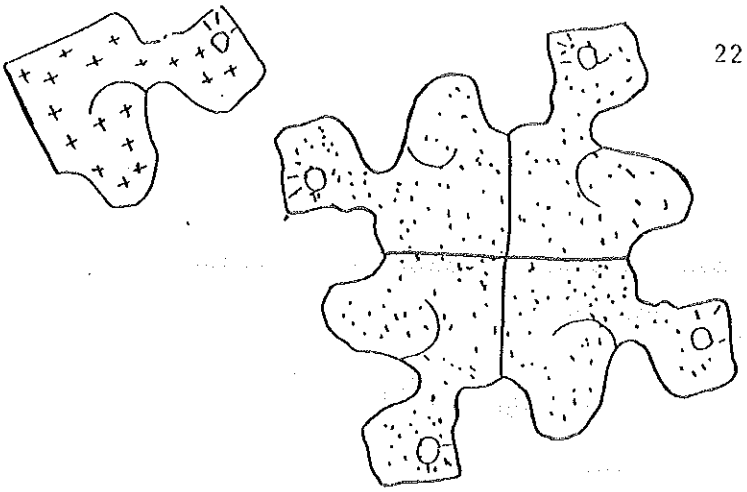
Ils découvrent : ça s'emboîte et réalisent quatre types de pavages.

20

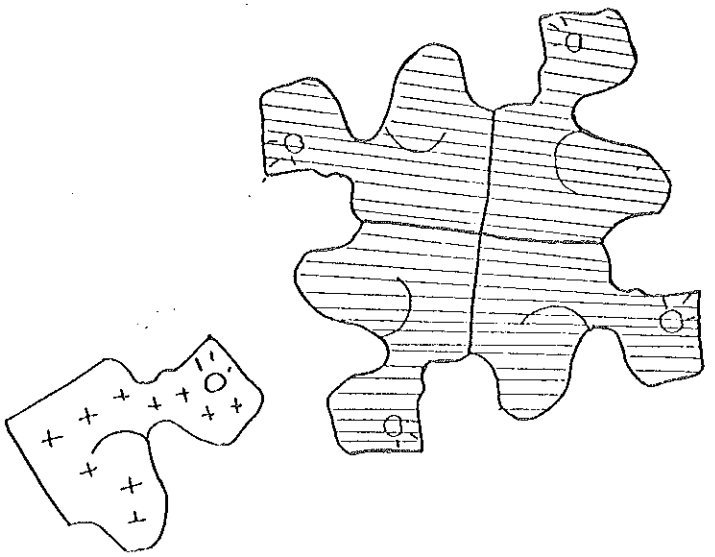


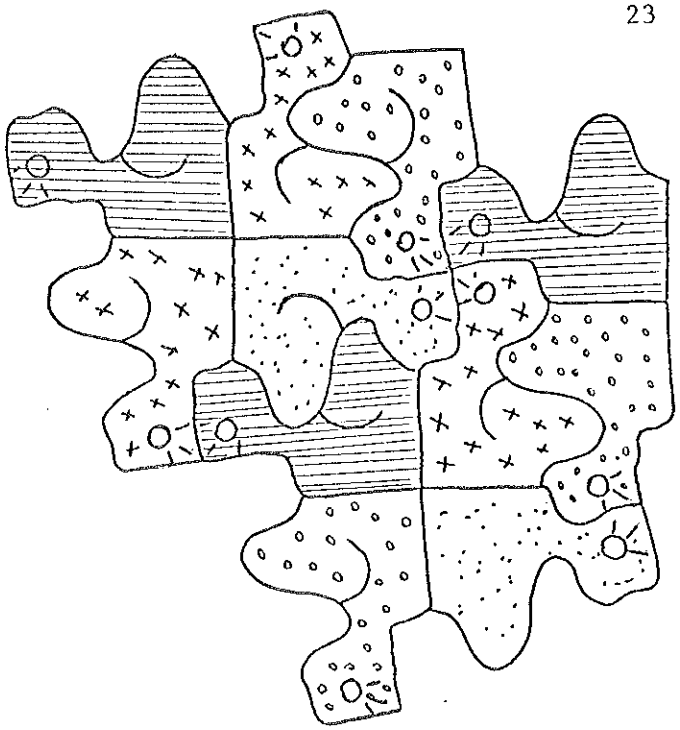
21





22





23

2ème activité de pavage

LES OISEAUX

Documents 24 et 25

a) deux enfants manipulent des patterns d'oiseaux de 2 couleurs différentes et procèdent comme avec les canards

- frises avec rythme de couleur
- pavages avec découverte des formes qui s'emboitent

b) ces deux enfants utilisent un gabarit d'oiseau qu'ils font tourner pour obtenir un pavage de la feuille

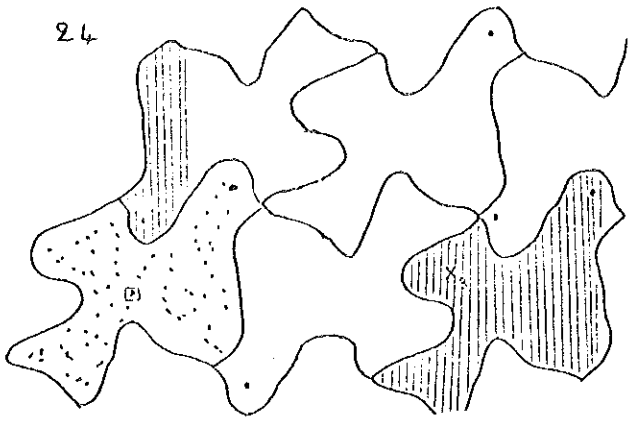
c) les deux enfants colorient

Ils prennent chacun une craie de couleur différente.

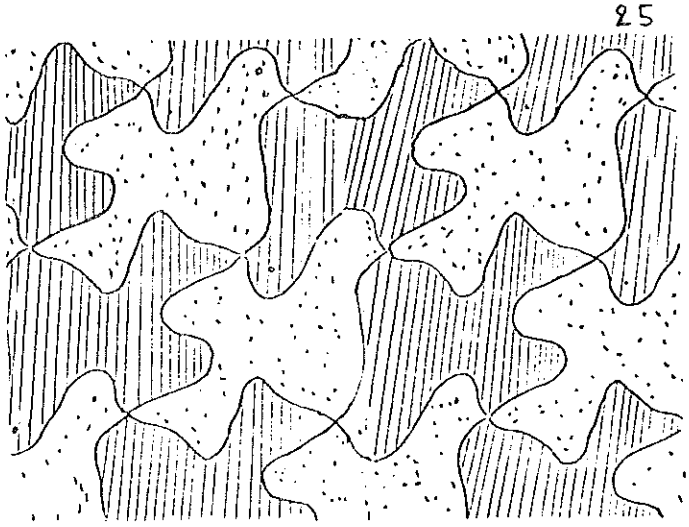
Document 24 - Cédric qui a colorié l'oiseau A s'exclame en regardant (x3) : "Elle a fait le mien !"

Document 25 - Les deux enfants ont recommencé le pavage d'une feuille et respectent la loi qu'ils se sont donnée.

24



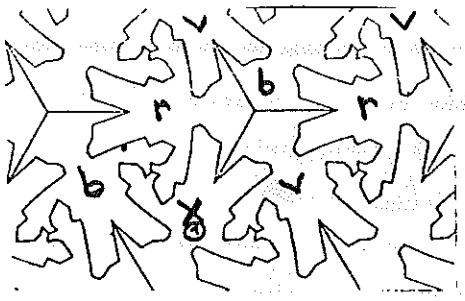
25



AVEC LES CHINOIS

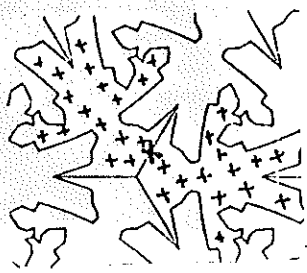
Coloriage

Consigne = utilise 3 couleurs

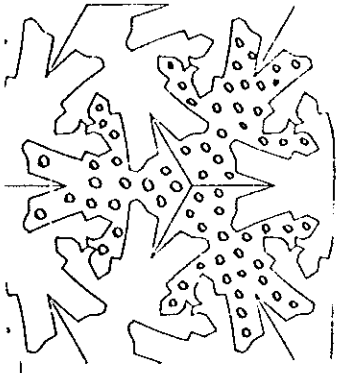


1ers essais :

1) l'enfant s'arrête insatisfait sur X 1
"Je ne peux mettre ni un bleu
ni un vert
ni un rouge



2) "Je me suis trompé, ces deux là sont de la même couleur.

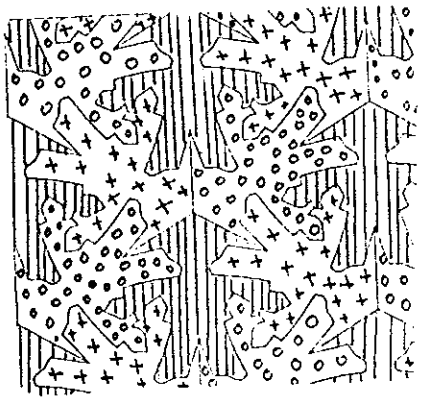


3) 1'enfant commence comme ceci puis s'arrête ?

4) Un début de coloriage.
L'enfant s'arrête et dit
X2 "Je ne peux faire ni un bleu
ni un vert
ni un violet
car ils sont en rond.

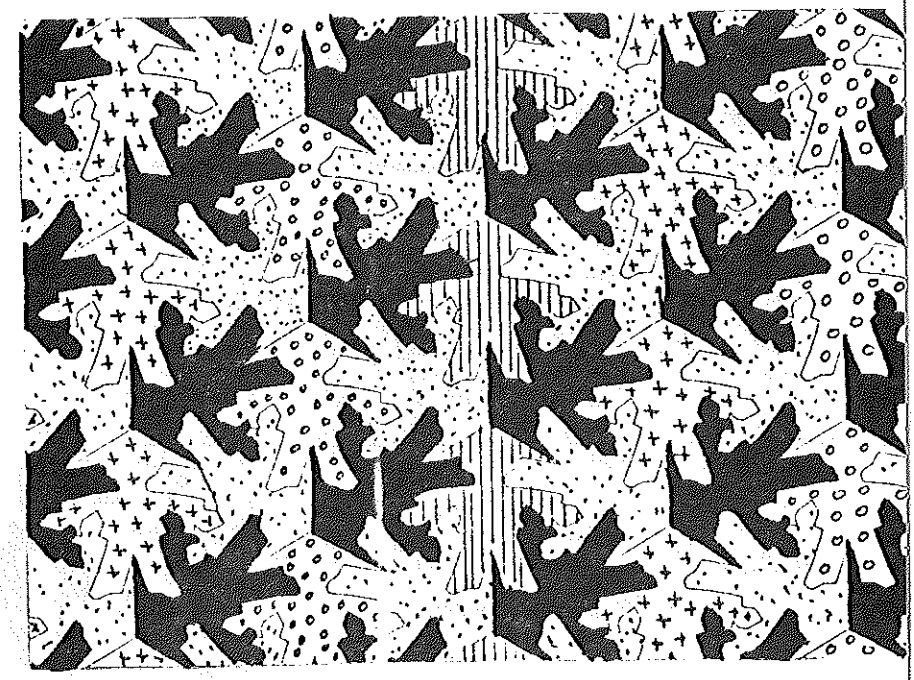
bleu
vert
violet

5) Des enfants colorient de proche en proche en se donnant une loi : 2 chinois qui se touchent ne sont jamais de la même couleur.

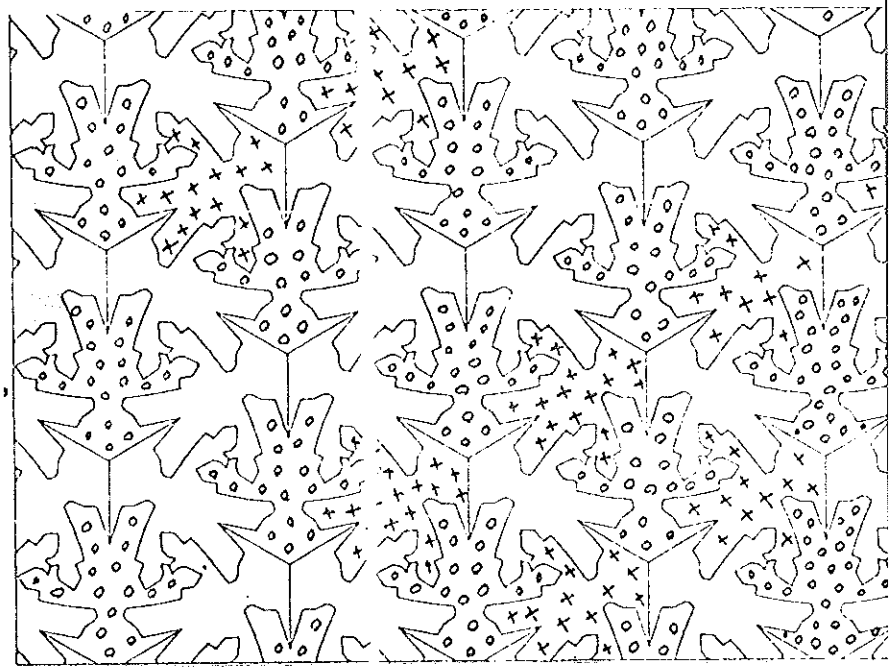


6) L'enfant conserve deux fois la même couleur pour les chinois de même direction.

Sur la 3ème direction, l'enfant trouve un rythme.



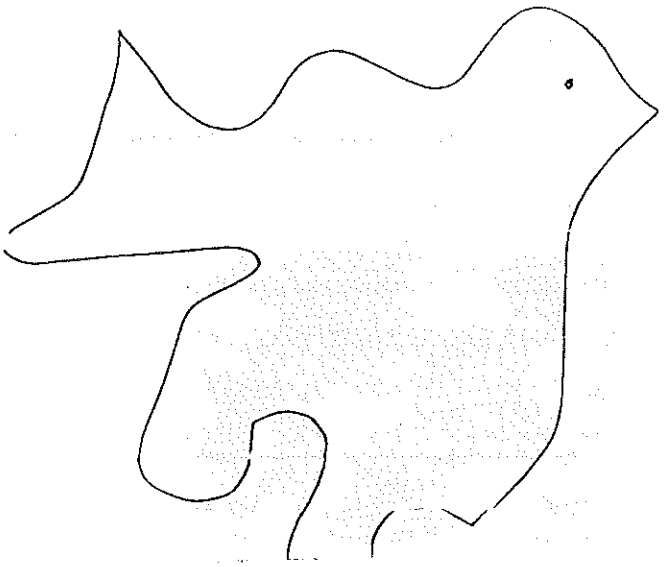
7) Reproduction d'un travail en cours d'élaboration.
L'enfant colorie d'une même couleur, tous les chinois de même direction.

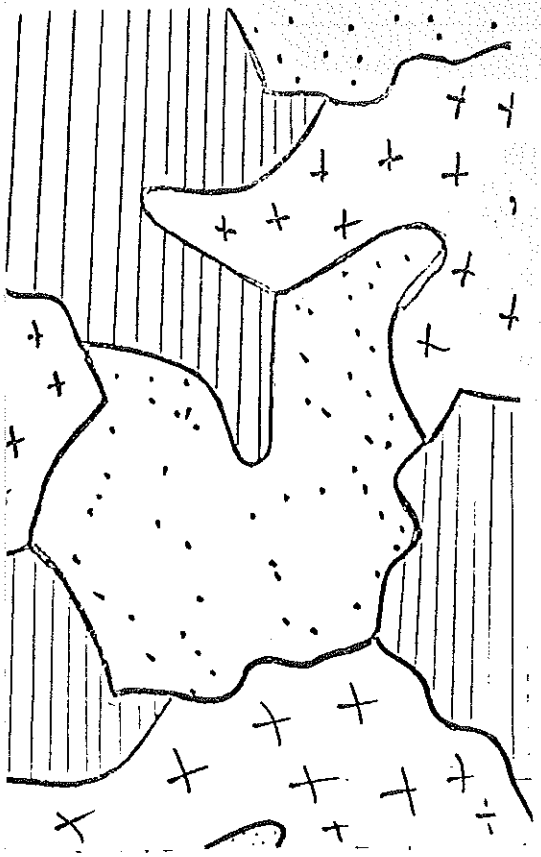


D'AUTRES ACTIVITES DE PAVAGE

- un oiseau proposé comme gabarit

Travail identique à celui de l'oiseau précèdent.

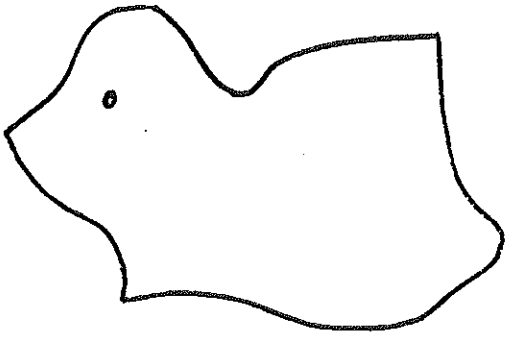




- Un écureuil proposé comme gabarit puis coloriage

- un cochon d'inde

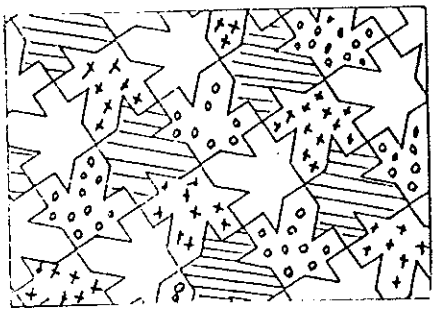
des patterns de 4 couleurs différentes sont proposées aux enfants qui réalisent des pavages type document 23 puis il utilisent un gabarit pour faire un pavage de leur feuille et colorient en utilisant 4 couleurs.

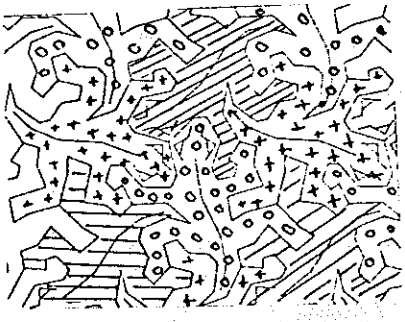


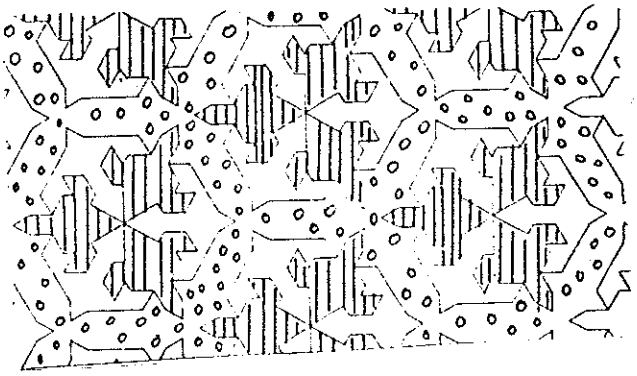
COLORIAGE

Sans consigne concernant le nombre de couleurs à utiliser.

Février - Mars

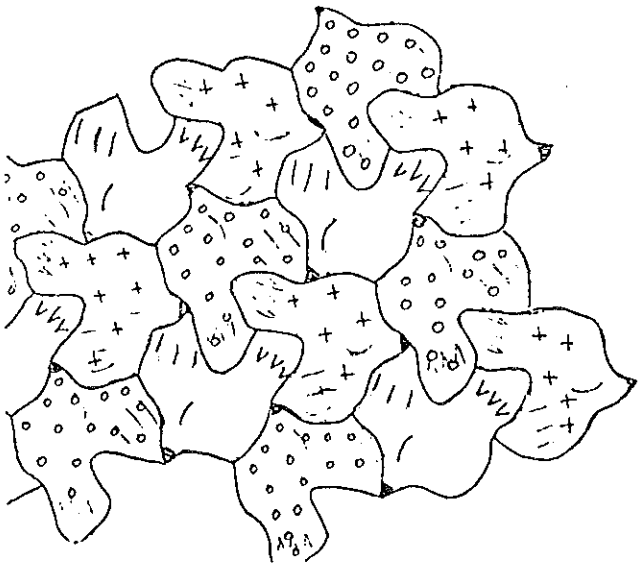


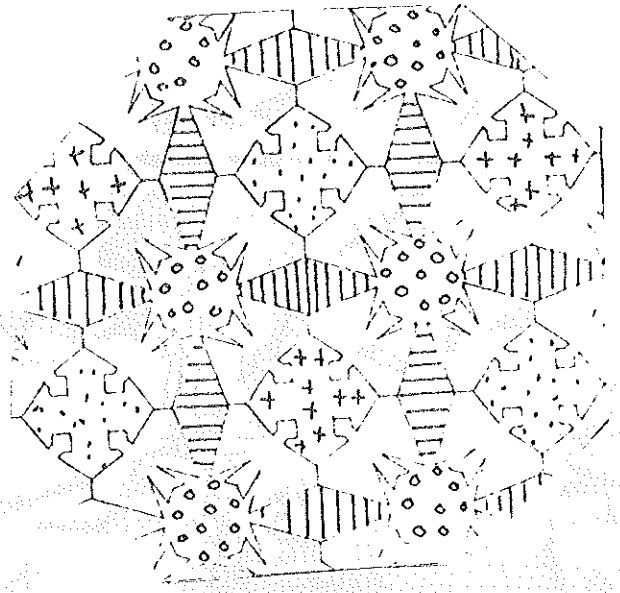




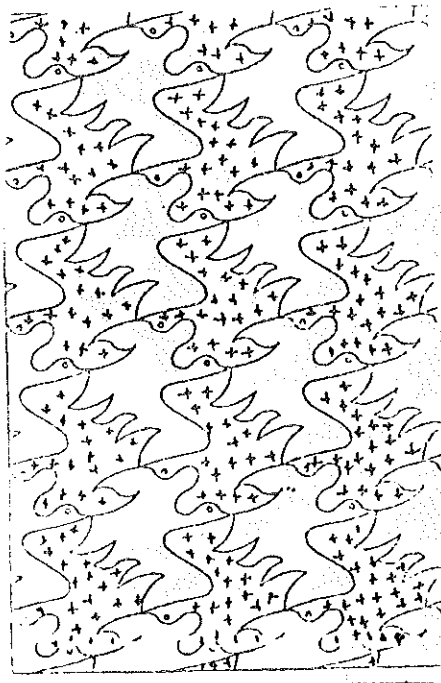
Deux méthodes utilisées par les enfants

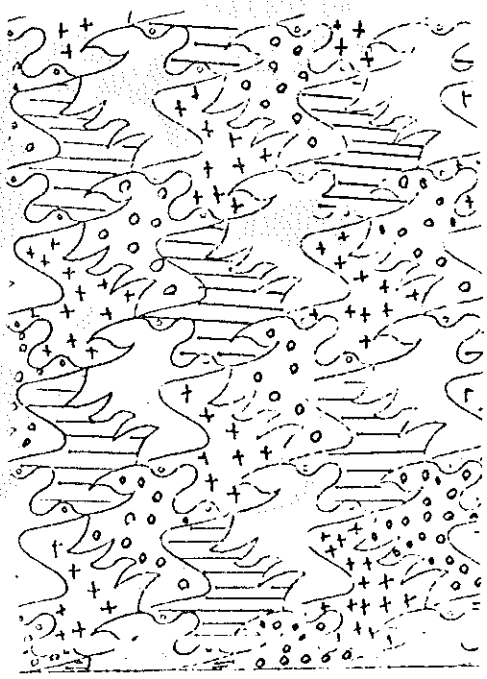
- coloriage de proche en proche
- coloriage d'une même couleur des oiseaux de même direction
- une réflexion "2 couleurs", ce n'est pas possible, il m'en faut 3

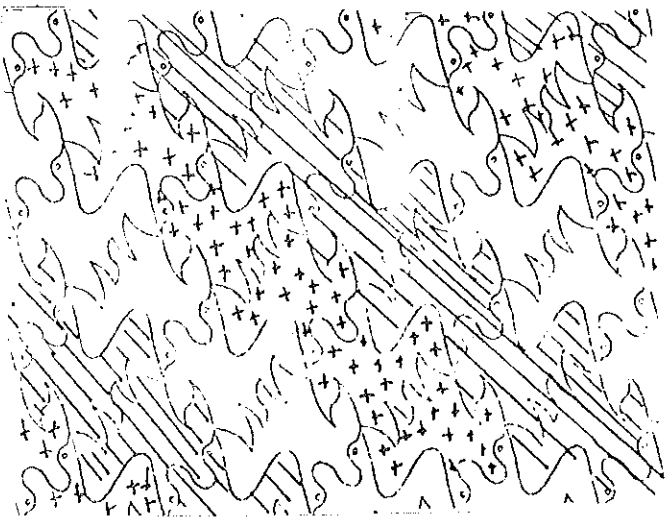


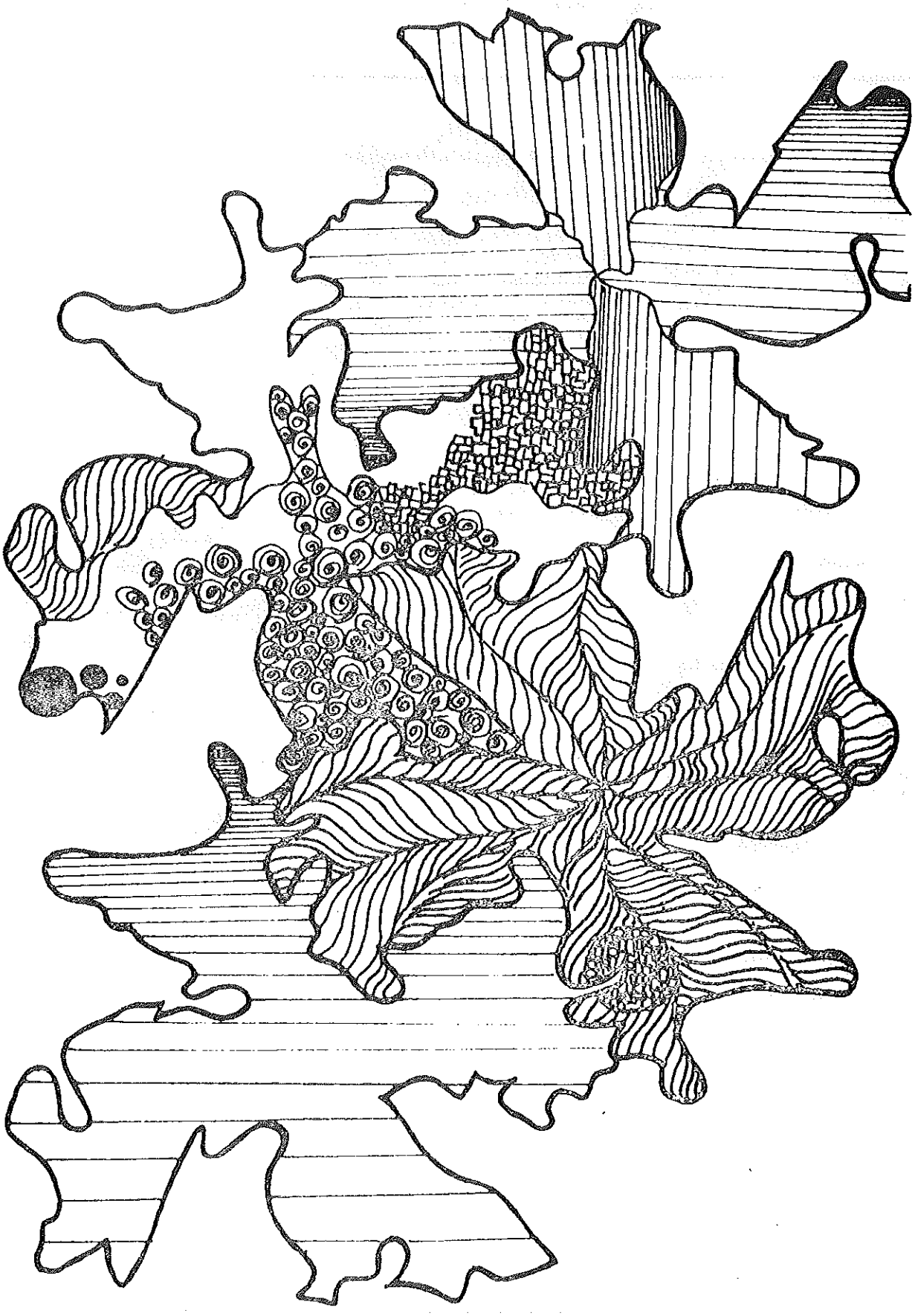


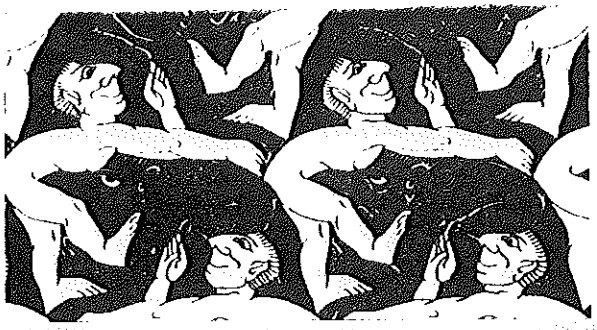
LES OISEAUX Les enfants se donnent des lois pour colorier











PETITE HISTOIRE D'UNE EXPERIENCE (A POURSUIVRE ET APPROFONDIR) OU ESSAI D'INTERDISCIPLINARITE MATHS-ARTS PLASTIQUES ET RECIPROQUEMENT

+/+/+/+/+/+/+/+/+/+/+/+/+/+/+/+/+

En préambule, je rends à Jules ce qui appartient à César (et réciproquement)

1°) à Escher, Maurits Cornelis, graveur néerlandais (1989-1972) dont les oeuvres "fusion de l'art et des mathématiques" nous ont inspiré cette recherche

2°) je viens d'écrire "nous" car l'idée de s'inspirer de l'oeuvre de Escher pour "faire" des maths vient à ma connaissance de Jullien de l'IREM. de Grenoble et de Brigitte Rozoy-Sénéchal de l'IREM de Caen qui avaient étudié "Le pavage du plan".

\+ \+

\+

J'ai donc démarré en utilisant le principe de base de la Pédagogie Freinet : "Le tâtonnement expérimental" : expérimenter avec les enfants, observer les résultats avec les enfants - déduire, ce qui n'exclut pas bien au contraire une préparation très soignée de la "part du prof"

Je disposais d'un grand nombre de planches multigraphiées de pavages du plan dont quelques modèles sont joints, élaborés à l'Université d- Grenoble sur table traçante d'ordinateur.

De la 6ème à la 3ème sans autre commentaire que "vous coloriez", j'ai distribué aux élèves un exemplaire d'un des tirages. Par la suite, chacun a pu prendre à volonté les clichés de son choix en nombre illimité.

De même que tous les travaux d'activités esthétiques sont systématiquement affichés et commentés par tous, j'ai procédé de même avec ceux-ci.

Pour faciliter l'exposé, considérons la planche1: les oiseaux distribués et coloriés par une classe.

L'observation méthodique des coloriages et le choix de l'organisation des couleurs va mettre en valeur les propriétés de ce "pavage du plan".

CAS 1 : Nicole a colorié les rangées horizontales a, b, c, d en rouge et les rangées e, f, g, h en vert

Il apparaîtra immédiatement qu'elle a vu que les oiseaux type "a" sont glissés comme ça _____"

idée de translation

Utilisera t-on le mot ? Pourquoi pas ?

Il n'a rien de compliqué et facilitera l'expression et la communication, mais pas dès la 1ère observation. Le mot précis n'apparaîtra pas comme une contrainte mais comme un outil pratique.

Et les oiseaux de type e ?

Là encore, translation horizontale mais ils sont "à l'envers" ou encore "retournés". Parlerons-nous de "retournement"? Peut-être si le besoin s'en fait sentir.

Pourra t-on s'en passer si on veut parler des "chats". C'est ainsi que j'ai baptisé une autre planche.

CAS 2 : Frédéric a colorié verticalement : colonne 1 en violet, colonne 7 en jaune. Les mêmes propriétés apparaîtront mais "comme ça ↕ "

CAS 3 : François a vu une autre translation
de c vers 3 } et ainsi de suite sur toute la surface en utilisant
ou de b vers 15 } 2 ou plusieurs couleurs - (autant que de rangées par exemple)

Et si l'on utilise 3 couleurs - 4 couleurs réparties en tythme régulier,
Que verra t-on ?
Essayez donc

CAS 4 : Les couleurs sont posées au hasard - Il n'apparaît rien

Bilan simplifié de l'utilisation de cette planche

I - Esthétique = organisation des couleurs
Contrastes-oppositions = clair - foncé
"Pourquoi ça ressort ?" noir - blanc
couleurs chaudes, couleurs froides, couleurs complémentaires, harmonies de tons et de nuances.

II - Les couleurs et l'observation de leurs répartitions diverses conduisent à la perception plus ou moins intuitive de propriétés mathématiques.
ici : translations
retournements

III - Pour communiquer sa démarche un vocabulaire précis apparaît comme une nécessité, un outil aussi pratique qu'indispensable. Les mots proposés par les élèves pourront être provisoirement retenus.

IV - Observation d'une structure colorée et peut-être besoin d'un codage (j'ai dû placer des lettres et des chiffres)

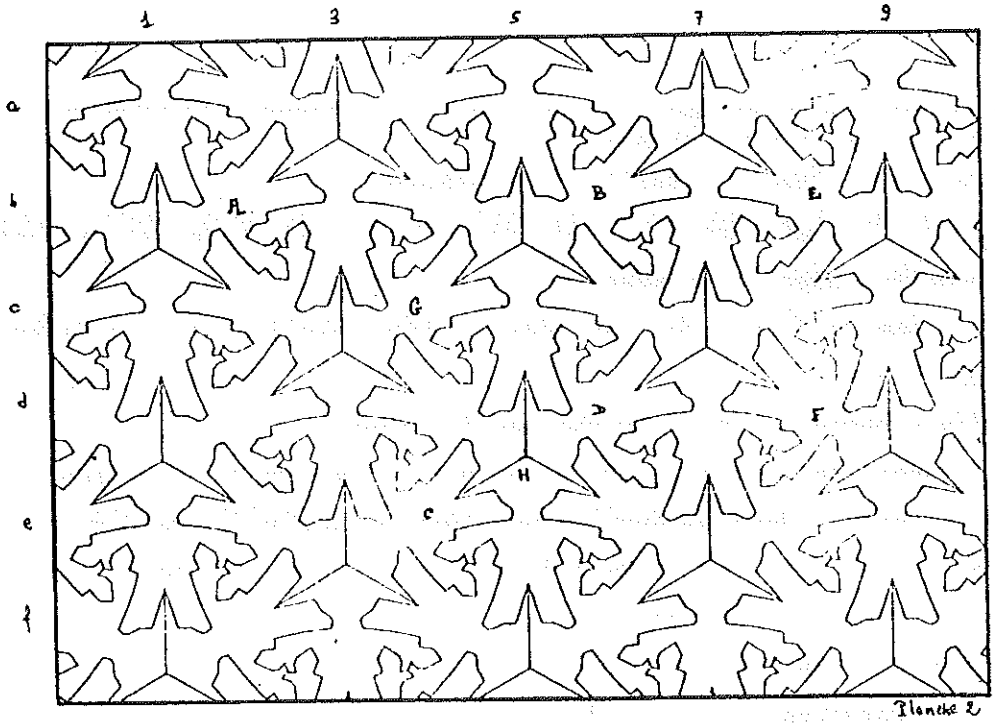


Planche 2

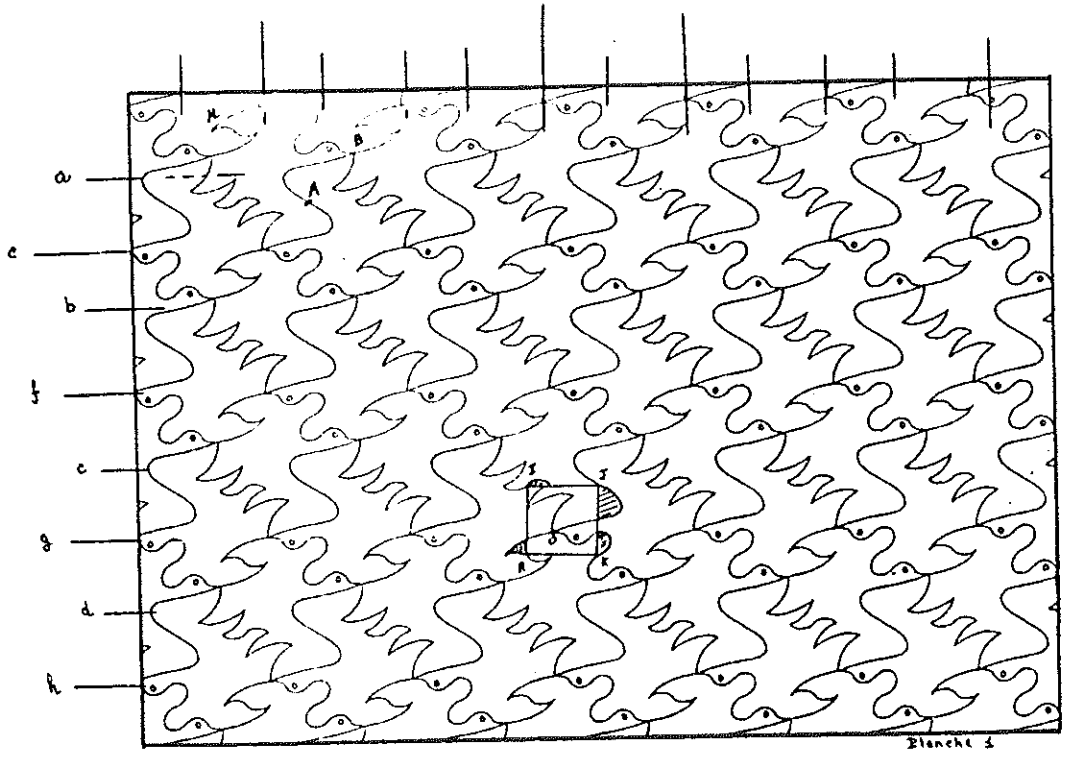


Planche 1

EXPLOITATION DES "CHINOIS" (cf planche 2)

Je ne les ai pas distribués dans la même classe car, à y regarder de près les translations mises en évidence avec les oiseaux se retrouvent mais de façon différente (chinoisA, chinois B)

Ce pourrait être l'objet de cette planche :

Voit-on "les même choses", peut-on formuler des observations analogues à celles formulées avec les oiseaux ?

Mais comme ma seule consigne était "vous coloriez" !, les élèves ont vu tout autre chose.

- les groupements par 3 - chapeau à chapeau

La plupart ont choisi 1 seule couleur par groupe de 3 "chinois". Là encore utilisation des couleurs (et peut-être cours), en comparant les résultats à propos de différentes organisations possibles des couleurs - tons - nuances - oppositions - contrastes.

Mais nous sommes en maths !!!

Observe bien : rotations de ... x degrés

translations : j'ai cité A vers B

mais encore : C vers D, E vers F, A vers G

mais encore : droite 3 par rapport à une bande

droite 5 par rapport à l'ensemble

symétries axiales : et je n'ai certainement pas épuisé le sujet !

Et les vecteurs. Est-ce que cela ne peut pas être utilisé pour une meilleure conception de cette notion ? une approche de leur réalité tangible. Les physiciens ne me désapprouvent pas si avec ces dessins, on met en lumière qu'un vecteur n'est pas seulement une vue de l'esprit tortueux d'un matheux !

Maintenant, essayez vous même "ou" avec vos élèves, "ou", "oui" le prof d'Arts plastiques, "ou" les 3 à la fois : interdisciplinarité, équipe pédagogique...

Jetez vous à l'eau - l'interdiscipminarité maths-arts plastiques, ce n'est pas une découverte de 1978-1979, mais c'est une vraie joie et peut-être un outil pour "décloisonner" notre enseignement (et puis, il y a les "10 %), pour y apporter un nouveau souffle ou un regain de vie ou de la vie, tout simplement.

Des peintres comme DELAUNAY, MONDRIAN (ce ne sont pas de célèbres inconnus du prof de dessin) l'avaient compris dès le début du 20ème et les arabes dès le .... 7ème siècle.

Ah oui, j'oubliais ! Où se procurer les dits clichés ?

A l'IREM de Caen, nous en possèdons une bonne dizaine sans compter 24 petits clichés à agrandir au pantographe (autre activité maths : parallélogramme déformant, proportionnalité, homothétie).

Mais nous n'avons pas les "reins solides" à moins que vous n'y alliez de votre obole ? Et l'education Nationale, là dedans, où sont ses crédits ? Politique ! J'allais m'embarquer ! ... et comment fournir à tous les amateurs ?

Revenons à nos moutons. La planche de salut, je vous la tends car j'ai, et dans le Calvados, d'autres enseignants, tenté avec les élèves du cycle élémentaire à la 3ème une autre démarche : inventer vos propres pavages du plus simple au plus plus complexe. Avec des élèves de 6ème, 5ème, 4ème, ça marche !

J'ai simplement adapté pour les élèves les recherches de Brigitte ROZOY et de JULLIEN en essayant d'analyser tout ce qu'on peut en déduire au plan pédagogique.

Brigitte a rédigé un exposé qui montre que ces dessins répétitifs obéissent à des règles précises qu'il est possible de classer en 17 groupes (application pédago : structures de groupes - algorithmes).

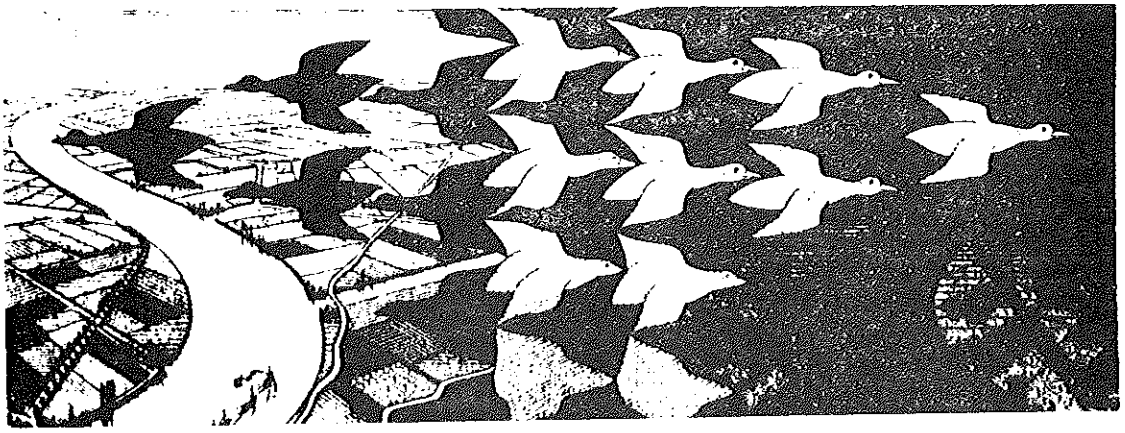
Elle en a écrit 12 pages qu'il faudrait ajouter à celles-ci. Un roman, quoi !

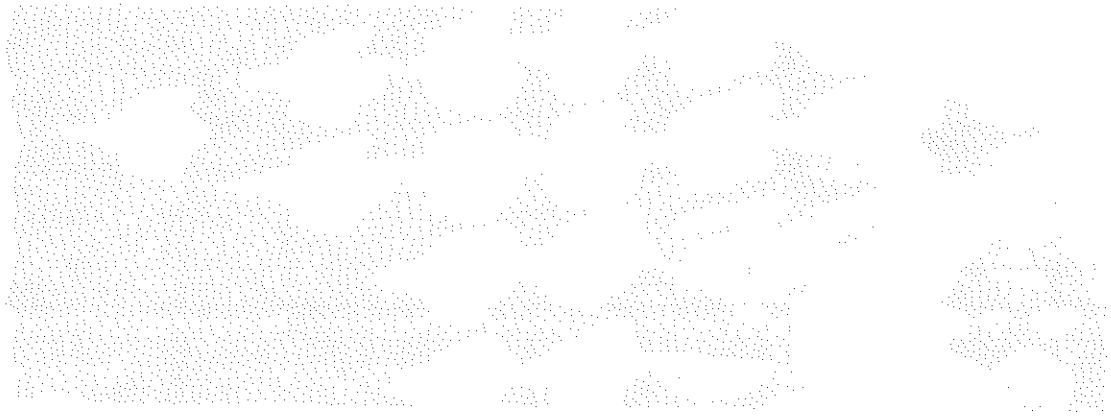
Elle montre que l'on ne peut utiliser que des "pavés de base" ou de "formes quotient" de forme et de nombre très limité pour que le plan soit parfaitement couvert. Je les indiquerai rapidement après, parce que là encore, il y a exploitation pédagogique puisqu'il faudra des constructions géométriques rigoureuses. J'insiste sur "rigoureuses" si l'on veut obtenir des planches du style de celles déjà présentées et de qualité. Cà ne tolère pas "l'à peu près

Ces précisions (qui pour l'instant ne vous donnent rien) étant données, je reviens à la partie pratique de ce que j'ai fait faire à des élèves et des collègues du cycle élémentaire en recyclage (avec la collaboration de C.HERVIEU de l'ENF de Caen).

Manipulez, à la lumière de ce que m'ont appris les élèves

Il vous faut du papier fort ou du carton mince, compas, crayon - cutter ou ciseaux.





1°) Sur le carton, tracer 2 triangles équilatéraux égaux

2°) Sur la périphérie du triangle A, prévoir des languettes de collage

3°) Tracer un point quelconque sur la surface du tri.A (il peut être au centre de gravité ou ailleurs)

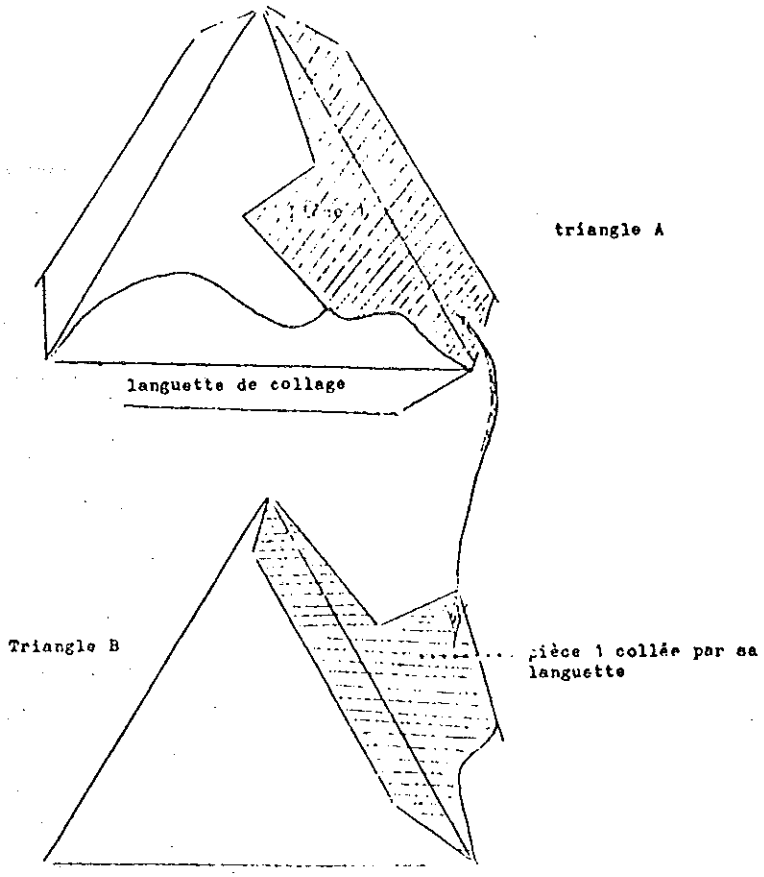
4°) Partir de ce point, tracer à votre guise des lignes, droites ou courbes vers les sommets du triangle A

Rq 1 : avec les élèves afin d'éviter des difficultés ultérieures, préconiser des lignes simples et de tracés très différents

Rq 2 : si vous ne tracez pas les lignes vers les sommets, vous verrez ce que cela donnera par la suite. Je l'ai fait, pour voir (St Thomas disait).

5°) Découpez soigneusement chaque partie du triangle A ainsi déterminée.

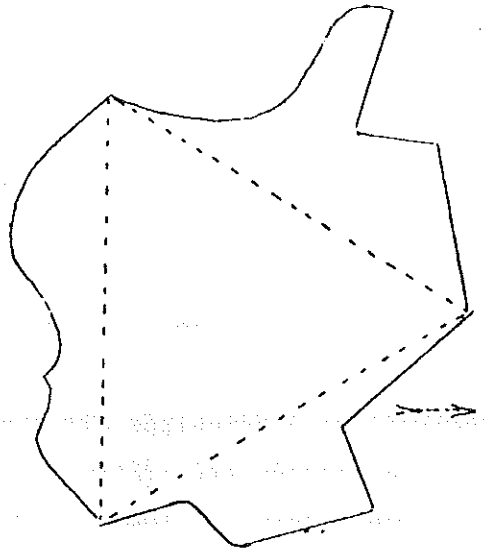
5°) A l'aide des languettes de collage, fixez chaque partie de A sur le triangle B en respectant la disposition de A



7°) Vous obtiendrez ceci (voir ci-contre).

C'est avec ce gabarit que nous allons travailler.

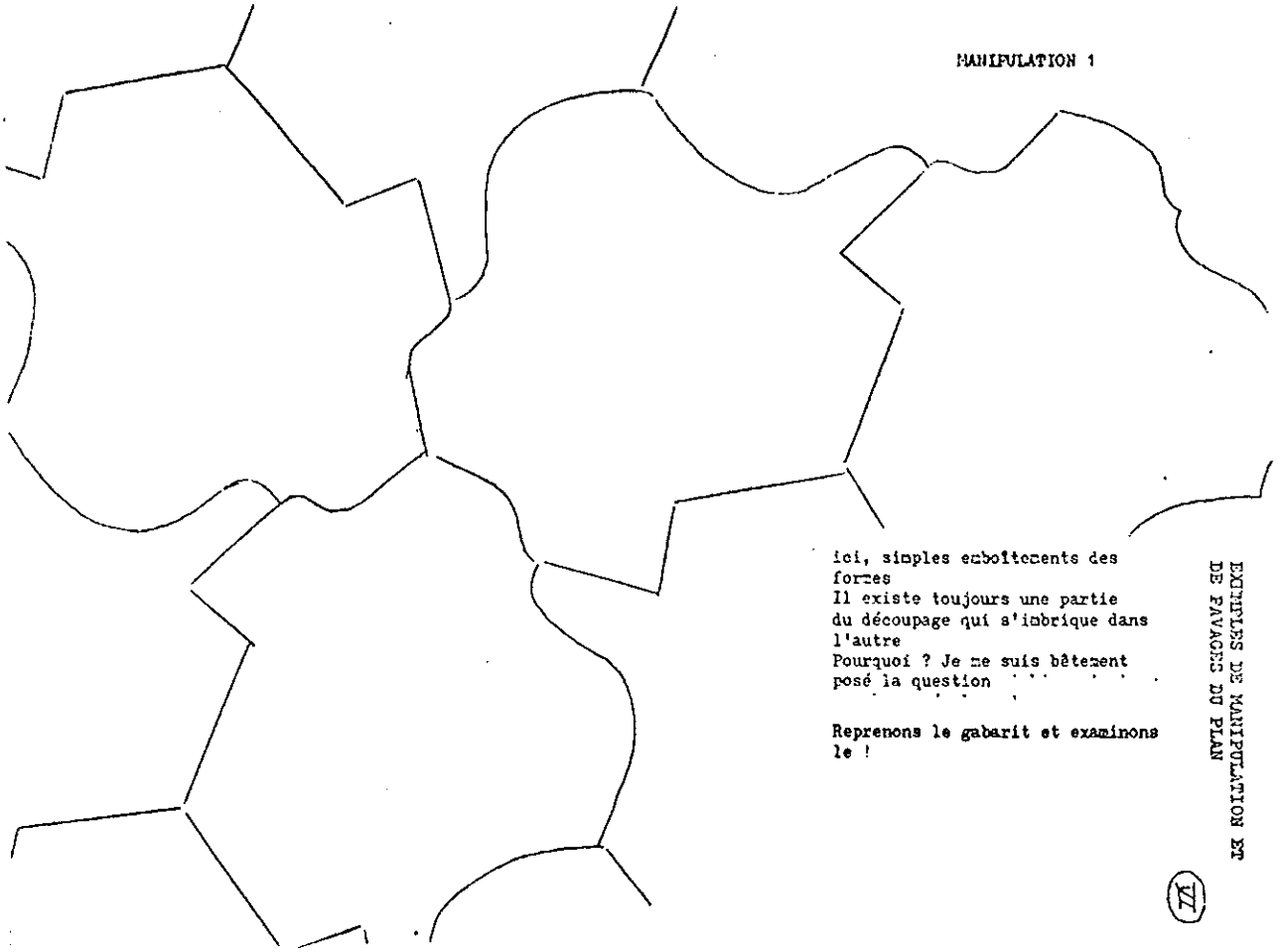
RQ : avant de coller les languettes, les plier soigneusement suivant le côté du triangle de manière que chaque partie soit articulée, chaque coté du triangle servant d'axe de rotation.



c'est cela que nous avons baptisé : "pavé de base" ou "figure quotient"

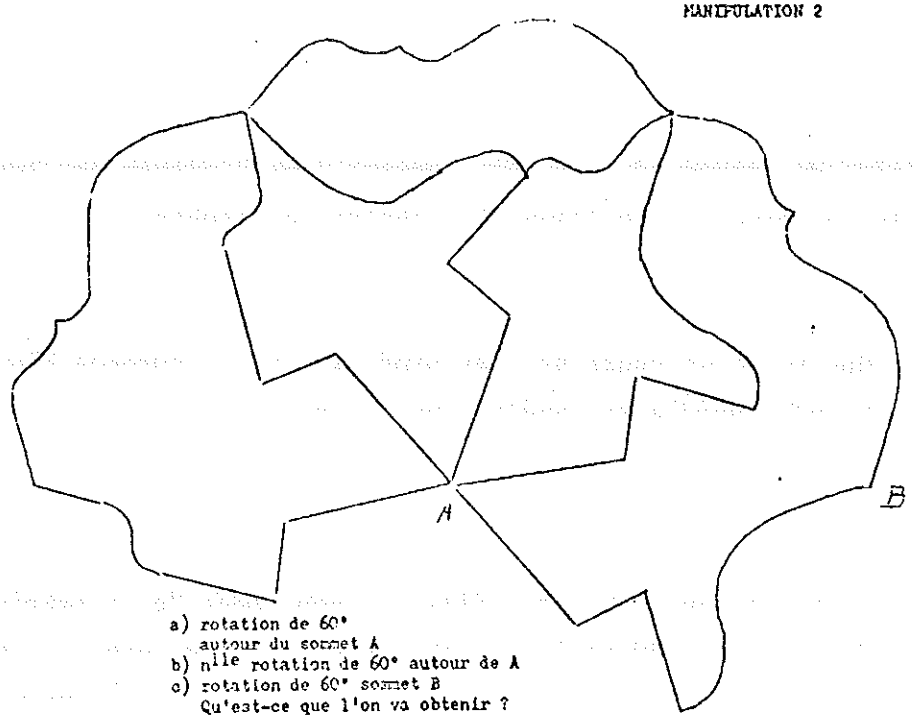
La forme géométrique de base peut être aussi : un carré, un rectangle (il faudra tracer 4 lignes au lieu de 3), un demi carré, un demi triangle équilatéral, un demi rectangle, un losange (dont les angles devront être diviseurs de 360°)

Nous avons baptisé "enveloppe", ce procédé . (cf Annexe de ce fascicule)



Imbriquer (voir manip. 1)
La pose des problèmes de repérage, d'observation mais il est possible d'aller plus loin.

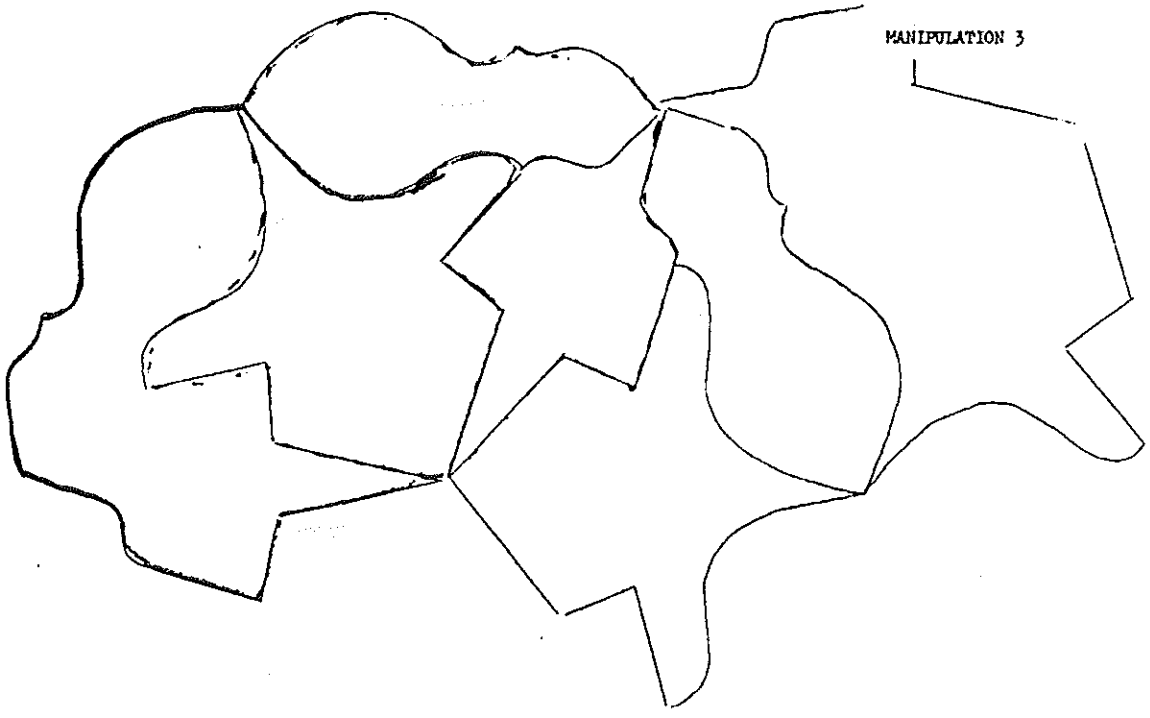
MANIPULATION 2



a) rotation de 60°
autour du sommet A
b) n^ième rotation de 60° autour de A
c) rotation de 60° sommet B
Qu'est-ce que l'on va obtenir ?

A vous de jouer.
Nouvelles observations
Nouvelle mise en couleur
Nouvelles propriétés de ce pavage

MANIPULATION 3



Ici, j'ai procédé par translations et retournements dans cette direction ———

à poursuivre dans cette direction

et il apparaîtra...

à vous et aux élèves d'observer, de colorier

Un truc : repérez bien vos sommets à chaque tracé

- mon tracé n'est pas achevé
il manque des portions de lignes

A l'aide de crayons de couleurs, amusez vous à déterminer les symétries a axiales obtenues et également les centres de symétrie

\+ +

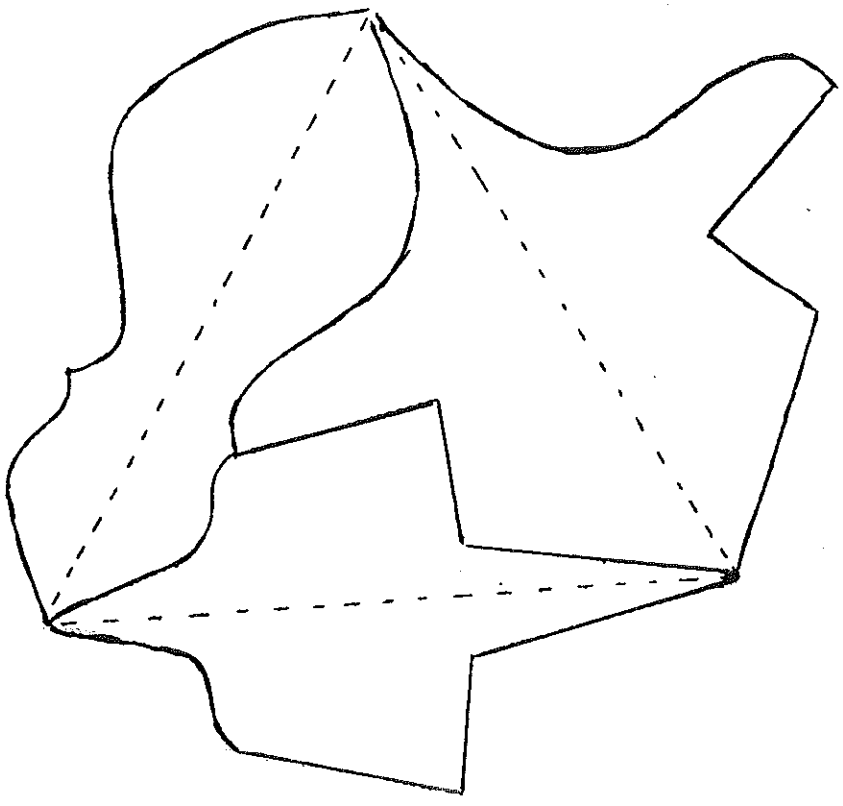
\+

Que voilà un cours sur les symétries qui s'annonce bien !

On utilisera cette analyse par la suite

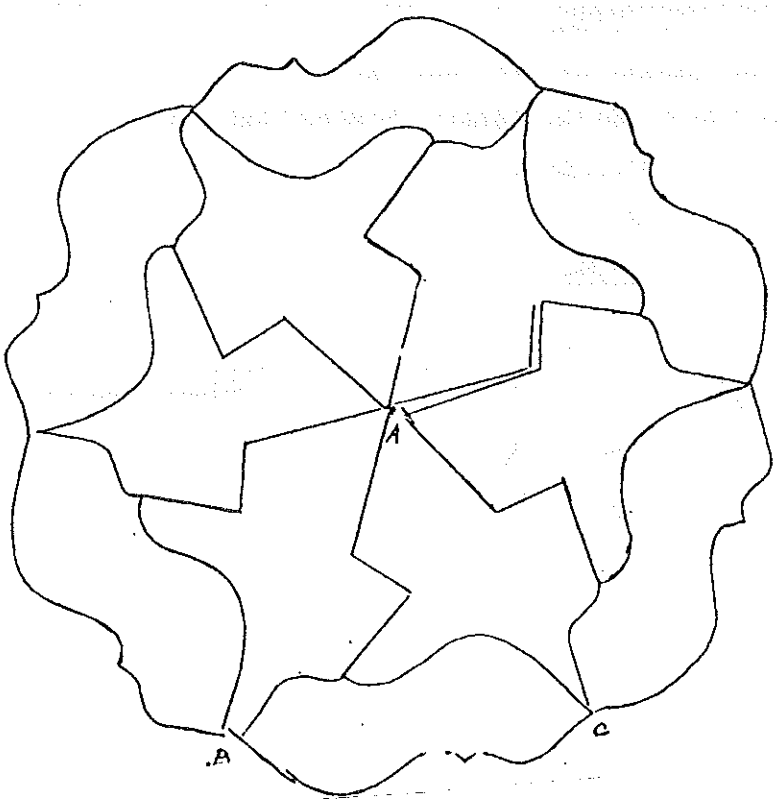
Et voilà pourquoi votre fille ...non, pour "cç s'imbrique si bien !"

Petite idée pédagogique : moi aussi, j'ai un gabarit, mais grand et en carton rigide, à l'échelle du tableau et qui me sert à résumer les remarques des élèves, car, ce sont eux qui cherchent et qui trouvent, qui observent et qui expriment leurs observations, je me contente de faire le point.



1°) Rotations de centre A (utiliser une aiguille)

le sommet B vient systèmatiquement en C



Les petits décalages ci-dessus observés doivent être évités, en "trichant" un peu, car une petite erreur + une autre petite erreur + ... on finit par commettre une grosse-erreur.

2°) On peut paver tout le plan en utilisant C comme nouveau centre de rotation puis B, puis etc...

Et il apparaîtra = symétries centrales

symétries axiales

symétries orthogonales

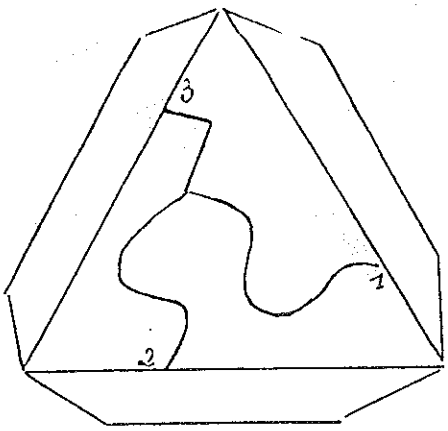
translations - retournements

PETITE COMPLICATION

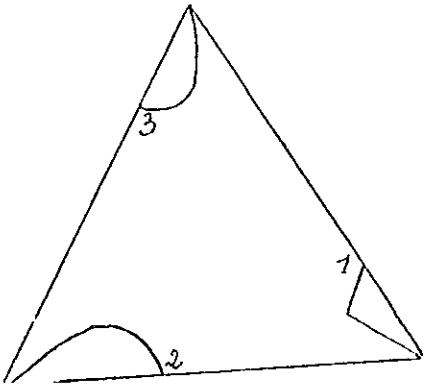
On utilise toujours la technique de l'enveloppe.

Sur le tri A au lieu de rejoindre les sommets, je me dirige vers les côtés. Mais pour pouvoir déplier, il faut de toute façon rejoindre les sommets, Je vais donc prolonger mes lignes de la face A en passant "par derrière" sur la face B.

- C'est JULLIEN de Grenoble qui nous a communiqué le procédé
- Nota : les manipulations et découpages seront plus complexes et délicats surtout pour les les élèves.
  (je ne l'ai pas encore utilisé avec eux)
  Techniquement, ce n'est pas simple à faire réaliser.

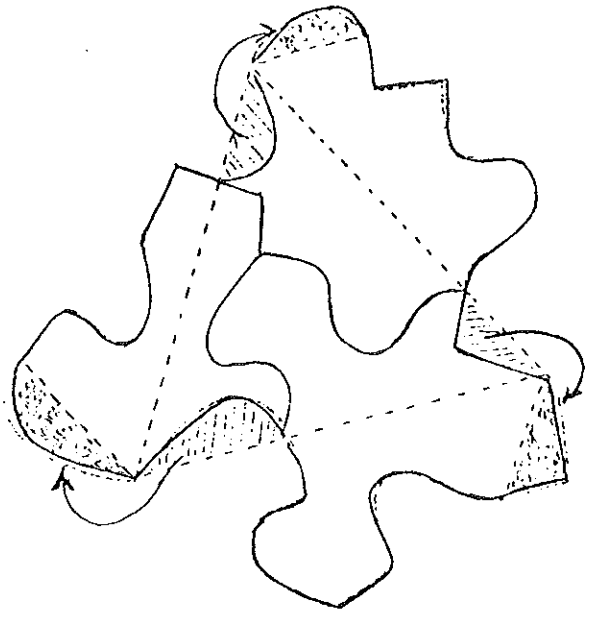


Triangle: face A (dessus)



Triangle: face B (dessous)

Bien repérer les points 1, 2, 3 d'une face sur l'autre.



Bien collé, pas trop mal découpé, vous obtiendrez ceci.

Regardez les lignes utilisées page XI.1 et jugez de la complexité à laquelle on aboutit rapidement

---

Toutes les manipulations proposées avec le découpage simple sont possibles avec celui-ci.

Et que de surprises dans les motifs obtenus !

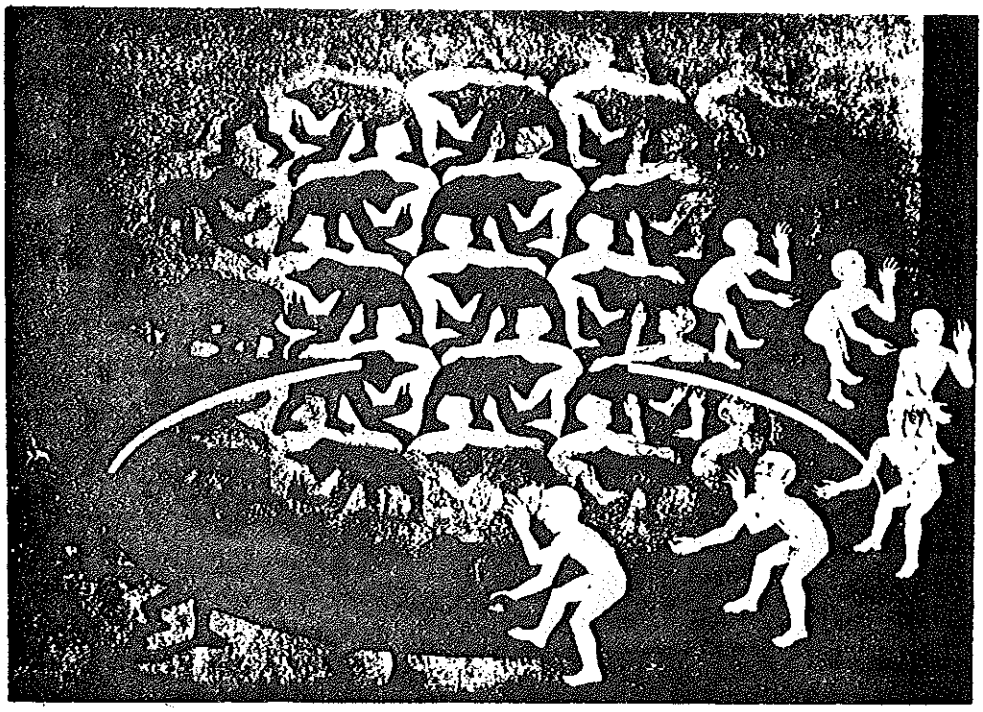
C'est avec ce dernier procédé que peut-être obtenu le cliché : les oiseaux, les chinois, les tritons.

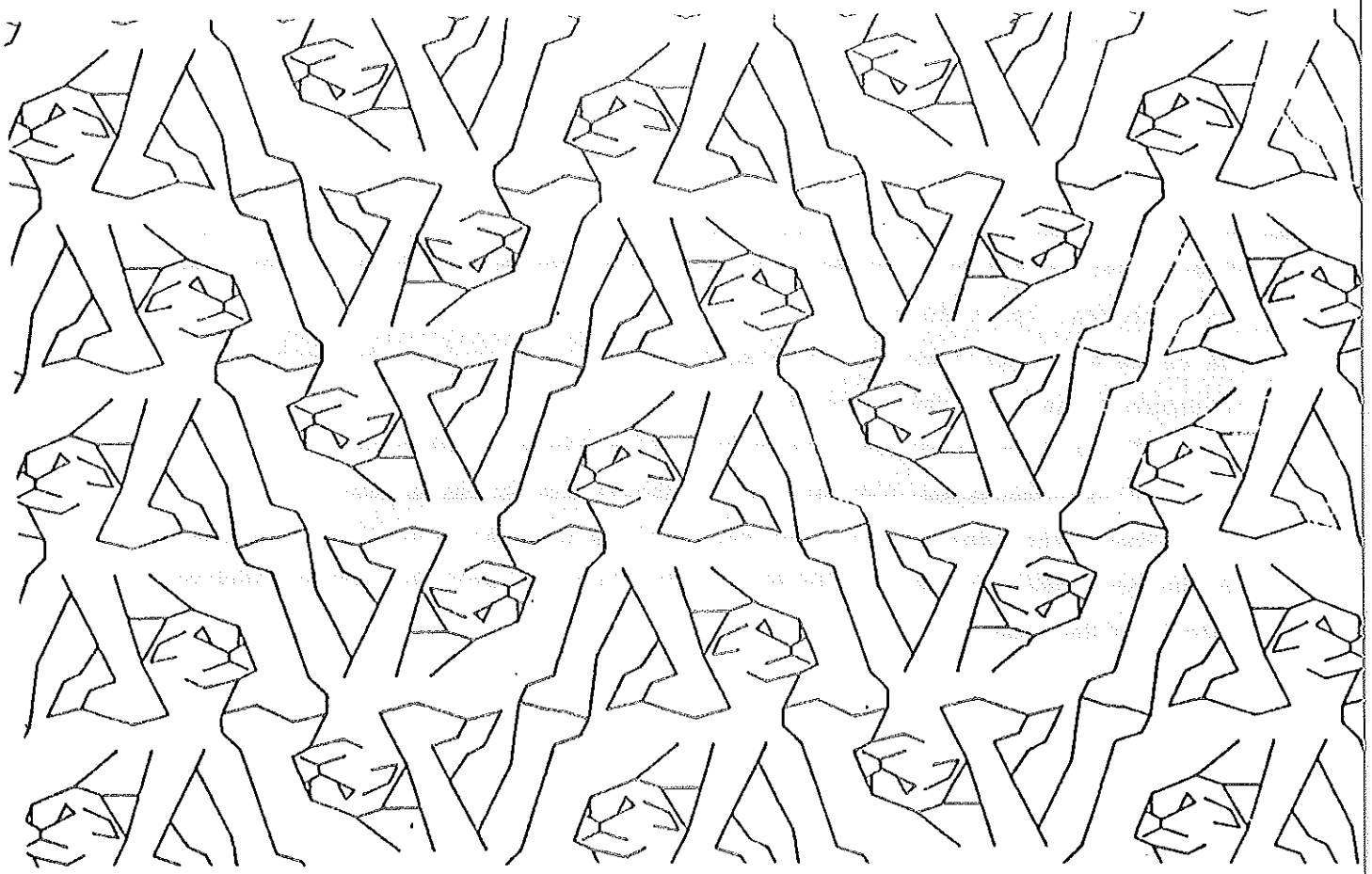
De cette dernière remarque, une autre activité peut-être envisagée : retrouver dans un pavage complet :

1°) la forme quotient = support géométrique et découpage

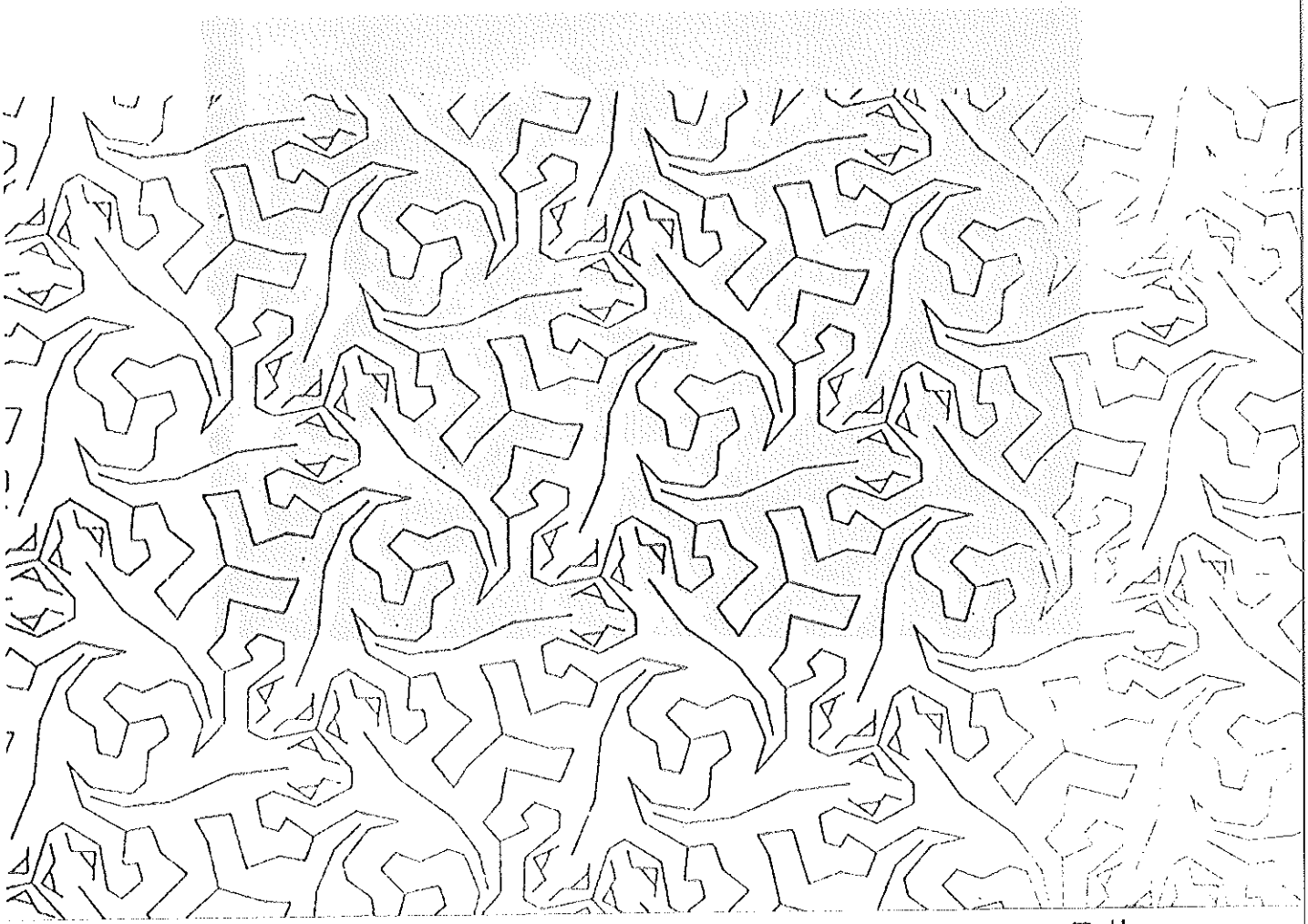
2°) le processus d'obtention : rotation ou translations

Pour cette analyse il faut trouver les points de symétrie : sommets du support géométrique, et le point d'où ont divergé les lignes qui ont servi au découpage.





Les Chats



Les Tritons

Et l'on rejoint l'étude des symétries page 29 , la planche "les oiseaux" Les points P et Q sont symétriques par rapport à A, M et N ..... et bien d'autres

Mais encore, d'autres centres de symétrie : I, J, K, R, déterminent les sommets du carré support de la "figure quotient" . Le point O est le point de départ des courbes découpées sur la face A. J'ai griffonné en noir les parties à tracer et découper sur la face B.

+ +

+

Le champ d'exploitation est immense

- dessin - couleurs
- math
- tracés
- observation - analyse - synthèse - expression - méthode - rigueur
- adresse, coup d'oeil, imagination
- élaboration d'un processus - utilisation de ce processus et un cycle complet.

arts plastique ⟶ maths

ou mieux:arts ⟺ maths

Et comment réaliser des figures préméditées ?

Les oiseaux : je sais, j'ai essayé - j'ai réussi
Les tritons : idem
Les chinois : idem (Voir document Q. Heurteu - ds ce fascicule)
En créer d'autres prémédités, j'ai essayé - je n'ai pas encore réussi .

A vous de faire mieux

Par contre, par ce procédé de l'enveloppe, j'ai reconstitué sans trops de difficultés des dessins répétitifs islamique, primitivement exécutés vraisemblablement par des trécés géométriques classiques comme l'ont montré et analysé : Issam El Saïd et A.Parman (cf document F. Debart . ds ce fascicule)

Quant aux techniques utilisant l'ordinateur, ce n'est pas de la compétence (Voir Jullien à Grenoble.)

ATTENTION : Le pavage du plan, ce n'est pas du tout une nouveauté : et c'en est loin !

Tout prés de nous, vous êtes-vous amusés à observer les motifs décoratifs de papiers mureaux, de papiers d'emballage - cadeaux. Le procédé que j'indique n'est qu'un procédé : il en existe bien d'autres.

Et les musulmans - l'art islmique !

Quelle merveille d'art - d'esthètique, de mathématiques. Pour plus ample inform reportez-vous à : "Géométrie concepts in Islamic Art" publié en Grande Bretagne par Caroline Montagu. ISBN 0905035038
Je dois sa connaissance à Eric Lehman de l'IREM de Caen.

C'est une mine de la 6ème à la 3ème en maths et en Arts Plastiques.

Il y a aussi "Modèles Mathématiques" chez Cédic - traduction de "Mathematical Models" publié en Angleterre par "Oxford at the Clarenton Press" Celui-ci aussi est passionnant car il présente une foule d'activités dont des multiples constructions de volumes.

Et pendant que je suis dans la bibliographie, pensez à - Géométrie au 1er cycle - publié par l'APMEP N° 22 et dites aux collègues du cyc élémentaire que l'APMEP les concerne aussi.

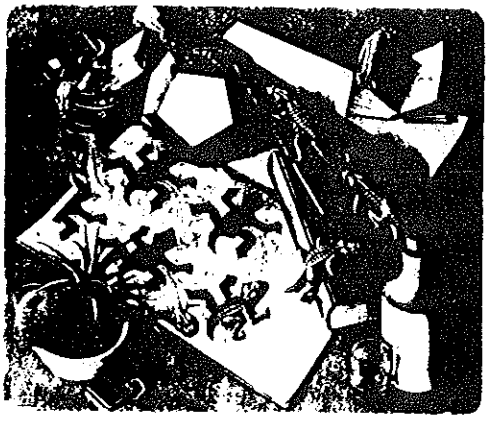
Brigitte ROZOY-SENECHAL a aussi publié une bibliographie sur le sujet et son cours de "fac" m'a permis de démarrer

et d'arrêter ici !

\+ \+

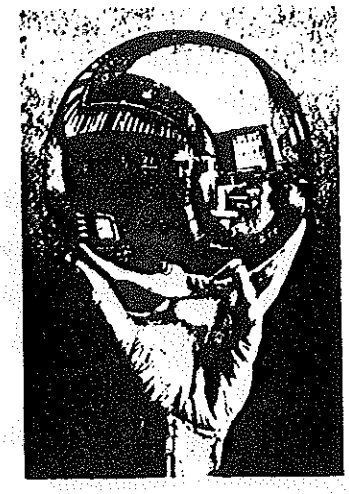
\+

Roger LEGER
CES d'Orbec en Auge
Decembre 1979



Reptiles

Interpénétration de mondes différents



Maintenant un miroir sphérique

VARIATIONS SUR LE THEME DES ENVELOPPES

Si l'homme n'a pas le pouvoir de modeler le monde à sa convenance il a du moins celui de tailler des verres qui lui permettent de le faire apparaître à peu près comme il veut.

LICHTENBERG

RECHERCHE DES ENVELOPPES CORRESPONDA A DES PAVAGES A MOTIFS REPETITIFS

Cette recherche est venue après avoir fait des pavages avec des motifs qu'elles ont elles-mêmes obtenus avec la technique de l'enveloppe (les formes choisies pour l'enveloppe étant carré, rectangle, triangle équilatéral, triangle rectangle isocèle, "demi-triangle" équilatéral).

1° L'OBSERVATION A ETE FAITE SUR 5 PAVAGES. Le tâtonnement aboutit à la démarche suivante :

- recherche des centres de rotation et des angles de rotatio
- découper un motif et essayer de plier de manière à obtenir une enveloppe dont les sommets seraient les centres de rotation.

Cette proposition a été faite par une élève. La manipulation est diffi surtout à cause de la très petite taille de chaque motif mais, au bout de plusieurs essais, elles reconstituent les enveloppes, pour 4 pavages. Elles échouent pour les écureuils et abandonnent ce dernier cas.

	Chinois	Tritons	Oiseaux	Ecureuils	5ème ca
Nombre de centres de rotation situés sur un motif	3	3	4	4	4
Angle de rotation	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{2}$
Nombre de sommets de l'enveloppe	3	3	4	?	3

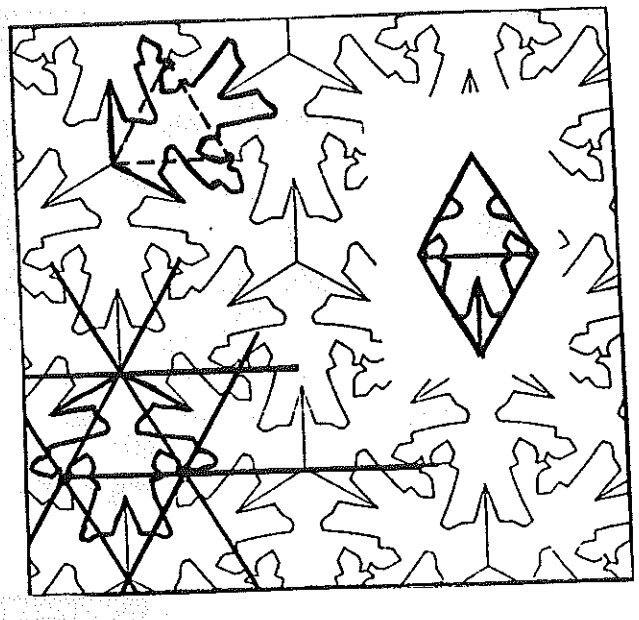
2° OBSERVATION DES FACES DE L'ENVELOPPE ET COMPARAISON AVEC LE PAVAGE INITIAL.

a) Enveloppe reconstituée : apparition d'un point particulie 0 et de lignes (tracées sur l'enveloppe qui ne serait pas découpée) partant de 0 et aboutissant aux sommets de l'enveloppe. Les élèves retrouvent ce qu'elles avaient vu auparavant avec la technique de l'enveloppe (un point 0 et des lignes partant de 0 jusqu'aux sommets)

b) Le pavage initial : étude des 4 cas.

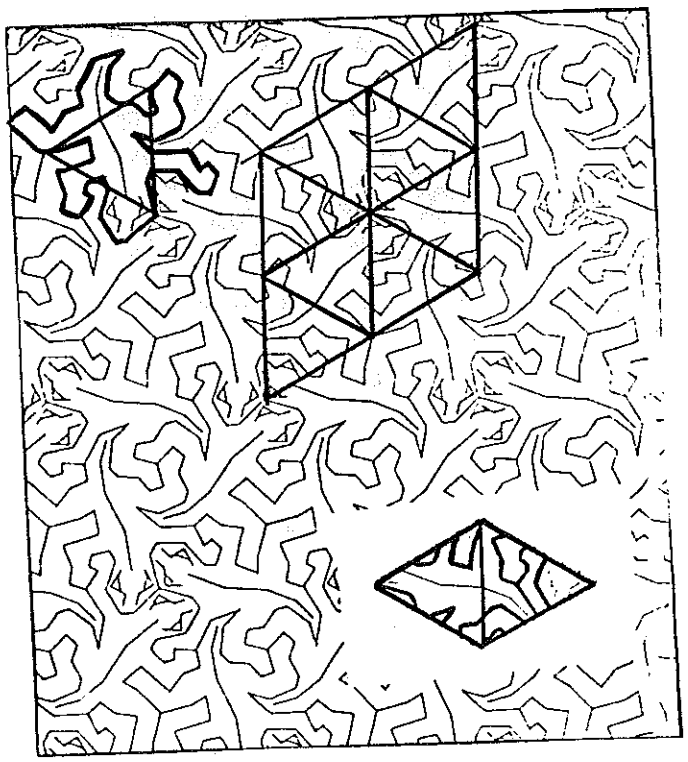
1. CHINOIS

Les lignes du réseau triangulaire passent par les centres de rotation

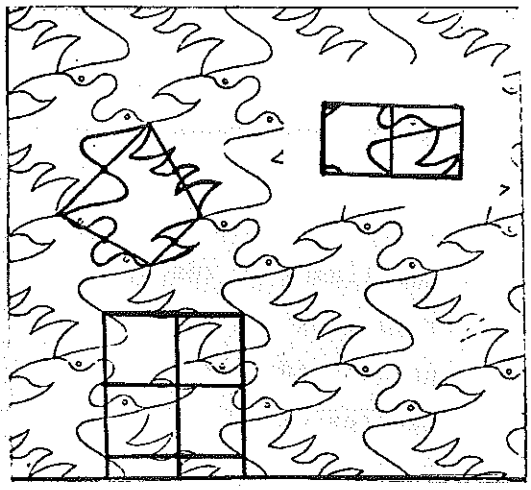


On découpe 2 triangles quelconques de ce réseau ayant un côté commun et on plie selon le côté commun. On obtient une enveloppe avec des lignes qui sont exactement celles apparues en pliant le chinois pour reconstituer l'enveloppe. Le point O apparaît aussi.
Remarque : si on veut reconstituer une enveloppe à partir d'un motif découpé, il est préférable avant le découpage de tracer les lignes du réseau triangulaire et de marquer les plis

2. TRITONS

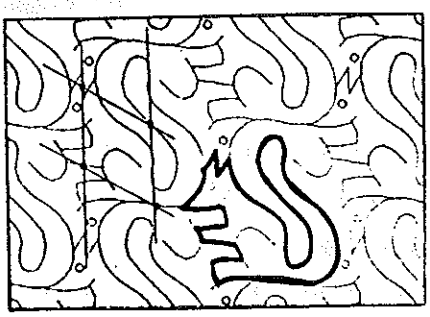


3. OISEAUX

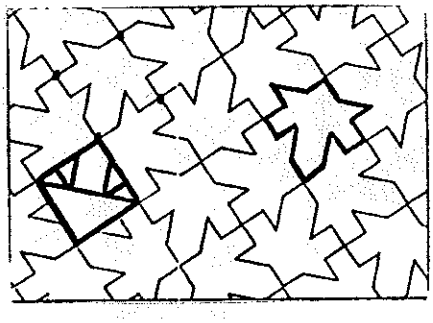


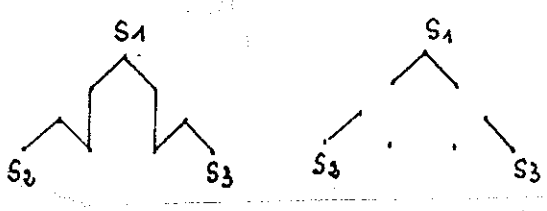
4. ECUREUILS

Enveloppe ?



5. 5ème CAS





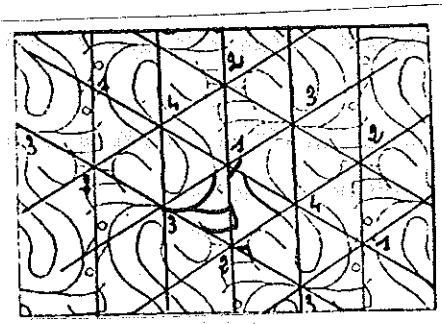
Ce 5ème cas est différent des autres en ce sens que l'enveloppe est triangulaire alors qu'il y a, sur un motif, 4 centres de rotation.
Soient S1,S2,S3 les sommets de l'enveloppe. Les deux dessins indiquent les lignes tracées sur chaque face :

Le point, appelé précédemment O, est au sommet S1. L'apparition du 4ème cent de rotation sur le pavage est due à l'axe de symétrie des tracés.

Remarque : l'échec des élèves avec le 4ème cas m'a amenée à approfondir ce cas, ce qui est l'objet du paragraphe suivant.

UNE TECHNIQUE DE PAVAGE AVEC UN TETRAEDRE DONT LES FACES SONT ISOMETRIQUES

1) EXEMPLE DES ECUREUILS



Les nombres 1,2,3,4 désignent, sur le réseau, les quatre centres de rotation situés sur un motif. Ces points sont les sommets d'un losange, sur un motif.

a. En faisant comme les élèves, j'ai marqué les plis selon les lignes du réseau précédent avant de découper un motif avec lequel j'ai essayé de reconstituer une enveloppe.
En réalité, j'ai reconstitué un tétraèdre régulier avec un écureuil dont les sommets sont les 4 centres de rotation. Les arêtes sont "reconstituées avec les plis". Sur les faces, on observe un point particulier O d'où partent 4 lignes :

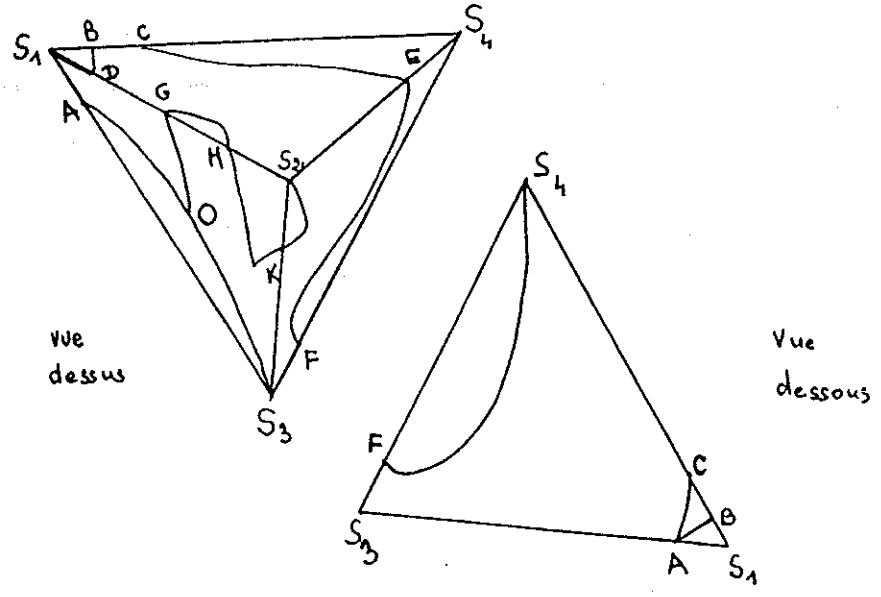
. une ligne tracée de O au sommet S2 et passant par les points G,H,K

. une ligne tracée de O au sommet S3

. une ligne tracée de O au sommet S4 et passant par les points A,C,E,F

. une ligne tracée de O au sommet S1 et passant par les points A,B,D ; (entre D et S1 la ligne tracée est le segment S_1D)

Remarque : A est commun à 2 lignes

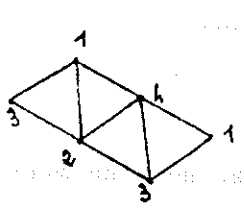


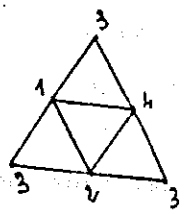
b. Comparaison avec le pavage initial

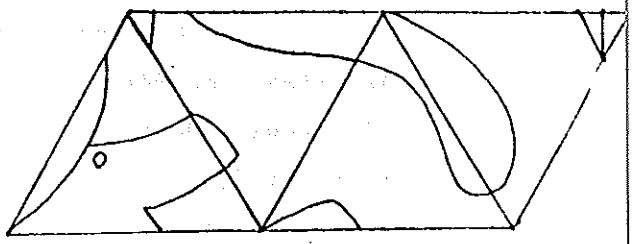
- les lignes sur la face S1S2S3 sont celles tracées dans le triangle de sommets 1,2,3.
- les lignes sur la face S1S2S4 sont celles tracées dans le triangle de sommets 1,2,4.
- les lignes sur la face S2S3S4 sont celles tracées dans le triangle de sommets 2,3,4.
- les lignes sur la face $S_1 S_3 S_4$ sont celles tracées dans le triangle de sommets 1,3,4.

Ces conclusions permettent de dire qu'il est possible de reconstituer le tétraèdre à partir de 4 triangles du pavage.

Voici 2 patrons possibles





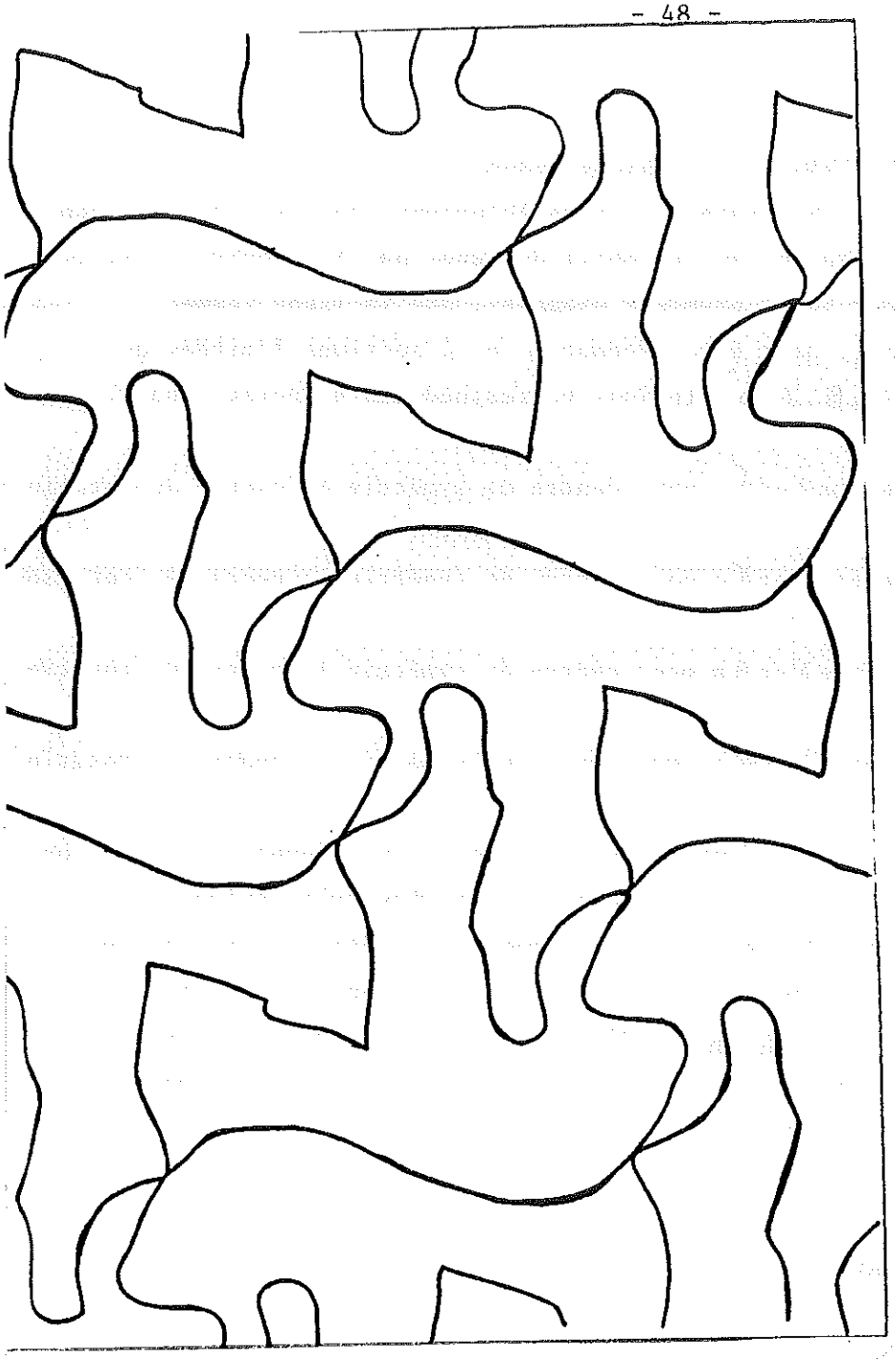


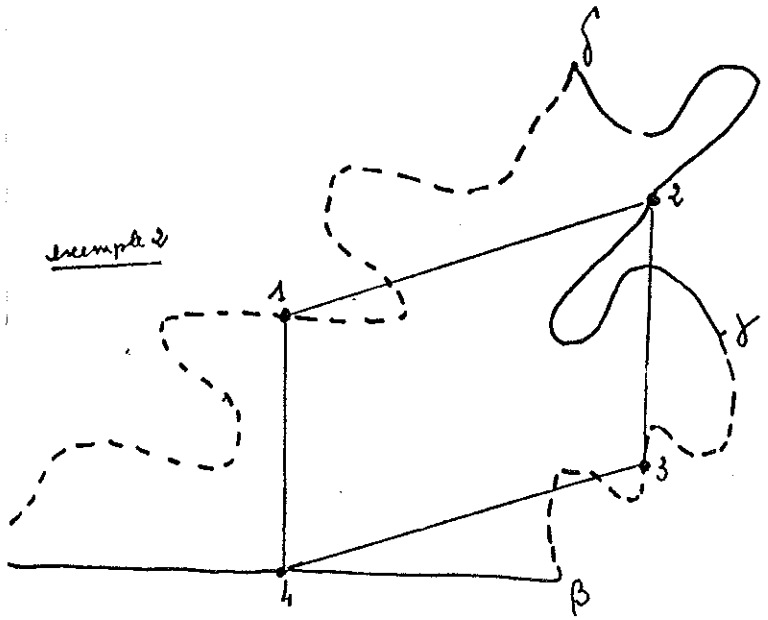
2) AUTRES PAVAGES EN UTILISANT UN TETRAEDRE DONT LES FACES SONT ISOMETR

Le tétraèdre pour l'exemple des écureuils d'ESCHER est réguli J'ai essayé le même procédé avec d'autres solides. Ce n'est pas possibl avec un cube ni avec un octaèdre régulier. Par contre, c'est possible avec un tétraèdre dont les faces sont isométriques.

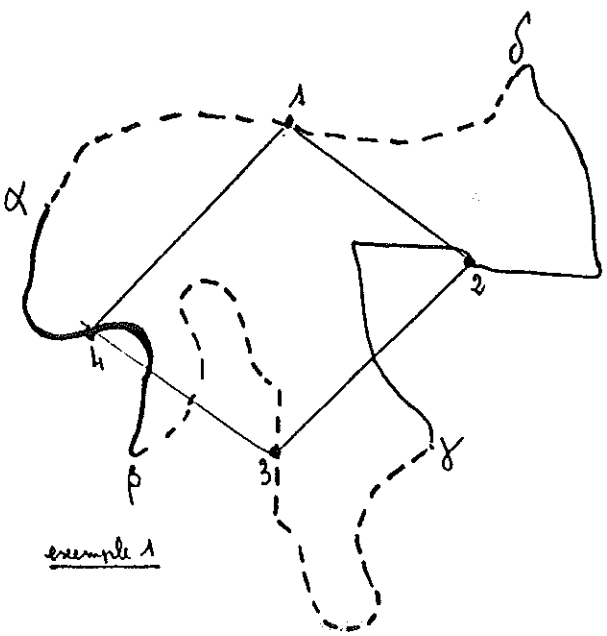
a. Méthode :

- choisir un point 0
- tracer une ligne partant de 0 au sommet S1 du tétraèd faire de même avec les 3 autres sommets (les lignes peuvent-elles se co
- découper
- faire le pavage avec le motif obtenu. Les centres de rotation correspondent aux sommets du tétraèdre.





exemple 2



exemple 1

b. Observation de quelques exemples

1. En traçant le parallélogramme dont les sommets sont les centres de rotation sur un motif, désignés par les nombres 1,2,3,4 je constate, pour les 2 premiers exemples, que la ligne fermée frontière du motif peut être décomposée en 4 portions limitées aux points appelés $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. (points correspondants au point 0 sur le tétraèdre)

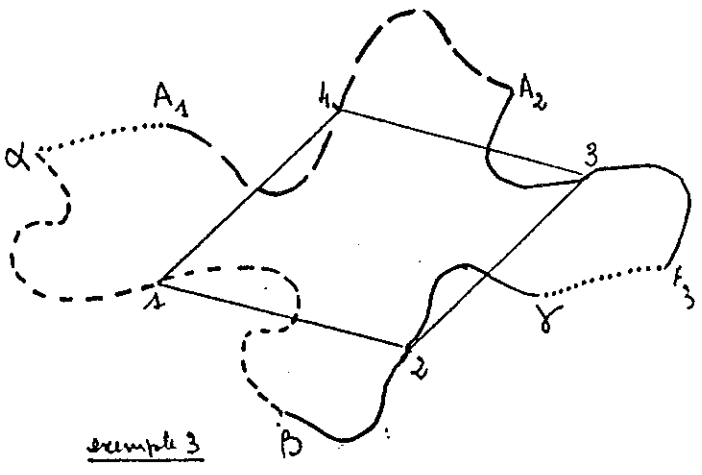
→ la ligne entre α et δ a pour centre de symétrie le centre de rotation appelé 1

→ la ligne entre δ et γ a pour centre de symétrie le centre de rotation appelé 2

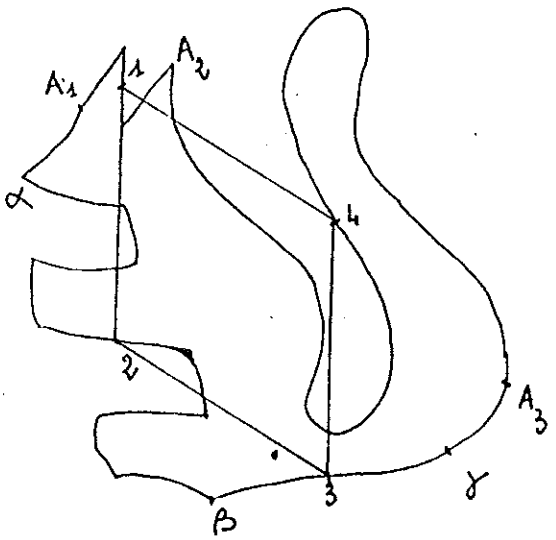
→ la ligne entre γ et β a pour centre de symétrie le centre de rotation appelé 3

→ la ligne entre β et α a pour centre de symétrie le centre de rotation appelé 4.

2. Par contre, ceci est faux pour l'exemple 3 ainsi que pour les écureuils. Or, ces 2 cas ont la particularité suivante : il existe 2 lignes tracées de 0 aux sommets du tétraèdre qui ont une portion commune, la partie entre 0 et le point appelé A. Le petit arc α A1 et le petit arc γ A3 se déduisent l'un de l'autre par une translation (les points sur un motif appelés A1,A2,A3 correspondent au point A sur le tétraèdre.)



exemple 3



Pour les autres parties du contour, on retrouve alors les propriétés vues sur les 2 exemples précédents mais, en faisant intervenir les positions A1,A2,A3 correspondant au point A sur le tétraèdre commun à 2 lignes.

3. Remarques sur la position de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et A1,A2,A3 par rapport au parallélogramme.

- dans les 4 cas, O est situé sur le tétraèdre est à l'intérieur d'une face ; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont à l'extérieur du parallélogramme.

(qu'adviendrait-il si O était sur une arête ou à un sommet du tétraère ?)

- A1,A2,A3 sont à l'extérieur du parallélogramme
- une question : est-il possible d'utiliser les propriétés trouvées sur le motif pour obtenir une autre technique de pavage ?

UNE TECHNIQUE DE PAVAGE AVEC UN POLYGONE ET UN POINT EXTERIEUR A CE POLYGONE (OU 2 POINTS)

1) AVEC UN PARALLELOGRAMME ET UN POINT I EXTERIEUR A S1,S2,S3,S4

a) Dessiner une ligne de I à S1 puis sa symétrique par rapport à S1

$I \xrightarrow{\text{Sym } S_1} J$

b) Dessiner une ligne de J à S2 puis sa symétrique par rapport à S2

$J \xrightarrow{\text{Sym } K} K$

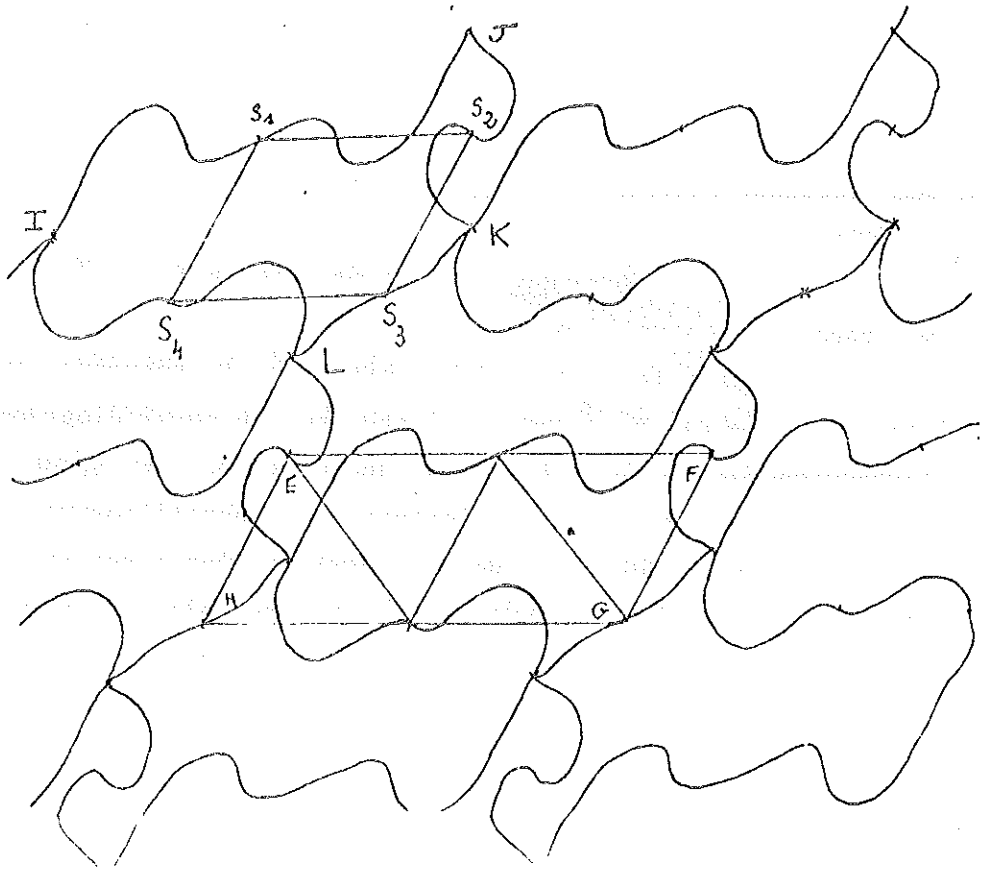
c) Dessiner une ligne de K à S3 puis sa symétrique par rapport à S3

$K \xrightarrow{\text{Sym } S_3} L$

d) Dessiner une ligne de L à S4 puis sa symétrique par rapport à S4

$L \xrightarrow{\text{Sym } S_4} I$

Les tracés ne sont pas quelconques pour éviter des intersections



Remarques : il est possible de reconstituer le tétraèdre avec les lignes caractéristiques sur les faces en utilisant un patron obtenu sur le pavage, par exemple, le parallélogramme EFGH

. avec 2 points au départ, je ne l'ai pas fait ; vraisemblablement il faut utiliser la propriété du motif sur l'exemple 3 comme sur les écureuils.

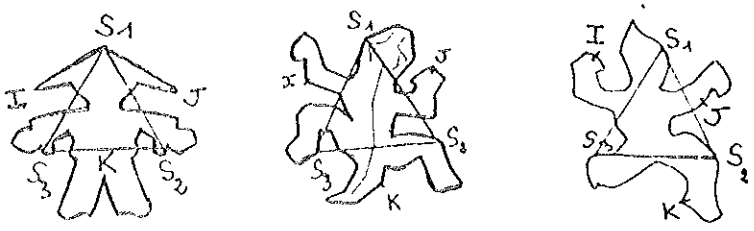
. S1S2S3S4 n'est pas un rectangle.

2) LE PARALLELOGRAMME EST UN RECTANGLE OU UN CARRE

Si on choisit un carré on retrouve exactement l'exemple des oiseaux dans la partie I.
Dans ce cas, l'enveloppe est un carré ; on ne trouve pas de tétraèdre avec 4 faces isométriques dans ce cas (triangle rectangle isocèle)

3) AVEC UN TRIANGLE EQUILATERAL S1S2S3 ET UN POINT I EXTERIEUR AU TRIANGLE

Voici 3 exemples d'Escher.



Ils répondent aux consignes suivantes :

a - Dessiner une ligne de I à S1 appelée (ℓ_1)

$I \xmapsto{R(S_1, 2\frac{\pi}{3})} J$

$(\ell) \xmapsto{R_1} (\ell'_1)$ $\quad R(S_1, 2\frac{\pi}{3}) = R_1$

Tracer (ℓ'_1)

b - Dessiner une ligne ℓ_2 de J à S2 $\quad R(S_2, 2\frac{\pi}{3}) = R_2$

$(\ell_2) \xmapsto{R_2} \ell'_2$

$J \xmapsto{R_2} K$ $\quad$ Tracer (ℓ'_2)

c - Dessiner une ligne (ℓ_3) de K à S3

$(\ell_3) \xmapsto{R_3} (\ell'_3)$ $\quad R(S_3, 2\frac{\pi}{3}) = R_3$

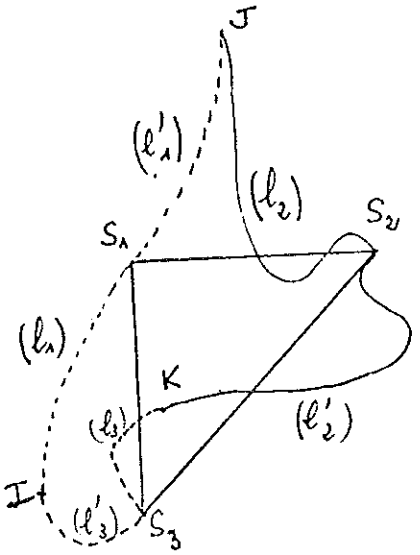
Tracer (ℓ'_3)

Remarques :

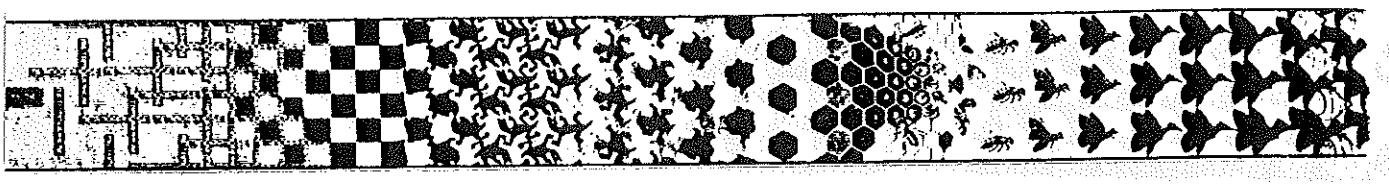
- qu'obtient-on si on prend I en S1 par exemple ?
- dans le cas des chinois les lignes ($\ell'2$) et ($\ell3$) sont symétriques par rapport à S1K
- si on prend 2 points initialement qu'obtient-on ? Quelles sont les consignes ?
- il est possible de reconstituer une enveloppe avec le petit bonhomme d'Escher.

4) AVEC UN TRIANGLE RECTANGLE ISOCELE ET UN POINT I EXTERIEUR AU TRIANGLE

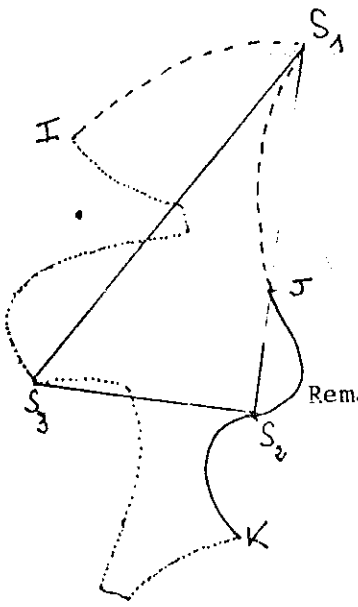
même procédé
mais les transformations utilisées
sont successivement
R(S1,π)
R(S2,$\frac{\pi}{2}$)
R(S3,$\frac{\pi}{2}$)
Attention au sens de rotation.
Le pliage du motif redonne une enveloppe.



Remarque : si on prend I en S1, on peut retrouver le 5ème cas de la partie I en traçant ($\ell'3$) symétrique de ($\ell2$) par rapport à IK c'est-à-dire S1K.



5) AVEC UN "DEMI-TRIANGLE EQUILATERAL" ET UN POINT I EXTERIEUR AU TRIANGLE

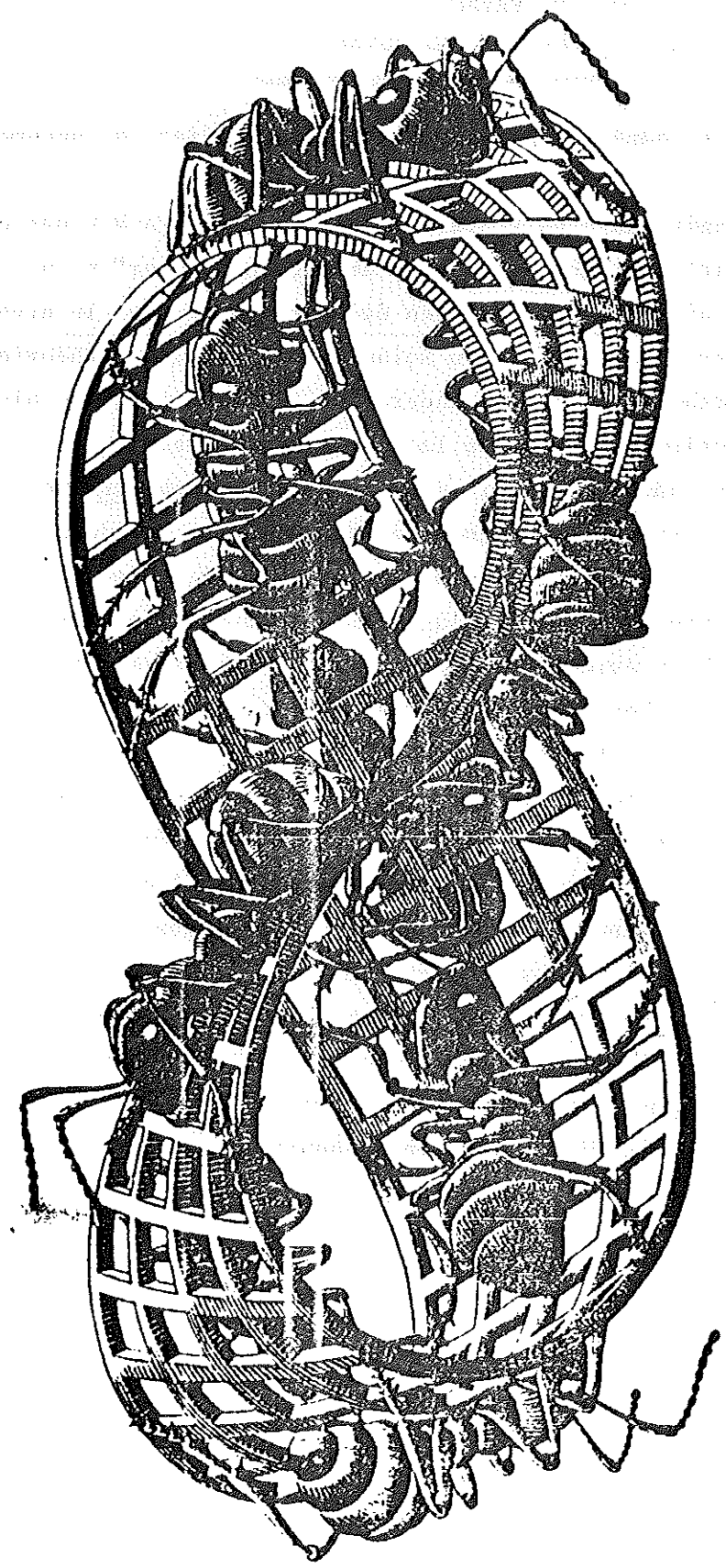


Même procédé
mais les transformations utilisées
sont successivement :
$R(S1, 2\frac{\pi}{6})$
$R(S2, 2\times\frac{\pi}{2})$
$R(S3, 2\times\frac{\pi}{3})$

Remarques : - qu'obtient-on si J est en S2 par exemple ?
- si on prend 2 points initialement, quelles sont les consignes ?

Claudine HERVIEU

COMPTE-RENDU D'UNE RECHERCHE EFFECTUEE
AVEC UN GROUPE DE NORMALIENNES - EN DE CAEN
Janvier 1980



ACTIVITES POUR UNE CLASSE, AUTOUR DE PAVAGES.

On trouvera dans les pages qui suivent une liste de documents pour la classe.

Il ne s'agit pas d'un travail à faire faire de A à Z par chaque élève, le thème est trop riche pour être abordé en "entier" en un temps limité. Par ailleurs, il est bien évident que suivant le niveau des élèves on pourra étudier plus ou moins à fond la partie théorique de ces fiches. Certaines fiches demanderaient d'ailleurs à être plus détaillées en fonction du niveau de la classe envisagée.

Pour notre part, il s'agit d'un travail de recherche pour une classe de 3ème. Par travail de recherche non entendons une forme de travail où l'élève peut à sa convenance partir dans la direction qui l'interesse. Les enseignants étant là pour l'aider à formuler ses questions. Il est bien évident que nous ne cherchons pas à avoir toutes les réponses à toutes les questions et que devant certaines d'entre elles enseignants et élèves se trouveront au même point.

De toute manière quelle que soit le point auquel s'intéressera l'élève, avant de pouvoir aborder la théorie, il lui faudra "manipuleré construire beaucoup de pavages, coloriages, etc... S'il est difficile d'envisager un compte-rendu systématique de chaque travail d'élève (ou de groupes d'élèves), il est évident que le travail des uns peut enrichir la recherche des autres, et devant telle ou telle question ou difficulté, un groupe pourra avec profit aller en voir un autre qui a travaillé sur des questions identiques ou voisines.

Les différentes fiches sont indépendantes, même si l'étude de l'une peut parfois faciliter l'approche de l'autre.

Matériel mis à la disposition des élèves :

- grandes feuilles de papier blanc
- miroirs
- symétriseurs centraux et orthogonaux, translateurs
- feutres
- papier calque
- carton léger
- boules en papier ou polystirène
- ciseaux, colle, etc...
- modèles de pavage à colorier en grand nombre
- pavages (sous protège-documents plastic)
- fiches larmes
- réseaux
- livres : Cédic 4ème
  Mezard 4ème
  Arabic geometrical patterns
  Allover Patterns
  Geometric concepts in islamic arts
  Modèles mathématiques

Connaissance préalables des élèves :

Notions "intuitives" des différentes isométries et de leurs caractéristiques (Encore qu'il soit tout à fait possible, voir...) de partir des pavages pour aborder ces notions.

On trouvera dans certaines des fiches des extraits, de documents, quelques uns (en réduction) des pavages mis à leur disposition.

Signalons enfin l'ouvrage de Permama, géométrie et réalité 1 et 2 qui permet à l'enseignant qui le souhaite une approche très concrète de ce thème.

Phase préliminaire pour tous :

Colorier des pavages, observer, comparer, se poser des questions Trouver les motif "minimaux".

CONSTRUCTIONS GEOMETRIQUES (à partir de Géomètrie concepts in Islamic Arts).

2 The Square and the Root Two System of Proportion

This section includes all designs based on the repeat pattern generated from squares inscribed in a circle. The repeat pattern, which gives the design its character, is determined by grid lines drawn between points established by the intersecting sides of the squares inscribed in the circle. By inscribing squares within the circle, a geometric method of proportional subdivision of the area of the repeat unit and, thereby, of all the grid lines of the pattern, is achieved.

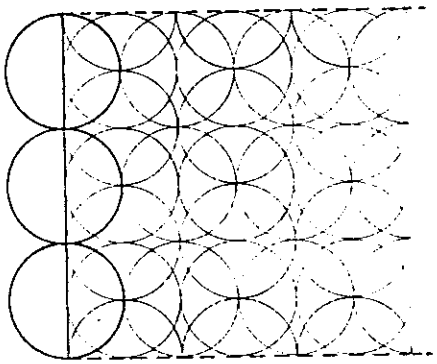
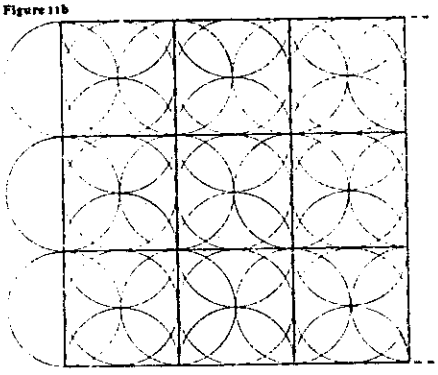


Figure 11a

Figure 11b



When a surface is to be decorated, one of its sides is divided equally into a number of parts corresponding to the number of repeat units required. The area is then filled with circles (Figure 11a), the diameters of which are equal to the subdivisions of the side of the surface being decorated. The area is now equipartitioned into square repeat units by the point-joining method (Figure 11b). This procedure is similar to the method of constructing a square as described on page 3.

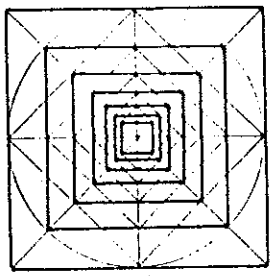
In each square repeat unit (Figure 12a) the proportion of the side of the inscribed square ACBD to the side of the circumscribed square abcd is $\frac{AD}{ad} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (i.e., ad = AB, the diagonal of the inscribed square). Thus the sides of the series of concentric squares drawn in Figure 12b are related by the proportion $1 : \sqrt{2}$, and therefore the areas are progressively halved. In Figure 12c where only the squares of Figure 12b with vertical and horizontal sides are considered, the proportion of the sides of these series of squares is 1:2 which means that the sides are progressively halved and the areas quartered.

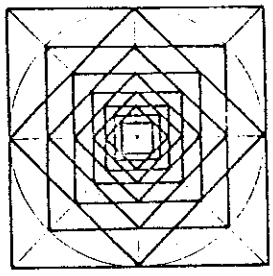
In Figure 13a by drawing the diagonals ac and bd of the circumscribed square and joining their points of intersection with the circle we form the square efgh, which is congruent to square ACBD, but with sides parallel to square abcd. The squares ACBD and efgh thus create an octagonal star, which we refer to as the 'master grid' of the unit pattern based on this octagonal star. By drawing the concentric octagonal stars (Figure 13b) using the point-joining method we establish a geometric system of harmonious subdivision of the repeat unit. In this system of concentric squares the consecutive parallel sides (Figure 13c) are related in the proportion of $1 : \sqrt{2}$ and the alternate parallel sides are related in the proportion of 1:2; therefore all the sides and the diagonals of the square repeat unit can be subdivided in these proportions. This illustrates the best practical geometrical system of mensuration which was available when arithmetical calculations were not possible.

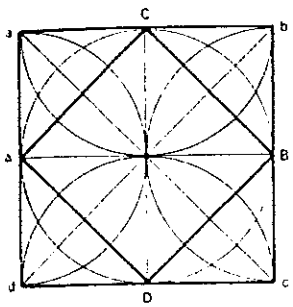
It was mentioned in the introduction that the geometric method allows the artist great scope for improvisation. The designs presented on pages 44 to 47 illustrate how a square repeat unit can be modified to a rectangular repeat unit; this allows for new repeat patterns and the incorporation of variations into a basic design. Alternatively, the basic square shape of the repeat unit is maintained, but the basic repeat pattern generated on a given set of grid lines is shifted as illustrated in Figure 36 (p. 49) to create variations on the original design. These modifications were especially useful in the decoration of borders.

The repeat unit of the design could be applied with the aid of a full-scale template pierced with holes at the principal intersections of the grid lines to indicate with points the lines to be drawn to generate the repeat pattern. In the working of mosaics the dimensions, shapes and the required number of component geometric forms could be accurately determined with the construction of a single repeat unit. In lattice woodwork the repeat units could constitute the structural components as well as the decoration of the whole.

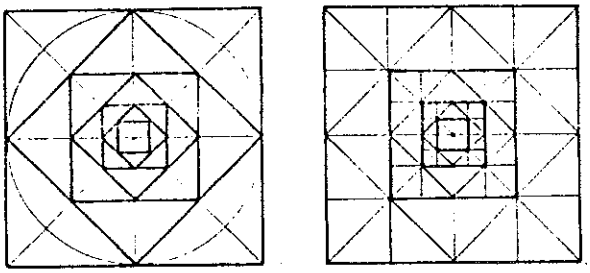
On pages 10 to 49 Islamic geometric designs based on the octagonal star (or the $\sqrt{2}$ system of proportioning) are analysed in the manner described. The top line of the figures shows how the master grid and the dependent grid lines of the pattern are constructed to draw the repeat pattern. Below these the overall design is given by the multiple presentation of this repeat pattern. Photographs, where they are available, show the application of the design.

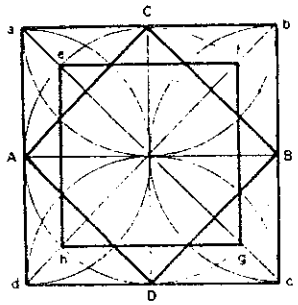






Figures 12a, b and c





Figures 13a, b and c

3 The Hexagon and the Root Three System of Proportion

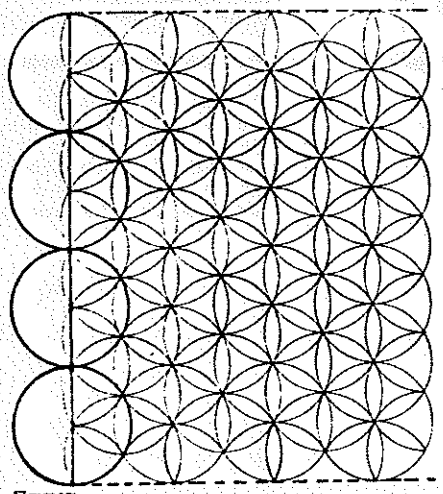


Figure 37a

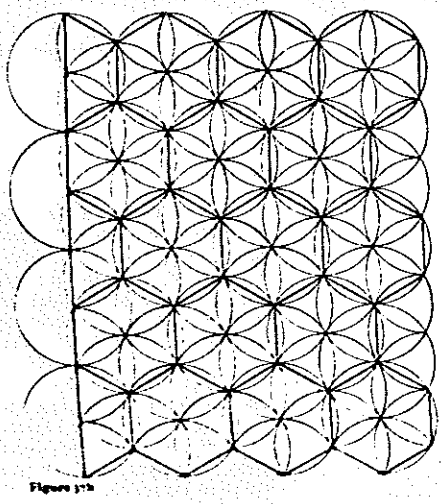


Figure 37b

The designs presented in this section are based on the master grid of the hexagonal star. The initial procedure for obtaining the size of the repeat unit is the same as described in section 2 of this chapter. Once again one side of the area to be decorated is subdivided by the use of the compasses into a number of parts equal to the number of times the repeat unit is to be incorporated into the design along this side.

The whole area is then further divided by the circles and the adjacent inscribed hexagons are drawn by the point-joining method (Figure 37). The repeat unit is thus a hexagon, the side of which is equal to the radius of the circumscribing circle. The master grid is formed by the hexagonal stars drawn in this hexagon by joining either the alternate corners of the hexagon (Figure 38a) or the alternate midpoints of the sides (Figure 38b).

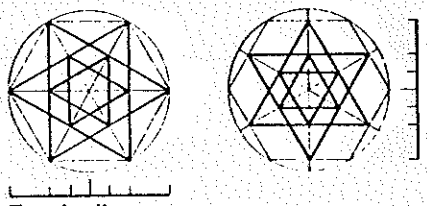


Figure 38a and b

The hexagonal star system (Figure 38a) provides a method of progressively dividing the diameter of the hexagon in the ratio of 1:2. The hexagonal star system (Figure 38b) similarly divides the height of the hexagon in the same ratio of 1:2. Since the ratio of the height AB of the hexagon (Figure 39b), i.e., the side AB of the hexagonal star (Figure 39a), to BC the diameter of the hexagon (Figure 39a or c) is $\sqrt{3}:2$ a geometric system of relating the two dimensions of the hexagonal repeat unit is achieved without necessitating the use of an arithmetical system based on the irrational numbers.

Figure 39a, b and c

Hexagonal tiles, representing the hexagonal repeat unit, have been used to cover surfaces (Figure 100, page 144). However, the hexagonal repeat patterns have also been incorporated into rectangular repeat units to generate the same design (Figure 40).

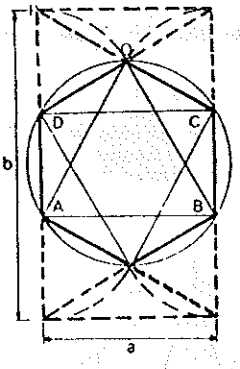


Figure 40

The two sides forming the upper corner O of the hexagonal repeat unit are extended to join the lines through the parallel sides AD and BC of the hexagon. The procedure of extending the two sides forming the lower corner of the hexagon to cut the same parallel sides is repeated, thus forming a rectangle of sides a and b, where a equals the side AB of the hexagonal star and b equals 3r (r is the radius of the circle and the side of the hexagonal repeat unit as indicated), or twice the height of the equilateral triangles forming the hexagonal star; and the triangle AOP is similar to triangle ABC of Figure 39c.

In pages 52 to 81 of this section, geometric designs based on the hexagonal repeat pattern are analysed in the manner explained in the previous section.

4 The Pentagon and the Golden Ratio

Euclid described the Golden Ratio as the 'extreme and mean ratio'. Renaissance writers referred to it as the 'Divine Proportion', and in the nineteenth century it became known as the 'Golden Section'. At present it is occasionally represented by the letter ϕ, phi, to express the ratio obtained by the following reasoning.

If the ratio between two quantities of the same kind is such that the ratio of the bigger b to the smaller a equals the ratio of the sum of both a + b to the bigger b, that is, $\frac{b}{a} = \frac{b+a}{b} = \phi$, then we have the Golden Ratio. The Golden Ratio has been represented numerically by the Renaissance scholar, Fibonacci, by means of a series:

$$\frac{b}{a}, \frac{b+a}{b}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13} \ldots, \phi$$

The series is an approximation which becomes more accurate the higher it goes until it nears the decimal value of ϕ at 1.618.

To divide a straight line AC into two segments related by the Golden Ratio

Given a line AC (Figure 58), draw the perpendicular DC = ½ AC, and with D as centre and DC as the radius describe an arc cutting AD at X. With A as centre and AX as the radius describe an arc cutting AC at B.

Then, $\frac{AC}{AB} - \frac{AB}{BC} = \phi$

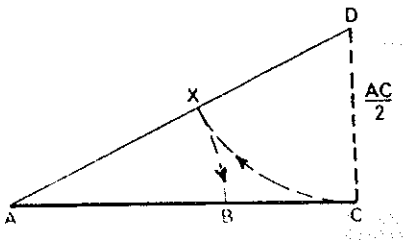


Figure 58

To obtain the Golden Ratio from a square

The Golden Ratio ϕ can also be obtained by the use of a square. Bisect at O the side AB of the square ABDE (Figure 59).

Draw diagonal OD, and with centre O and radius OD cut extended AB at C. If BD = 1, OB = ½ and, therefore, using the theorem of Pythagoras,

$$OD = OC = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Since AC = AO + OC, then:

$$AC : AB = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} : 1 = \phi$$

$$\text{or } \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

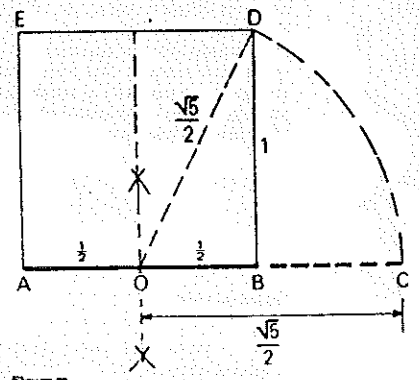


Figure 59

To construct a pentagon with a given side AB

Bisect AB at O (Figure 60), and construct square ABPQ; with O as centre and OP as radius describe a semi-circle intersecting the extensions of AB at C and D. Taking A as centre and AC as radius, describe an arc cutting the perpendicular bisector of AB at X, and with B as centre and BD as radius describe another arc from D intersecting the perpendicular bisector of AB also at X. Then with B as centre and BP as radius describe an arc cutting arc CX at Y, and repeat with A as centre and AQ as radius to cut arc DX at Z. Join points BYXZA to form the regular pentagon.

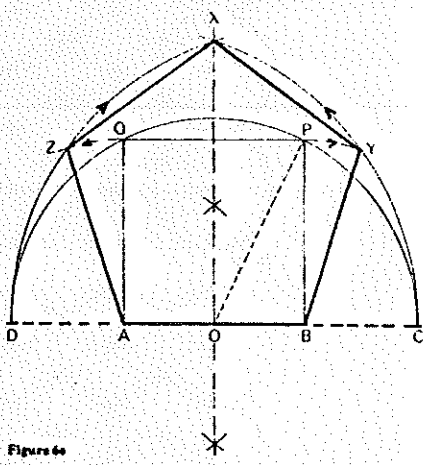


Figure 60

It can be seen that the line AC was obtained by the same procedure as shown in Figure 59, and that AC:AB = ϕ, i.e., the ratio of the diagonal to the side of the regular pentagon equals the Golden Ratio. The diagonals of the pentagon are the sides of the inscribed pentagonal star (Figure 61a) which cut each other in the proportion ϕ, i.e.

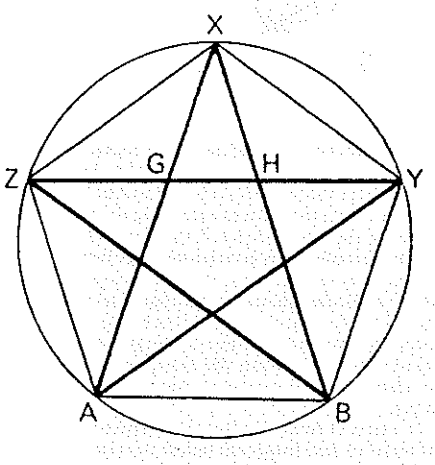
$$\frac{AX}{AG} = \frac{AG}{GX} = \frac{GX}{GH} = \phi, \text{ etc.}$$

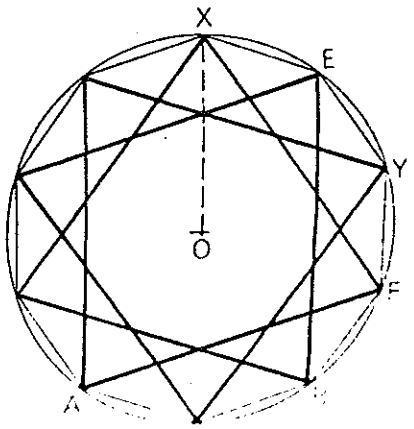
The method of constructing a pentagon in a circle has already been given in Figure 4.

In the inscribed decagon Figure 61b, which is derived from the pentagon (as shown earlier in Figure 6), the ratio of the radius OX of the circumscribed circle to the side XE of the decagon and the ratio of the side XF of the star decagon to the radius XO of the circle is equal to

the Golden Ratio, i.e., $\frac{OX}{XE} = \frac{XF}{OX} = \phi$

It can be seen that the regular pentagon and the regular decagon provide the designer with a geometric system of proportioning based on the Golden Ratio.





Figures 61a and b

Geometric Patterns in Islamic Design

5 Patterns Based on the Double Hexagon

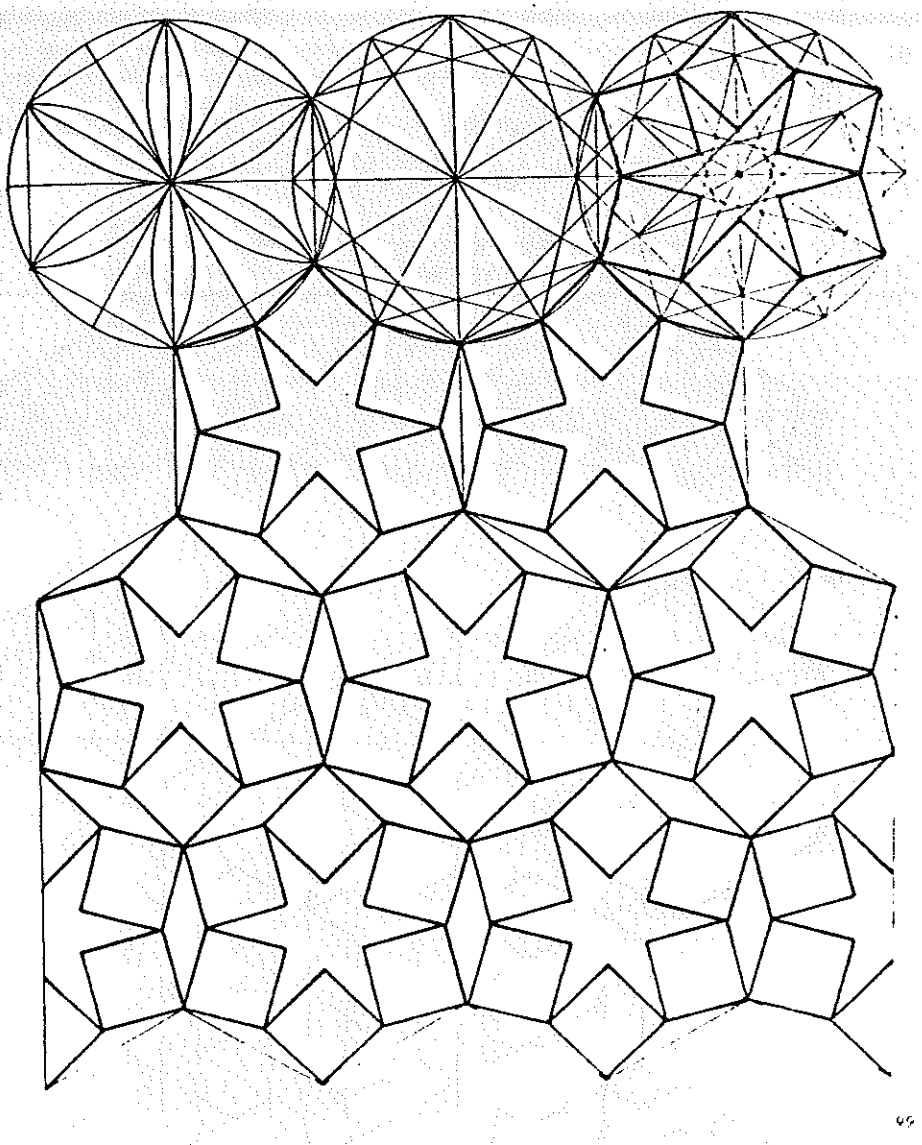
The patterns analysed in this section are generated by dividing the circumference of the circle into twelve equal parts, the process of which has been described earlier in Figure 5b. Two hexagons are inscribed in the circle by joining the alternate points on the circumference (Figure 68).

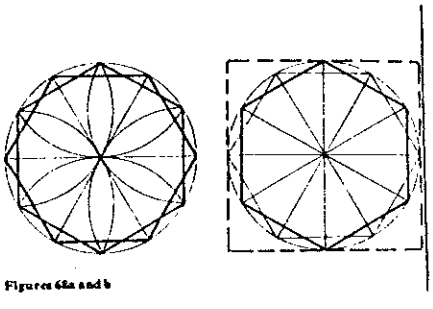
The repeat unit of the overall design can be one of the inscribed hexagons, or the circumscribed square as shown in Figure 68b, and also in Figures 76, 77 and 78 (pages 106 to 111). The method of equipartitioning the area to be decorated into hexagonal or square repeat units has already been described in sections 1 and 2, respectively, of this chapter. The master grid of the repeat pattern is constructed by inscribing three squares or four equilateral triangles either by using the twelve points of division or the circumference of the circle (Figures 69 and 70 respectively), or by using the midpoints of the sides of the inscribed hexagons (Figures 71 and 72 respectively). Constructing the master grid by the former procedure and generating the grid lines and the repeat patterns of two different designs is also illustrated in detail in Figures 79 and 80.

These particular methods of constructing the master grid established the only system combining the √2 and √3 system of proportioning (see sections 1 and 2 of this chapter). The resultant repeat patterns thus include equilateral triangles, squares, hexagons, octagons, dodecagons, and their stars, to create the characteristically rich visual harmonies of design illustrated in this section.

Different systems of proportioning can be thus combined when the circumference of the circle is sectioned equally by that number of points on which multiples of the regular polygons providing these particular systems of proportioning can be drawn to give the required master grid. For example, when the circumference is divided into fifteen equal sections, five equilateral triangles or three pentagons can be inscribed to give the master grid which combines the proportioning systems based on the √3 and the Golden Section. The resultant repeat patterns would be characterized by triangles, pentagons and their multiples combined with their respective stars.

Figure 69





Figures 68a and b

Fiche 1

Figure 56

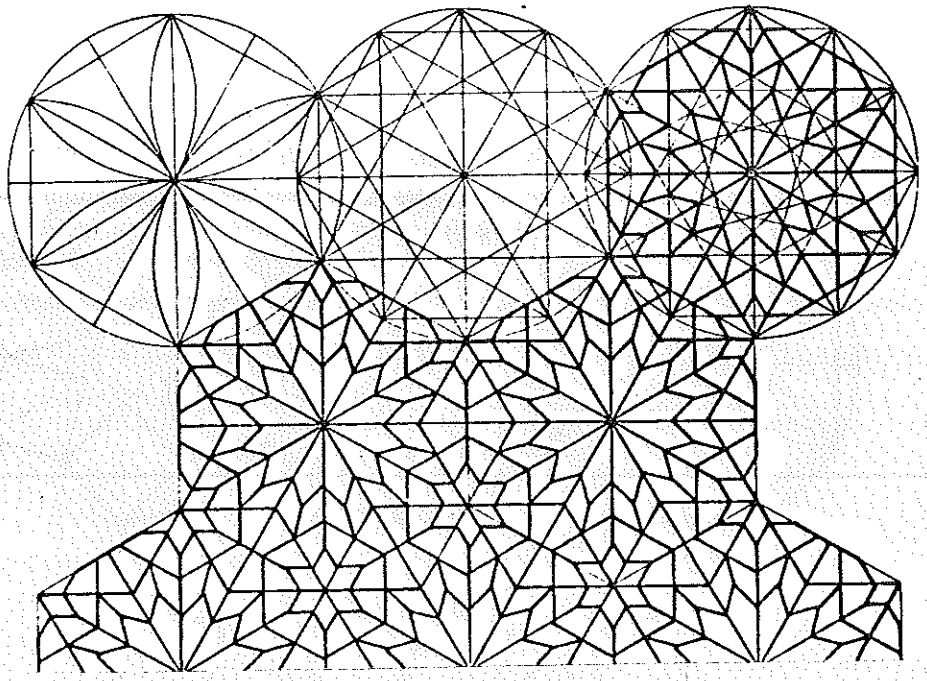
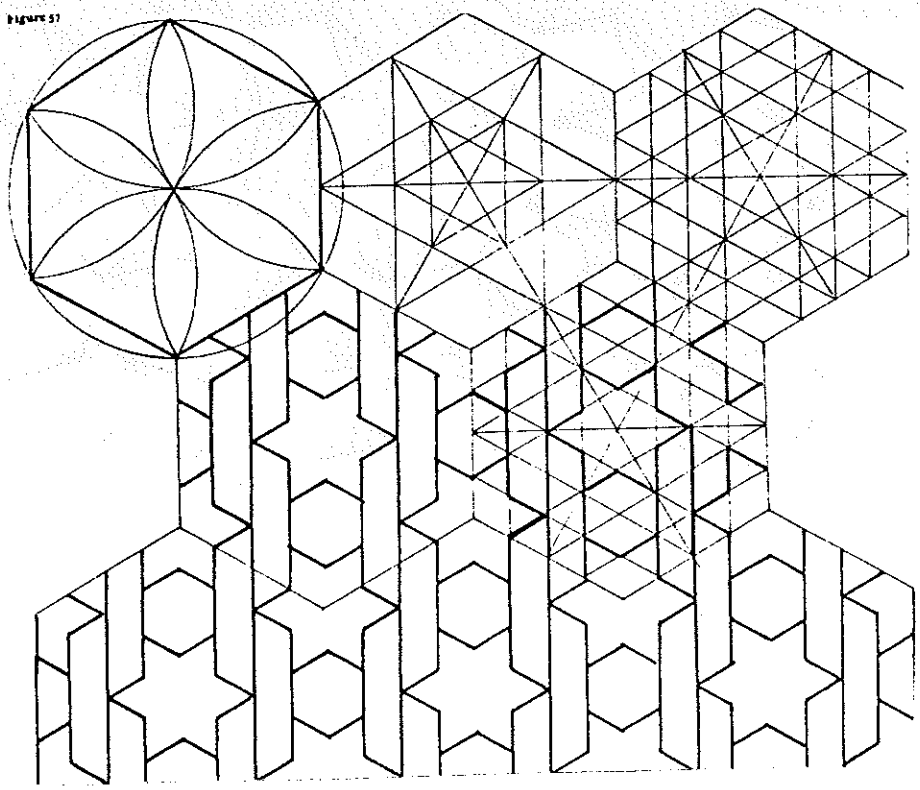
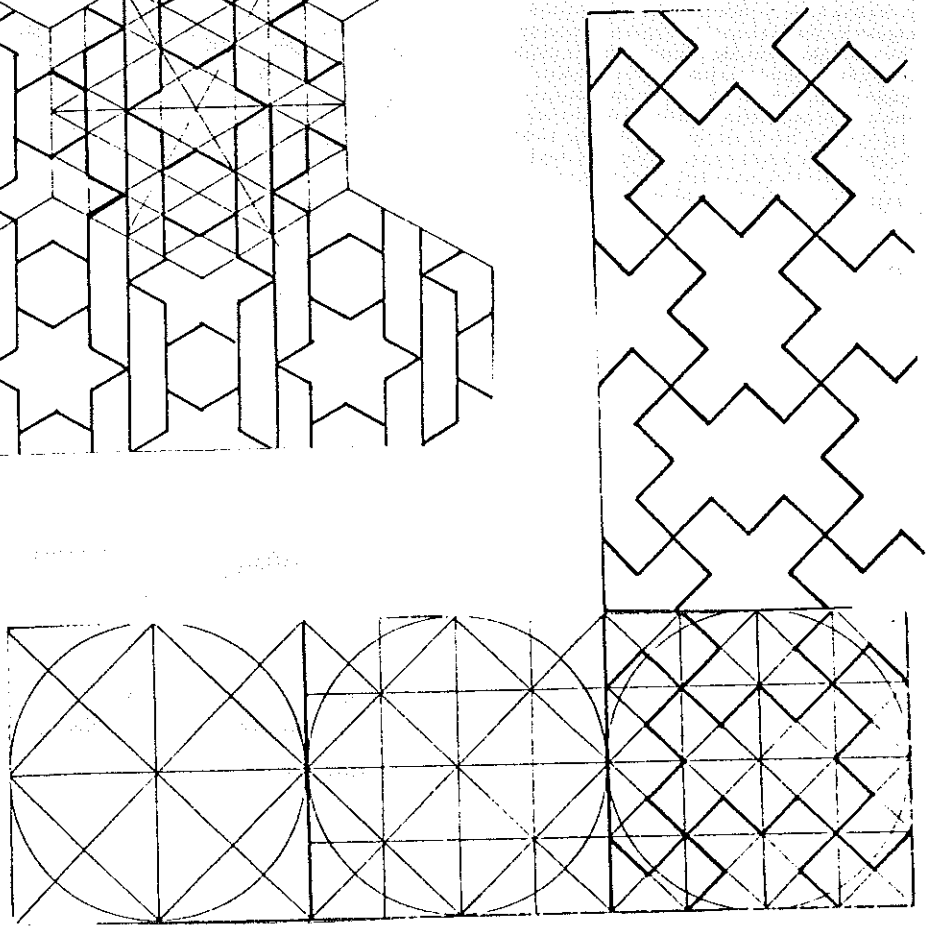
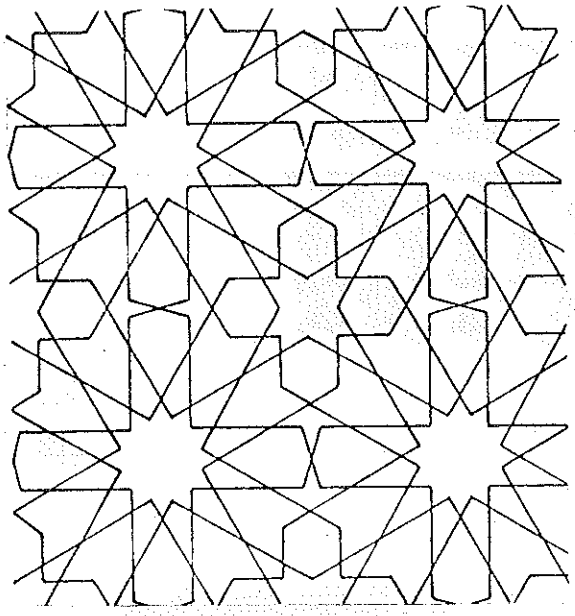


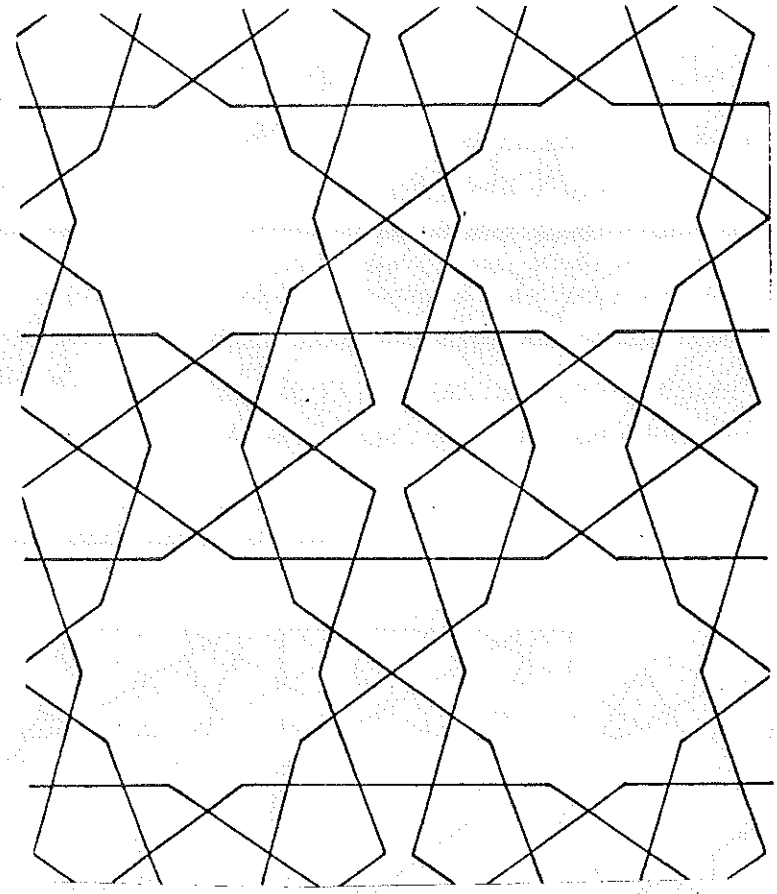
Figure 57

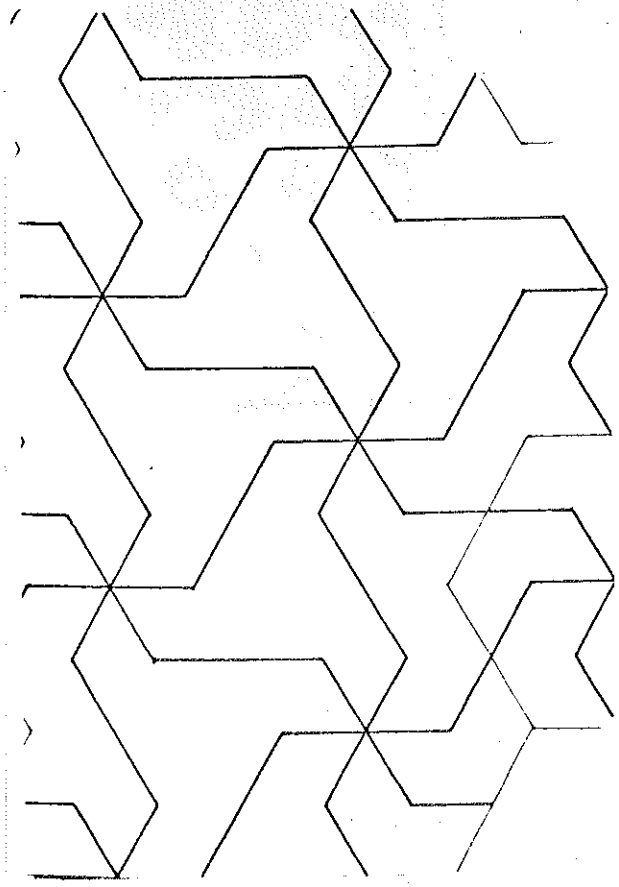


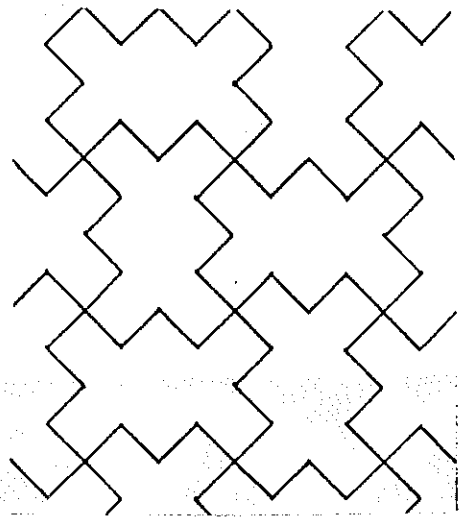


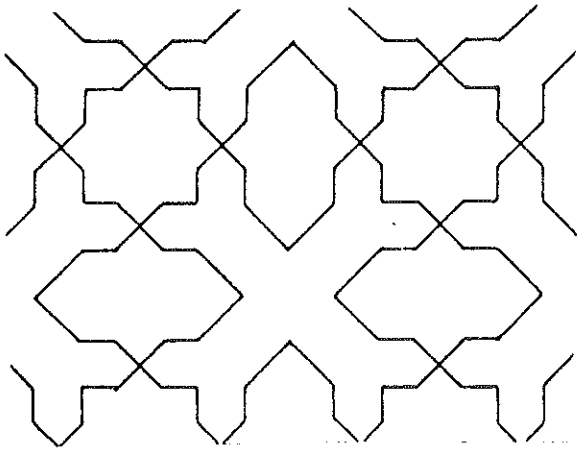
Fiche 1

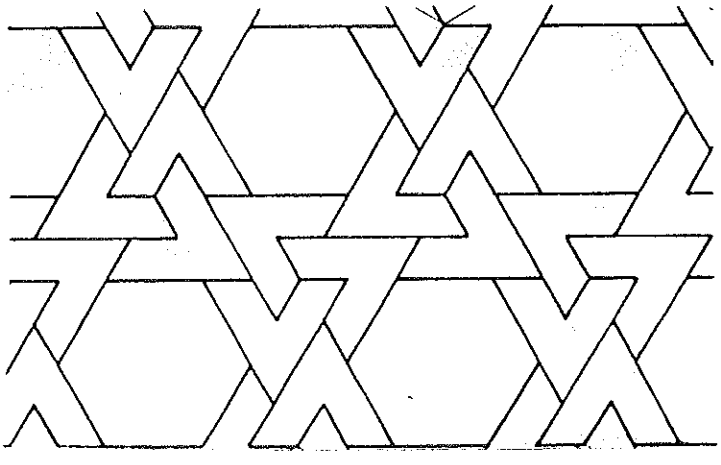




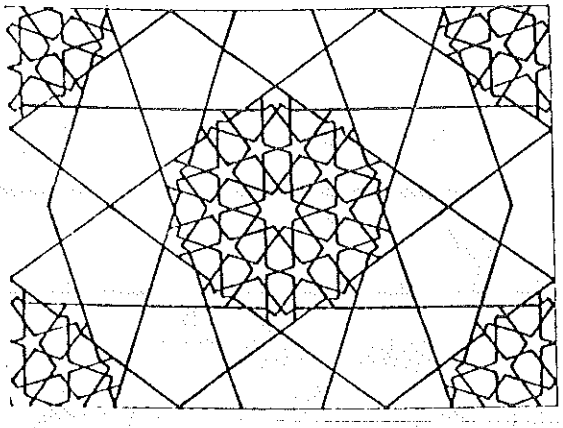








Fiche 1



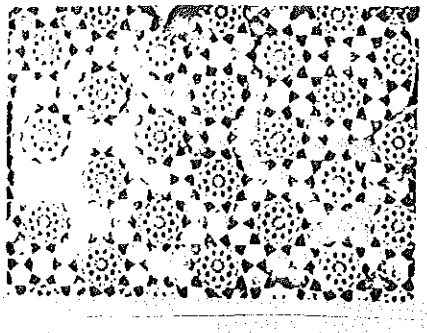
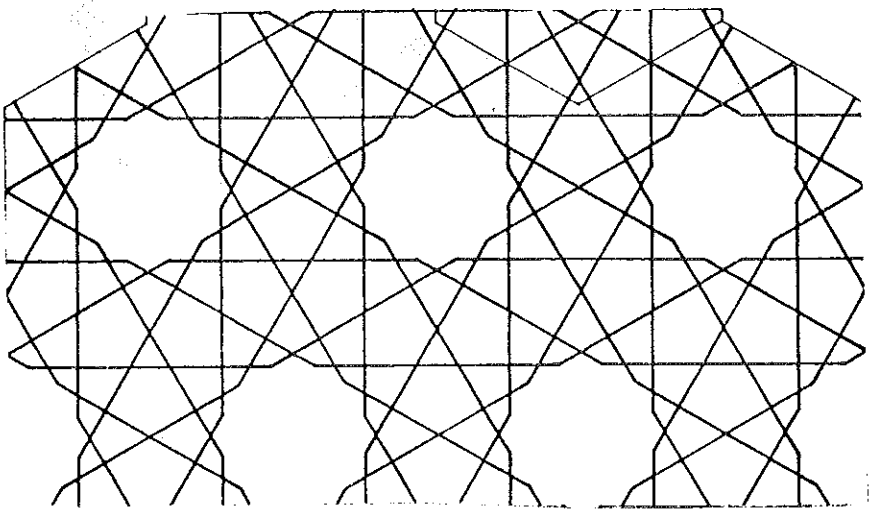


Plate 33. Eighteenth-century tiles from the Masjid-i-Jāmi, Isfahan, Iran.



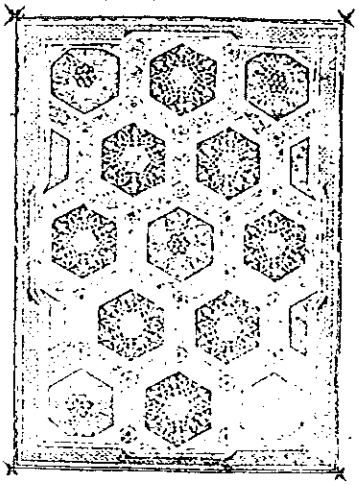
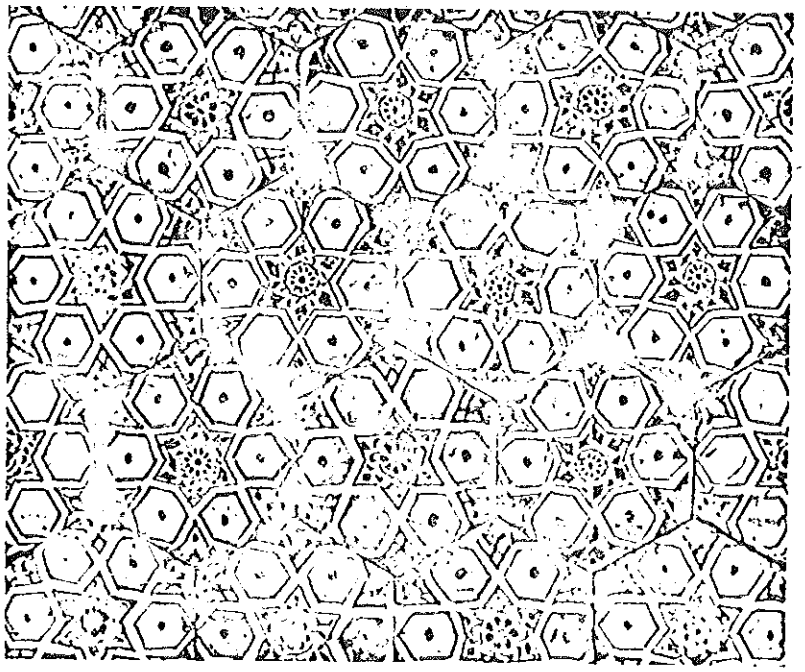
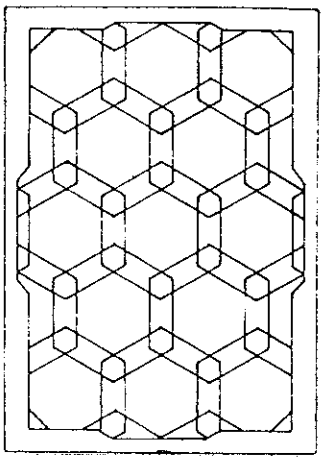


Plate 53. Quran. Mosul, Iraq 8th/14th century.

Plate 49. Tiles from the Great Mosque, Damascus, Syria, 8th–9th/14th–15th century.





Fiche 1

CONSTRUCTIONS GEOMETRIQUES
ACTIVITES POSSIBLES

1) lire - traduire - expliquer - faire un compte-rendu des pages (A), (B), (C), (D).

2) Reproduire un (des) dessins de la page E).

Rédigez la construction d'un tel dessin.

Repérez entre deux motifs différents des alignements, ou des droites parallèles ou des segments de longueur égales ... Démontrez.

Calculer la longueur de certains de ces segments ...

3) A partir d'un (des) dessins des pages (F) ou (G) trouver les constructions géométriques qui permettent de les reproduire, les décrire.

Trouver notamment la construction géométrique de la figure (4) de la page (G).

Fiche 2

DALLAGES AVEC DES POLYGONES

* Construire des polygones réguliers.

* Essayez de faire un dallage avec des polygones réguliers tous identiques.

Avec lesquels est-ce possible. Pourquoi ?

* Réalisez des dallages différents à partir d'un triangle quelconque
ou à partir d'un triangle isocèle,
ou ..... isocèle rectangle
parallèlogramme
rectangle
carré
quadrilatère quelconque

Est-ce possible avec n'importe quel quadrilatère ?

Trouver des hexagones qui vous permettent de construire un dallage. Essayez de trouver des conditions que doivent remplir des hexagones pour qu'un dallage soit possible.

Trouver des pentagones qui vous permettent de construire un dallage.

* Pour un dallage donné, essayez de décrire sa construction c'est-à-dire rédigez une explication qui permette à un camarade n'ayant pas vu votre dallage de le reproduire.

"PAVER" DES POLYEDRES

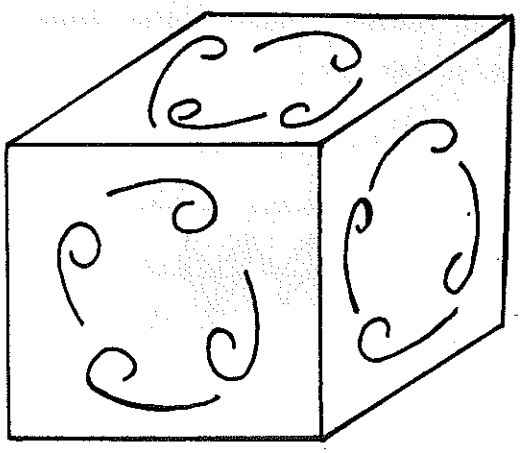
- Construire des polyèdres réguliers
  " des deltaèdres

- Essayez de les "paver"

- Parmi les 17 modèles de dallages quels sont ceux dans lesquels ont peut découper le patron d'un tétraèdre "pavé" de paire !
  d'un cube "pavé" "

- Etudier les transformations qui laissent invariant un tétraèdre et son pavage, un cube et son pavage.

- Essayez d'élaborer la table de Pythagore, pour la composition de ces transformations.



FABRIQUER UN DALLAGE A PARTIR D'AUTRES

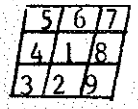
Etant donné un dallage avec des polygones tous identiques.

* dallage dérivé :

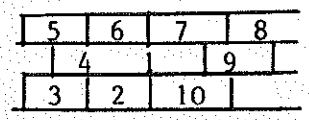
Soit D_1 une des dalles (bords compris) et M_1 un point de P_1.

Reporter (éventuellement à l'aide d'un calque) le point M_1 dans toutes les autres dalles de la figure.

Relier entre-eux tous les points ainsi obtenus situés dans deux dalles adjacentes.

(note 

2,4,6,8 sont adjacentes à 1 mais pas 3,5,7,9



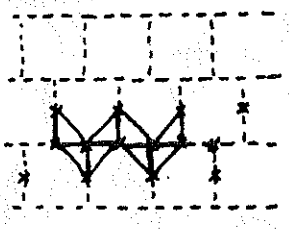
2,4,6,7,9,10 sont adjacentes à 1

* dallage dual :

Cas particulier de dallage dérivé, lorsque les polygones du dallage de base possèdent un centre et que M_1 est au centre.

* dallage verticiel :

Relier en tournant autour d'un sommet, les milieux des côtés du dallage issus de ce sommet.



Questions :

M étant choisi sait-on toujours construire le dallage dérivé ?

Tous les dallages dérivés construits à partir d'un dallage donné sont-ils identiques ? Donner des exemples.

Trouver des dallages qui permettent d'obtenir des dallages dérivés (ou duaux, ou verticiels) composé de polygones réguliers tous identiques.

Et si on répète l'opération ?

Pavage verticiel d'un dallage verticiel.

Dallage dual du dallage dual d'un dallage.

Quels sont les dallages "auto-duaux" (le dallage et son dual peuvent être superposés).

GROUPES

1. Rappeler les propriétés d'un groupe.

2. Montrer que dans un groupe si $a*b = a*c$ c'est que $b=c$.

En déduire une particularité de la table de Pythagore d'un groupe.

3. Construire les tables de Pythagore d'un groupe à 2 éléments
3 éléments
4 éléments.

4. Construire un carré. Quelles sont toutes les transformations du plan qui laissent globalement invariant ce carré.

Construire la table de Pythagore, pour la composition de cet ensemble de transformations. Montrer que l'on obtient un groupe. Est-il commutatif ?

5. Mêmes questions pour un triangle
un pentagone
un hexagone.

Fiche 6

ETUDE D'UN DALLAGE

Pour un dallage donné : isoler le "motif minimal" : c'est-à-dire le dessin le plus petit possible, qui reproduit, à l'aide d'un calque, permette d'obtenir tout le dallage.

Pour un même dallage, y-a-t-il plusieurs façons de choisir le "motif minimal". Donner des exemples. Si oui qu'ont en commun tous ces choix.

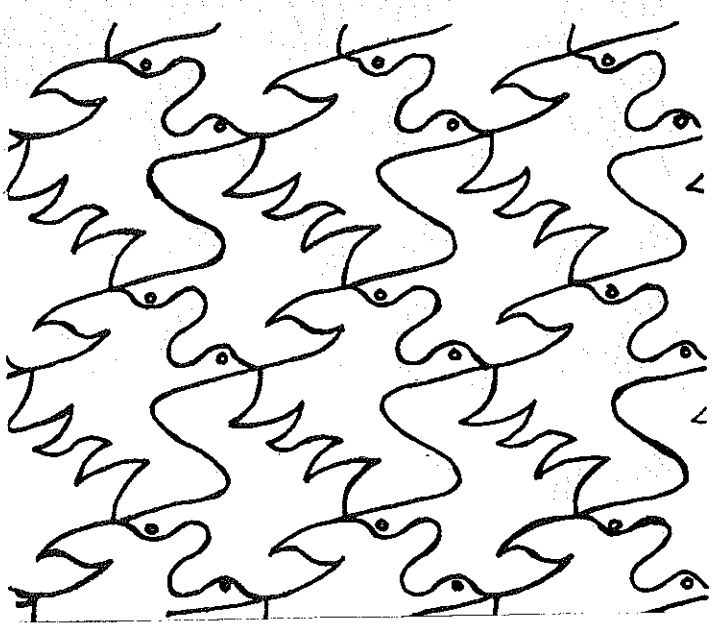
a) Ayant isolé un motif minimal décrire toutes les transformations du plan dans lui-même pour lesquelles l'image de ce motif coïncide avec un motif adjacent.

Choisissez un autre motif. Refaites le même travail, comparez.

b) Pour une des transformations ci-dessus quelle est l'image du dallage tout entier.

Décrire l'ensemble des transformations qui laissent votre dallage "globalement invariant".

c) Dans le dallage ci-contre décrire toutes les translations qui laissent invariant ce pavage.



Essayez de trouver plusieurs façons de les décrire.

Si l'on compose deux translations de cet ensemble qu'obient-on ?

Pouvez-vous le démontrer ?

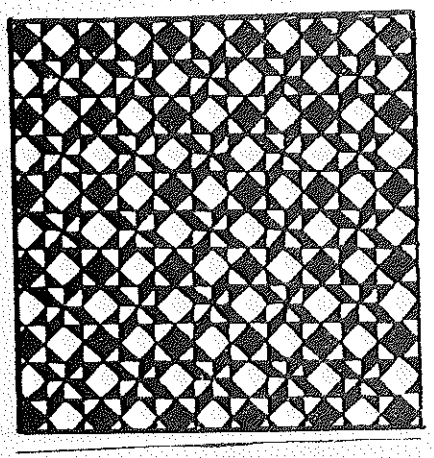
Montrer que l'ensemble de ces translations forme un groupe commutatif.

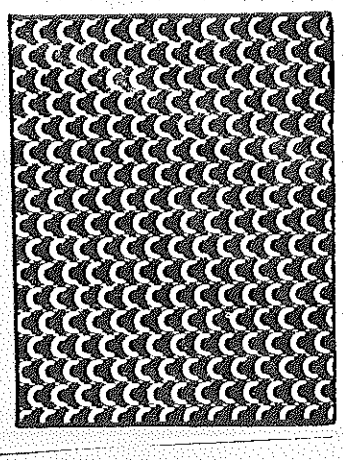
d) Marquer sur le dessin tous les centres de symétrie.

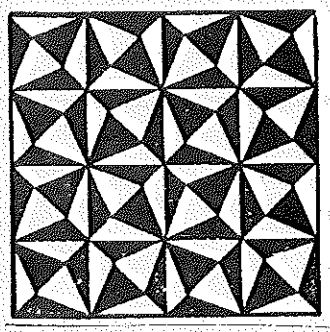
Si O_i et O_j sont deux centres de symétrie que peut-on dire de $\overrightarrow{O_iO_j}$.

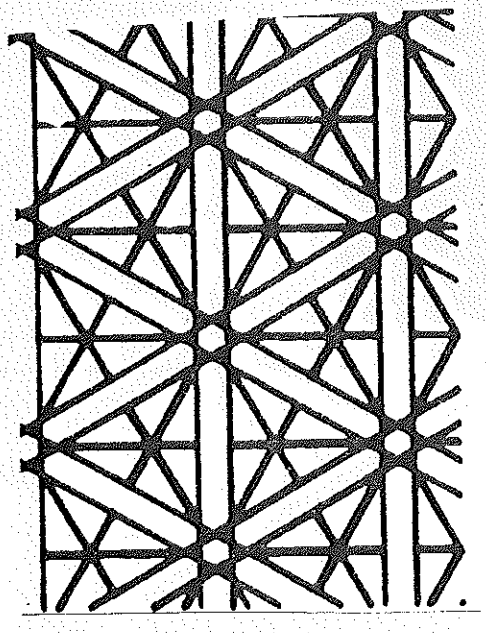
Si O_l est un centre de symétrie prouver que $S_{O_l}(O_i)$ est encore un centre de symétrie.

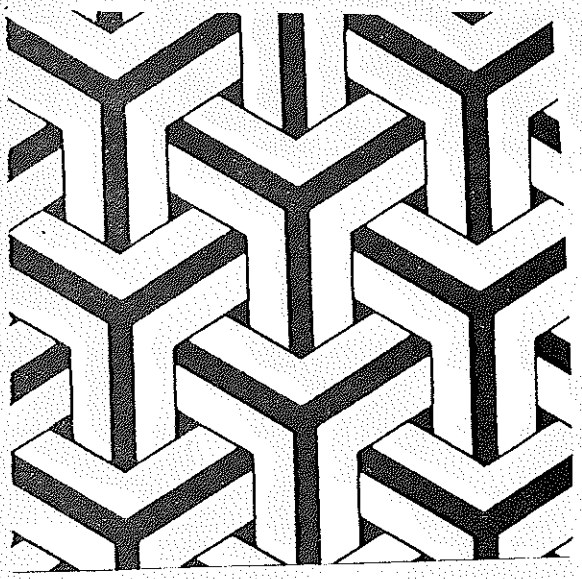
Fiche 6

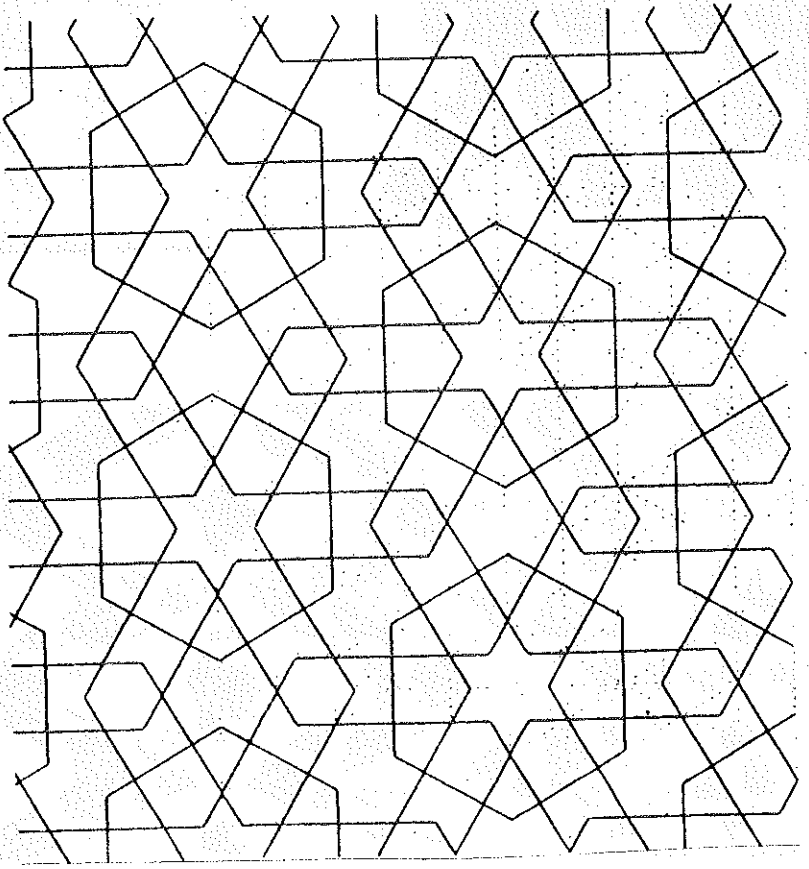




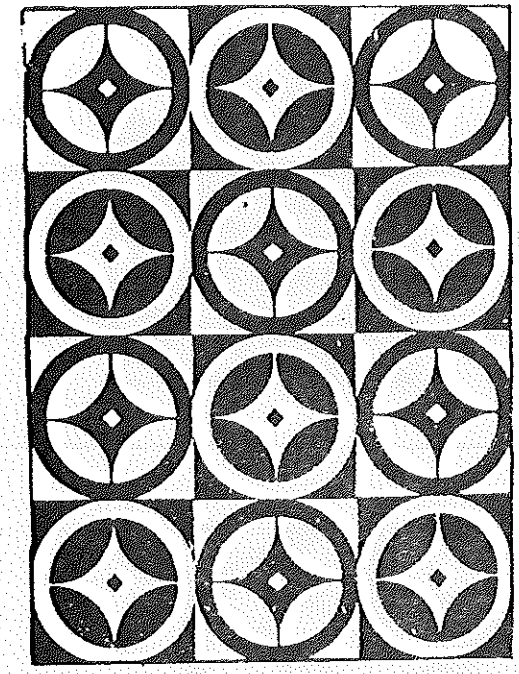


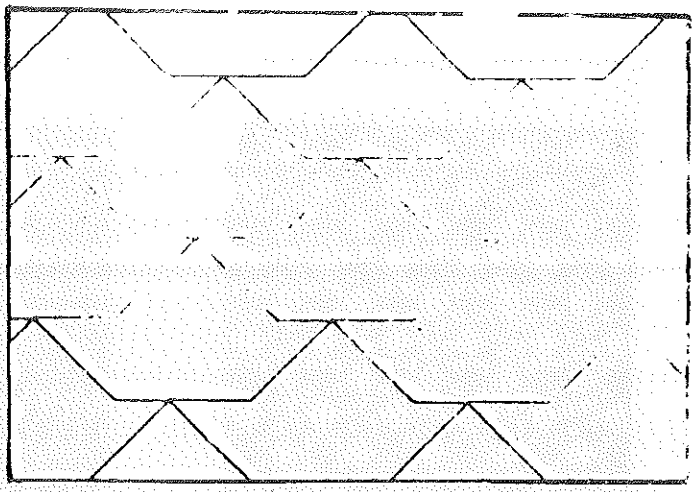


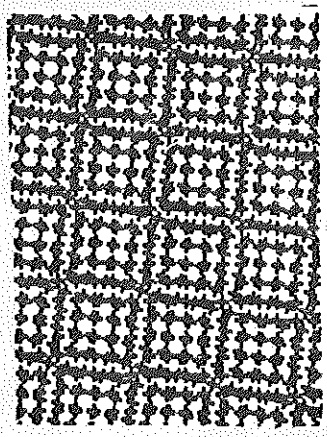


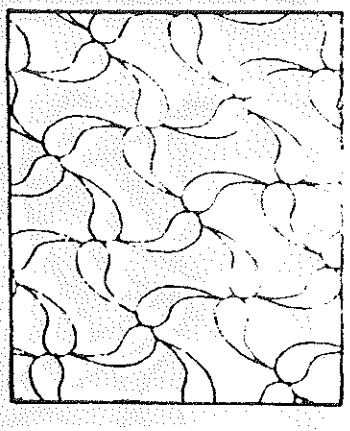


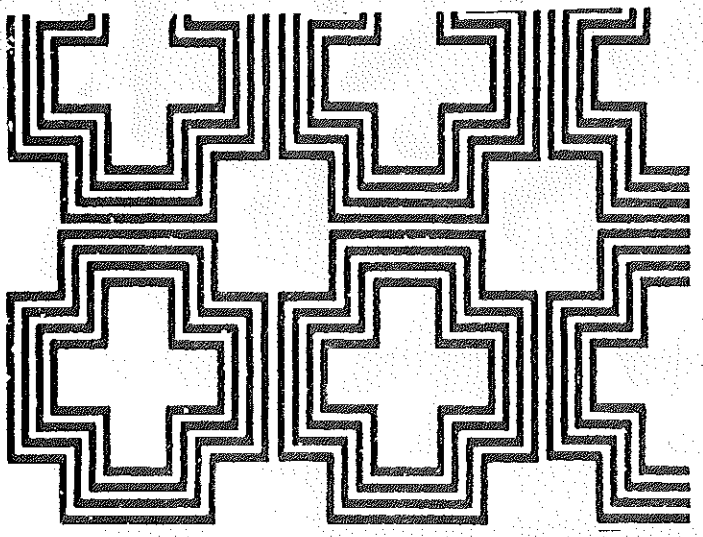
Fiche 6

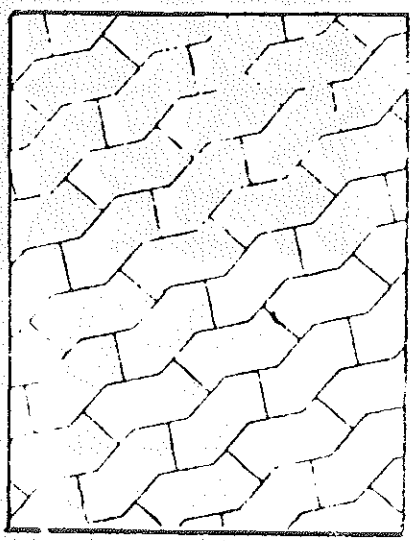


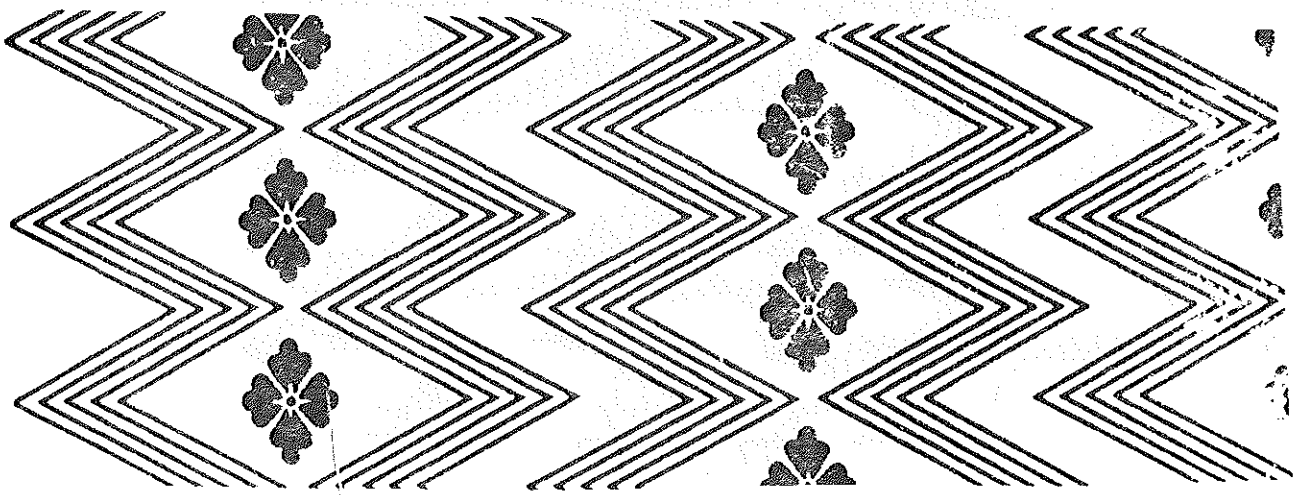












. Etant donnés deux centres de symétries O_1 et O_2

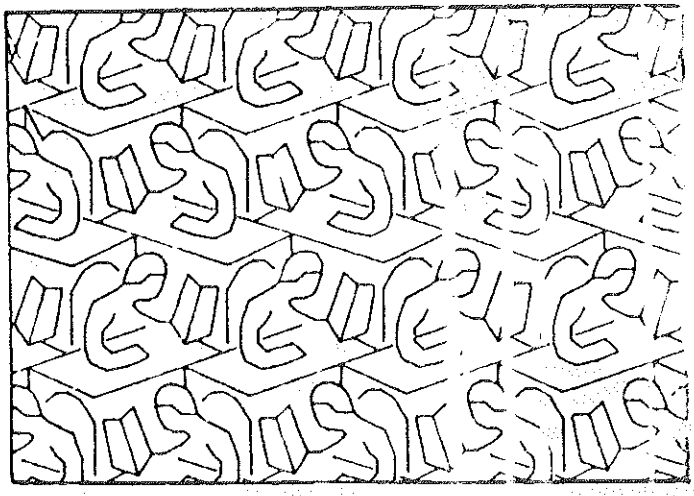
Etudier $S_{O_1} \circ S_{O_2}$ et $S_{O_2} \circ S_{O_1}$.

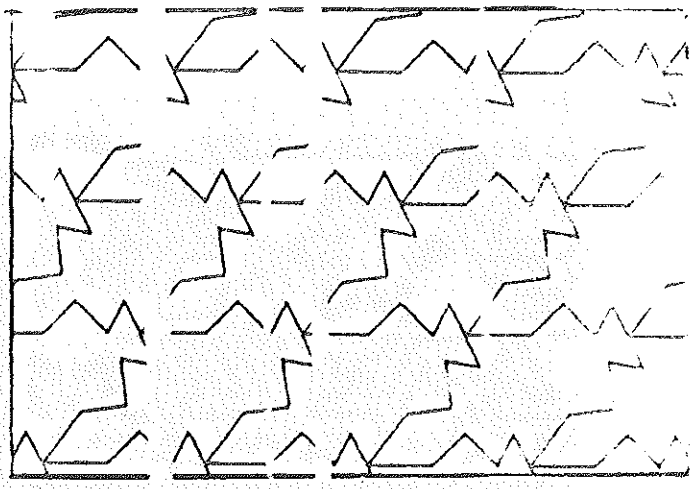
. T étant une des translations étudiées au c), Etudiez $T \circ S_{O_1}$ et $S_{O_1} \circ T$.

. Prouver que l'ensemble des transformations qui laissent globalement invariant ce dallage (on précisera quels sont les élèments) de cet ensemble est un groupe. Est-il commutatif ?

Reprendre une étude analogue pour un autre pavage :

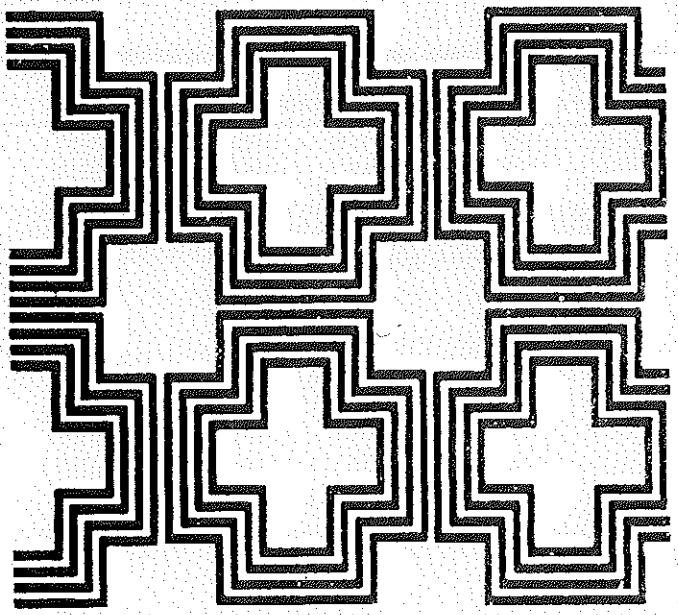
par exemple :

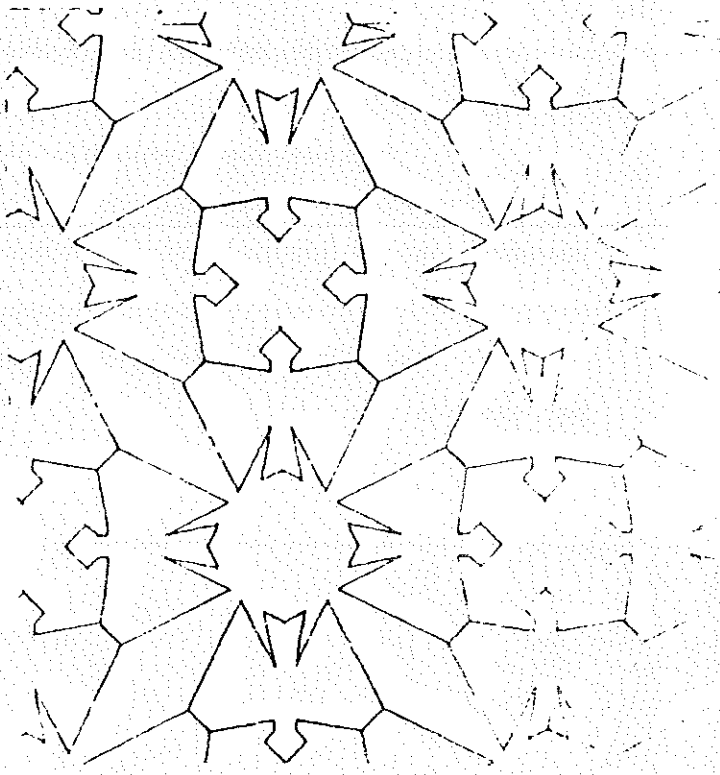


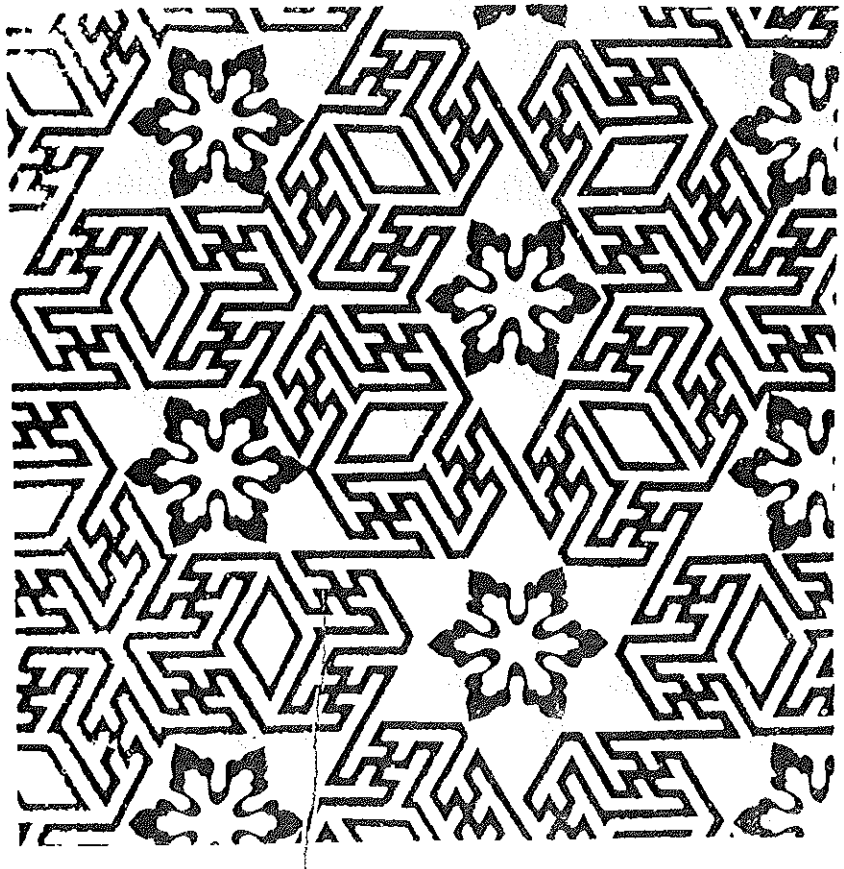


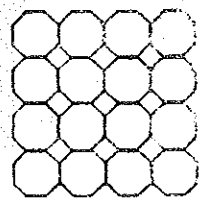
Fiche 7

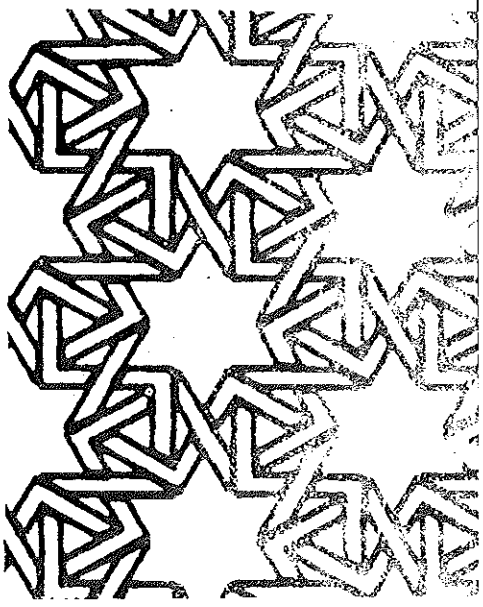
COMPARER DES PAVAGES



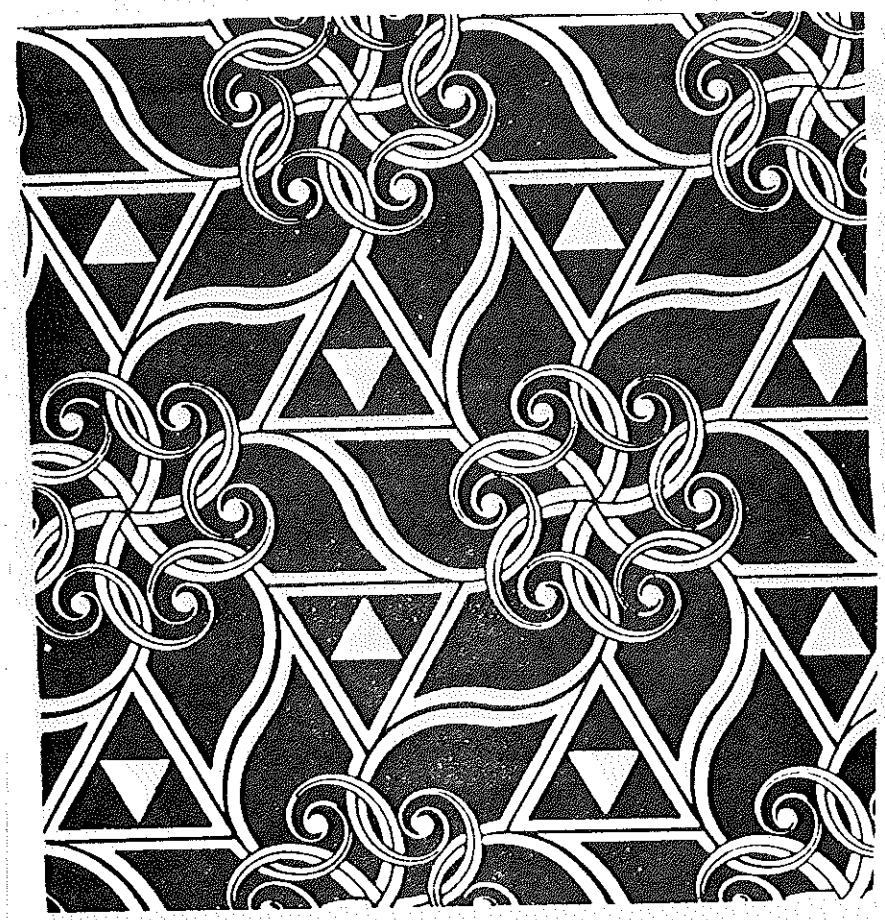


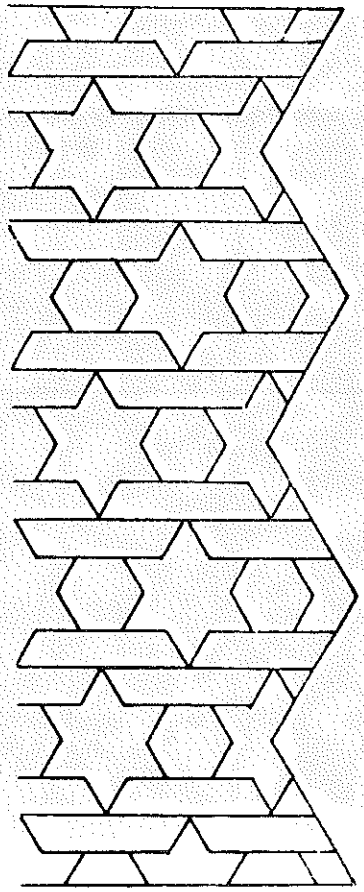


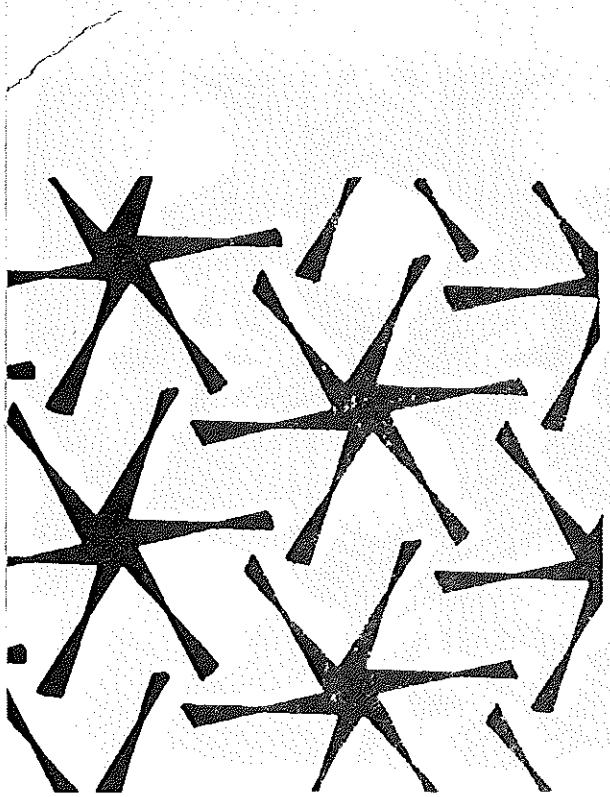


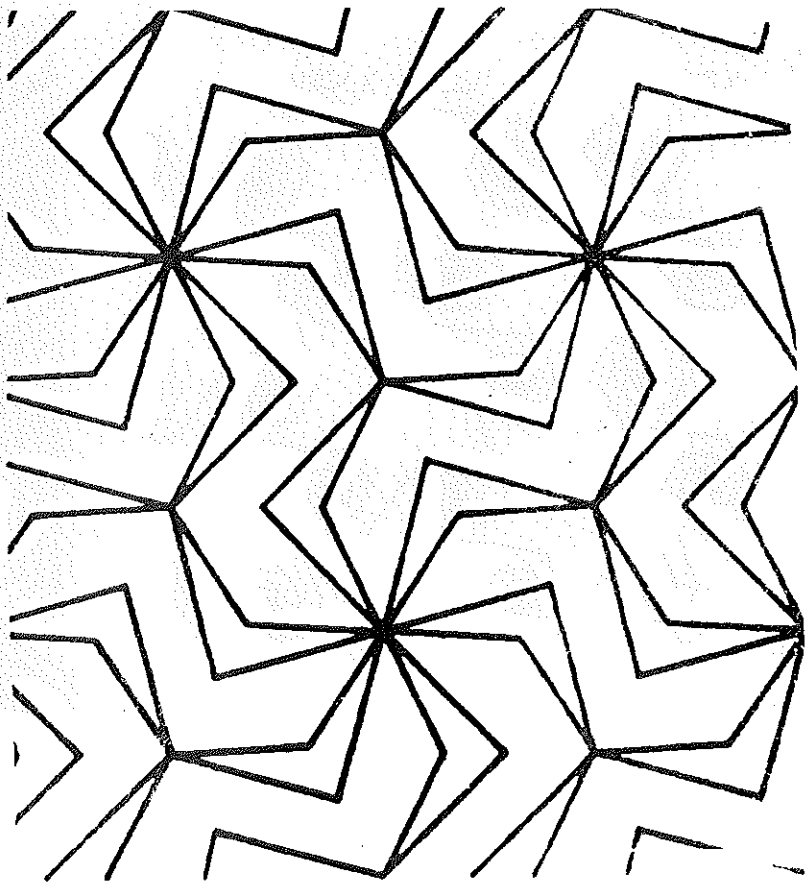


Fiche 7

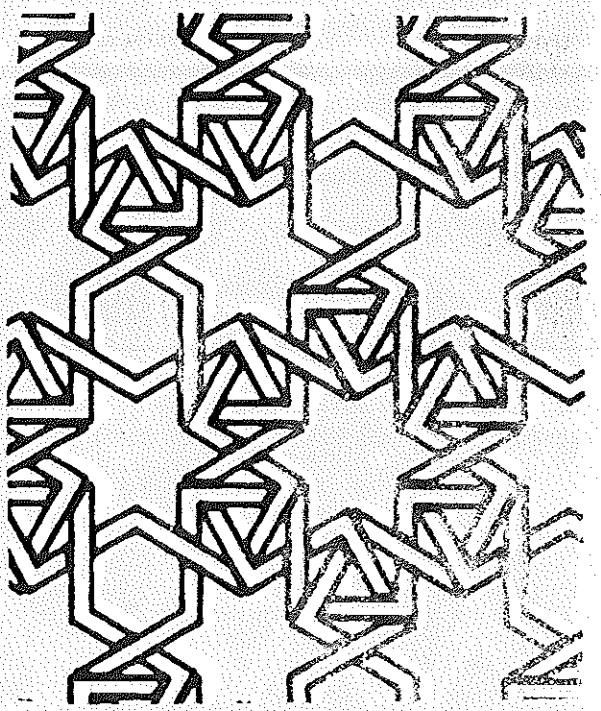


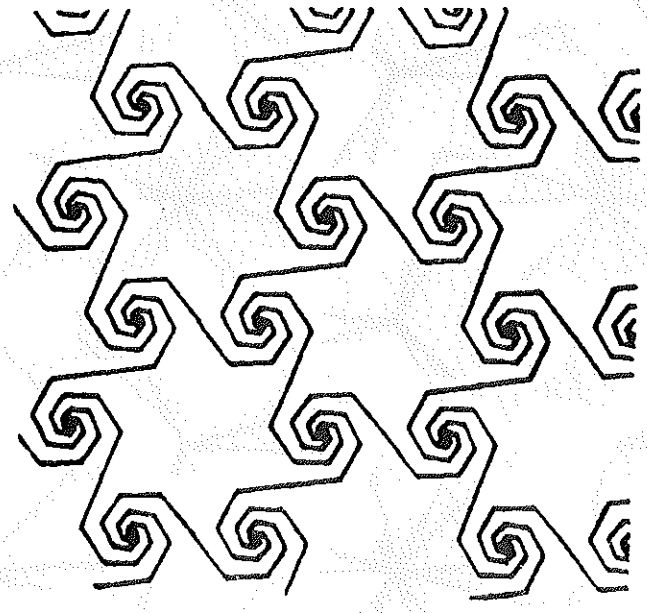


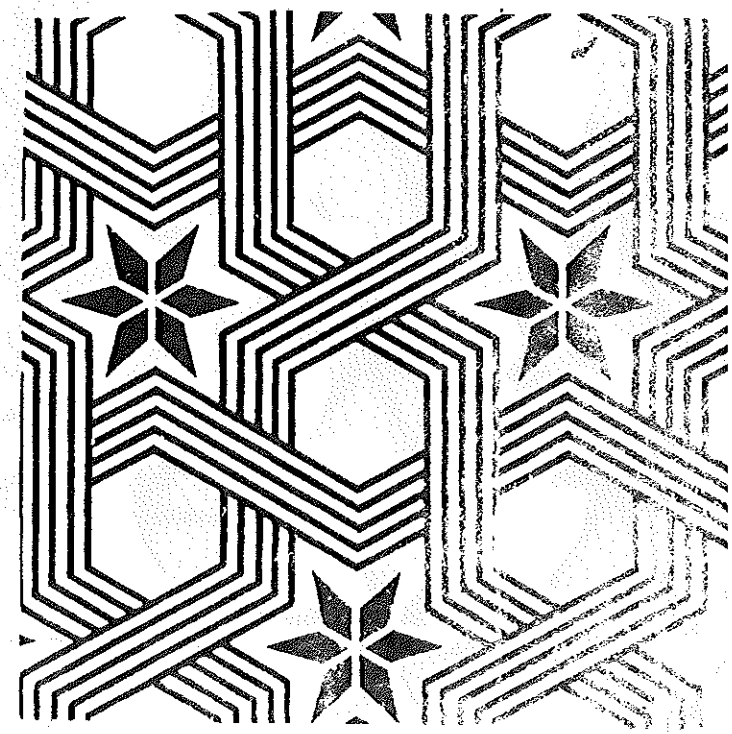




Fiche 7





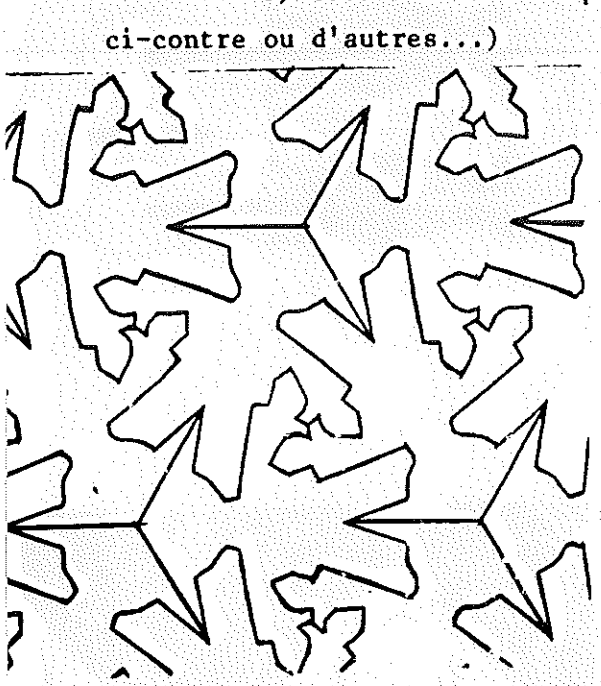


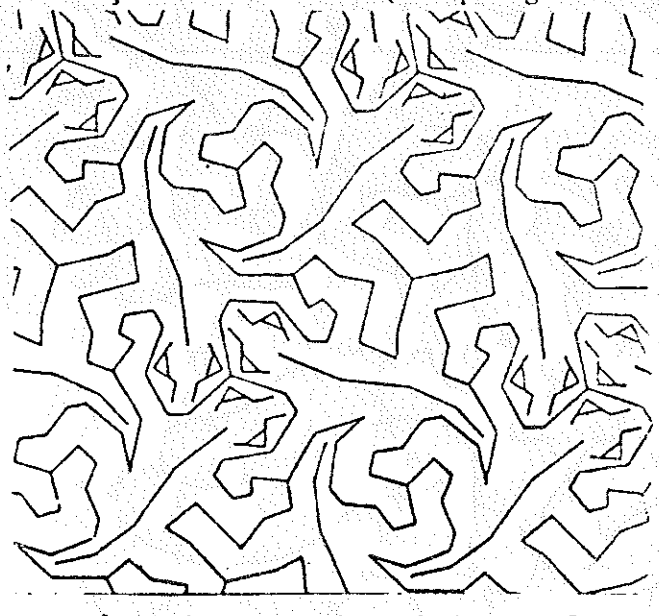
COMPARER DES PAVAGES

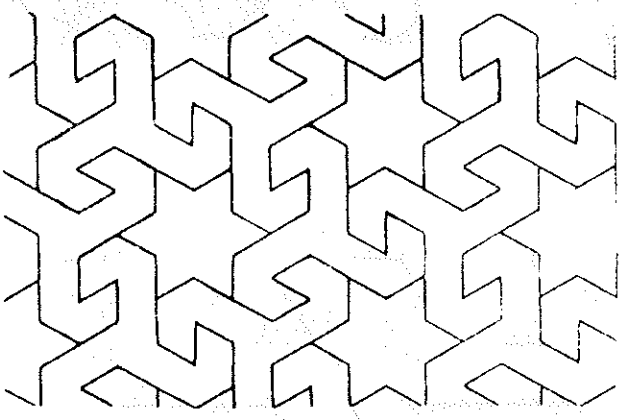
A) Regrouper dans les pavages qui vous sont présentés, (ou d'autres : papiers peints, papiers cadeaux etc...) ceux qui vous semblent fabriqués de la même manière.

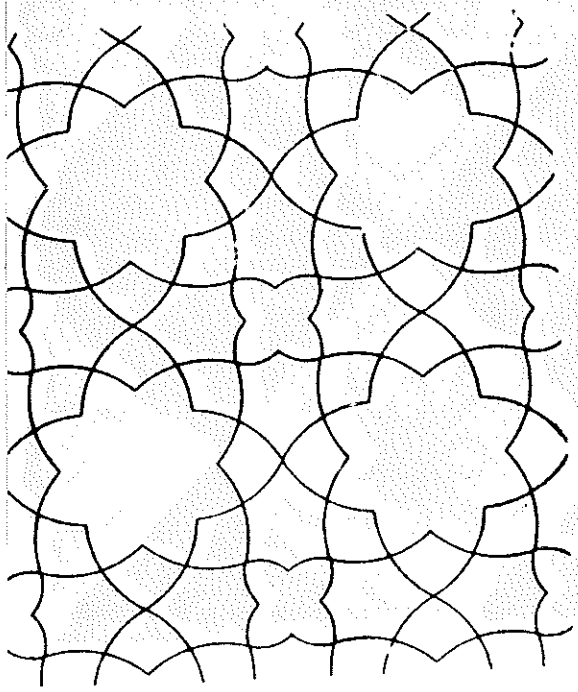
Etudiez-les - Fabriquez en d'autres du même type.

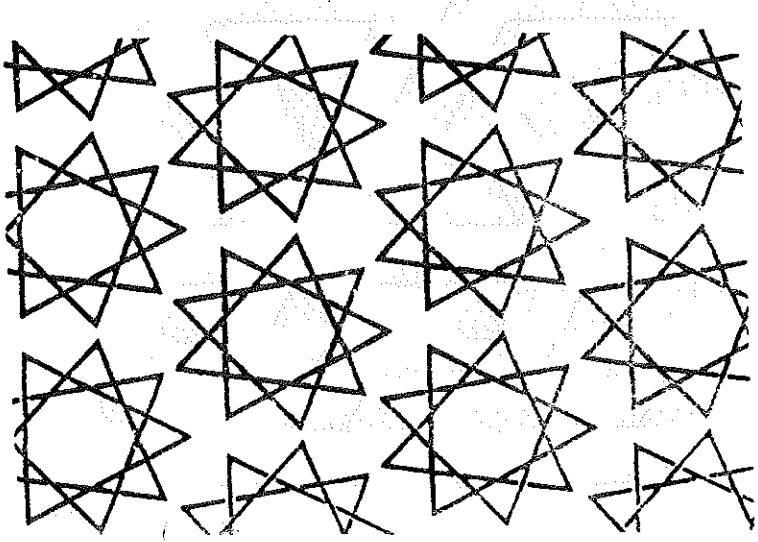
B) Colorier un même pavage de façons différentes (les pavages ci-contre ou d'autres...)



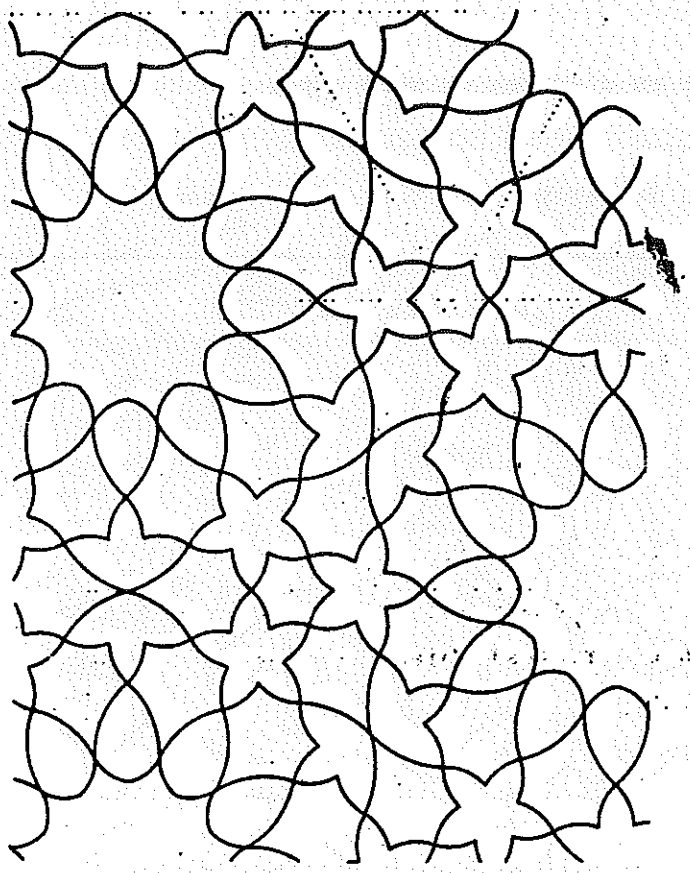


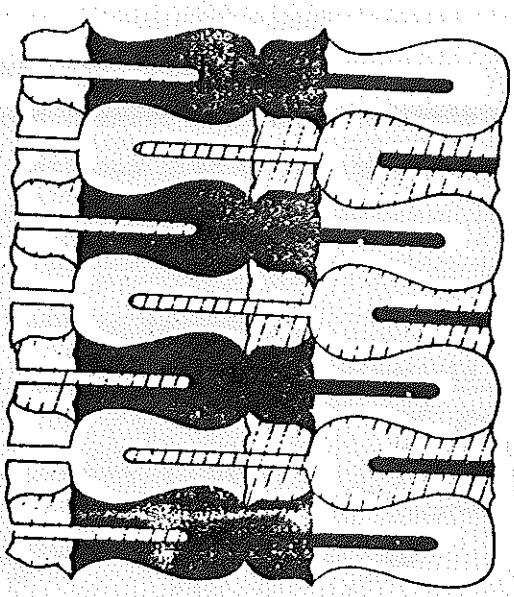


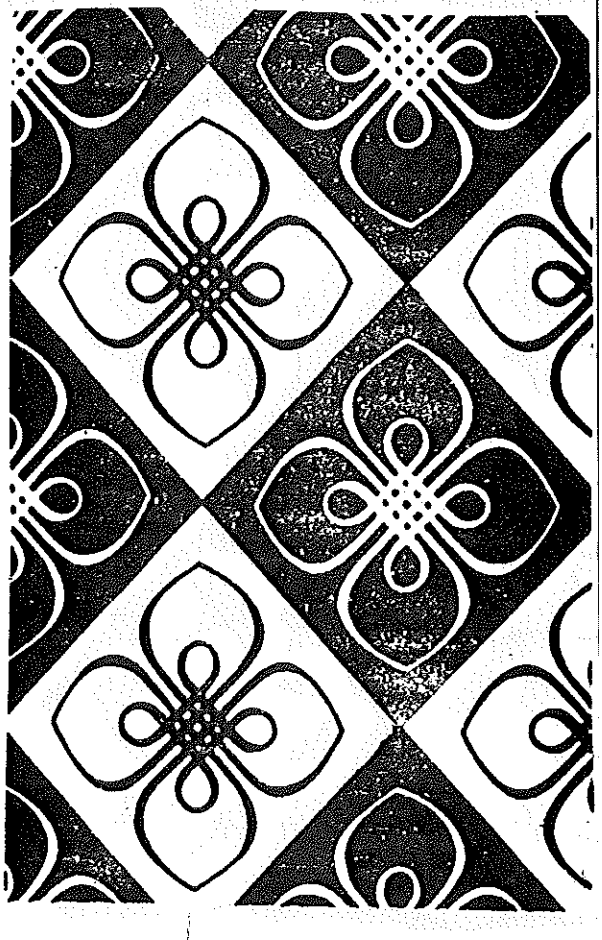


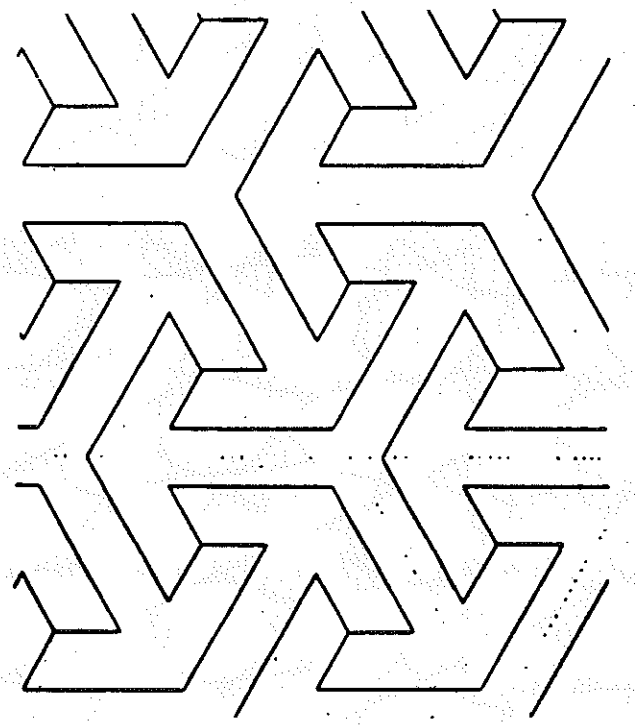


Fiche 7









Fiche 7

C) Etudier suivant le coloriage, les différents motifs minimaux obtenus (en tenant compte des couleurs). Comparez-les.

Dans chaque cas étudier les différentes transformations qui laissent globalement invariant votre pavage.

Comparer ces différents ensembles.

D) Avec deux pavages de structures différentes, essayez de trouver un coloriage tel que les ensembles de transformation qui les laissent globalement invariant (compte-tenu des coloriages) soient les mêmes. Est-ce toujours possible.

17 GROUPES DE PAVAGE

. Si l'on observe un dallage, on appellera "motif de base" de ce dallage, le plus petit motif qui reproduit uniquement par translation, permette d'obtenir tout le dallage.

Sur quelques exemples distinguer "motif minimal" et "motif de base".

. On admettra dans cette fiche que le motif de base peut toujours être disposé suivant les modèles suivants.

parallèlogramme	losange	rectangle
Réseau n°1	(2)	(3)

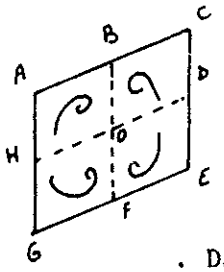
carré	hexagones.
(4)	(5)

. Dans le cas (1) essayez, en utilisant le motif ci-contre : comme motif minimal de construire plusieurs dallages différents.

Combien en obtenez-vous ?

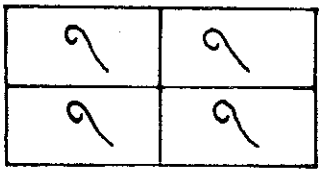
ATTENTION :

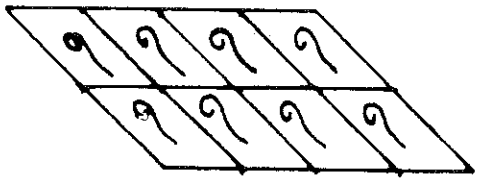
vous pouvez disposer le motif plusieurs fois dans chaque dalle, mais chaque dalle doit alors contenir un nombre entier de dalles minimales toutes identiques.



ceci ne conviendrait pas : on ne peut pas, même en retournant le calque superposer (A,B,O,H) et (B,C,D,O) (vérifiez).

. Dans le cas (2) Combien de dallages différents pouvez-vous obtenir qui n'aient pas été obtenus au cas (1).





ces deux pavages seront considérés comme "identiques". C'est le même procédé de construction : des translations dans deux directions différentes, simplement dans le dessin de gauche ces directions sont orthogonales).

. Dans le cas (3) même question pour des dallages, différents du 1).

. Dans le cas (4) même question pour des dallages, différents du 1) et du 2) et du 3).

. Dans le cas (5) même question, pour des dallages, différents du 1).

. Dessinez tous les modèles obtenus. Vous devriez en avoir obtenu 17.

Pour vous aider 2 dans le cas (1)
2 " " (2)
5 " " (3)
3 " " (4)
5 " " (5)

. On peut démontrer que n'importe quel pavage est bâti sur le même modèle qu'un de ces 17.

Essayez pour quelques uns de reconnaître le modèle.

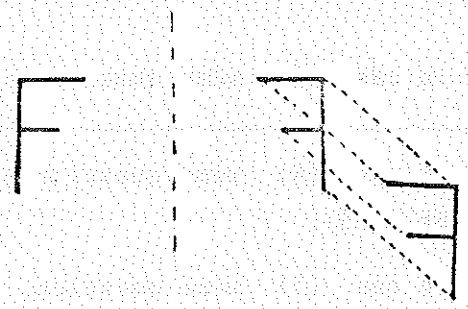
Pour vous aider vous pouvez utiliser l'"algorithme de reconnaissance".

Fiche 9

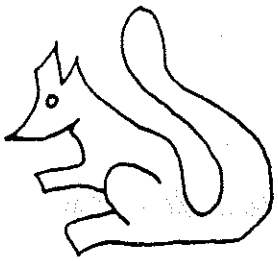
ETUDE D'UN GLISSEMENT

. On appelle glissement la transformation obtenue en composant une symétrie orthogonale avec une translation

ex :



. Les deux figures ci-contre ont été obtenues par glissement
- trouver l'axe de symétrie orthogonale et la translation
- y-a-t'il plusieurs choix possibles ? qu'ont-ils en commun



Si T est une translation et S une symétrie orthogonale T o S est-il égal à S o T ?

- L'image d'une droite est-elle une droite parallèle ? toujours? jamais? quelquefois? justifiez votre réponse.

- Trouvez des pavages dans lesquels il y a des glissements ? Précisez quelles sont les directions d'axes de glissement.

sur cette page on peut passer d'une figure à l'autre soit par translation
soit par rotation
soit par glissement.

Déterminer dans chacun des cas, la transformation adéquate
(Pour les translations on précisera le vecteur
Pour les rotations on précisera le centre et l'angle
Pour le glissement on précisera la direction d'axe de glissement).

fig 1

fig 3

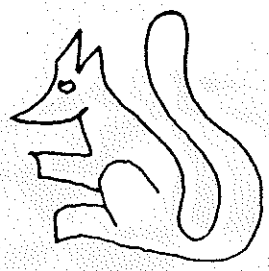


fig 2

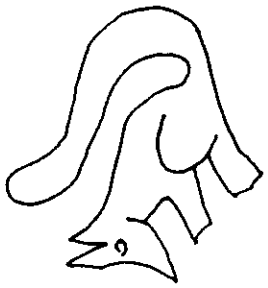


fig 4

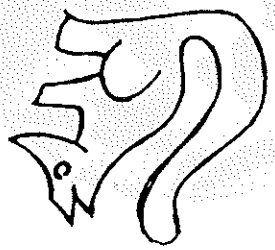


fig 5

fig 6

fig 7

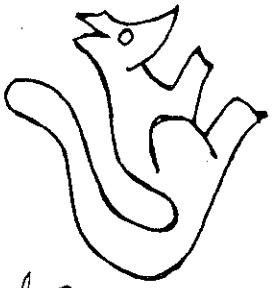
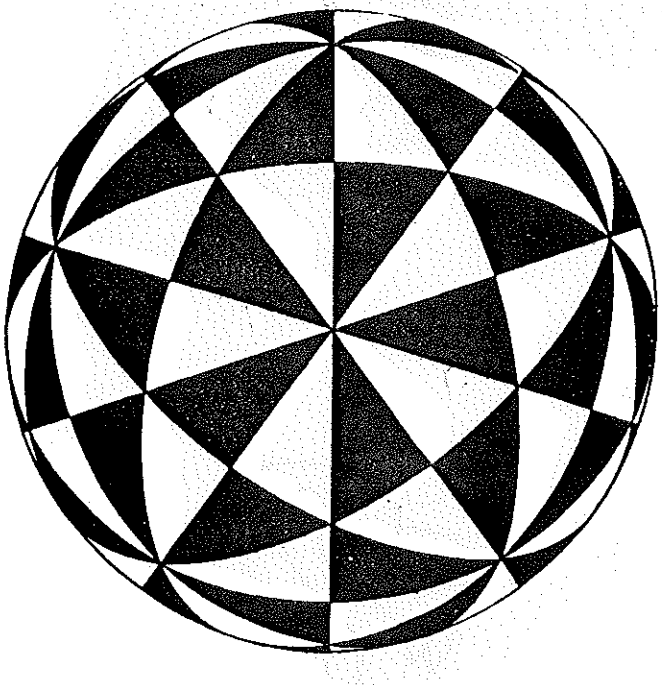


fig 8

ET SUR LA SPHERE ?

Vous trouverez dans les pages qui suivent des exemples de pavage de la sphère. Nous n'avons pas cherché à en faire une liste complète ni une théorie. Ils sont destinés à poser des questions, vous donner envie d'en fabriquer ...



QUELQUES QUESTIONS AUTOUR DES PAVAGES DE LA SPHERE

1. Quels sont les polyèdres réguliers.

2. Examiner pour mieux réaliser vous-même des pavages de la sphère présentés dans ces pages ; inventez en d'autres. (On trouve dans le commerce des boules en papier ou en polystirène).

3. Pour un pavage donné.

Etudier les transformations qui les laissent invariant. On obtient un groupe.

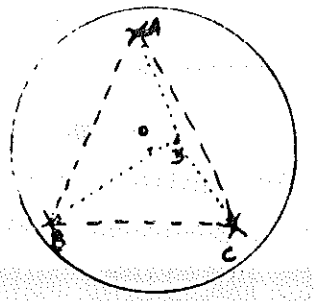
S'il est possible dresser la table de Pythagore de ce groupe.

Etudier les orbites des sommets. Combien de points ?
ou des milieux d'arêtes " " "
ou des centres de faces " " "

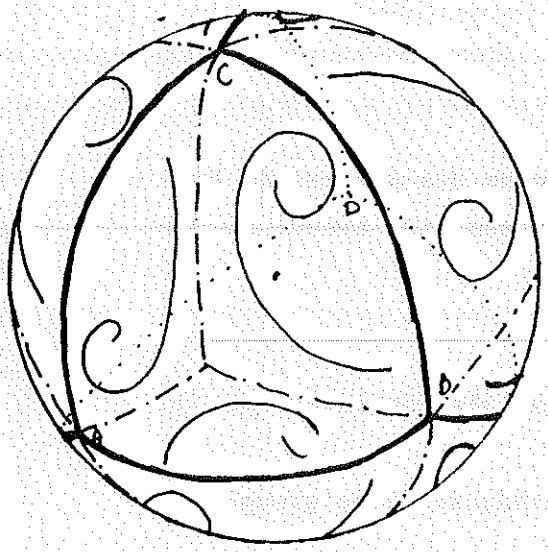
Comparer avec le nombre d'éléments du groupe.

4. Comparer les différents groupes obtenus. Quelles sont les inclusions, les égalités.

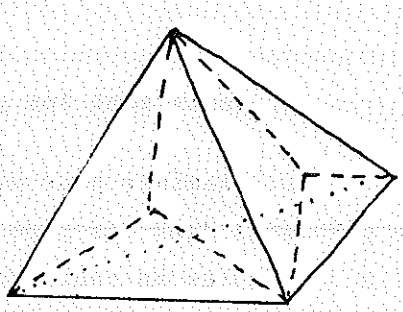
5. A partir d'un octoèdre ...

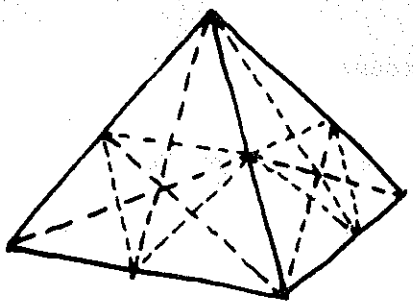


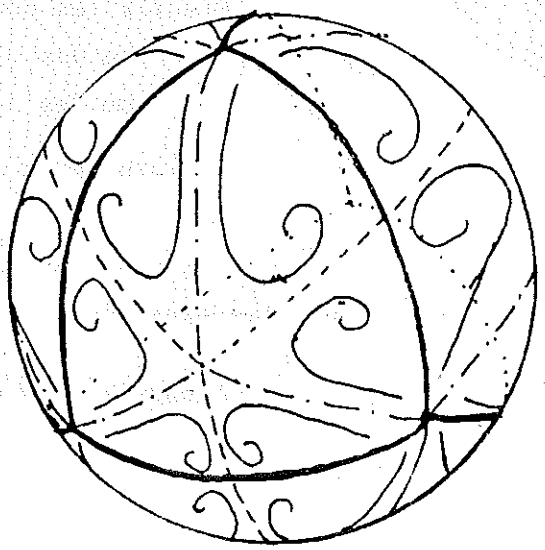
A partir du tétraèdre ...



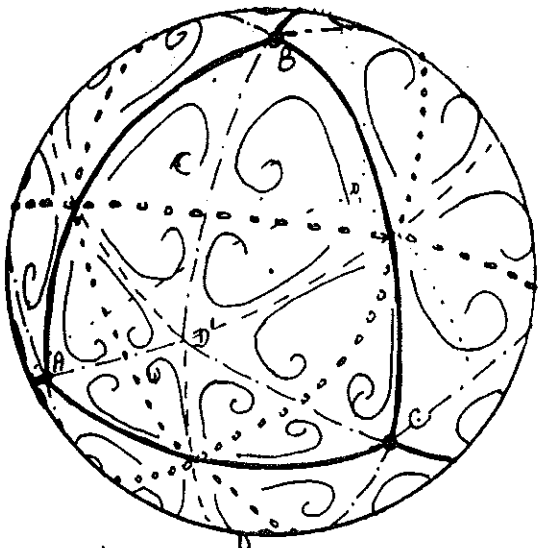
12 motifs



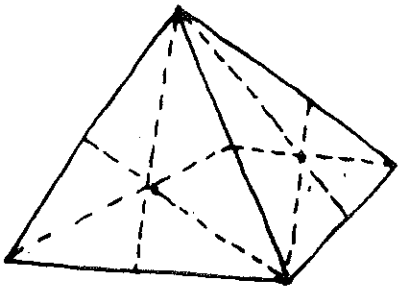


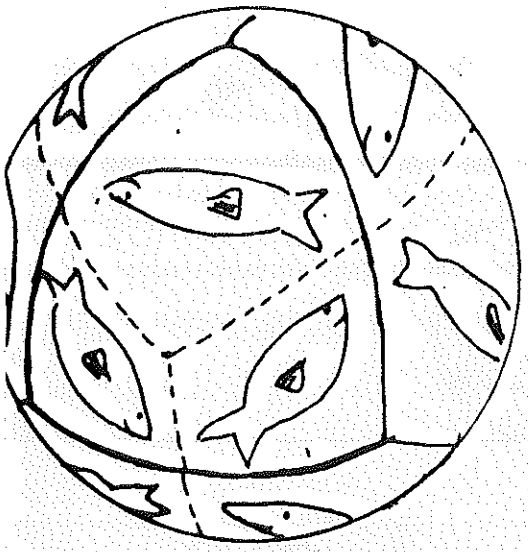


24 motifs

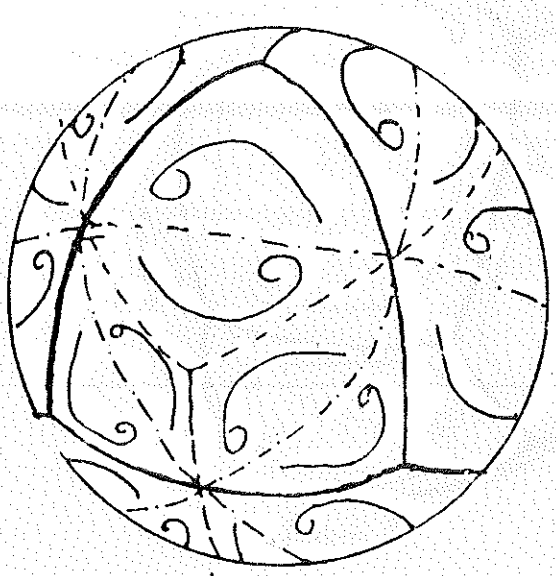


48 motifs

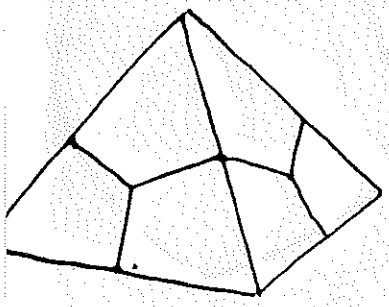


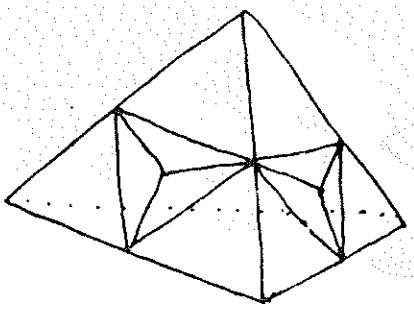


12 motifs

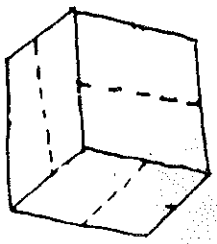


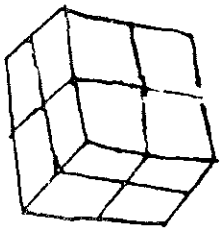
24 motifs

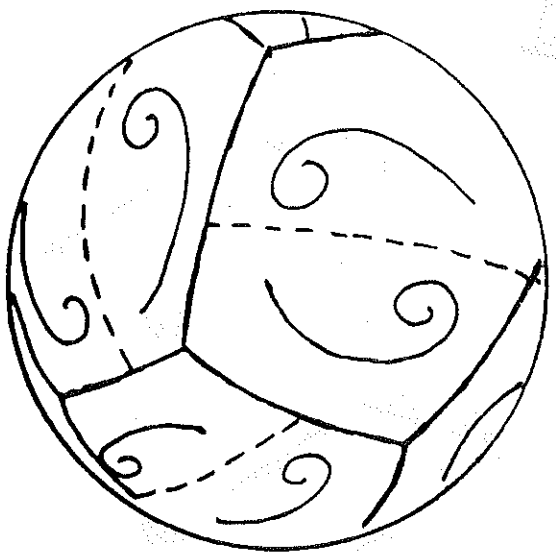




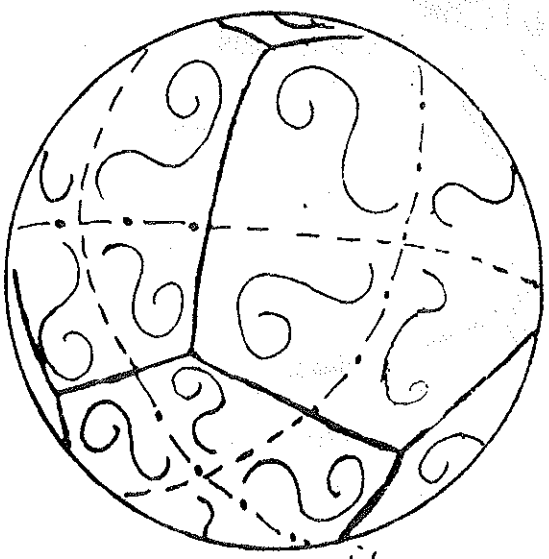
à partir
cube . . . ?



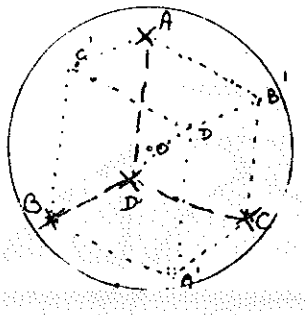


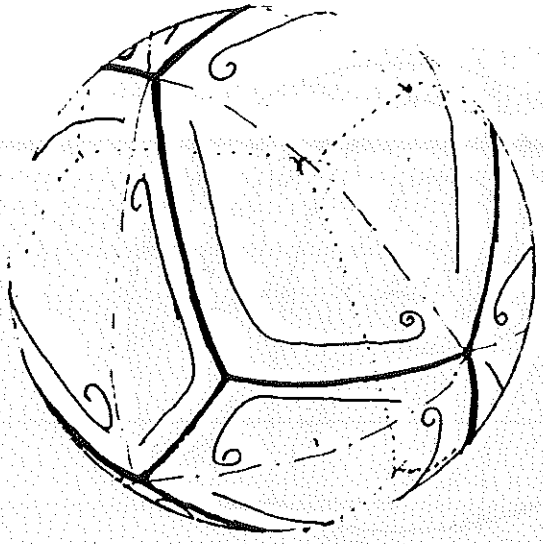


12 motifs

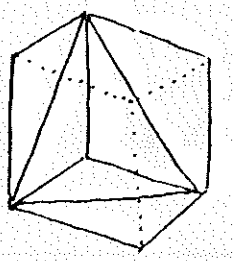


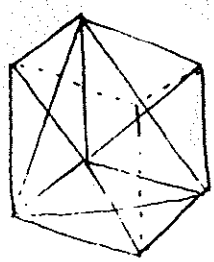
24 motifs

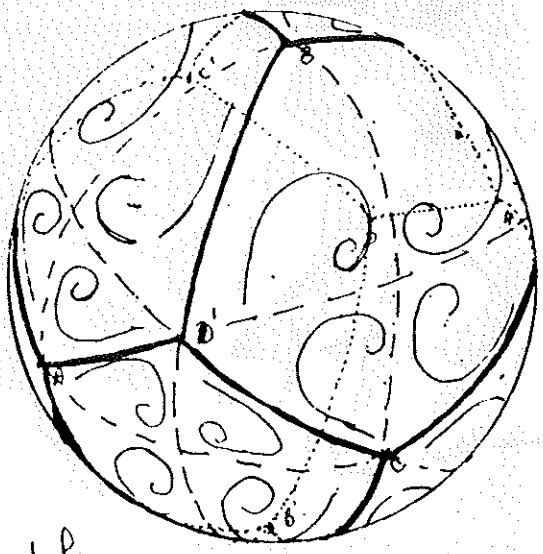




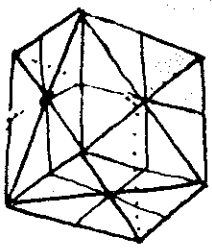
12 motifs

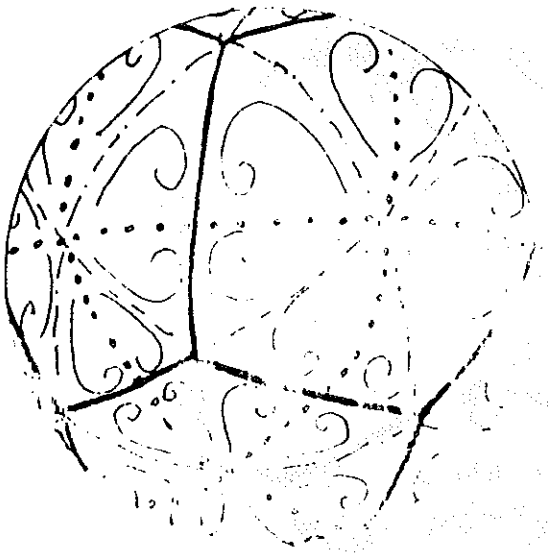


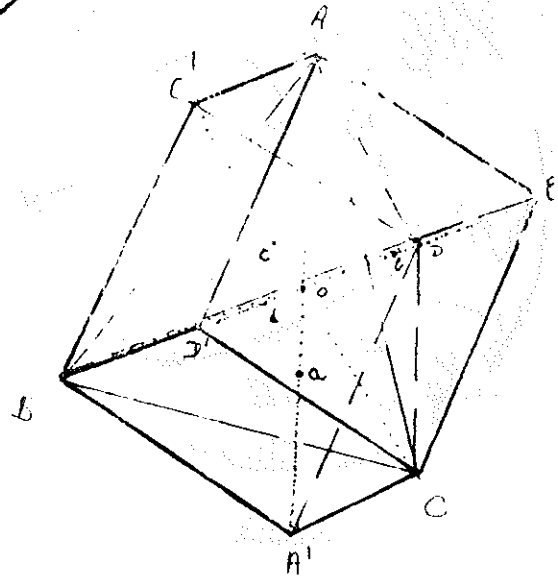




24 motifs.

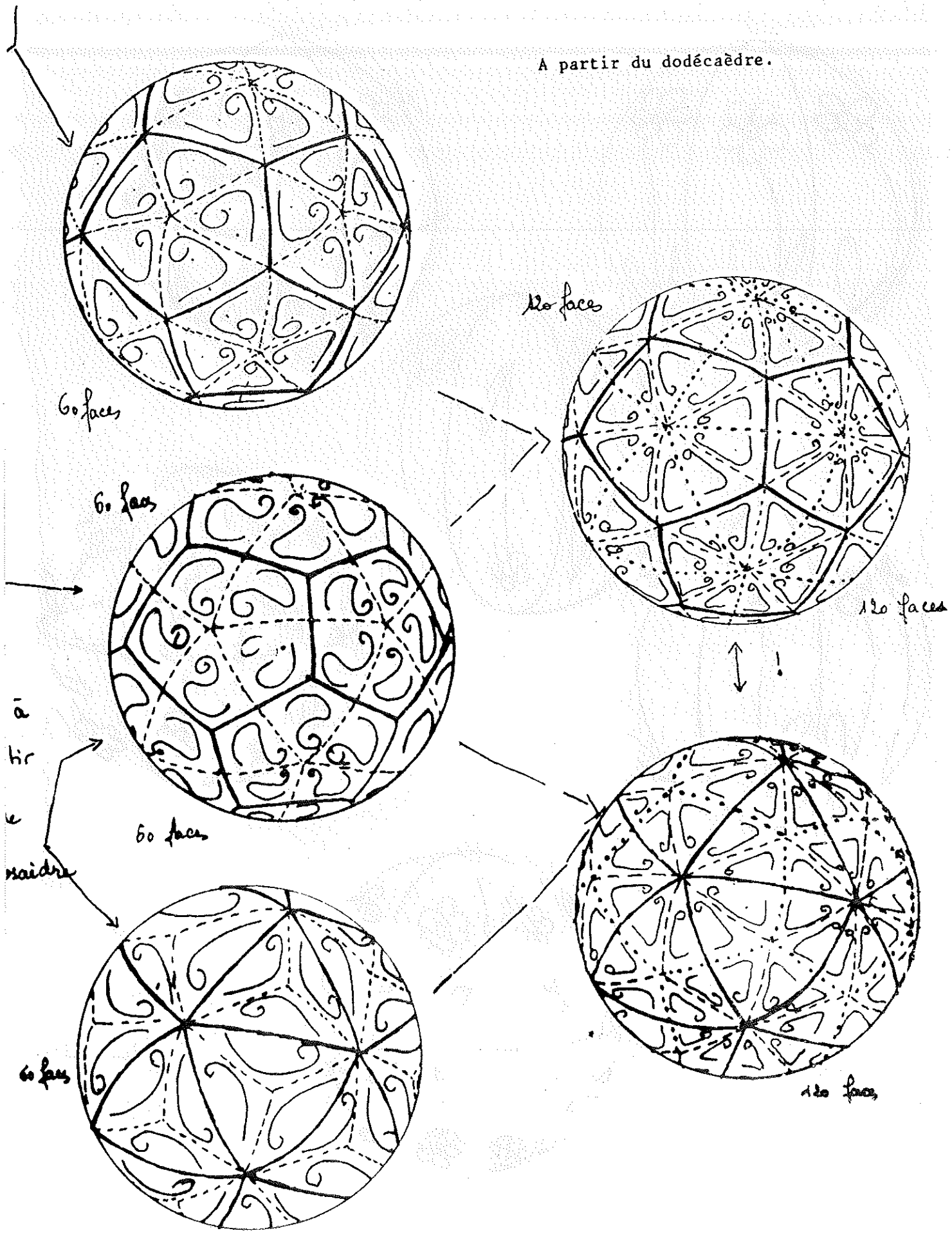




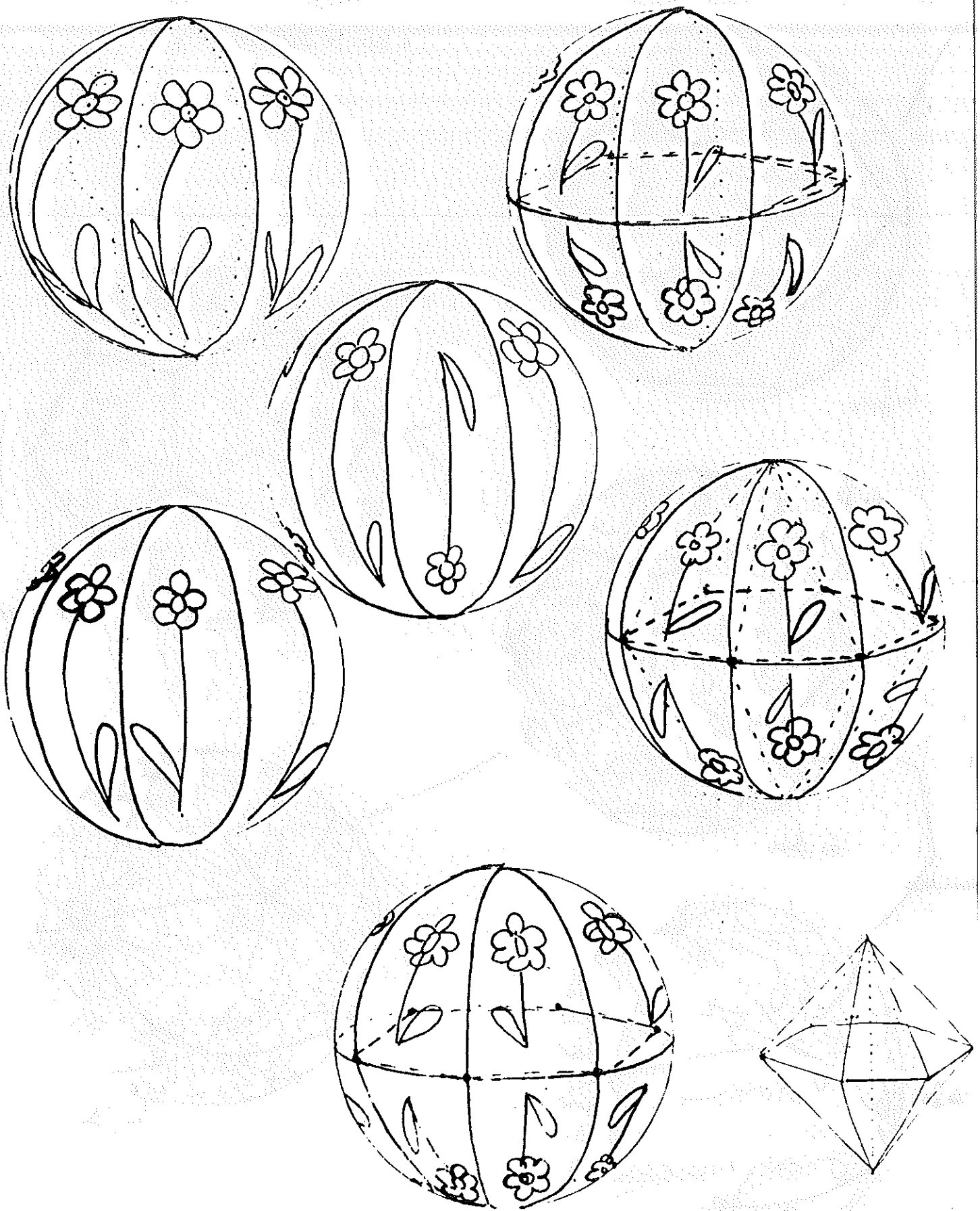


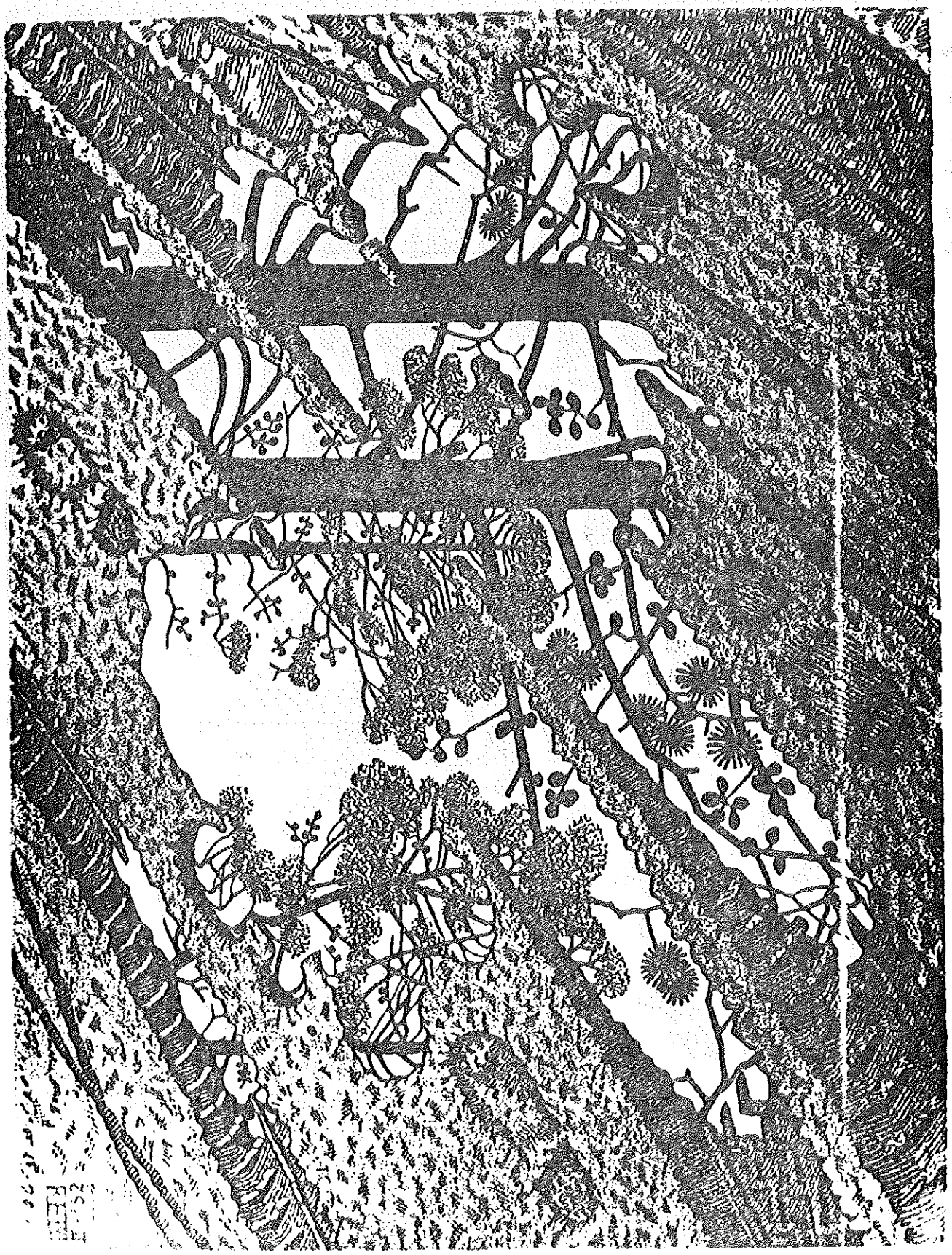
Fiche 10

A partir du dodécaèdre.



Fiche 10





APPENDICE MATHEMATIQUE (extrait des bulletins AMQ-GRMS-1981)

par Brigitte Rozoy-Sénéchal
IREM de CAEN (France)

Cet article fait suite à sa conférence donnée à l'occasion de la session d'étude et de perfectionnement, en juin 1980, à Rimouski.

De plus, cet article trouvera son complément dans le bulletin de l'A.M.Q. sous le titre: "Un thème global pour l'enseignement de la géométrie, de la maternelle à l'université" (bulletin de mars 1981).

* - * - * - * - * - *

Il est un domaine au moins de l'enseignement des mathématiques qui fut longtemps délaissé et qui, s'il revient à la mode, ne cesse de poser des problèmes épineux: je veux parler de LA GÉOMÉTRIE ou plutôt DES GÉOMÉTRIES.

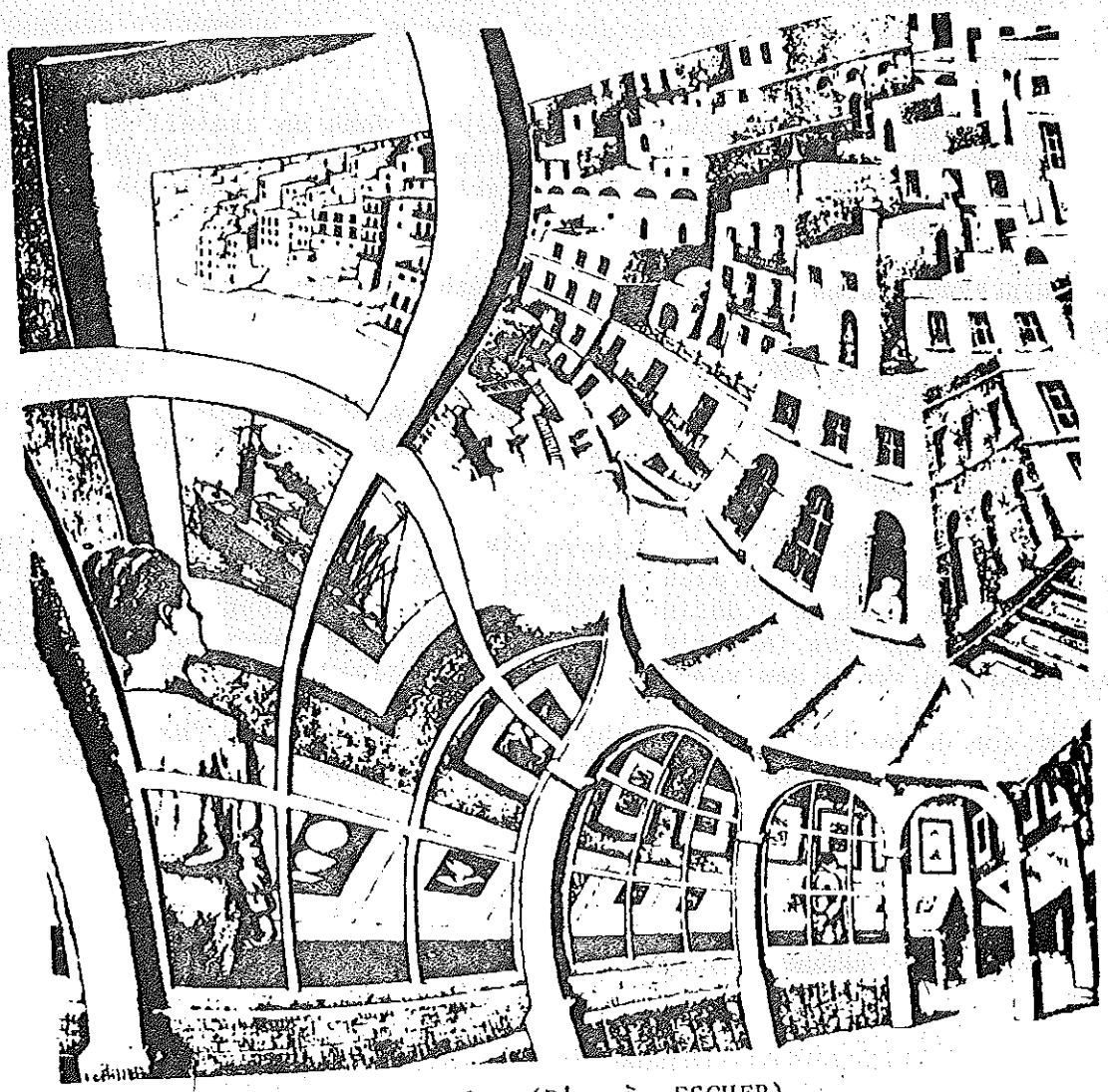


Figure 1 - (D'après ESCHER)

Marqué par l'excès de formalisme ou par le découpage en objectifs ridiculement divisés, l'enseignement de la géométrie a traversé des épreuves mouvementées dont le résultat est plus une stérilisation progressive qu'une simplification rayonnante ou un éclaircissement salutaire.

Depuis quelques années, des courants pédagogiques divers ont tenté avec succès de combler le vide, proposant d'autres approches, mettant au point divers outils pédagogiques. C'est de ce courant d'idées que se réclame l'exposé proposé ici.

La matière qu'il contient a effectivement été utilisée comme thème mathématique de départ, par divers enseignants; seuls ou en équipes, quelquefois pluridisciplinaires, ils l'exploitèrent à différents niveaux, depuis les classes de la maternelle jusqu'à l'université.

Les IDÉES FORCES de tout ce travail sont du type de celles dont il est question plus haut.

- Les connaissances ne doivent pas être découpées en morceaux. Les *mathématiques* sont considérées comme partie intégrante d'*une culture générale*.
- On tentera donc d'en chercher des sources, des motivations et des illustrations dans la culture environnante: la *géométrie* devient... *écologique*.
- Ceci trouve une réalisation privilégiée dans un travail *interdisciplinaire*: le professeur d'art plastique étudiera de la régularité l'aspect architecturale ou découratif; celui de philosophie se penchera sur la recherche de l'infini...

Des PRINCIPES mis en oeuvre du côté du mathématicien, nous retiendrons essentiellement

- le refus du *formalisme* gratuit;
- la conception de la *géométrie* comme d'abord une *physique de l'espace*: familiarisation et structuration de l'environnement, puis lieu de mathématisation.

En PRATIQUE, le travail de la classe vise avant tout à instaurer un rapport à des mathématiques plus vivantes: *faire toucher, manipuler, bricoler*, plutôt que de seulement définir; les objets, les concepts, doivent alors apparaître comme des *théorisations* de situations connues, et l'articulation des théorèmes comme des schémas de propriétés les concernant concrètement.

Plutôt que de se limiter à l'exposé d'une théorie, à son *"discours-spectacle"*(1) on tentera d'en chercher *les démarches, les racines, les ramifications*.

---

(1) d'après R. BKOUCHE.

L'étude de la RÉGULARITÉ est l'objet, ou plus exactement, le prétexte, aux développements dont nous citons ici quelques aspects mathématiques.

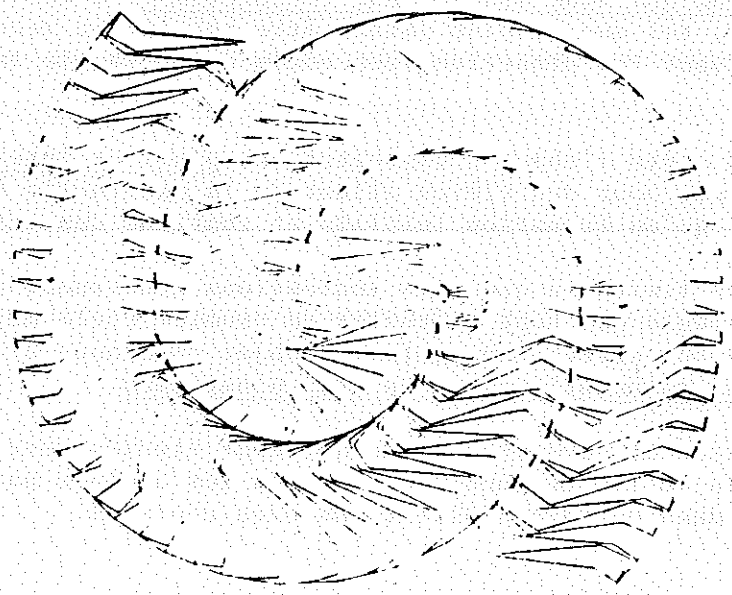


Figure 2 - (d'après M. Berger)

La *régularité*... on la trouve en peinture, en décoration, en architecture, et dans bien d'autres lieux où s'enracine, se ramifie et s'émousse notre culture.

On la trouve en particulier, associée à d'insolites phénomènes de perception de l'espace, chez un graveur néerlandais, M.C. ESCHER.

Parmi d'autres préoccupations, comme celles liées à la structuration de l'espace, l'opposition noir-blanc, l'imbrication mêlée d'incommunicabilité, il en est une, chez ESCHER, qui est celle du *remplissage périodique du plan*, rejoignant chez lui une incessante poursuite de l'infini.

Ce sera pour nous le prétexte à une étude de certains aspects de ce remplissage, il s'agit des *dessins répétitifs et de leur géométrie*.

1. Des dessins répétifs

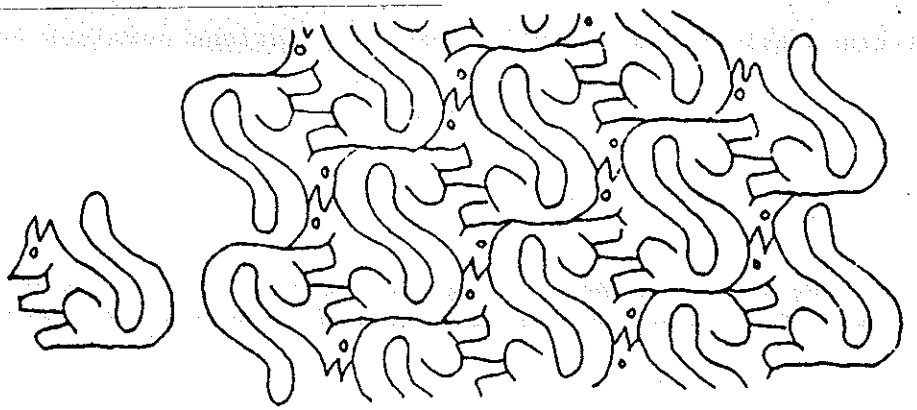


Figure 3

Ce seront des dessins, tel celui de la figure 3, qui possèdent une régularité telle que l'on puisse facilement en induire, par un procédé mécanique immédiat, un moyen de récouvrir tout le plan.

Nous ne nous intéressons pas - au moins ici - à tous ces dessins, mais seulement à ceux qui sont stables par translations, c'est-à-dire, intuitivement, tel que le plan puisse être totalement recouvert par report suivant les directions des côtés du rectangle initial ci-dessus.

Ce genre de dessins a été l'objet d'exploitations pluri et inter-disciplinaires multiples, pour des élèves allant de la maternelle à l'université, ainsi qu'en formation initiale et continue des maîtres.

Nous allons ici nous limiter à quelques indications concernant des propriétés mathématiques qui sont à étudier en premier cycle du secondaire[1], et qui ont effectivement fait l'objet chez nous d'un travail en commun en mathématiques et en arts plastiques.

Les dessins répétitifs et pavages du plan qui sont étudiés sont tous, par définition, tels qu'ils se superposent si on les déplace parallèlement à eux-mêmes dans certaines directions bien choisies.

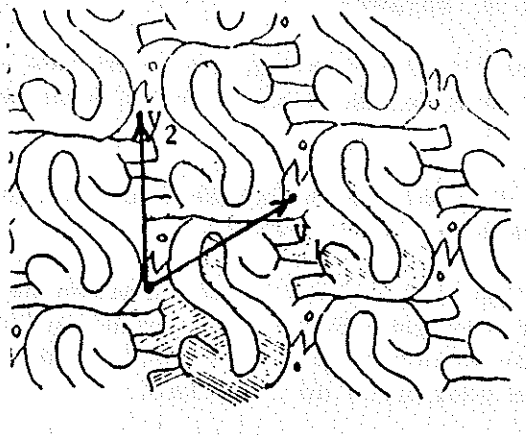


Figure 4

Deux directions $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ de translation.

La figure 4 met en évidence la conservation du dessin auquel on ferait subir des translations de vecteurs $\vec{V}_1$ ou $\vec{V}_2$.

Ceci signifie que, si l'on décalque le dessin, supposé recouvrir tout le plan, et si l'on lui fait subir l'une des translations $\vec{V}_i$, alors le calque recouvre exactement le dessin antérieur.

On dit que ce dessin est susceptible des translations $\mathcal{T}(\vec{V}_i)$, ou encore que les translations $\mathcal{T}(\vec{V}_i)$ sont des transformations permises pour le dessin.

(1) Le premier cycle du secondaire français regroupe les classes de 6ème, 5ème, 4ème, 3ème, c'est-à-dire des enfants d'environ 11 à 15 ans.

Si ces dessins sont susceptibles de translations, ils le sont également pour un certain nombre d'autres transformations, qui sont toutes des isométries: tous les motifs ont la même taille et la même forme qu'un motif minimal, qu'on appelle le motif de base.

Dans certains cas, l'identification de ce motif minimal est claire (l'écureuil de la figure 3), dans d'autres, elle l'est un peu moins (figure 5), et nécessite l'étude préalable des transformations permises pour le dessin.

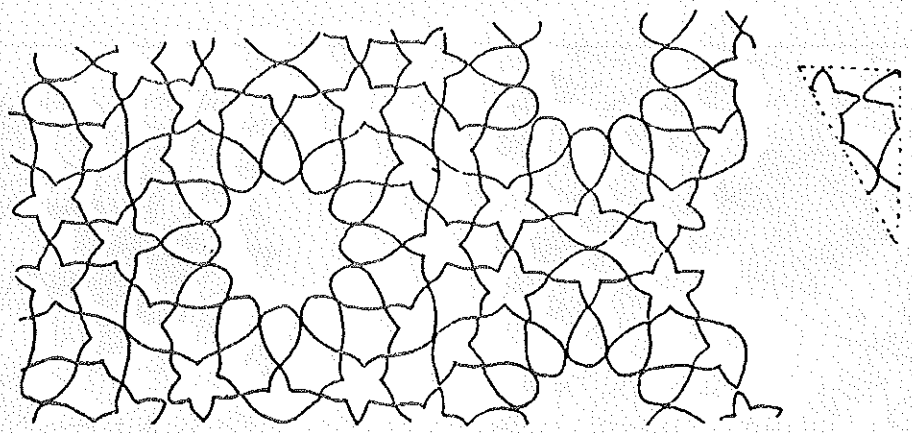


Figure 5

C'est uniquement sur cet aspect que nous allons nous polariser: IDENTIFIER, ÉTUDIER, COMPOSER DES ISOMÉTRIES.

Il ne s'agit pas de donner ici une démarche à suivre en classe: à vous, maintenant, d'adapter ces propriétés aux étudiants!

Signalons seulement que pour ces études, nous avions distribué aux élèves des séries de planches et du papier calque. La superposition de deux dessins se lit aisément, sur une vitre par exemple, ou en utilisant abondamment le papier calque.

À nos crayons, compas et lumières!

2. Identifications de transformations

2.1 Des translations, bien sûr! comme on l'a déjà vu dans la figure 4.

2.2 Des rotations, ensuite...

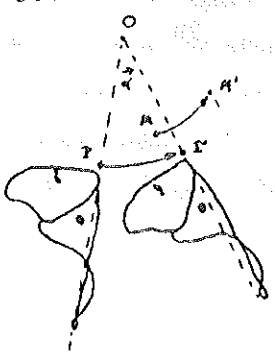


Figure 6

Une rotation, pour un élève, c'est de prime abord: "quand ça tourne"!

Alors, il s'agira en premier lieu de faire pivoter le calque autour d'une pointe de compas, et de chercher ainsi le recouvrement du dessin par son double.

On pourra alors parler de la rotation $\mathcal{R}(0,\alpha)$, de centre 0, d'angle α, comme étant la transformation qui associe M' à M telle que OM = OM' et $(\vec{OM},\vec{OM'}) = \alpha \pmod{2\pi}$.

On remarquera, en étudiant la rotation sur une figure et non seulement sur un point, que le "sens" est conservé:

l'aile de papillon de la figure 6 est toujours dirigée vers la gauche, le triton de la figure 8 penche toujours la tête vers sa patte gauche en levant celle de droite ...

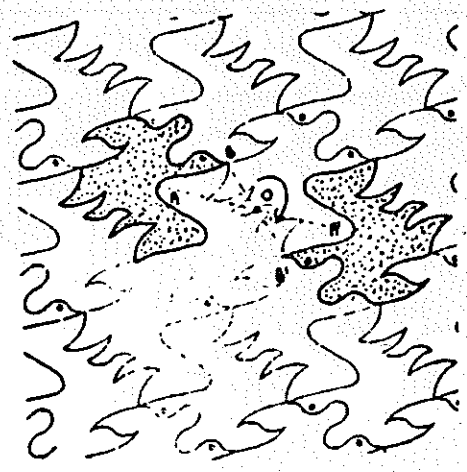


Figure 7

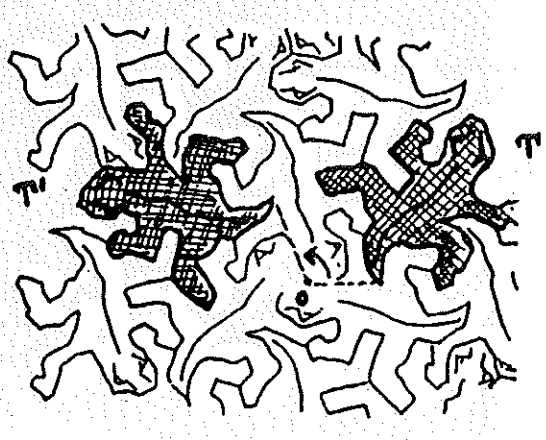


Figure 8

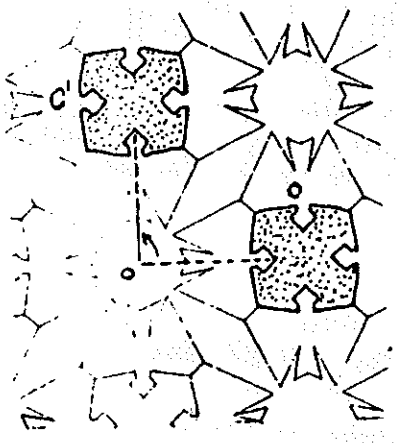


Figure 9

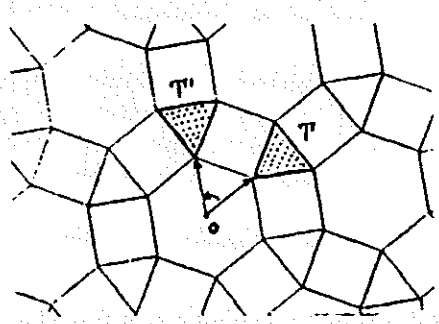
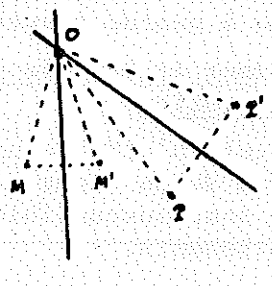


Figure 10

On pourra alors, dans les planches distribuées aux élèves, faire identifier un certain nombre de rotations (Angle $\frac{2\pi}{2}$ dans la figure 7; $\frac{2\pi}{3}$ dans la figure 8; $\frac{2\pi}{4}$ dans la figure 9; $\frac{2\pi}{6}$ dans la figure 10). Elles sont dites respectivement d'ordre 2; 3; 4; 6, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{6}$; ième de tour. Une observation remarquable concernant ces rotations:

non seulement elles associent C' à C, ou T' à T, mais encore elles permettent toujours au calque entier de recouvrir le dessin entier (dessin qui est, bien sûr, supposé recouvrir tout le plan).



Dans cette transformation, tous les points du plan tournent; sauf un, le point O, centre de la rotation et son seul point fixe.

Figure 11

Ce point est à l'intersection des médiatrices de MM' et PP', où M, M' et P, P' sont deux couples de points homologues par $\mathcal{R}$. Son tracé est ainsi aisé, de même qu'il permet une vérification rapide de la nature de la transformation.

Si M est un point du plan, soit M' son transformé par $\mathcal{R}$, et D la médiatrice de MM'. Alors O est toujours sur D.

$$\left.\begin{array}{l} M \in \mathcal{R} \\ M' = \mathcal{R}(M) \\ D \text{ médiatrice de } MM' \end{array}\right\} \text{alors: } \forall M,\ O \in D.$$

2.3 Des retournements, enfin!

Pour savoir si un dessin est ou non susceptible de retournement, on choisit deux feuilles du même modèle, que l'on tente de faire se recouvrir, l'une d'elle ayant été au préalable retournée.

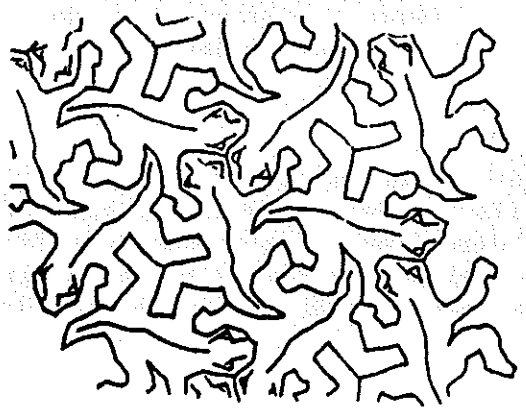


Figure 12

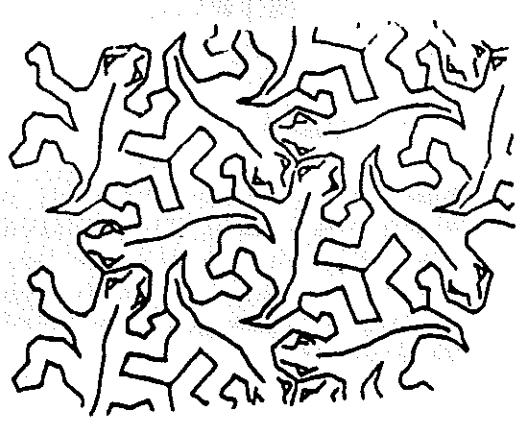


Figure 13

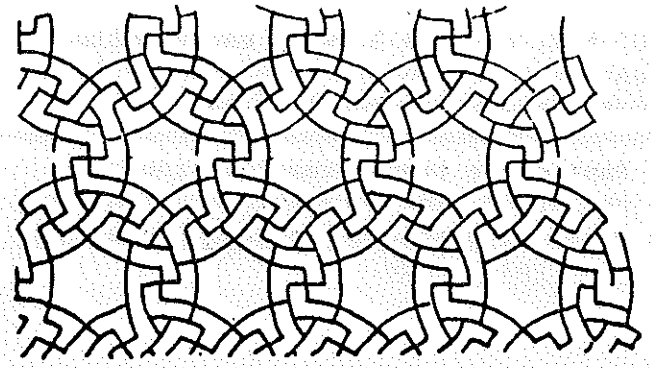


Figure 14

C'est ce que l'on a figuré avec les tritons: les deux dessins ne peuvent se superposer. Le triton qui penchait à droite figure 13, penche à gauche figure 12.

Retourner la feuille change l'orientation.

Mais cela n'affecte pas les rosaces de la figure 14: elles sont susceptibles de retournements.

On distingue deux types de retournements, suivant qu'ils admettent ou non un axe de symétrie.

Les symétries axiales

On a affaire à une symétrie axiale quand on peut obtenir un recouvrement du dessin par lui-même en pliant suivant une droite bien choisie.

Alors, il faudra plier!

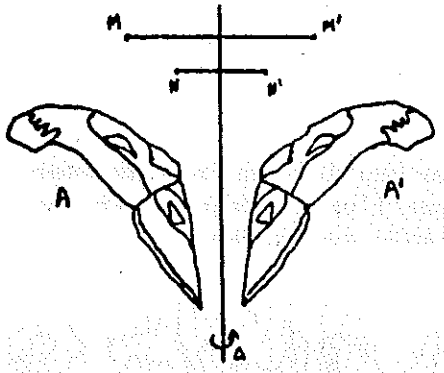


Figure 15

Une symétrie plane $\mathcal{S}(\Delta)$, d'axe Δ, est la transformation qui à M associe M', telle que Δ soit la médiatrice de MM'(1).

Ainsi, l'aile de papillon A est-elle transformée en sa symétrique A'; elles sont orientées différemment.

Cette transformation admet Δ pour droite de points fixes.

Dans les planches données, on déterminera systématiquement les axes de symétries, quand ils existent, ils peuvent, suivant les cas, être dans une, deux, trois, quatre ou six directions. Le découpage qu'ils forment est alors respectivement un peigne, un réseau rectangulaire, carré, de triangles équilatéraux, demi-carrés ou demi-équilatéraux (figure 16).

---

(1) À ne pas confondre avec la symétrie centrale, qui est une rotation d'ordre 2, c'est-à-dire d'angle $\frac{2\pi}{2}$, et qui, elle, ne modifie pas l'orientation. Une symétrie axiale peut être assimilée à une réflexion dans un miroir.

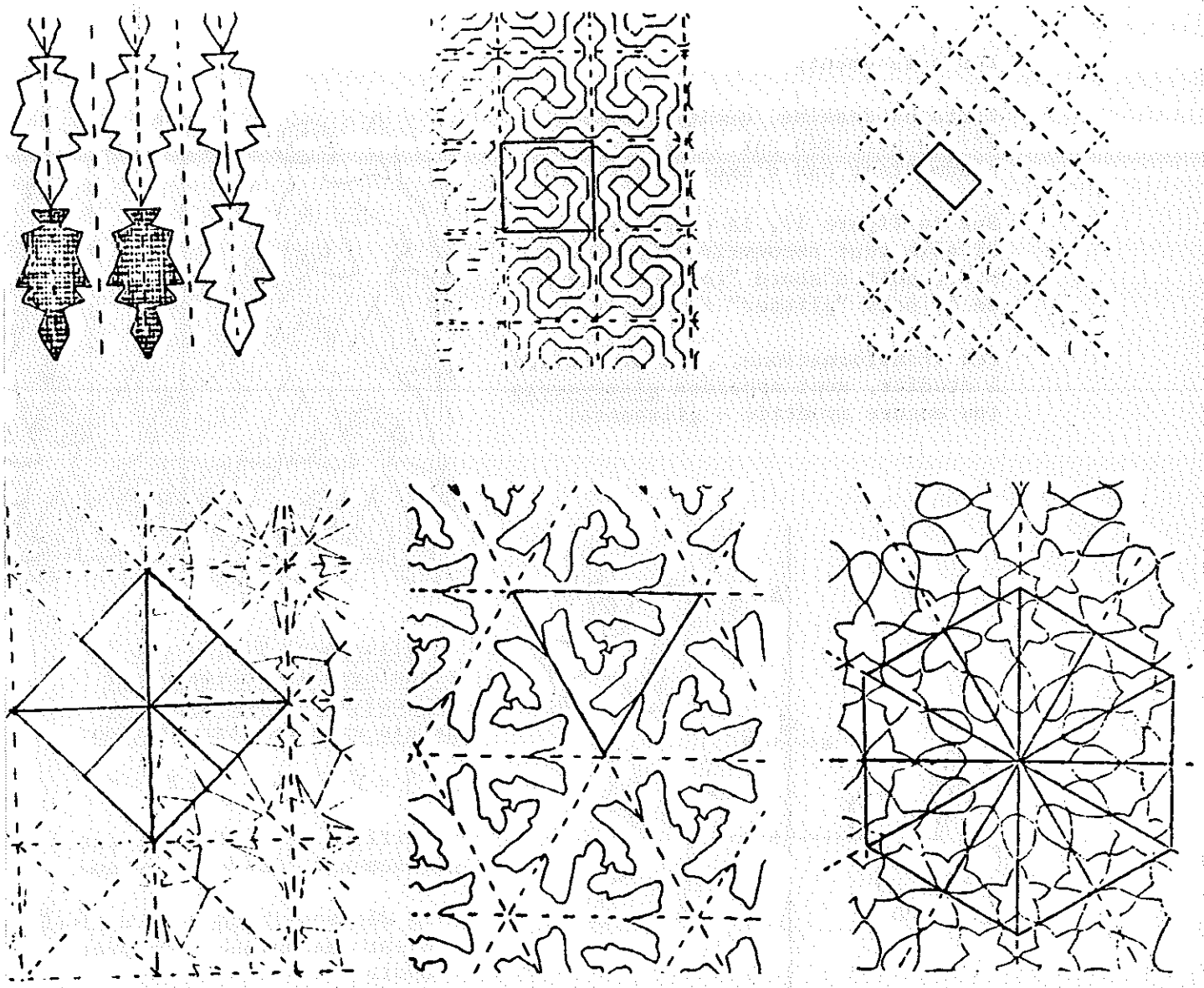


Figure 16

Les axes de symétries

Les glissements

Certains dessins, quoique pouvant être superposés par retournement, n'admettent pas d'axes de symétrie.

Sur la figure 17, la panthère MN, si elle veut recouvrir la panthère M_1N_1, doit d'abord "tourner" autour de Δ, puis "glisser" suivant $\vec{V}$.

Ces transformations, plus difficiles à étudier, sont appelées glissements (ou encore symétrie - glissante).

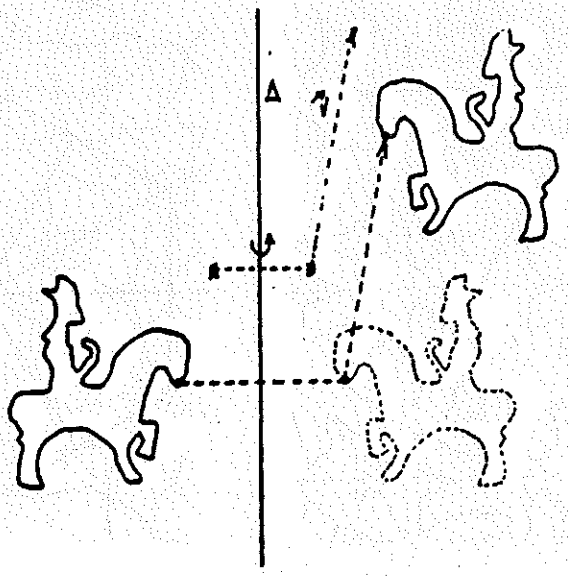


Figure 18

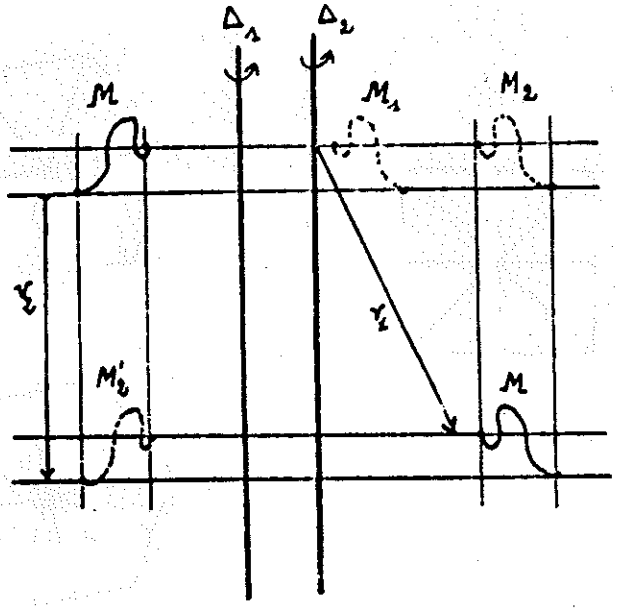
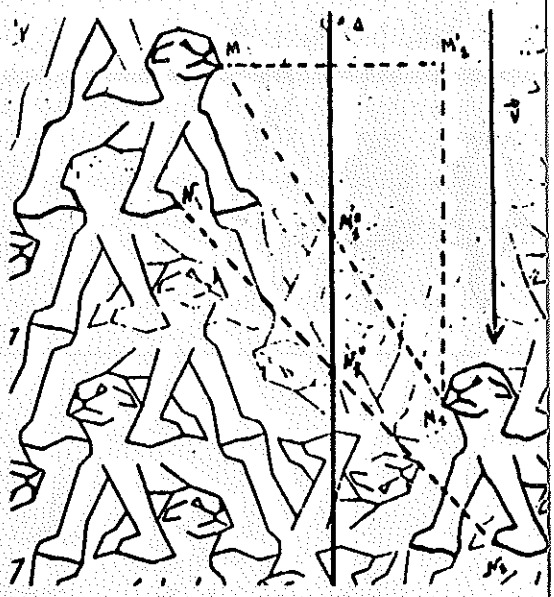


Figure 19



Un glissement $\mathcal{G}(\Delta,V)$ est la transformation obtenue par composition d'une symétrie axiale et d'une translation:

$$\mathcal{G} = \mathcal{S} \circ \mathcal{T} \quad \text{ou} \quad \mathcal{G} = \mathcal{T}' \circ \mathcal{S}'$$

La difficulté de l'étude des glissements réside en ce que

- la décomposition de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{S} \circ \mathcal{T}$ n'est pas unique. On peut avoir

  $\mathcal{G} = \mathcal{S}_1 \circ \mathcal{T}_1 = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{T}_2$

  avec $\mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}_2$ et $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$

- en général $\mathcal{S} \circ \mathcal{T} \neq \mathcal{T} \circ \mathcal{S}$.

Mais on démontre un certain nombre de résultats qui faciliteront l'approche:

- si le vecteur $\vec{V}$ de la translation $\mathcal{T}$ est orthogonal à l'axe Δ de la symétrie axiale $\mathcal{S}$, alors $\mathcal{G}$ est une symétrie axiale (c'est-à-dire $\exists \mathcal{S}' : \mathcal{S} \circ \mathcal{T} = \mathcal{S}'$ ou $\mathcal{T} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S}'$).

- Sinon, alors il existe une autre symétrie axiale $\mathcal{S}'$ d'axe Δ' parallèle à Δ, et une autre translation $\mathcal{T}'$,

de vecteur $\vec{V}'$ parallèle à Δ', tel que

$$\mathcal{G} = \mathcal{S} \circ \mathcal{C} = \mathcal{C}' \circ \mathcal{S}'$$

et dans ce cas, on a $\mathcal{C}' \circ \mathcal{S}' = \mathcal{S}' \circ \mathcal{C}'$.

C'est-à-dire que tout glissement peut être décomposé en une symétrie axiale et une translation, telle que le vecteur de translation soit parallèle à l'axe de symétrie (cf. figure 19).

Ainsi, pour déterminer les axes de glissement d'un dessin, il suffit de remarquer que, si M, M' et P, P' sont deux couples de points homologues, alors il existe un axe de glissement Λ qui passe par les milieux de MM' et PP'.

Bien sûr, un glissement, comme une translation, n'admet pas de point fixe, mais une droite globalement invariante (l'axe Δ).

3. Etudier des compositions d'isométries

Que se passe-t-il si on effectue successivement plusieurs transformations sur un même motif ou sur un même dessin?

La mise en évidence des effets cherchés peut se faire en faisant effectuer des coloriages aux élèves.

Par exemple, on trace dans un dessin une série d'axes de symétries successifs, soit autour d'un point, soit de même direction. Puis on en effectue un coloriage avec une consigne comme: colorier un motif M_o en rouge, puis son symétrique M_1 suivant Δ_1 en jaune, puis le symétrique M_2 de M_1 suivant Δ_2 en rouge. On passe donc de M_o à M_2, c'est-à-dire de rouge à rouge, suivant la composée des deux symétries axiales suivant Δ_1 et Δ_2...

On peut ainsi mettre en évidence, puis étudier un certain nombre de résultats.

3.1 Composer des isométries de même nature

(Voir figure 20).

- Deux translations:

  Le résultat est toujours une translation, de vecteur; la somme des vecteurs initiaux

  $$\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}$$

  avec $$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}.$$

· Deux rotations:

Le résultat n'est pas toujours une rotation.

* Ce peut être une <u>translation</u>.

Soient $\left.\begin{matrix}\mathcal{R}_1(0,\alpha)\\ \mathcal{R}_2(0',-\alpha)\end{matrix}\right\}$ alors $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 = \mathcal{C}$ (cf. figure 20)

* Ce peut être <u>une rotation</u> de même centre.

Soient $\left.\begin{matrix}\mathcal{R}_1(0_1,\alpha_1)\\ \mathcal{R}_2(0_2,\alpha_2)\end{matrix}\right\}$ alors $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}$ avec $\mathcal{R}(0,\alpha+\alpha')$

* Ce peut être <u>une rotation</u> de centre distinct.

$\left.\begin{matrix}\mathcal{R}_1(0_1,\alpha_1)\\ \mathcal{R}_2(0_2,\alpha_2)\end{matrix}\right\}$ alors $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}$ avec $\mathcal{R}(0,\alpha_1+\alpha_2)$.

· Deux symétries axiales:

Le résultat n'est jamais une symétrie axiale.

On retrouve ici le fait qu'une symétrie axiale inversait l'orientation: en inversant deux fois de suite, on est revenu à la situation initiale.

* Ce peut être <u>une translation</u>.

Soient $\left.\begin{matrix}\mathcal{S}_1(\Delta_1)\\ \mathcal{S}_2(\Delta_2)\\ \Delta_1 \parallel \Delta_2\end{matrix}\right\}$ alors $\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1 = \mathcal{C}$ où $\vec{V}$ est le vecteur double du vecteur qui amène Δ_1 sur Δ_2

* Ce peut être <u>une rotation</u>.

$\left.\begin{matrix}\mathcal{S}_1(\Delta_1)\\ \mathcal{S}_2(\Delta_2)\\ (\Delta_1,\Delta_1) = \alpha\end{matrix}\right\}$ alors $\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1 = \mathcal{R}$ avec $\mathcal{R}(0,2\alpha)$ où 0 est l'intersection de Δ_1 et Δ_2

· On retrouve <u>à travers ces résultats</u>, des observations que l'on pourra faire ou avoir faites sur les dessins.

Ainsi, la famille translation - rotation est stable par composition. Certains dessins, comme ceux des tritons (figure 13) ou des oiseaux (figure 7) ne sont susceptibles que de rotations ou de translations.

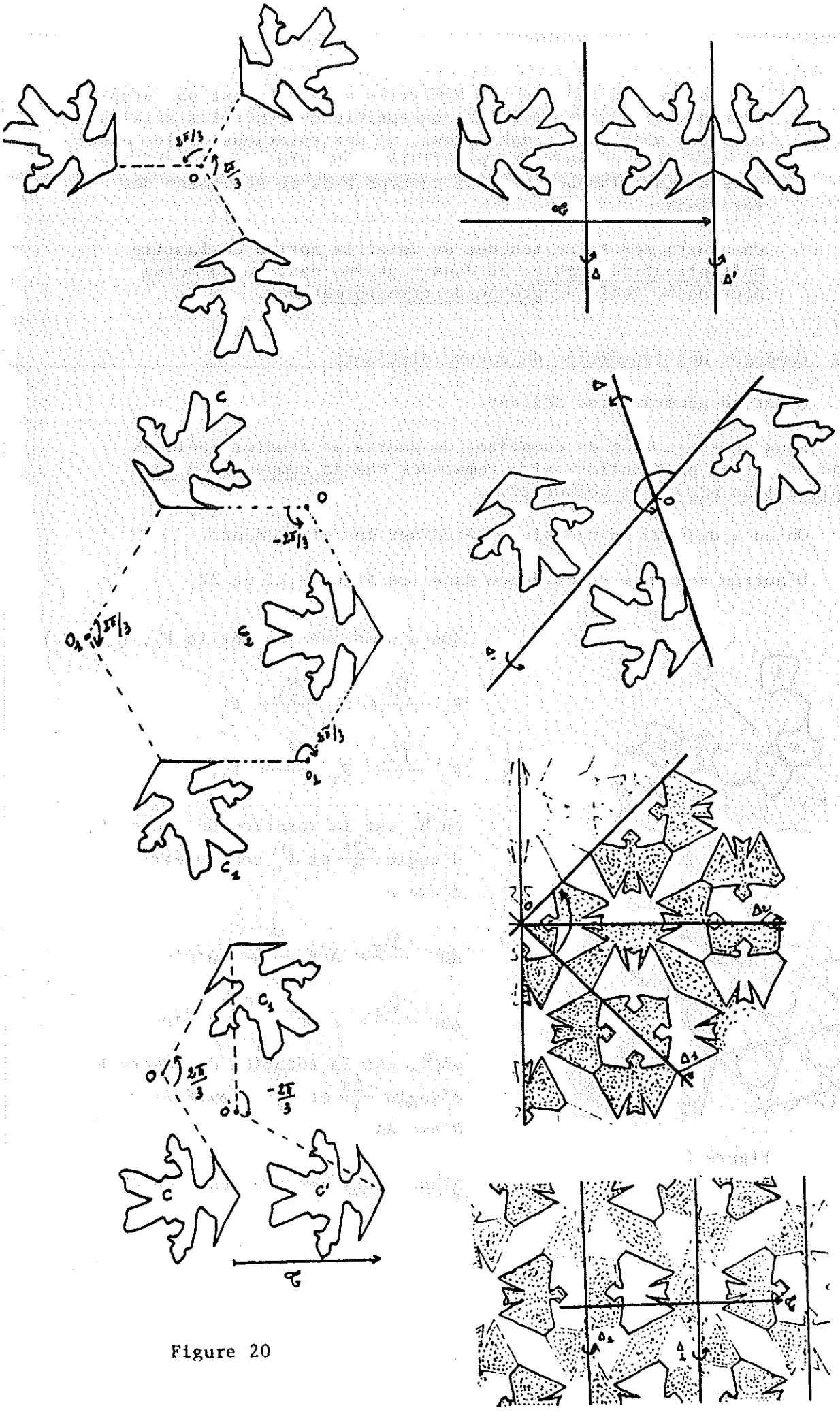


Figure 20

Par contre, la famille des symétries axiales n'est pas stable: tout dessin de nos familles susceptible de symétries axiales admettra aussi des translations, et des rotations si les axes de symétries ne sont pas parallèles. De plus, aucun des dessins de nos planches ne sont susceptibles de seulement des rotations.

On pourra ici faire toucher du doigt la notion de <u>famille multiplicative stable</u>, et dans certains cas, ou au moins pour nous, celle de <u>groupe de transformations</u>.

3.2 Composer des isométries de nature distincte

C'est en général plus délicat.

Sans en faire l'étude complète, on pourra en étudier quelques aspects, et en particulier faire remarquer que <u>la composition des applications n'est pas commutative</u>.

On en a déjà vu un exemple en étudiant les glissements.

D'autres sont mis en évidence dans les figures 21 et 22.

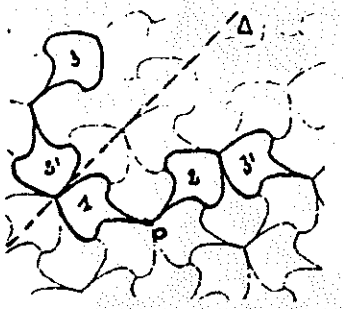


Figure 21

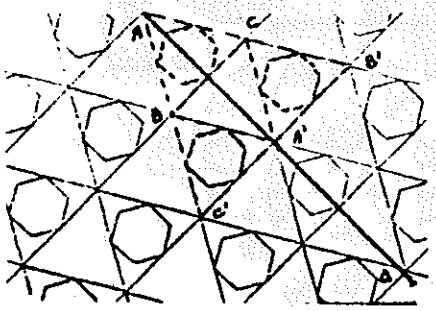


Figure 22

(On a numéroté les motifs F_1, F_2, ...)

$$F_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_1} F_2 \xrightarrow{\mathcal{S}_1} F_3$$

$$F_1 \xrightarrow{\mathcal{S}_1} F_{2'} \xrightarrow{\mathcal{R}_1} F_{3'}$$

où $\mathcal{R}_1$ est la rotation de centre O, d'angle $\frac{-2\pi}{3}$ et $\mathcal{S}_1$ une symétrie d'axe Δ.

$$ABC \xrightarrow{\mathcal{S}_2} ACB \xrightarrow{\mathcal{R}_2} A'C'B$$

$$ABC \xrightarrow{\mathcal{R}_2} A'BC' \xrightarrow{\mathcal{S}_2} A'CB'$$

où $\mathcal{R}_2$ est la rotation de centre B, d'angle $\frac{-2\pi}{3}$ et $\mathcal{S}_2$ la symétrie d'axe AA'.

Ainsi, dans ces deux cas, on a $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} \neq \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Pourtant, figure 22, on a $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{S}_2(A) = A'$ et $\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{R}_2(A) = A'$. On pourra chercher plus systématiquement les points M tels que $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}(M) = \mathcal{S} \circ \mathcal{R}(M)$, quand ils existent.

On démontrera aussi que $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ n'est jamais égal à $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, sauf si est d'angle nul (transformation identique) en utilisant, par exemple pour cela, les points fixes de $\mathcal{R}$ et de $\mathcal{S}$.

On verra de même que $\mathcal{R} \circ \mathcal{C} = \mathcal{C} \circ \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{R} = Id$ ou $\mathcal{C} = Id$. Cette rencontre avec une loi de composition obstinément non commutative peut nous inciter à aller plus de l'avant dans l'étude des structures qu'elle peut induire. Ici, ce sera celle des groupes de paveurs du plan.

Ce n'est pas ici le lieu d'entreprendre un tel travail; mais pour les curieux que cela intéressent, signalons-en quelques éléments, que certains élèves, d'ailleurs, peuvent fort bien aborder.

Les transformations permises pour un dessin donné ne s'associent pas au hasard. A chaque fois qu'une transformation est permise, son inverse l'est aussi (on peut toujours revenir en arrière), et si deux transformations fonctionnent, alors leur composée aussi:

$$\forall f \in \mathcal{F}, \forall g \in \mathcal{F}: f^{-1} \in \mathcal{F} \text{ et } f \circ g \in \mathcal{F}.$$

On a là explicitement la définition d'un sous-groupe du groupe des isométries planes.

Chaque dessin est régi par un sous-groupe d'isométries. On pourra, pour chaque dessin, dresser la liste des transformations autorisées.

On pourra aussi comparer les dessins à la lumière de ces listes.

Ainsi, on observera que les tritons (figure 13) sont susceptibles de translations et de rotations d'ordre 3, comme les chinois (figure 16), mais que de plus ces derniers répondent aussi à des symétries axiales suivant un réseau triangulaire (triangles équilatéraux): voilà deux groupes, distincts quoique liés.

On montre qu'il existe exactement 17 groupes d'isométries planes auxquels répondent nos dessins.

Une mine d'idées pour nos travaux futurs!

Figure 23

Tableau des isométries des 17 groupes de paveurs

Iso	$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}$ et $\mathcal{G}$	ζ
$\mathcal{C}$	1	8	6-7
$\mathcal{R}_2$	2	12	9-10-11-
$\mathcal{R}_3$	3		13-14
$\mathcal{R}_2\mathcal{R}_4$	4		15-16-
$\mathcal{R}_2$ $\mathcal{R}_3$ $\mathcal{R}_6$	5		17

Légende:

Le numéro dans chaque case est le numéro du groupe.

On lit à gauche et en haut les isométries qui le caractérisent.

Ainsi les groupes 15 et 16 contiennent-ils des rotati d'ordre 2 et 4 et des symétries axiales.

4. Comment produire de tels dessins?

1. Report dans un quadrillage

Un mode de production simple de dessins à motifs répétitifs est base sur l'utilisation préalable d'un « quadrillage » regulier du plan, que l'on appelle *réseau*.

Il s'agira de reporter un motif donné dans les mailles de ce réseau

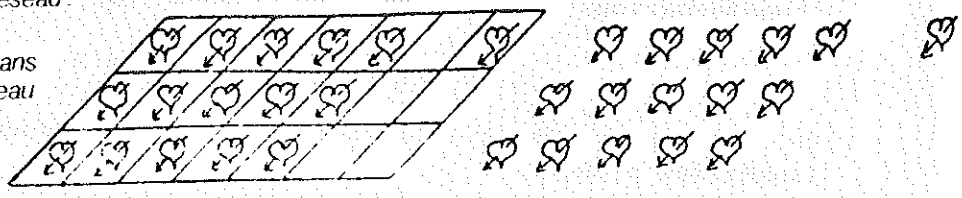


Fig. 2

Plusieurs modes de report sont possibles.

Dans le cas de la figure 3, on a translaté l'ensemble « parallélogramme coeur percé » suivant deux translations de vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (côtés du parallélogramme), puis suivant tous les éléments de la famille de translations

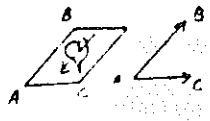


Fig. 3

$\gamma\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AC}$

$\alpha\,\overrightarrow{AB} + \lambda\,\overrightarrow{AC}$

qu'elles engendrent

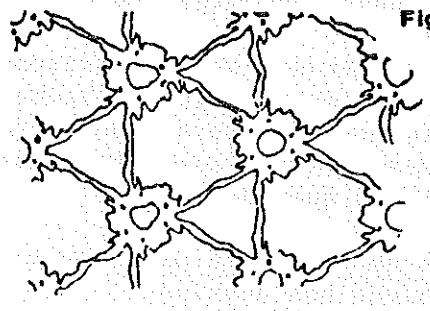
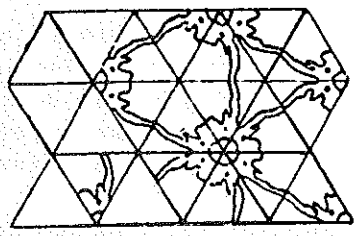


Fig. 4



Dans le cas de la figure 5, le motif initial, dessiné dans le triangle équilatéral $S_1S_2S_3$, est ensuite reporté par symétries successives d'axes les côtés S_iS_j du triangle et ainsi de suite suivant tous les côtés des triangles qui constituent le réseau

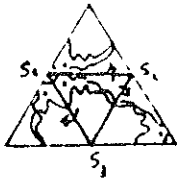


Fig. 5

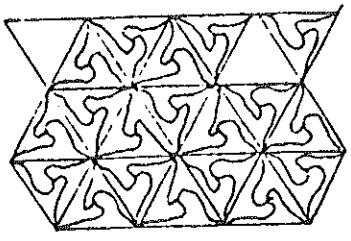
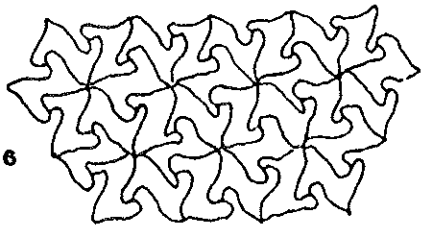


Fig. 6



Le même procédé est utilisé dans la figure 7, mais à partir d'un motif initial construit comme le montre la figure 8, c'est à-dire possédant d'emblée une régularité de rotation d'ordre 3

(O centre de gravité de $S_1S_2S_3$ — $\tilde{OS}_3$ quelconque — $\tilde{OS}_2$ et $\tilde{OS}_1$ déduit de $\tilde{OS}_3$ par rotations de centre O et d'angles $2\pi/3$ et $4\pi/3$)

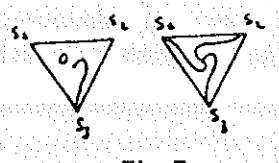


Fig. 7

Ces trois exemples, qui n'épuisent pas le sujet !, mettent en évidence que *du mode de report choisi dépendent les propriétés du dessin final*

- La famille de transformations qui caractérise le premier est une famille de translations.
- Pour celui des figures 5 et 7, on retrouvera la famille de symétries axiales de directions S_iS_j, mais aussi des translations et des rotations d'ordre 3 (angle $2\pi/3$) et de centre les sommets des triangles.

Ainsi s'illustrent, de manière simple aussi pour l'étudiant, des propriétés connues de *composition des isométries planes* : ici, la composée de six symétries axiales d'angles $\pm\pi/3$ est une translation ; la composée de deux symétries axiales d'axes concourants est une rotation.

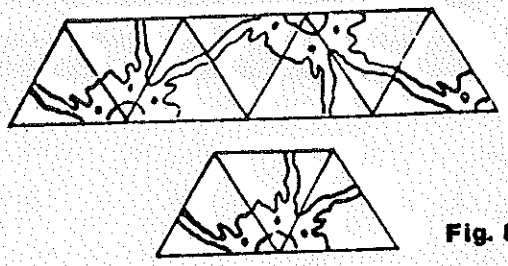


Fig. 8

- De plus, dans le cas de la figure 7, outre les transformations précédentes, on trouve des rotations d'ordre 3, de centre le centre de gravité du triangle $S_1S_2S_3$.

Les propriétés du réseau initial interviennent bien sûr dans toute la procédure.

Le réseau équilatéral possédait globalement les symétries axiales de directions S_iS_j, ce qui n'est pas vrai dans le cas du réseau parallélogrammique (fig. 10).

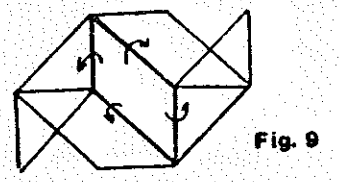


Fig. 9

Mais, inversement, les figures 11 et 12 illustrent le fait que peuvent apparaître certaines propriétés nouvelles, ou disparaître des particularités non utilisées du réseau.

Le mode de report du chat ne fait intervenir que des translations. L'hexagone n'intervient pas dans le dessin final.

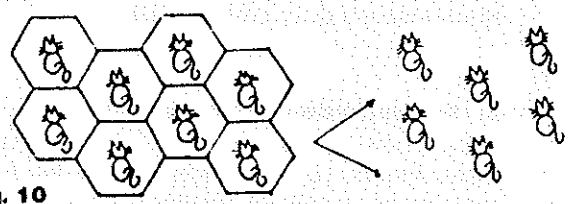


Fig. 10

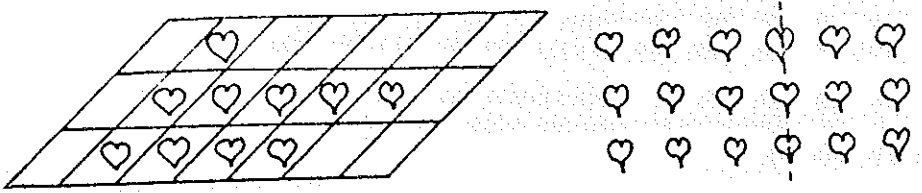


Fig. 11

Le motif cœur était ici susceptible d'une symétrie axiale compatible avec les sommets du réseau : elle est conservée dans le dessin final.

2. Déformation des bords d'un réseau

Une autre façon de procéder consiste en la déformation successive et régulière des bords d'un réseau.

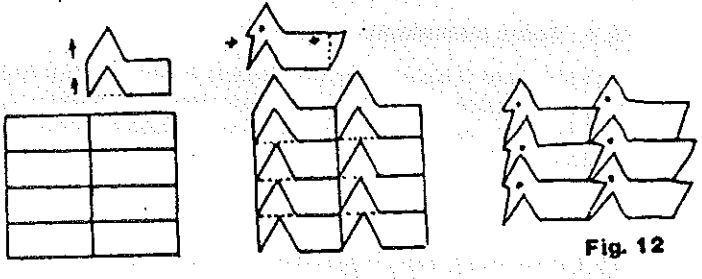


Fig. 12

Dans la figure 13, les déformations choisies induisent un résultat final : la conservation par translation, mais on a perdu les propriétés de symétrie du rectangle

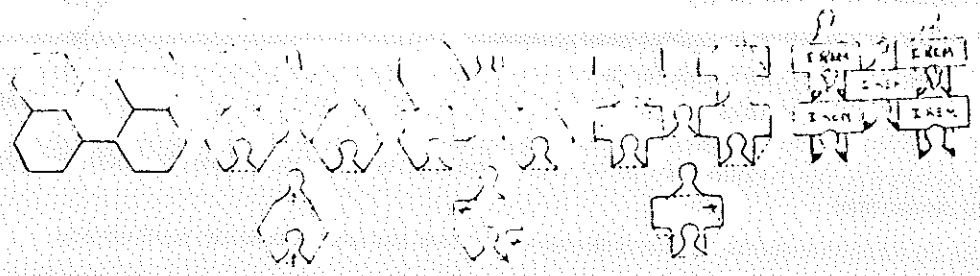


Fig. 13

Dans la figure 14, les déformations induiront cette fois non seulement des translations, mais aussi des symétries axiales. Par contre, elles n'utilisent pas les propriétés de rotation des hexagones

Le film de la figure 15, qui cherche à s'approcher des fameux tritons d'Escher, utilise par contre des rotations d'ordre 3 suivant trois des sommets de chaque hexagone, propriétés qui sont retrouvées dans le dessin final.

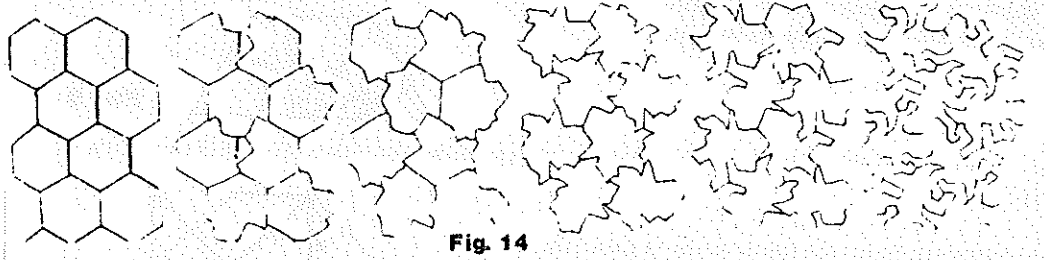


Fig. 14

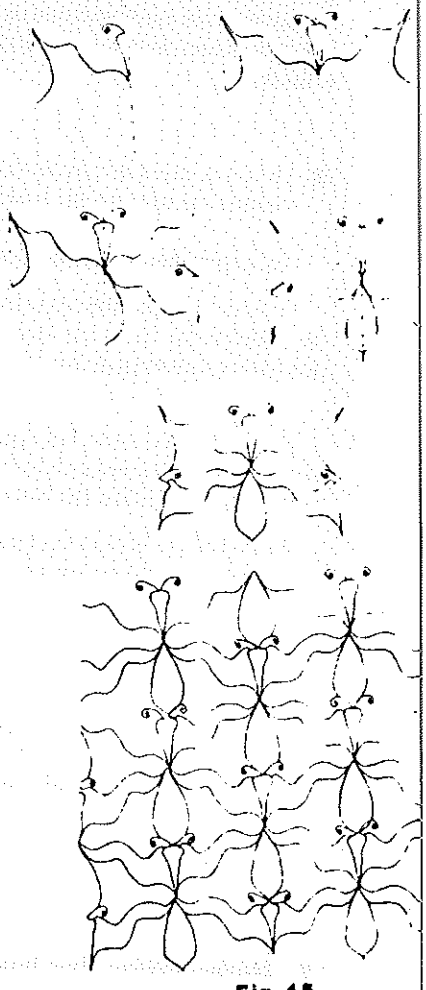


Fig. 15

Quant au procédé de la figure 16 (papillons), sans recourir explicitement et d'emblée à un quadrillage, il utilise successivement symétries axiales et translations pour créer le motif

3. La méthode des enveloppes

Les méthodes citées précédemment (1) se basent implicitement ou explicitement, sur *les caractéristiques des 17 groupes dits de paveurs du plan* : translations, symétries, rotations...

Il en est une autre, dite des enveloppes (2), qui n'utilise pas directement le groupe considéré, mais *le quotient de ce groupe par les transformations*.

Elle consiste — grossièrement — à refermer le dessin sur lui même, en identifiant les points équivalents par une des transformations du groupe (voir paragraphe suivant).

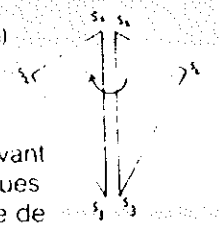


Fig. 16

3.1. Voici comment procéder

Fabriquer d'abord une enveloppe, en collant par exemple, suivant leurs trois côtés S_iS_j, deux triangles demi-équilatéraux isométriques. On obtient une surface, fermée, de dimension 2 dans l'espace de dimension 3.

Assimilons-la, en première approximation, à un ballon de baudruche à trois pointes S_1 S_2 S_3.

(1) Celles évoquées n'épuisent pas, loin de là, le sujet. Voir la littérature abondante sur ce point (cf bibliographie).
(2) Mise au point par Pierre Jullien, de Grenoble.

(b)

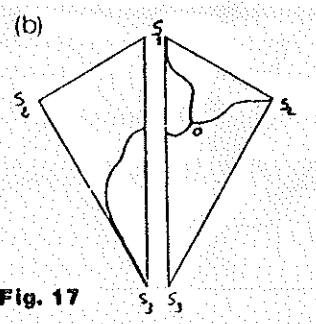


Fig. 17

Choisir un point O quelconque sur cette surface

Tracer trois traits $\widetilde{OS_1}$, $\widetilde{OS_2}$, $\widetilde{OS_3}$, continus, du point O à chacun des sommets S_1 ; S_2 ; S_3

(c)

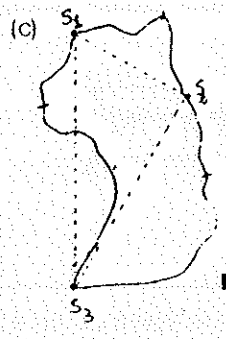


Fig. 18

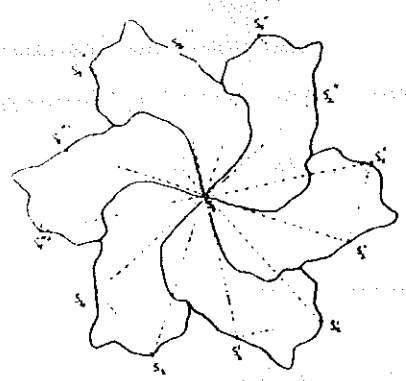
Découper la surface suivant ces trois traits.

Déplier : on obtient ainsi un patron P.

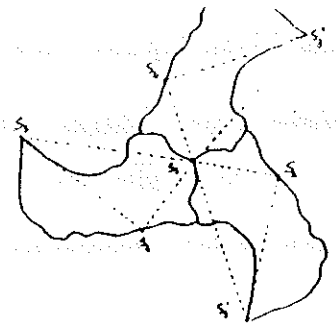
Le reporter sur une feuille de papier, en marquant les sommets S_1 ; S_2 ; S_3.

(d)

- Tourner de $2\pi/3$ autour de S_1 , reporter le patron P , recommencer .Marquer à chaque fois les sommets S_i obtenus.
- Tourner de même de $2\pi/6$ autour de S_3 (6 fois) et de $2\pi/3$ autour de S_2 (1 fois)
- En procédant ainsi de proche en proche, on obtient le pattern de la figure 20

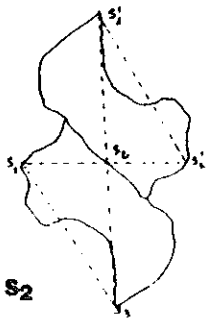


Tourner de $2\pi/6$ autour de S_3

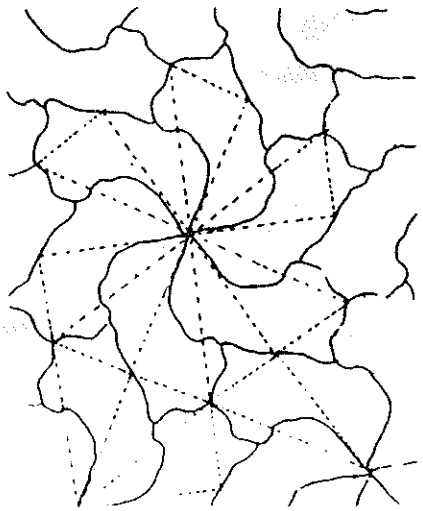


Tourner de $2\pi/3$ autour de S_1

Fig. 19



Tourner de $2\pi/2$ autour de S_2



3.2 Pourquoi les motifs s'imbriquent-ils ?

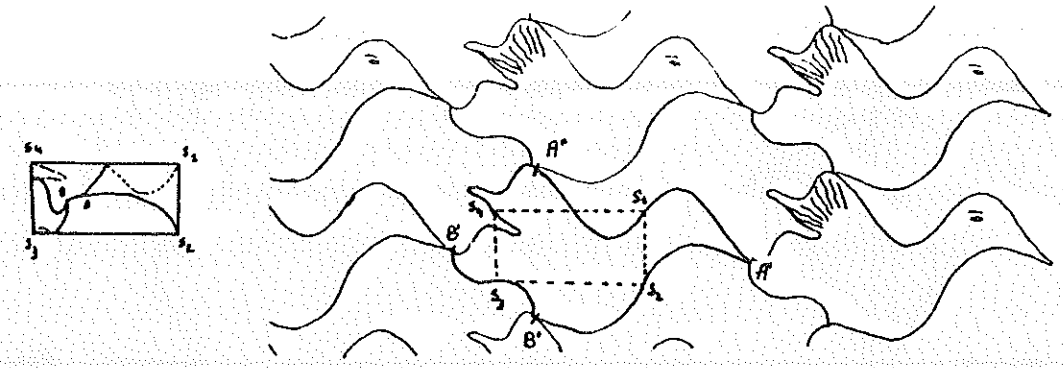


Fig. 20

(Sur le dessin de la figure 21, on a procédé comme ci-dessus, avec une enveloppe à base rectangulaire).

Le découpage de la surface fermée suivant $\widetilde{AS_1}$ a donné naissance à $\widetilde{A'S_1}$ et $\widetilde{A''S_1}$: une rotation de centre S_1 amènera donc $\widetilde{S_1A'}$ sur $\widetilde{S_1A''}$. Il en est de même avec le trait $\widetilde{S_3B}$ se séparant en $\widetilde{S_3B'_1}$ et $\widetilde{S_3B''}$.

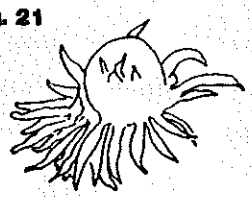
3.3 Ils s'imbriquent sans trous ni recouvrement ?

A priori, tout découpage suivant ce procédé de toute surface de dimension 2, fermée, et « à pointes », donne naissance à des patrons aux contours réunions de $\widetilde{S_iA'_i}$, $\widetilde{S_iA''_i}$.

Pourtant on n'obtient pas toujours (ou plutôt presque jamais !) de pavage de cette façon là.

En effet, pour que le patron obtenu engendre un pavage du plan, il est nécessaire que les motifs s'imbriquent, mais aussi qu'ils le fassent sans chevauchement.

Fig. 21



Un pattern, moi ! Jamais !

Dans le cas de la figure 20, deux rotations successives autour de S_1 permettaient de recouvrir le plan autour de ce point.

On voit sur la figure 23 que le découpage d'un triangle équilatéral suivant OS donne O'S et O''S tels que

$$(\overrightarrow{SO'}\ ;\ \overrightarrow{SO''}) = 2\cdot\frac{\pi}{3}$$

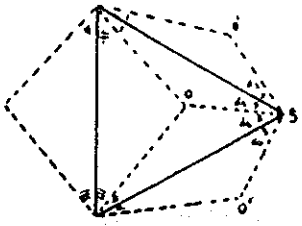


Fig. 22

En général, si on choisit un triangle avec en S un angle α, on aura

$(\overrightarrow{SO'}, \overrightarrow{SO''}) = 2\alpha$

(fig. 24)

Si 2α n'est pas un diviseur entier de 2π après un certain nombre de rotations d'angle 2α autour de S, il y aura un trou ou un chevauchement.

(fig. 25)

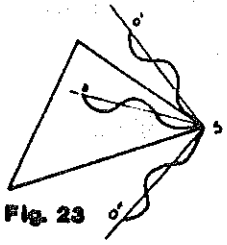


Fig. 23

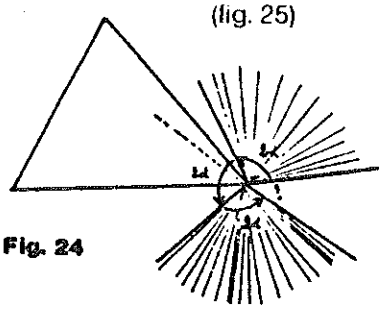


Fig. 24

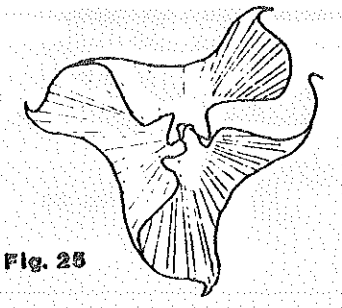
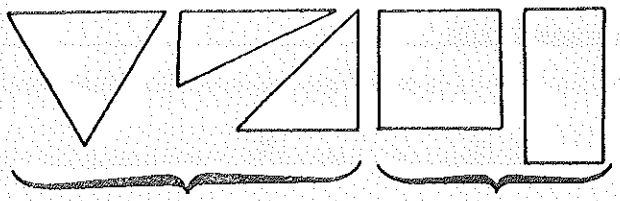


Fig. 25

On montre que *seulement cinq formes d'enveloppes conviennent.*

Elles sont telles que leurs angles α_i vérifient à la fois :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2)\,\pi \\ \forall i : 2\alpha_i \text{ diviseur entier de } 2\pi. \end{cases}$$



n = 3 n = 4

Fig. 26

4. À la recherche de l'enveloppe perdue

Nous allons essayer de faire le chemin inverse : se donner un dessin répétitif, et tenter de trouver la surface fermée dont il pourrait provenir, en étudiant au passage les propriétés mathématiques que cela suppose. (Ceci, bien sûr, n'est possible que pour les dessins susceptibles de rotations !)

Essayons sur le pattern des tritons extraits de l'oeuvre de M.C. ESCHER[3]

(3) La démarche indiquée ici n'est pas la plus rapide. Elle reproduit certains tâtonnements des étudiants qui se penchèrent sur le problème, tâtonnements pédagogiquement significatifs et salutaires, en ce qu'ils mettent le doigt sur quelques aspects délicats.

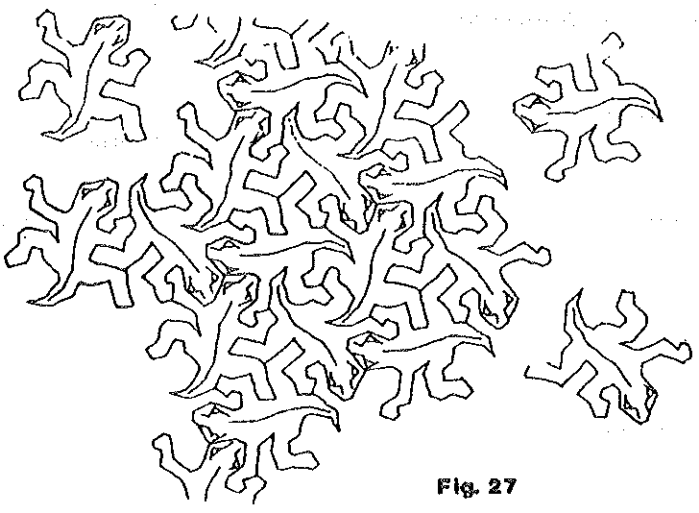


Fig. 27

(1)

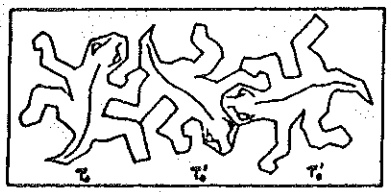


Fig. 28

On détermine dans le pattern des tritons (fig. 28) *trois familles* T ; T' ; T'', qui sont les orbites des trois tritons T_O , T'_O , T''_O (fig. 29) suivant une famille de translations.

Cette famille peut être engendrée, par exemple, par deux des translations de vecteurs $\vec{A}A'$; $\vec{A}'A''$ ou $\vec{A}''A$.

La figure 30 schématise l'action de cette famille $\mathcal{T}$ de translations sur les éléments de l'orbite T.

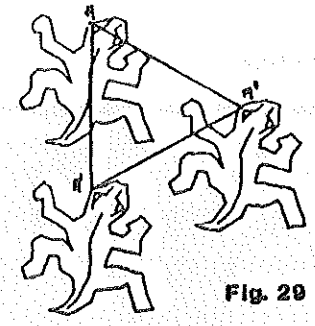


Fig. 29

(2) Oublions alors les translations

- Modulo la famille $\mathcal{T}$ de translations, le dessin est équivalent aux trois tritons T_O, T'_O; T''_O de la figure 29, ou T_I; T'_I; T''_I de la figure 31.
- Dans cette identification, la ligne $\widetilde{AB}$ est identifiée à $\widetilde{A''B'}$, comme on le voit sur la figure 33. De même $\widetilde{A'B'}$ est identifiée à $\widetilde{AB''}$ et $\widetilde{A''B''}$ à $\widetilde{A'B}$.

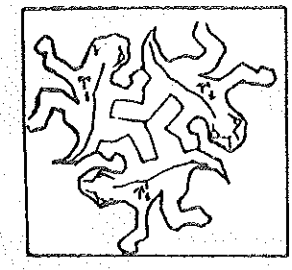


Fig. 30

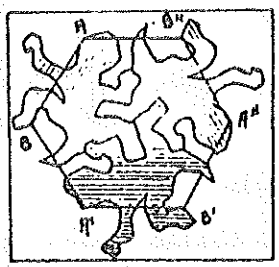


Fig. 31

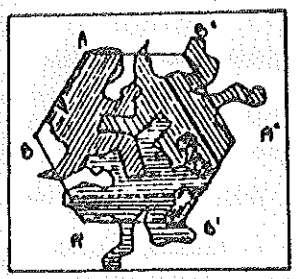


Fig. 32

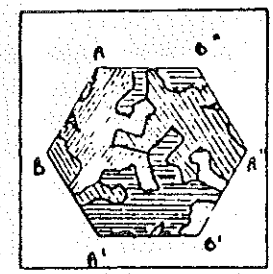


Fig. 33

- Mais alors on peut tout aussi bien considérer que le segment AB est identifié au segment A''B' par la translation $\vec{AA'}$
- Et finalement, on admettra comme dessin équivalent, modulo la famille des translations, l'hexagone ABA'B'A''B'', avec identification des côtés AB, A''B' et A'B', AB'' et A''B'', A'B (fig. 34)

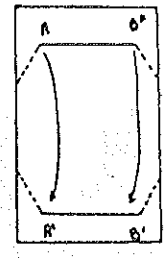


Fig. 34

Cependant, en pratique, si on découpe l'hexagone ABA'B'A''B'' et si l'on essaye de recoller les côtés identifiés, on rencontre quelques petites difficultés techniques !

(3) Si l'on tenait compte aussi des rotations ?

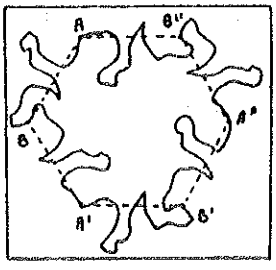


Fig. 35

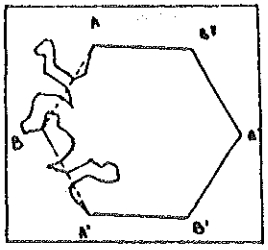


Fig. 36

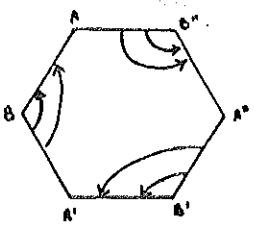


Fig. 37

Partons toujours de nos trois tritons qui tournent dans leur hexagone ABA'B'A"B".

Modulo la rotation de centre B, d'angle $2\pi/3$, la ligne BA' est identifiée à BA ; de plus cette rotation R(B ; $2\pi/3$) est également une isométrie du dessin (elle le laisse globalement invariant)

Cette propriété est vraie pour les rotations de centre B' ou B", et d'angle $2\pi/3$, qui identifient B"A" à B'A' et B"A à B"A"

Comme ci-dessus et modulo ces rotations, on considérera alors le dessin comme identifié à l'hexagone ABA'B'A"B" (Cette fois, on aura BA' $\sim$ BA ; B'A" $\sim$ B'A' ; B"A $\sim$ B"A")

(4) On peut alors refermer la surface

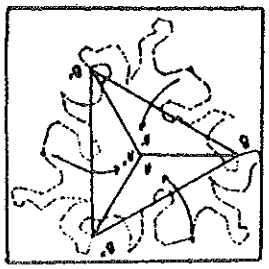


Fig. 38

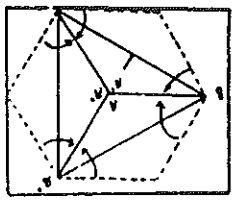


Fig. 39

On obtient une enveloppe fermée, de base équilatérale ; en fait, si l'on avait d'emblée considéré l'équivalence modulo le groupe des translations et des rotations du dessin, on aurait refermé la surface à partir d'un seul triton (fig. 41). On obtient ainsi une autre enveloppe, elle aussi équilatérale, qui illustre le quotient du groupe du dessin par ses isométries.

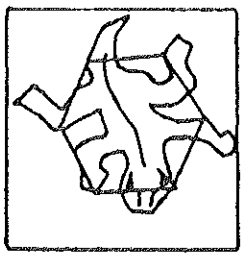


Fig. 40

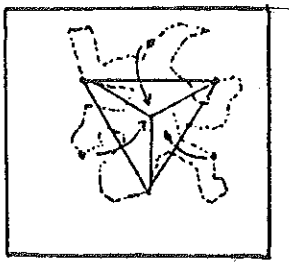


Fig. 41

5. Programmer sur un ordinateur (cf. document P.JULLIEN)

- les transformations successives à effectuer pour chaque groupe
- le numéro du groupe choisit
- le tracé du motif de base : la table traçante effectue des tracés rectilignes entre deux points indiqués.
  On programme en "plume basse" (Down) les bords du motif (ici demi-oiseau), en "plume", les côtés du triangle.

EXEMPLE :

ci contre, d'un tracé réalisé à l'université d'été de 1978.

1er programme :

Dans un triangle rectangle isocèle, une moitié d'oiseau est inscrite sur un côté de l'angle droit.

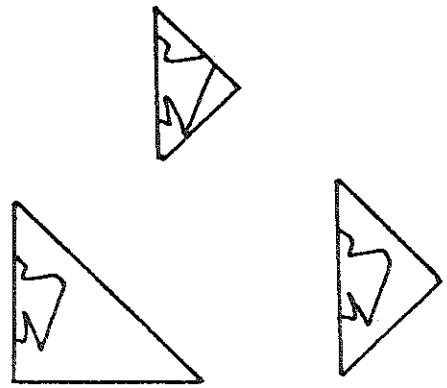
2ème programme :

Le même motif est placé sur l'hypothénuse d'un triangle demi-carré plus petit.

3ème programme :

On réduit encore la taille du triangle.

D'autres motifs, fleurs et étoiles, apparaissent.



Ici

A = 520 B = 0

CONTENU DU FICHIER *** CHRISTIE ***

G= 1.5 N= 11

A 300.000 B -300.000

C 0.000 D 0.000

I	X(I)	Y(I)	T$(I)
1	70.000	0.000	U
2	20.000	20.000	D
3	10.000	-10.000	D
4	10.000	0.000	D
5	-10.000	60.000	D
6	20.000	10.000	D
7	100.000	-40.000	D
8	-60.000	-30.000	D
9	50.000	10.000	D
10	-10.000	-20.000	D
11	-200.000	0.000	U

CONTENU DU FICHIER *** CHRISTIE ***

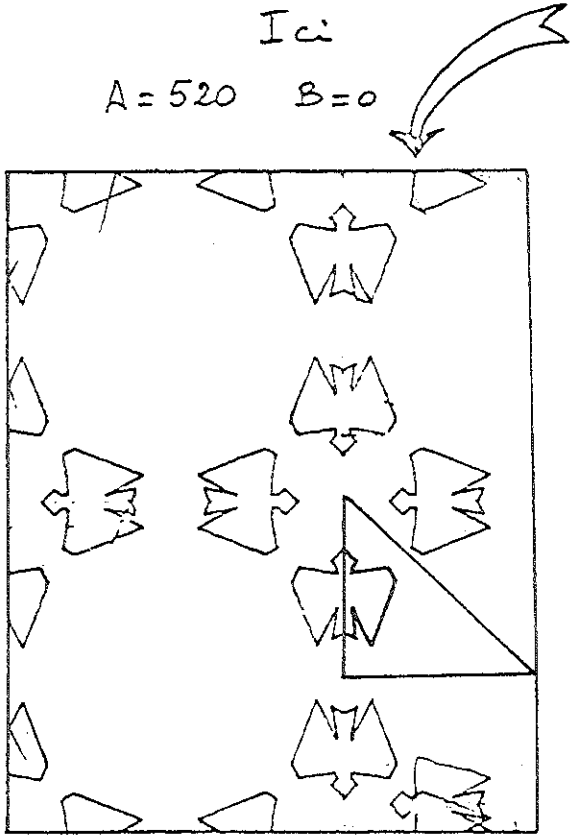
G= 1.5 N= 11

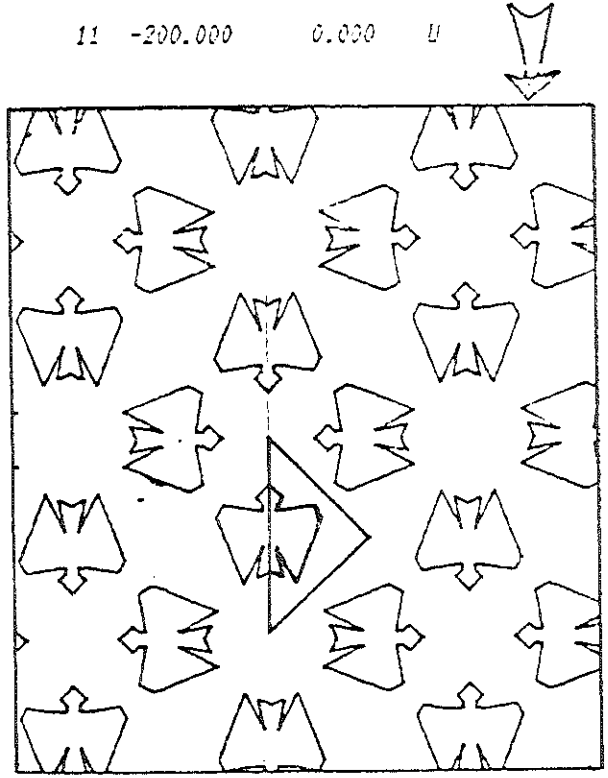
A 480.000 B -480.000

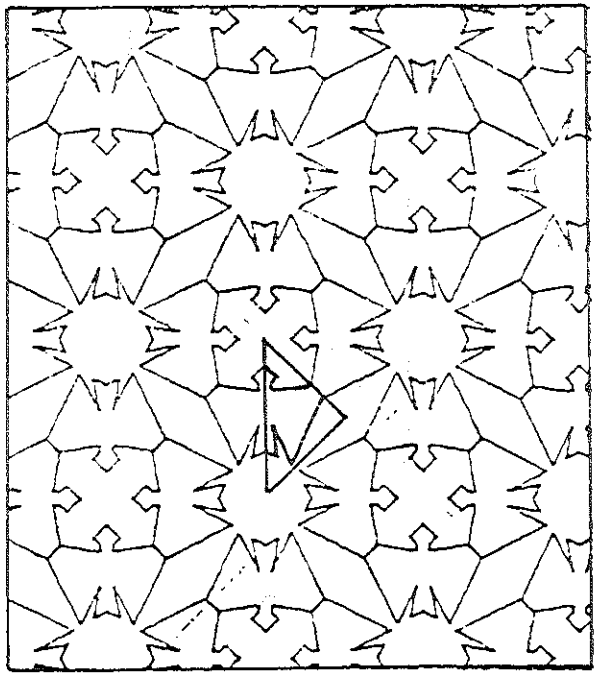
C 0.000 D 0.000

I	X(I)	Y(I)	T$(I)
1	80.000	0.000	U
2	40.000	40.000	D
3	20.000	-20.000	D
4	20.000	0.000	D
5	-20.000	120.000	D
6	40.000	40.000	D ← S
7	200.000	-100.000	D
8	-120.000	-60.000	D
9	100.000	20.000	D
10	-20.000	-40.000	D
11	-340.000	0.000	U

Echelle 0,5







M O N O G R A P H I E

LEGENDE Pour chaque groupe, on indique

1)G : son identité, par - un numéro de 1 à 17 (notation Jullien-Berger)
- un sigle : notation des cristallographes
- un nom : notation de S.Turnou

2)R : la nature de son réseau fondamental (sous-groupe distingué des translations de (

3)J : la nature de ses isométries (qui comprennent en outre évidemment toutes les composées de celles qui sont indiquées)
T: translation ; G; glissement ; (composé d'une symétrie et d'une translation)
S: symétrie axiale ; R2 ; R3 ; R4 ; R6 ; rotations d'un demi, un tiers, un quart ou un sixième de tour.

4)J/T: Le nombre d'élèments de son T quotient, c'est à dire du groupe quotient de G par le sous-groupe distingué de ses translations. On donne également la nature d'une figure géométrique simple, au groupe d'isométries de laquelle il est isomorphe.

5)F : une (ou deux) feuille génératrice du groupe.

* cette monographie est inspirée de celle donnée par Pierre JULLIEN, des dessins groupes et ordinateurs.

- Les 17 groupes de paveurs -

R : reseau fondamental.

I : isometries du groupe.

I/T : quotient du groupe par ses translations.

F : une famille generatrice.

1 - P1 - Parallelogrammique asymetrique.

R : parallelogrammique

I : Translations (T)

I/T : un seul elt ; isomorphe au groupe d'isometries d'un triangle scalene (quelconque)

F : deux translations independantes.

2 - P2 - Parallelogrammique Symetrique

R : Parallelogrammique

I : Translations et Rotations d'ordre 2 (T; R2)

I/T : 2 elements; isomorphe au groupe des isometries d'un parallelogramme (ni rectangle, ni losange)

F : trois demi-tours (centres non alignés)

3 - P3 - Hexagonal trois-rotatif.

R = hexagonal

I : Transl. et rotations d'ordre 3 (T; R3)

I/T : 3 elements; isomorphe au groupe des isometries directes d'un tr. equilateral.

F : deux tiers de tours (centres distincts)

4 - P4 - Carré quatre-rotatif.

R : carré

I : Transl et rotations d'ordre 2 et 4 (T; R2; R4)

I/T : 4 elements; isomorphe au groupe des isometries directes d'un carré.

F : un demi-tour et un quart de tour (centres distincts)

5 - P6 - Hexagonal six-rotatif.

R : hexagonal

I : Transl. et rotations (T; R2; R3; R6)

I/T : 6 elements; isomorphe au groupe des isometries directes d'un hexagone regulier

F : un demi-tour et un tiers de tour (centres distincts)

6 - cm - Rhombique monosymetrique.

R : rhombique (losange)

I : transl. et Symetries axiales (T-S-)

I/T : 2 elts ; isomorphe au groupe des isometries d'un triangle isocele (non equilateral)

F : une symetrie et un glissement (d'axes paralleles)

7 - pm - Rectangulaire monosymetrique.

R : rectangulaire

I : transl. et symetries axiales (T-S)

I/T : 2 elts ; iso. au groupe des isometries d'un triangle isocèle.

F : une symetrie et deux translations (l'une parallele, l'autre perpendiculaire à l'axe de S.)

8. Pg - Rectangulaire glissant asymetrique.

R : rectangulaire

I : transl. et glissements.

I/T : 2 elements; iso. au groupe des iso. d'un triangle isocèle.

F : deux glissements distincts (mêmes vecteurs de glissement).

9 cmm - Rhombique Bisymetrique

R : rhombique

J : T - R2 - S - G -

J/G : 4 elts ; iso. au groupe des isometries d'un rectangle (non carré)

F : deux symetries d'axes orthogonaux et une transl. d'axe non parallele aux axes de symetrie.

10 pmm - Rectangulaire bisymetrique -

R : rectangulaire

J : T ; R2 ; S .

J/G : 4 elts ; iso. au groupe des iso. d'un rectangle (non carré)

F : symetries par rapport aux quatre côtés d'un même rectangle.

11 - pmg - Rectangulaire glissant- sym

R : rectangulaire

J : T ; R2 ; S ; G .

J/G : 4 elts ; iso. au groupe les is d'un rectangle (non carré)

F : une sym. et deux demi-tours (centres à egale distance de l'axe de symét

12 pgg - Rectangulaire Biglissant -

R : rectangulaire.

J : T - R2 - G.

J/G : 4 elts ; iso. au groupe des isometries d'un rectangle (non carré)

F : deux glissements d'axes perpendi. -culaires.

13 - p31m - Hexagonal trois rotatif symetrique 1 -

R : hexagonal

J : T ; R3 ; S.

J/G : 6 elements ; iso. au groupe des iso. d'un triangle equilateral.

F : symetries par rapport aux côtés d'un triangle equilateral.

14 - p3m1 - Hexagonal trois rotatif symetriq

R : hexagonal

J : T ; R3 ; S

J/G : 6 elts ; iso. au groupe des isometr d'un triangle equilateral

F : une symetrie et une rots de tour (centre non sur l'axe de symetrie)

15 p4m - Carré totalement symetrique -

R : carré

J : T ; R2 ; R4 ; S ;

J/G : 8 elts ; iso. au groupe des iso. d'un carré.

F : symetries par rapport aux trois côtés d'un triangle rectangle isocèle.

16 - p4g - Carré quatre rotatif glissant -

R : carré

J : T ; R2 ; R4 ; S ; G.

J/G : 8 elts ; iso au groupe des iso. d'un carré.

F : une symetrie et un quart de tour (centre hors de l'axe de symetrie)

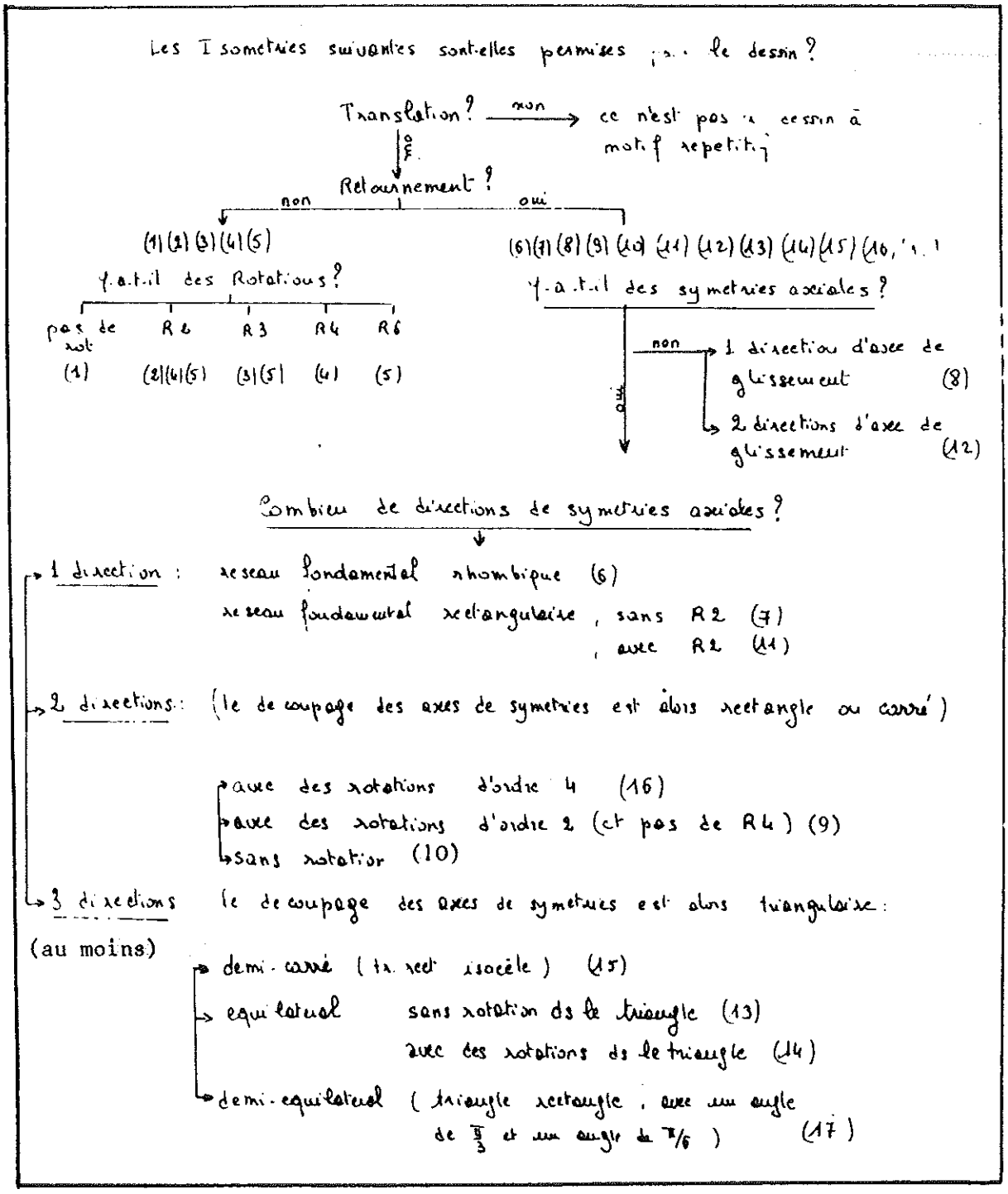
17 - p6m - Hexagonal totalement symet

R : hexagonal

J : T ; R2 ; R3 ; R6 ; S.

J/G : 12 elts ; iso au groupe des is d'un hexagone regulier.

F : symetries par rapport aux trois d'un même triangle demi-equilat



Algorithme de reconnaissance de groupe

(x) indique le n° du groupe du dessin considéré,
(premier numero de la monographie precedente)

B I B L I O G R A P H I E

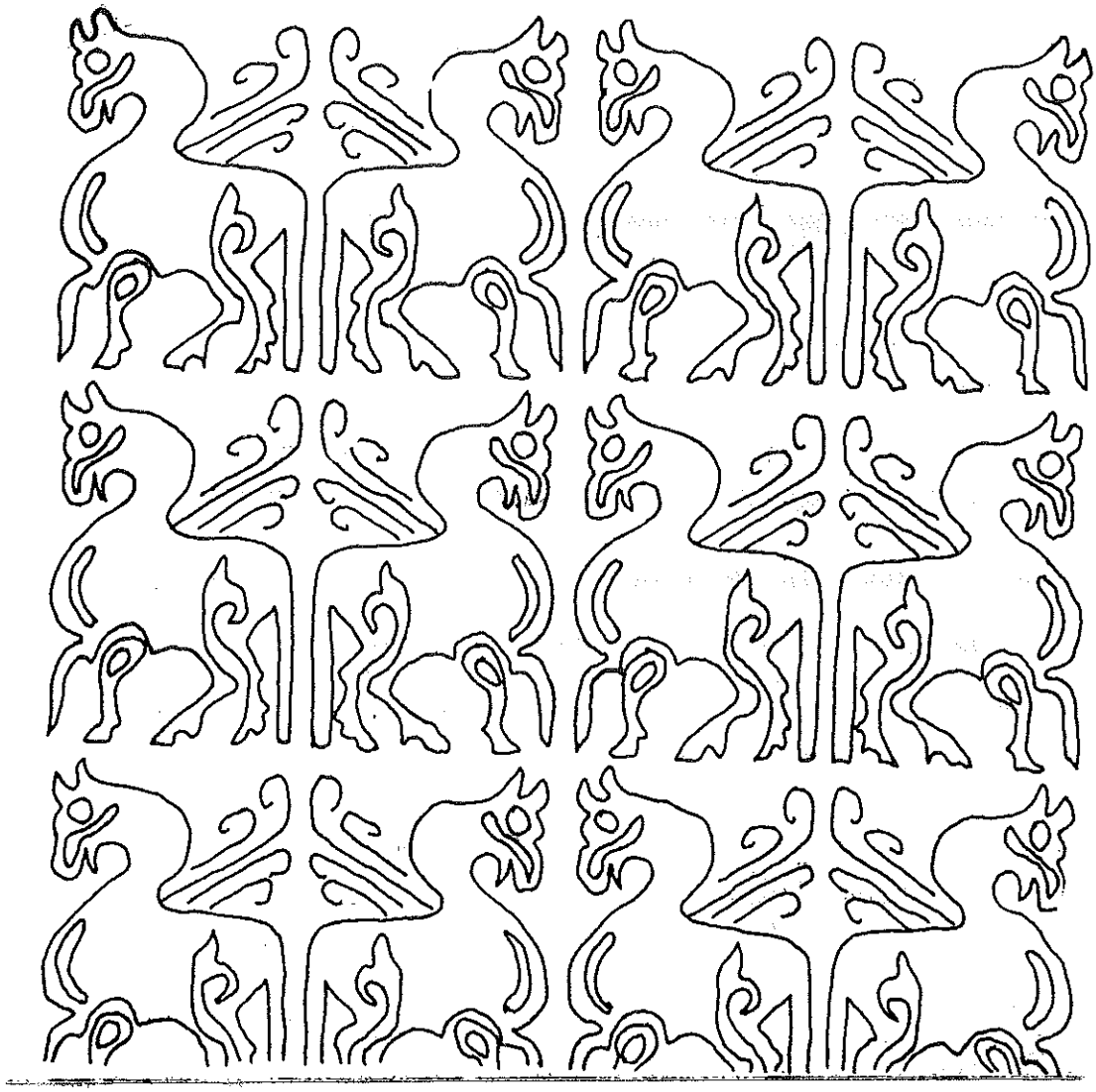
- Agrégation épreuve écrite de maths géné - 1973
- APMEP : Géométrie en 1er cycle - T II
- Bezuska S. Tesselations - Géométrie of Patterns - Creative Publications - Palo Alto
- Berger - Géométrie - Fasc 1 - Cédic 1977
- Bossard - Rosaces Frises - Pavages - Cédic 1977
- Budden - la fascination des groupes - OCDL 1976
- Cartron et Feyssagues - Activités géométriques à partir d'un pavage d'Escher IREM de Poitiers 1980-
- Collonges et Trehard - Pavages - coloriages IREM de Paris Sud - 1980
- Coxeter - Introduction to geometry - John Wiley 1961-
- Fleury et Fraeser - Géométrie et réalité - Permama 1979 - Montréal-
- Grunbaum - Shepard - The eighty one types of isohedral tiling in the plane Maths - Proc; Camb. Phil. Soc 1977
  Vol 82 p 177-196
  (cet article contient une abondante bibliographie en Russe et en allemand, d'articles théoriques et anciens, sur les groupes des cristallographes)
- Harold R.Jacobs - Mathématics - A. Human Endeavor
  Freeman and Company - San Francisco - 1970
- Jullien - Dessins - Groupes ordinateurs - Grenoble - Inedit-
- Permama - Géométrie et réalité I et II - Télé Université - Montreal 1979
- Ranucci - Master of - Tessellations of M.C Escher - Mathematics Teacher April 197
- Ranucci and Teeters - Creating Escher type of drawing - creative publications - Polo alto - CA 94 303
- Rozoy - ornementations - Godasse - IREM de Normandie 1979
- Savarion - Ornementations du Plan - IREM de Poitiers
- Senechal - Groupes et géométries - Hermann - 1979
- Teeters - How to draw tessellations of the Escher Type Mathematics teachers - April 1974
- Turnau - de l'étude d'ornements vers l'algèbre et la géométrie Dans le gallion - la mathématique et ses applications Cedic 1972 - p 155 - 171
- Weyl - Symétrie et mathématiques modernes - flammarion 1964

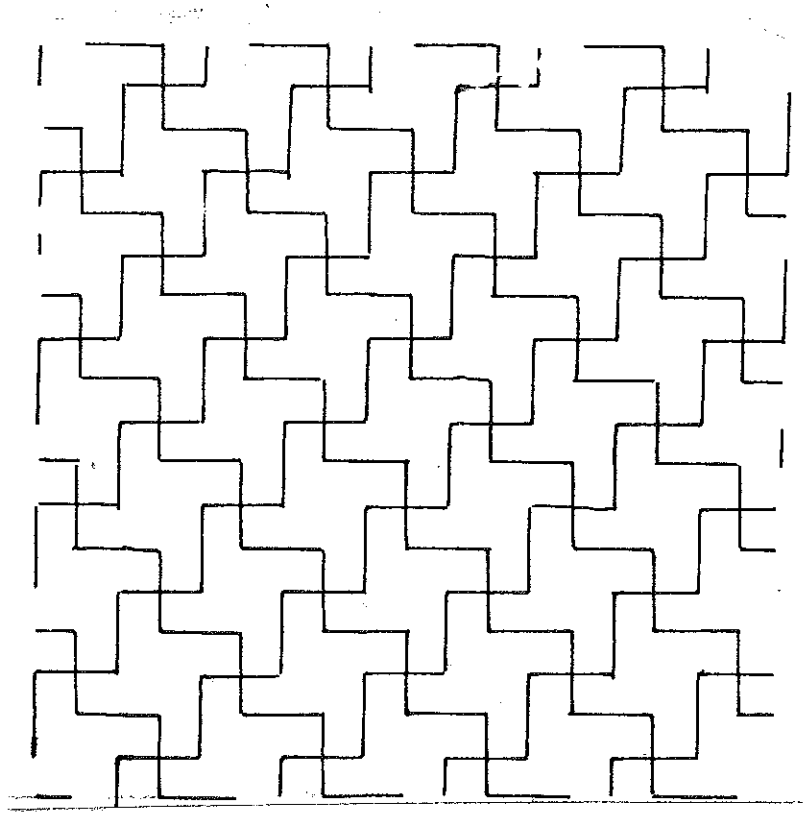
ET POUR SE PROCURER DES PATTERNS

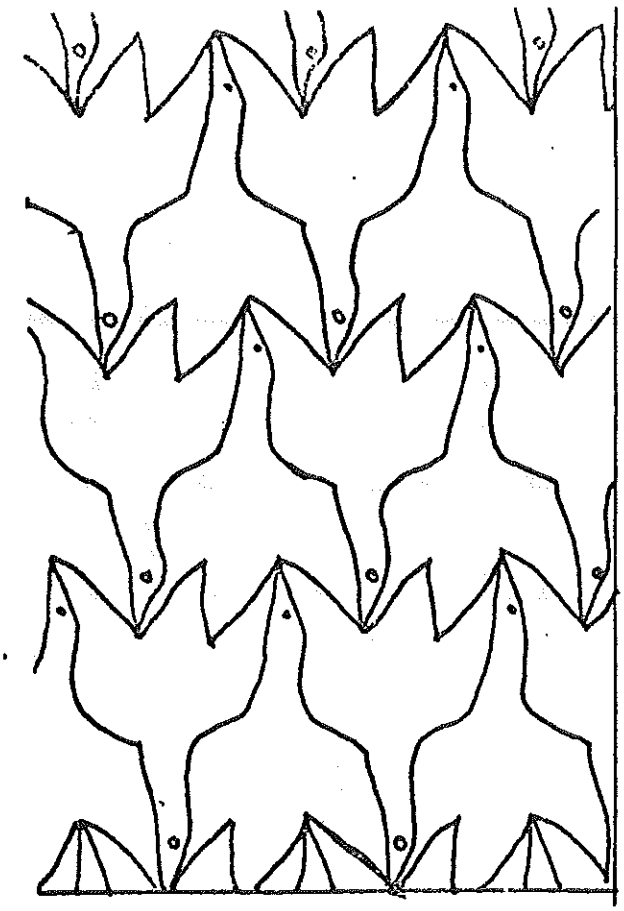
- Bourgoin arabie geometrical patterns design - Dover Publication - N.Y
- CL Hornung - Bockground Patterns - idem
- Tolra et Dessain - (librairie rue Cassette à 75006)
- Leger christian - pavages - IREM Paris Sud 1979
- IREM d'Orléans - Pochette de Pavages - 1980
  Domaine Universitaire de la Source - 45045 ORLENAS Cedex

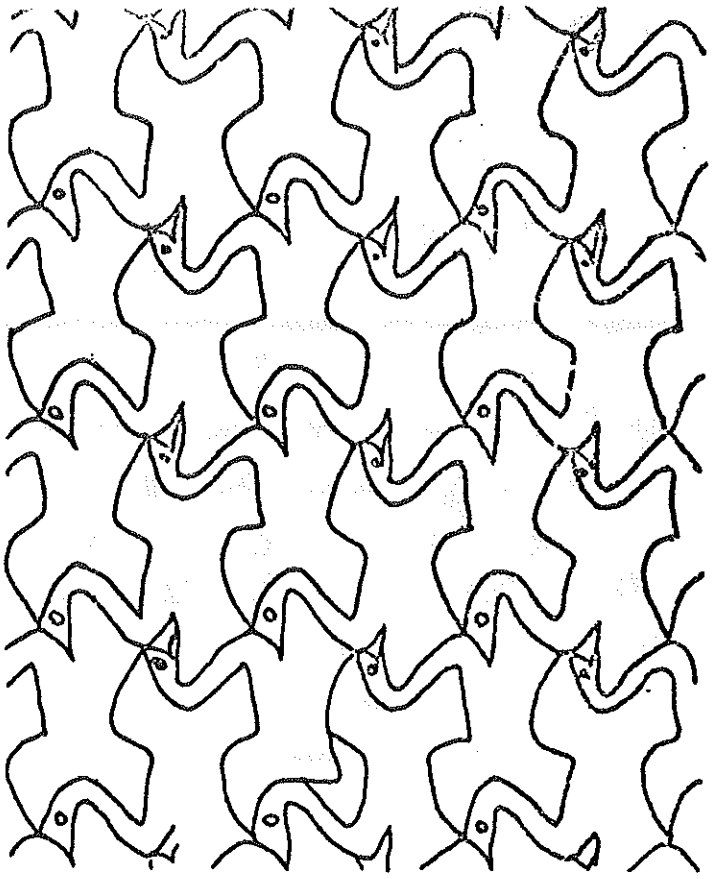
SUR L'OEUVRE D'ESCHER

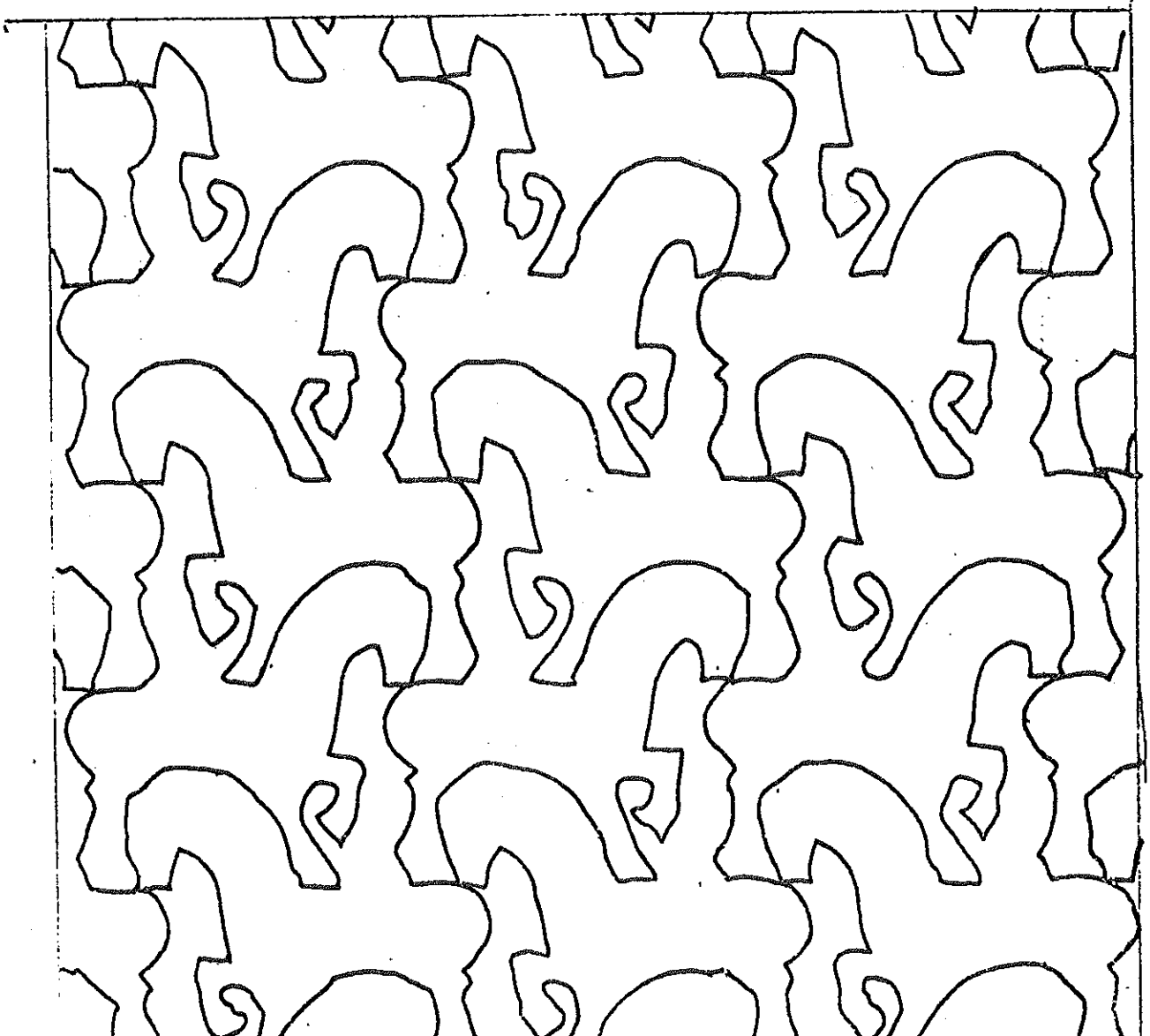
- B.Ernst - Le Miroir magique de M.C Escher - Ed le Chêne - 1976
- L'oeuvre graphique et M.C Escher - Ed Solins
  Rue des fossés St Jacques - 75005 PARIS
- Le monde de M.C Escher - Ed du Chêne.

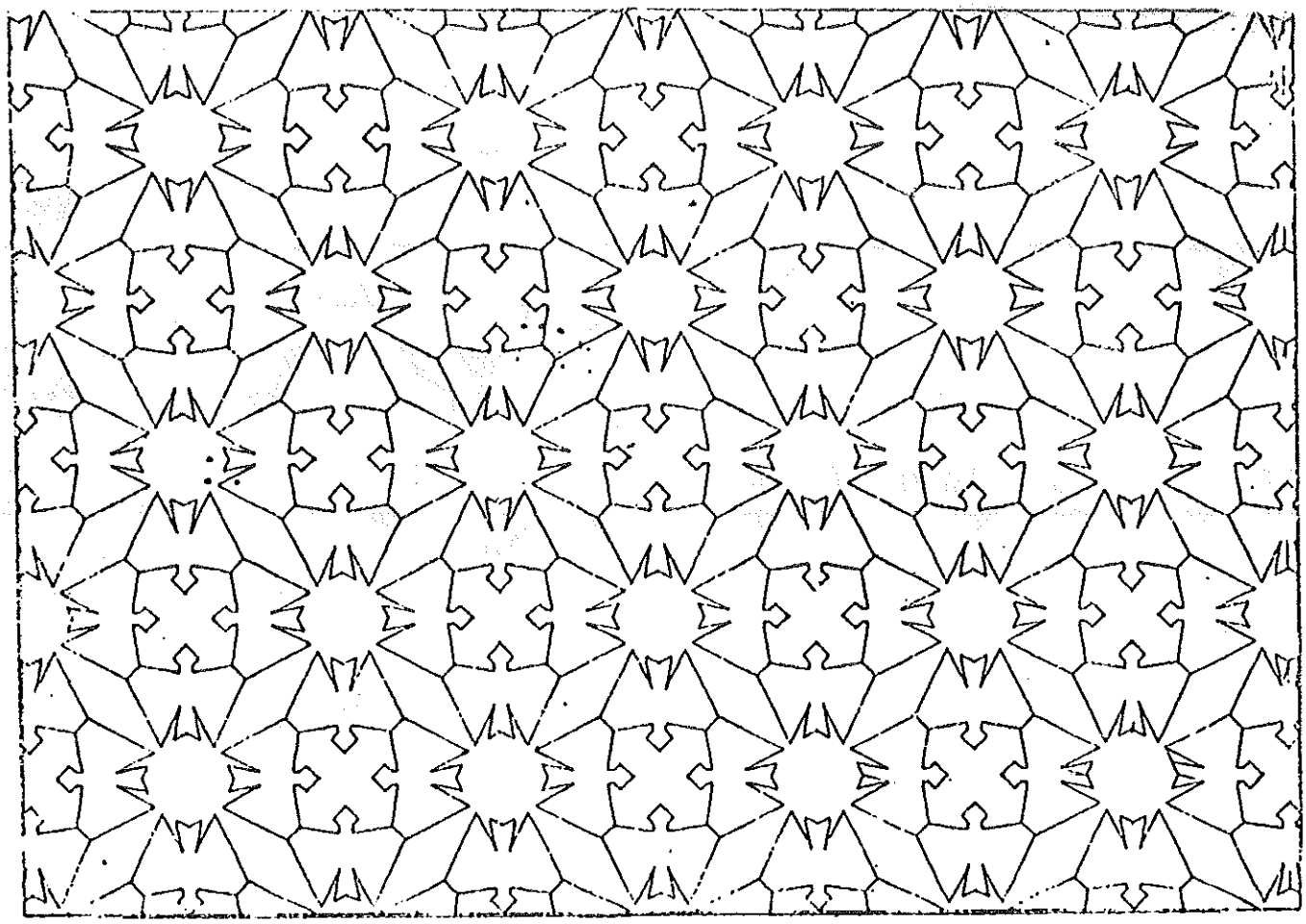


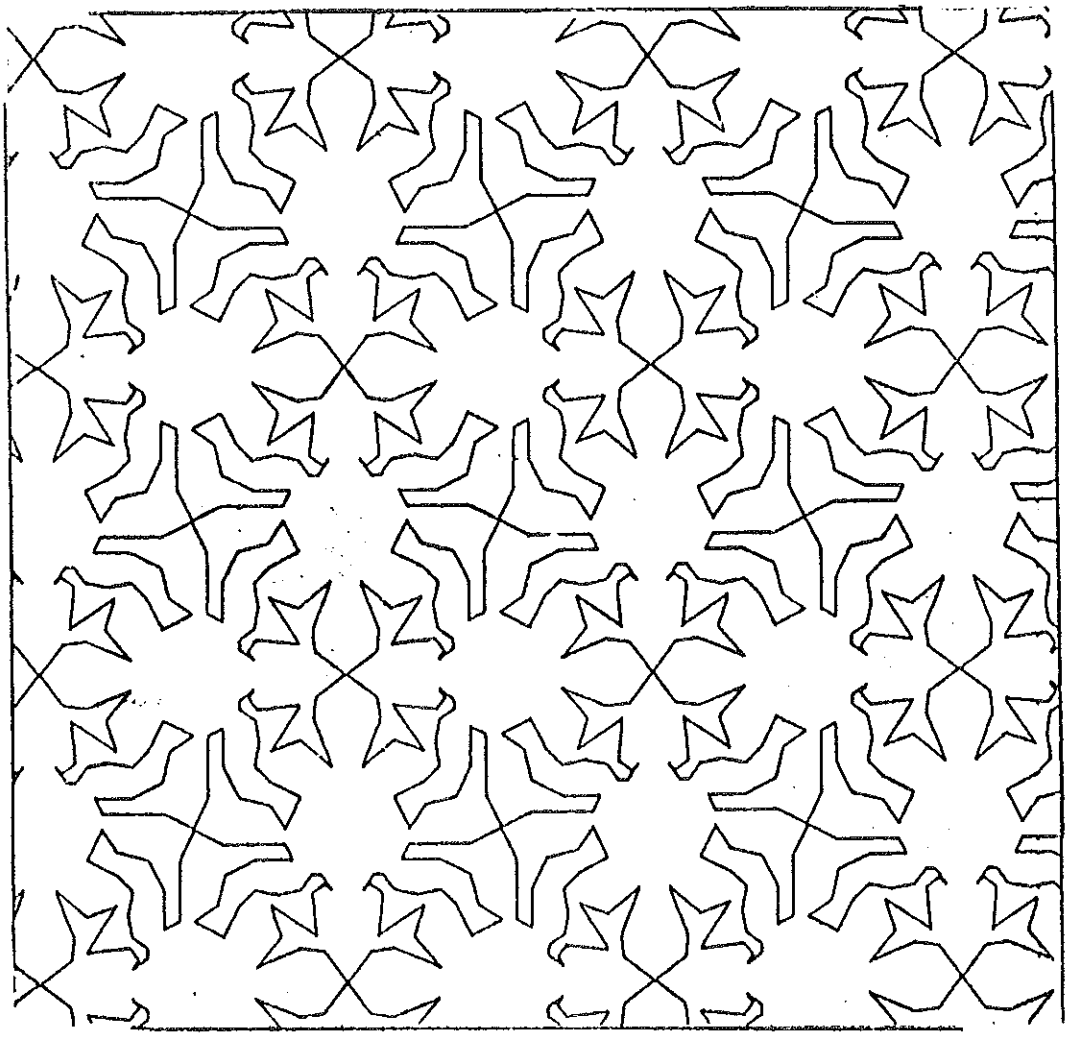


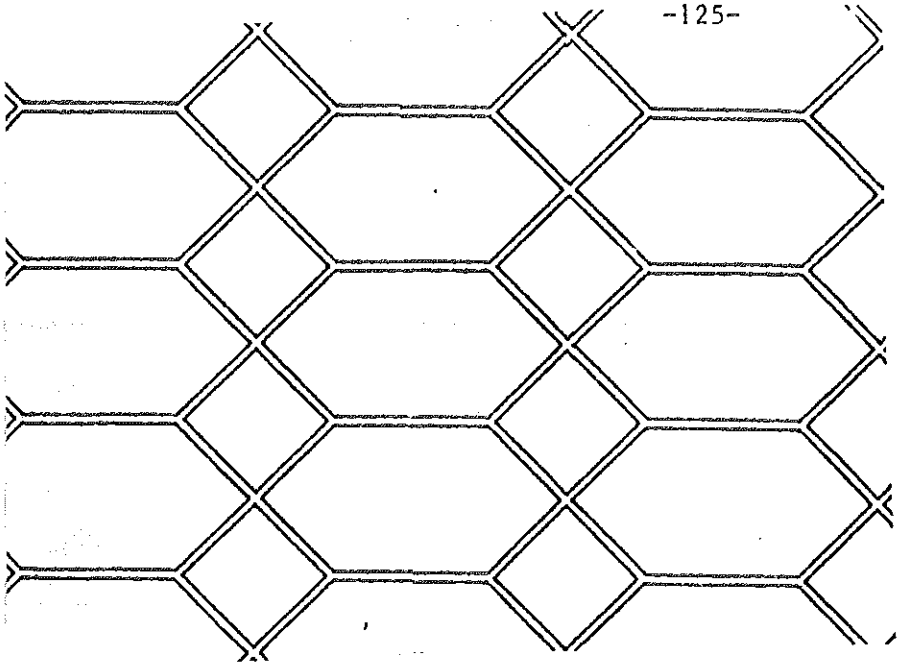


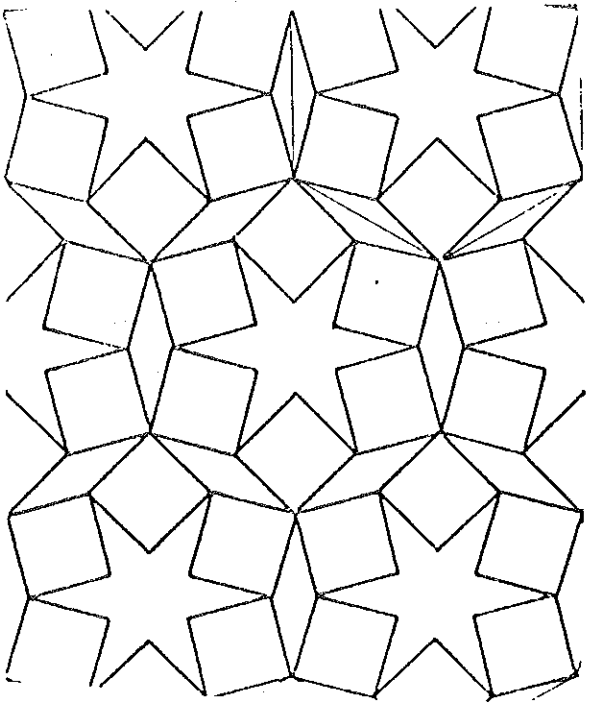


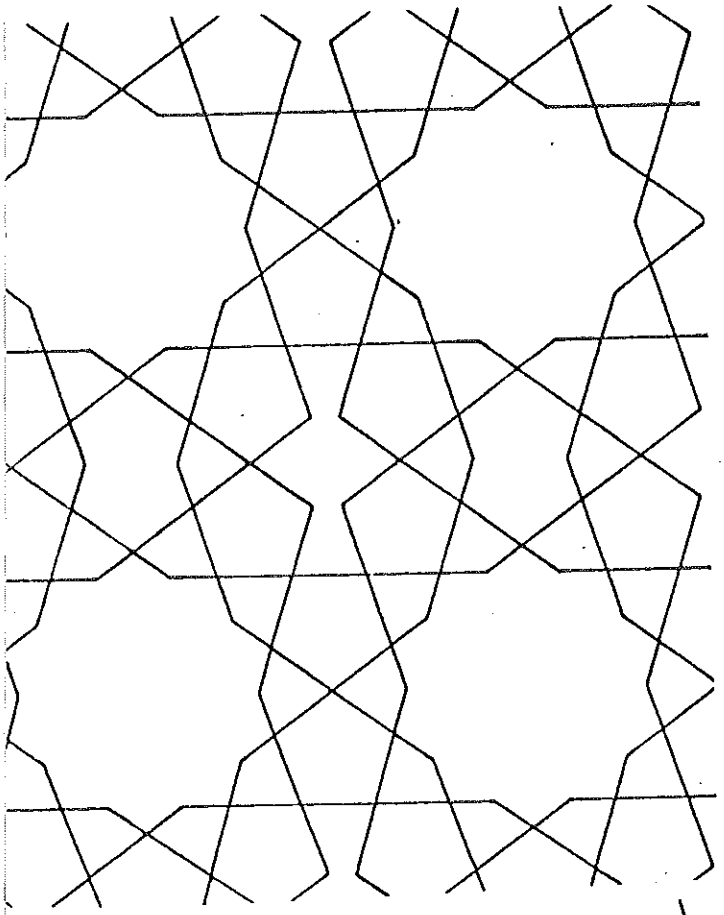


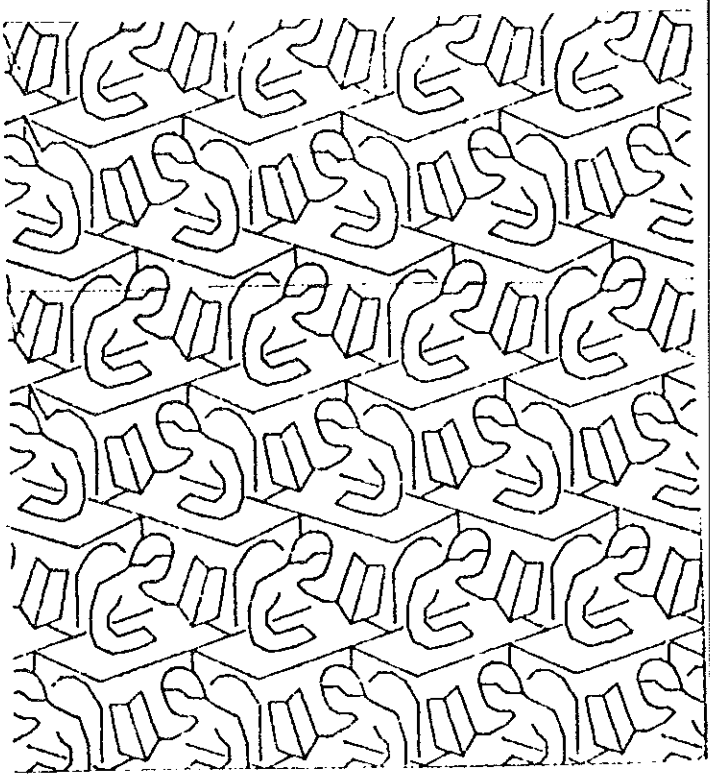


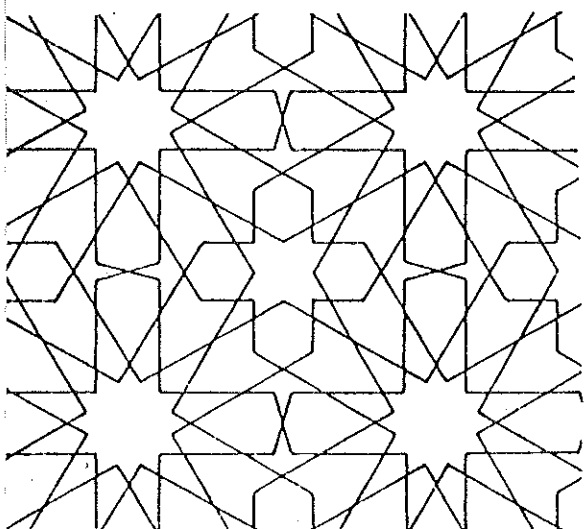


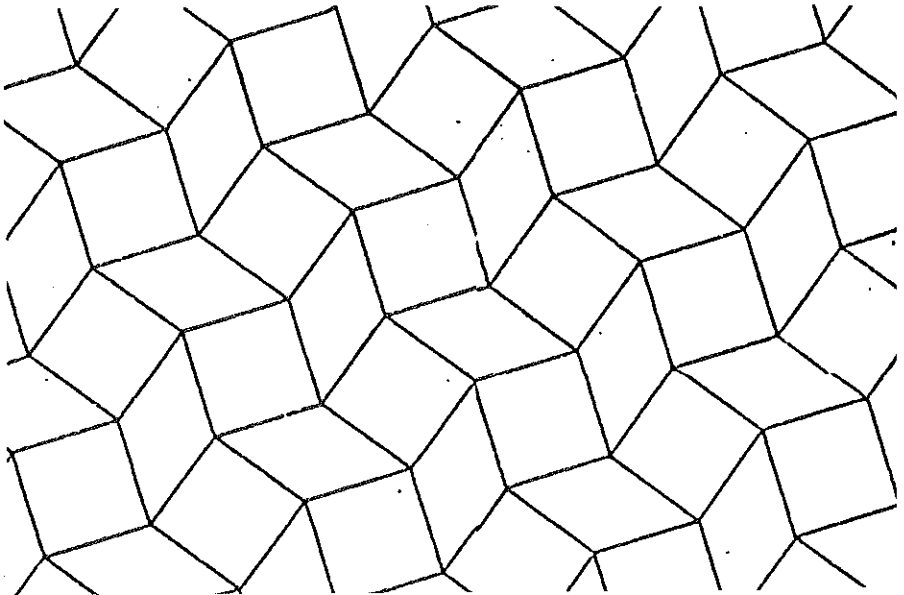


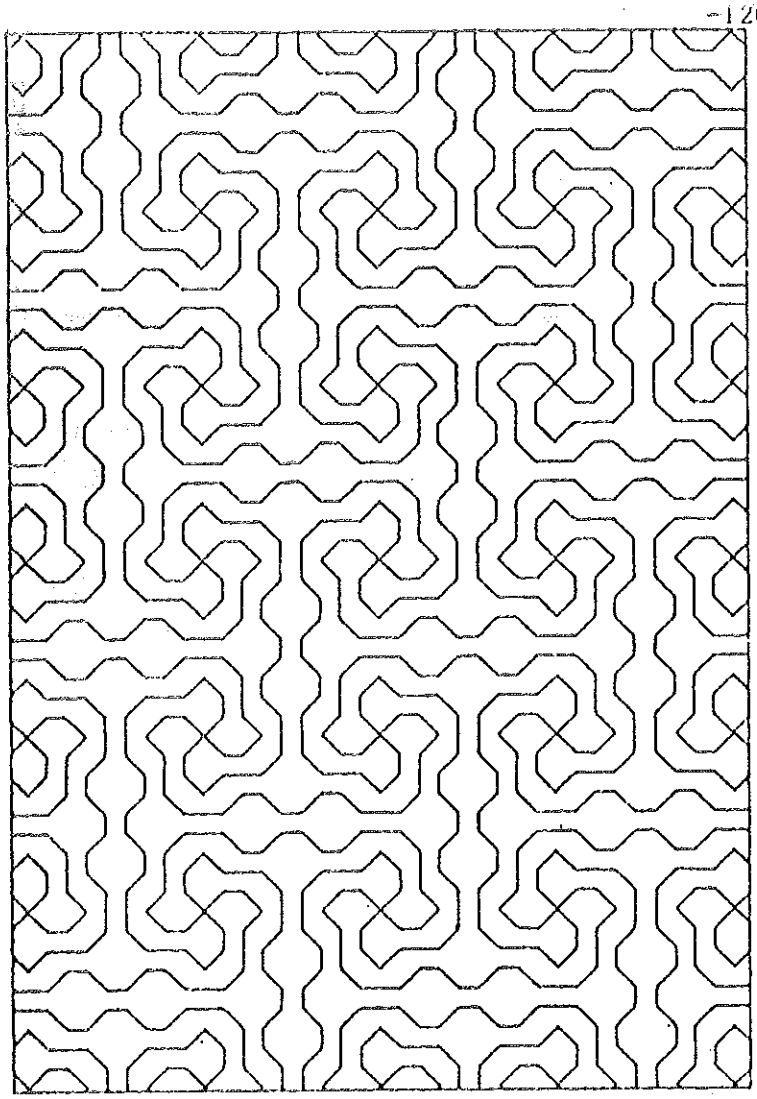


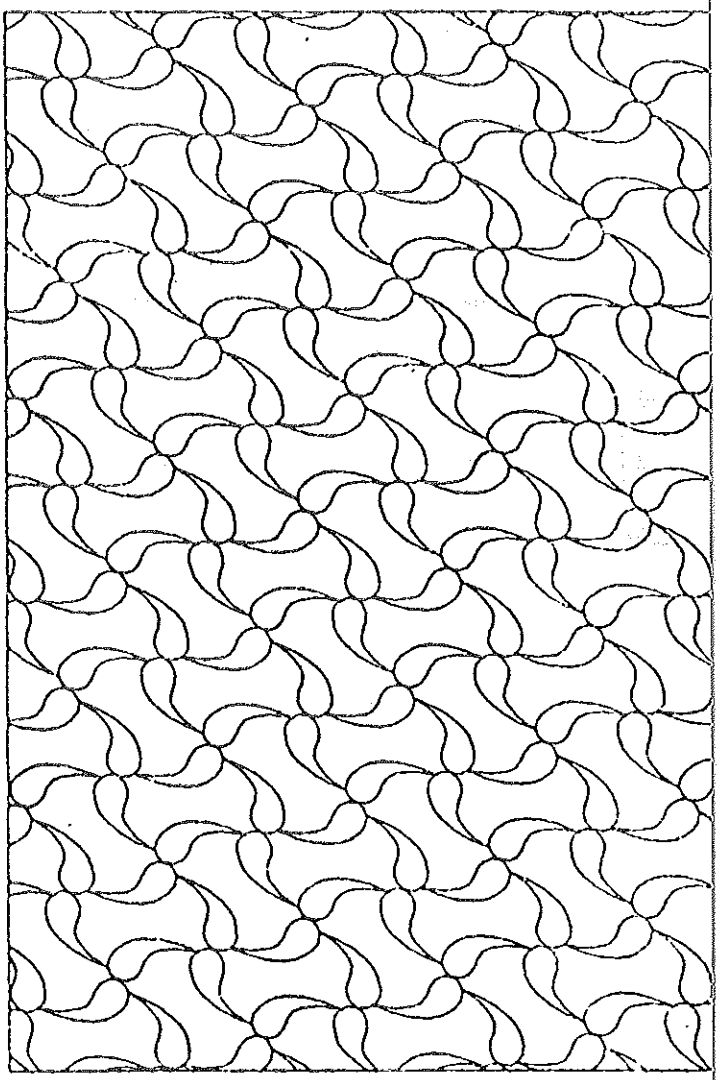


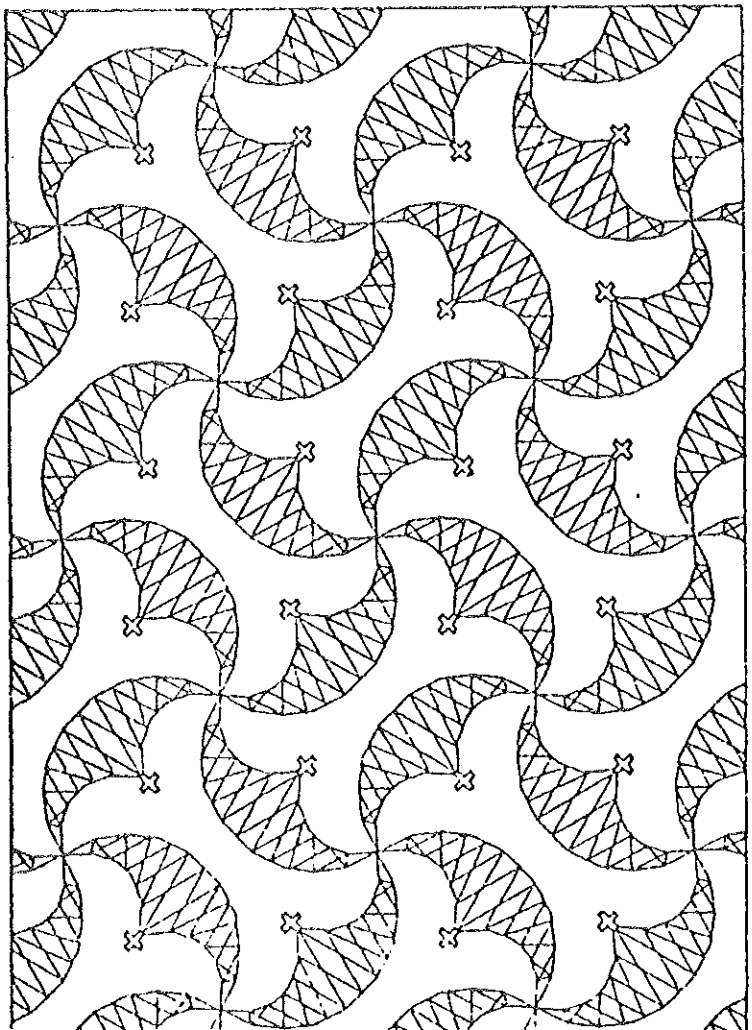


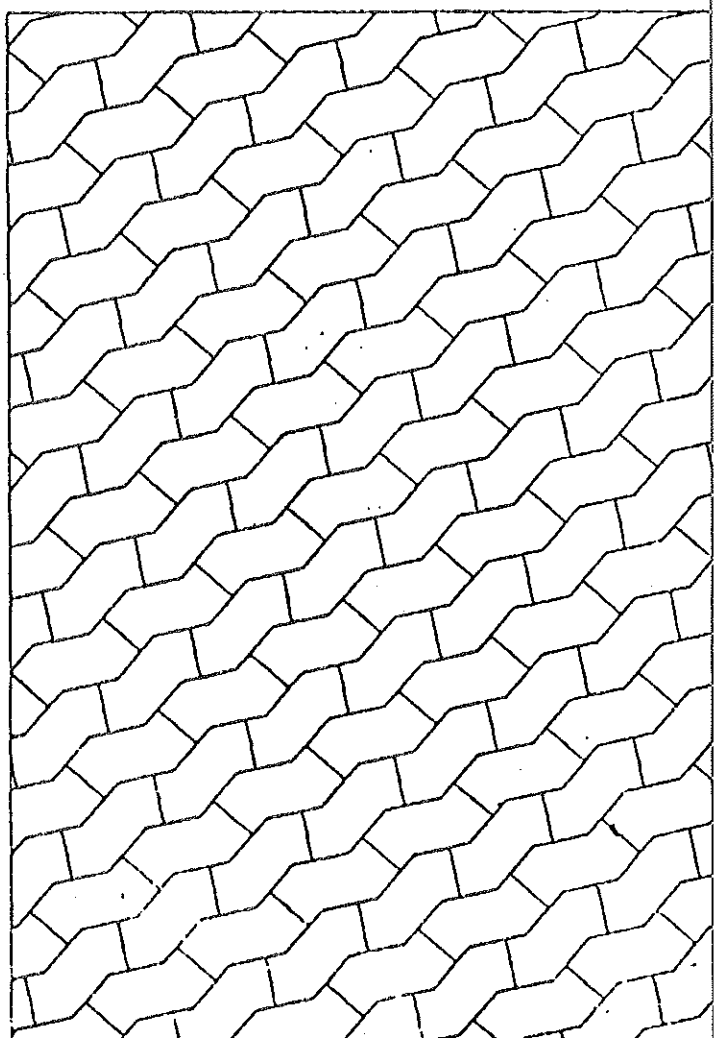


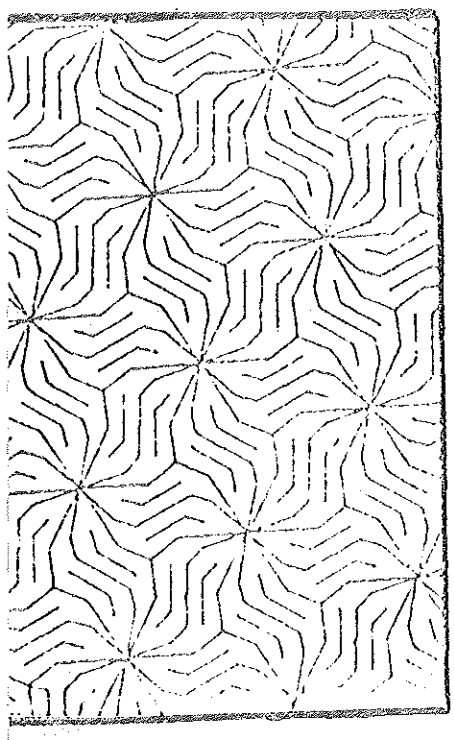


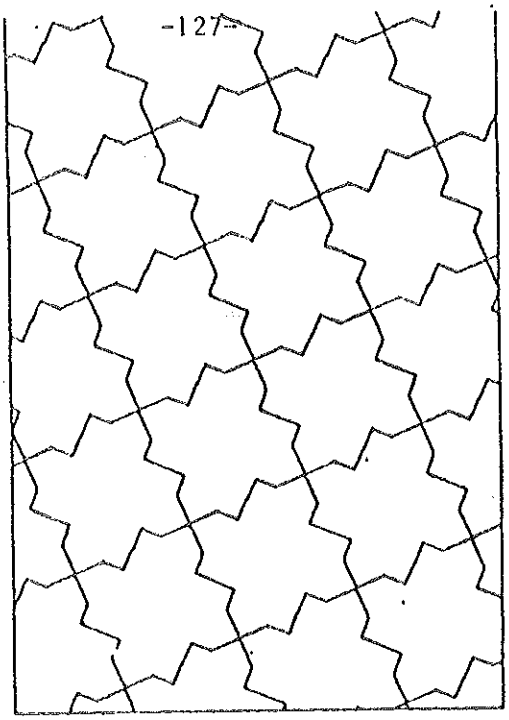


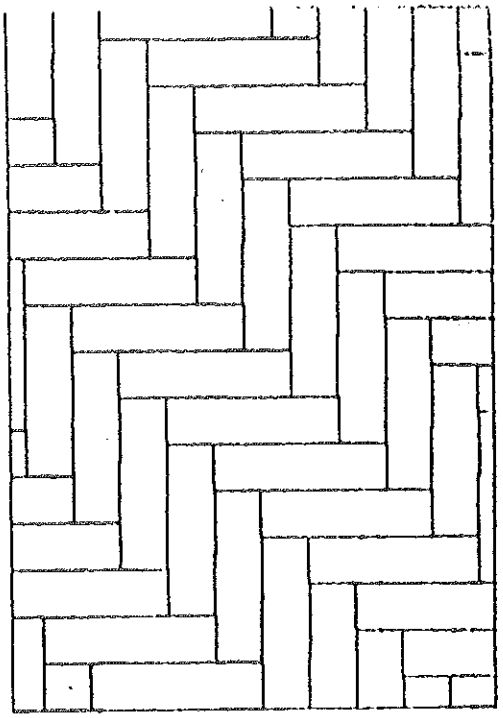


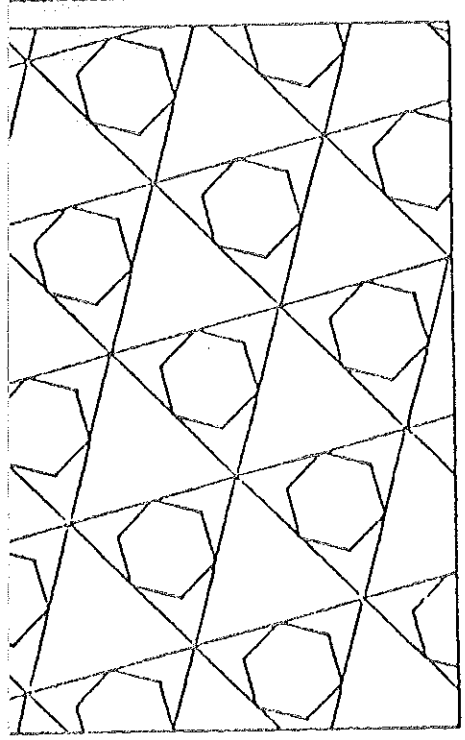


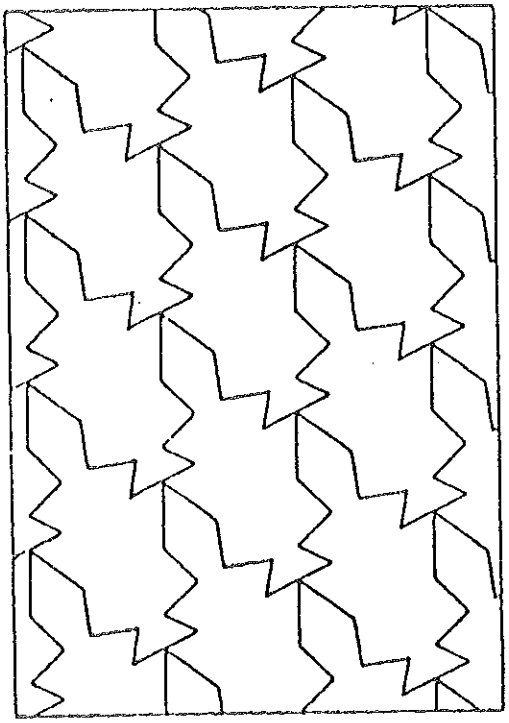


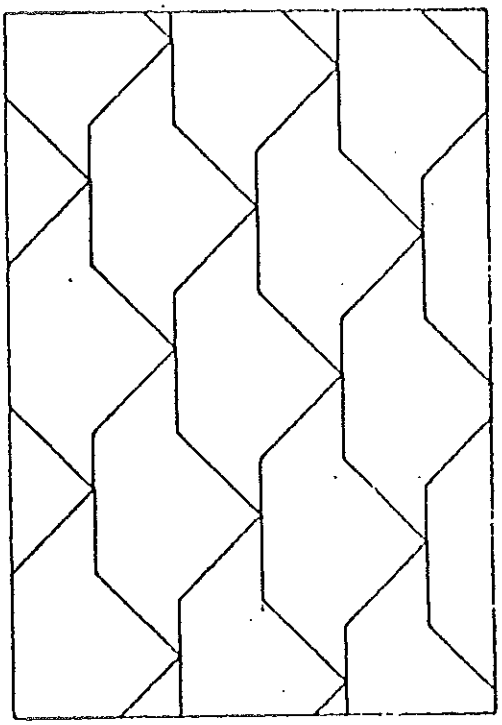


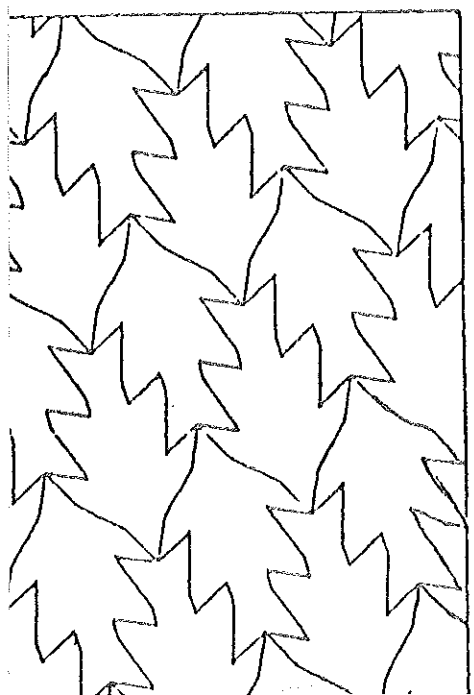


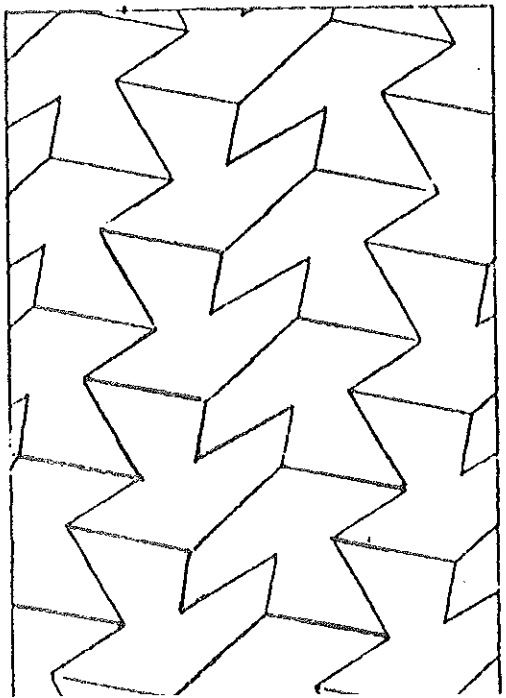


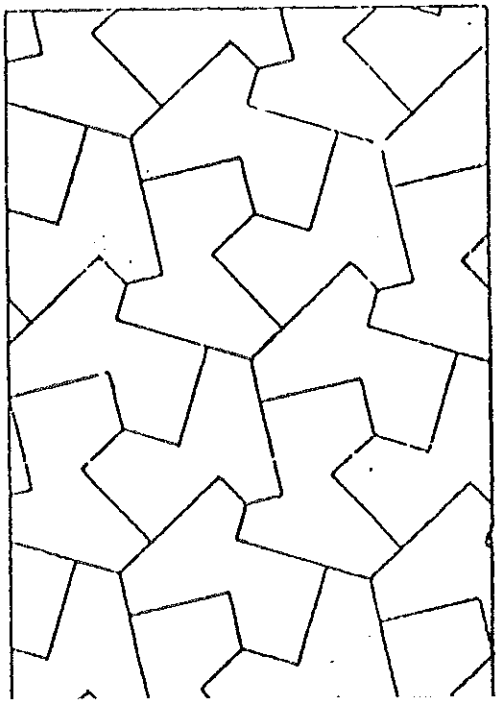


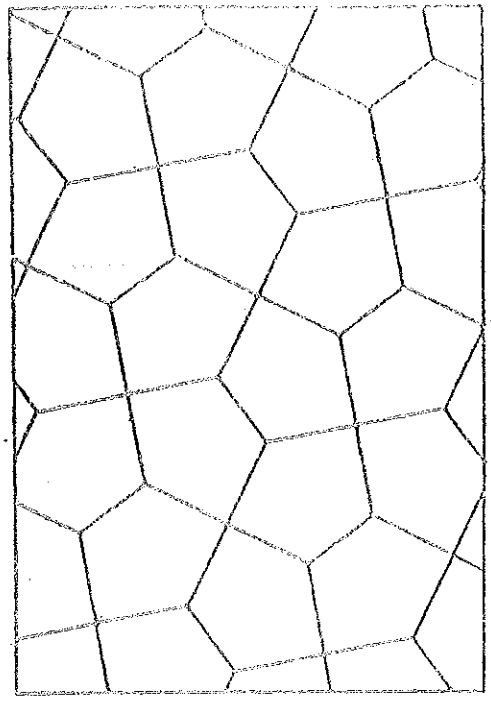


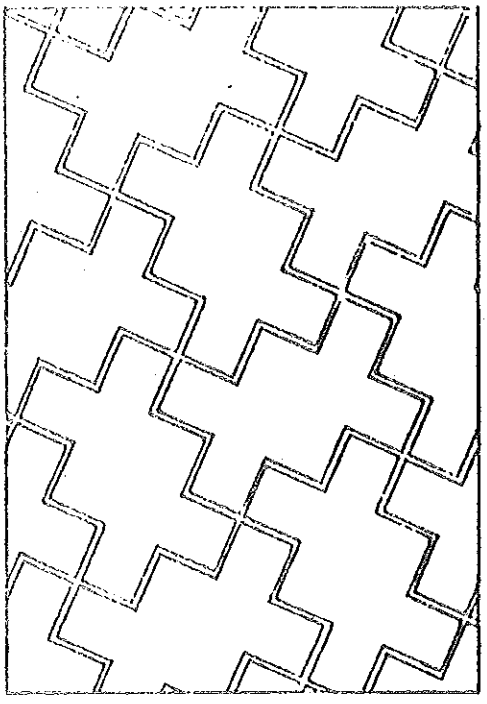


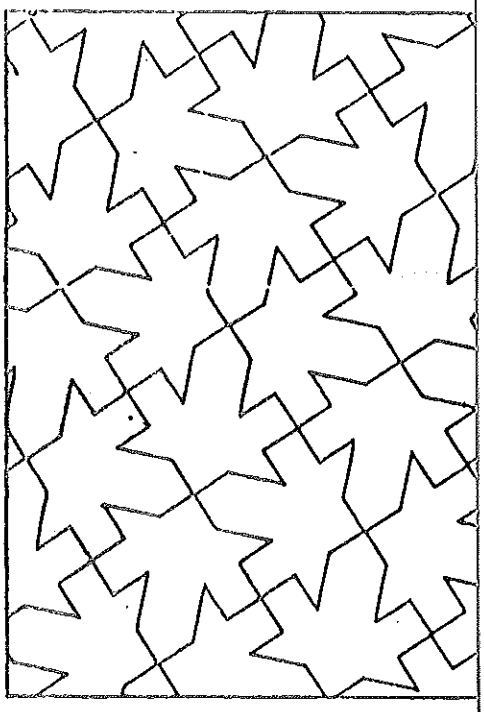


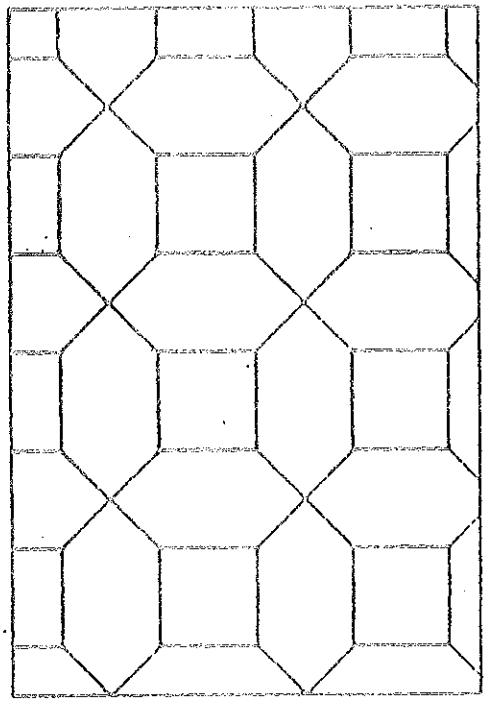


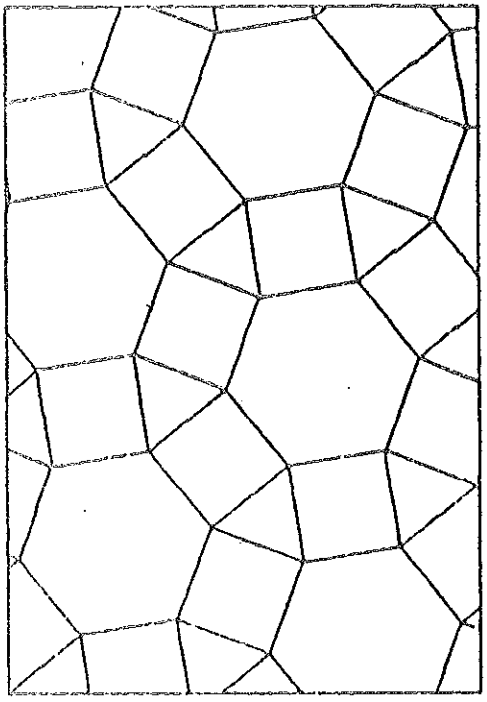


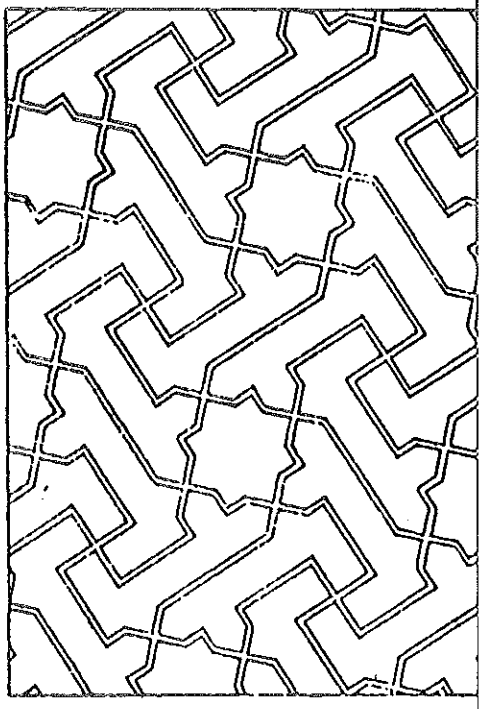


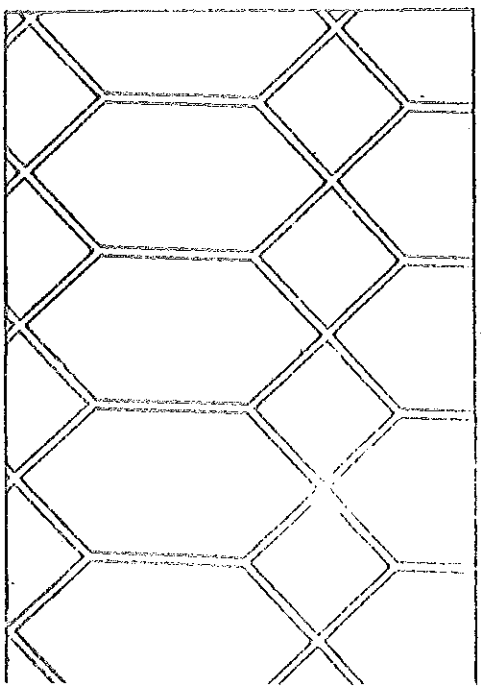


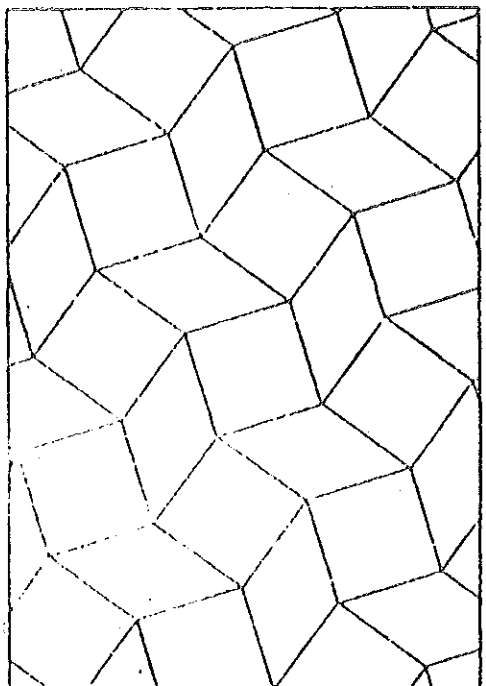


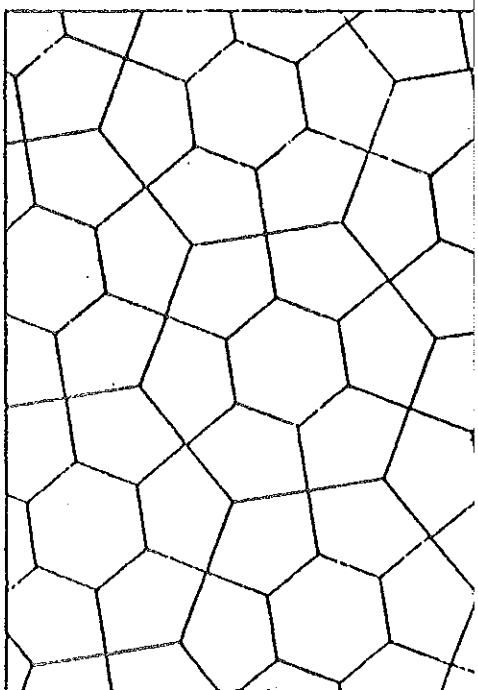


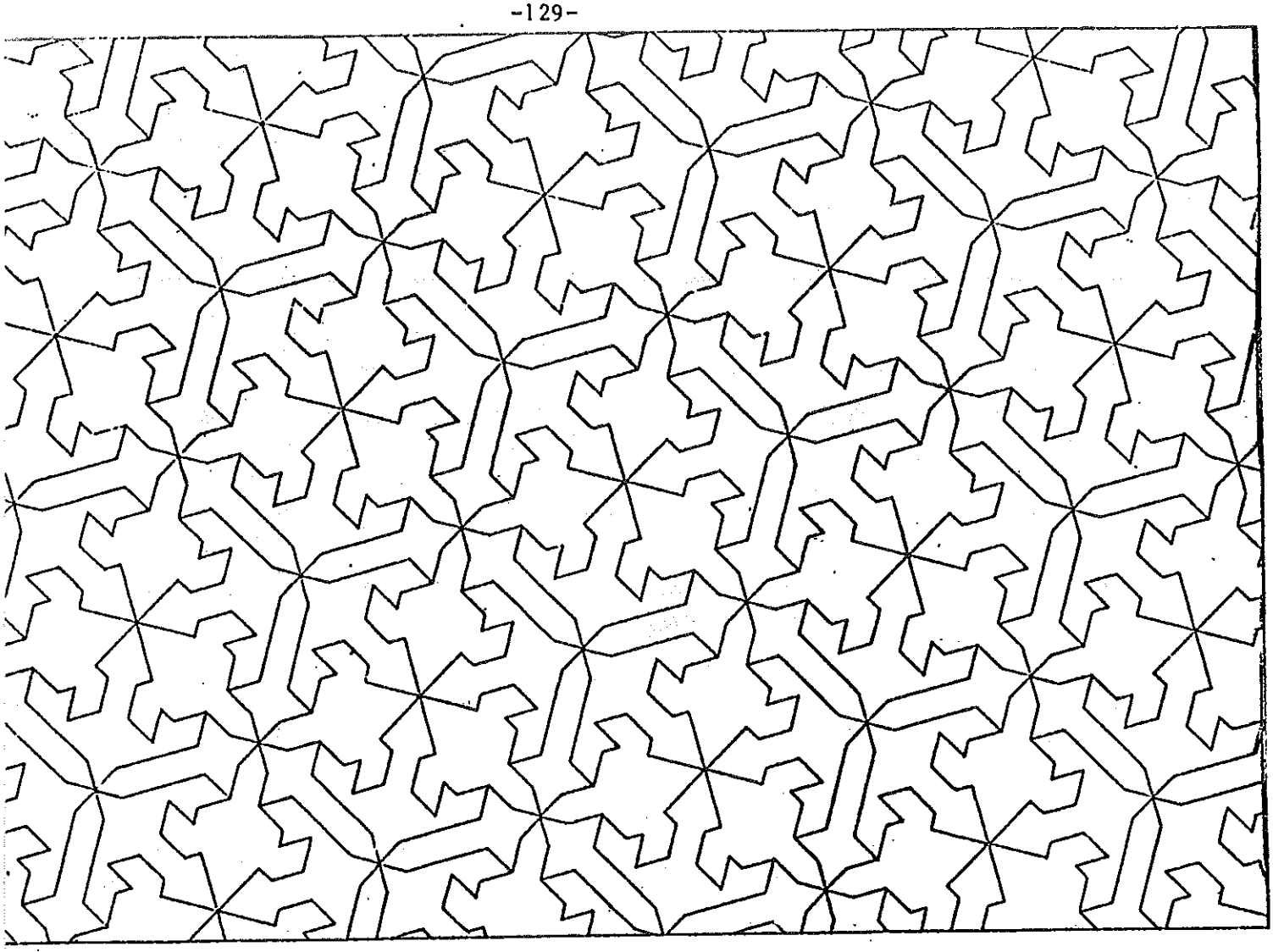


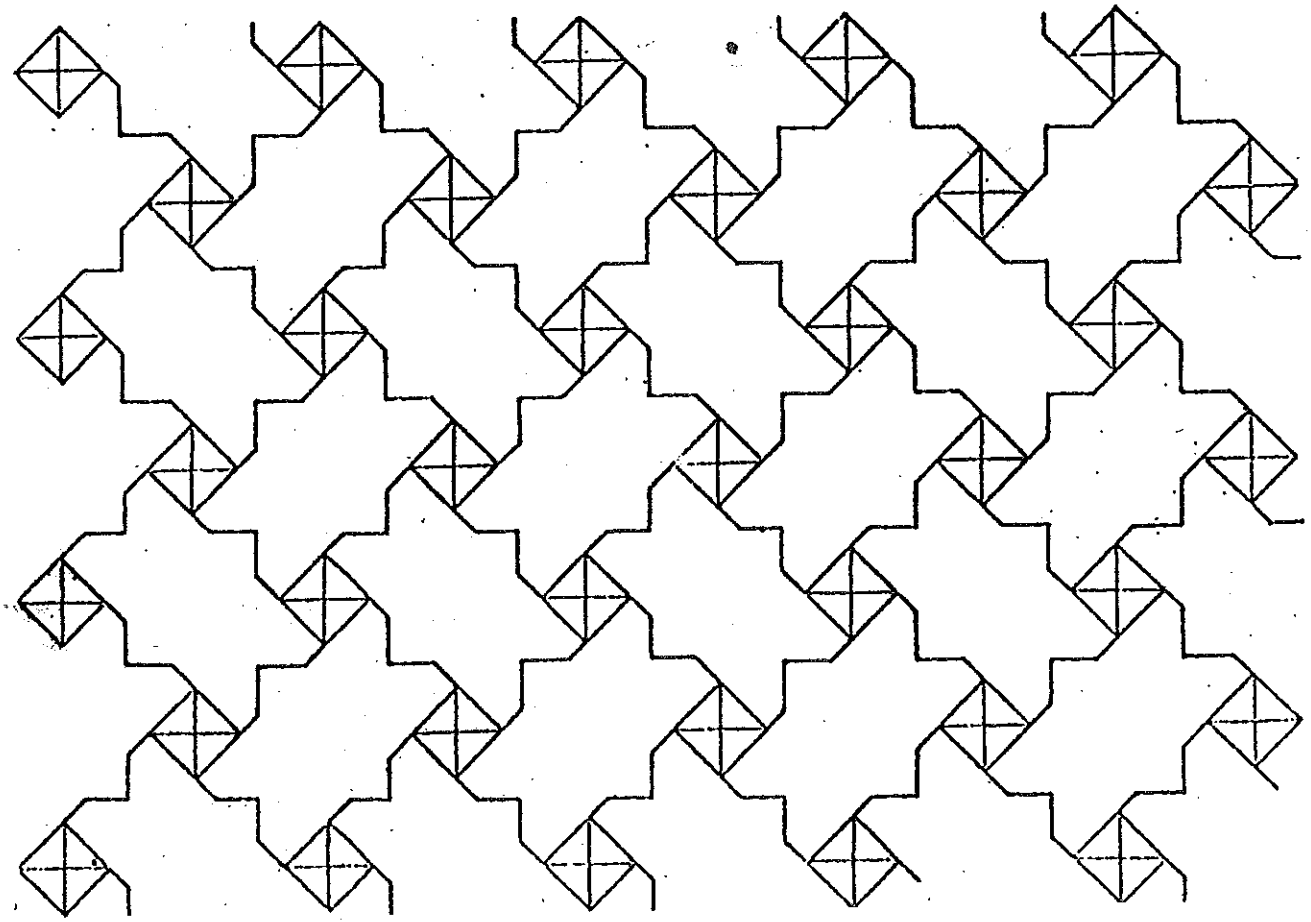


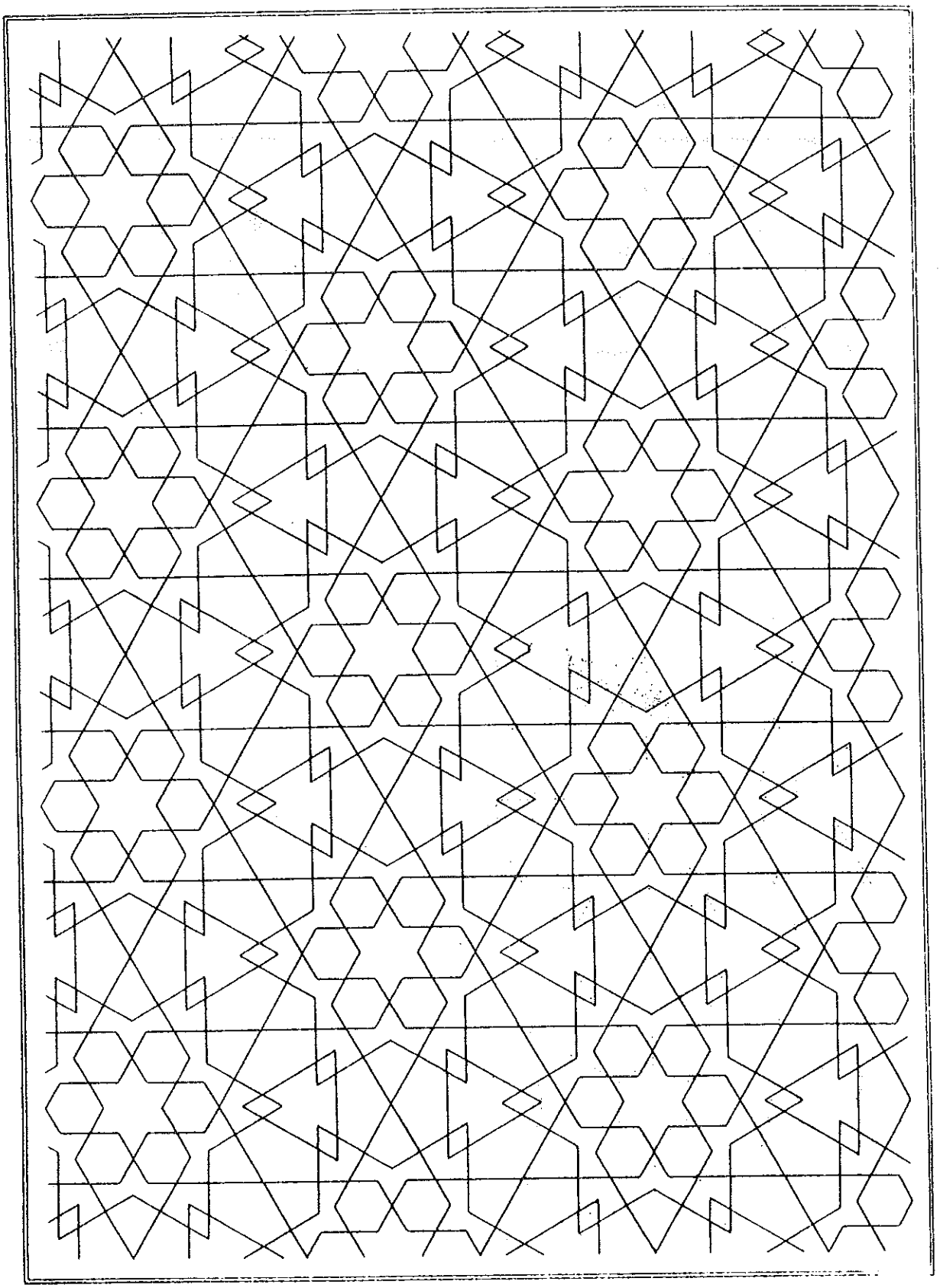


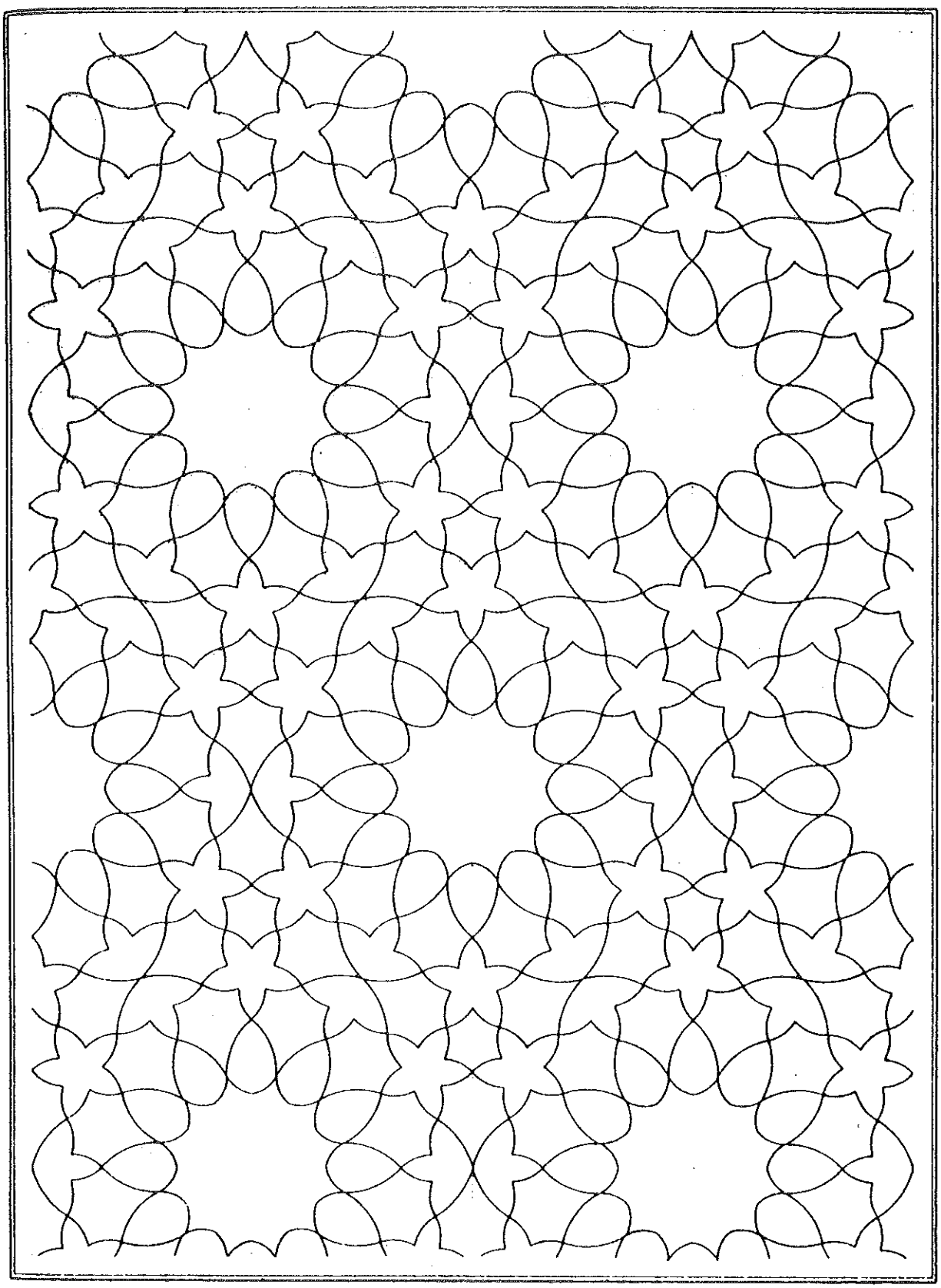


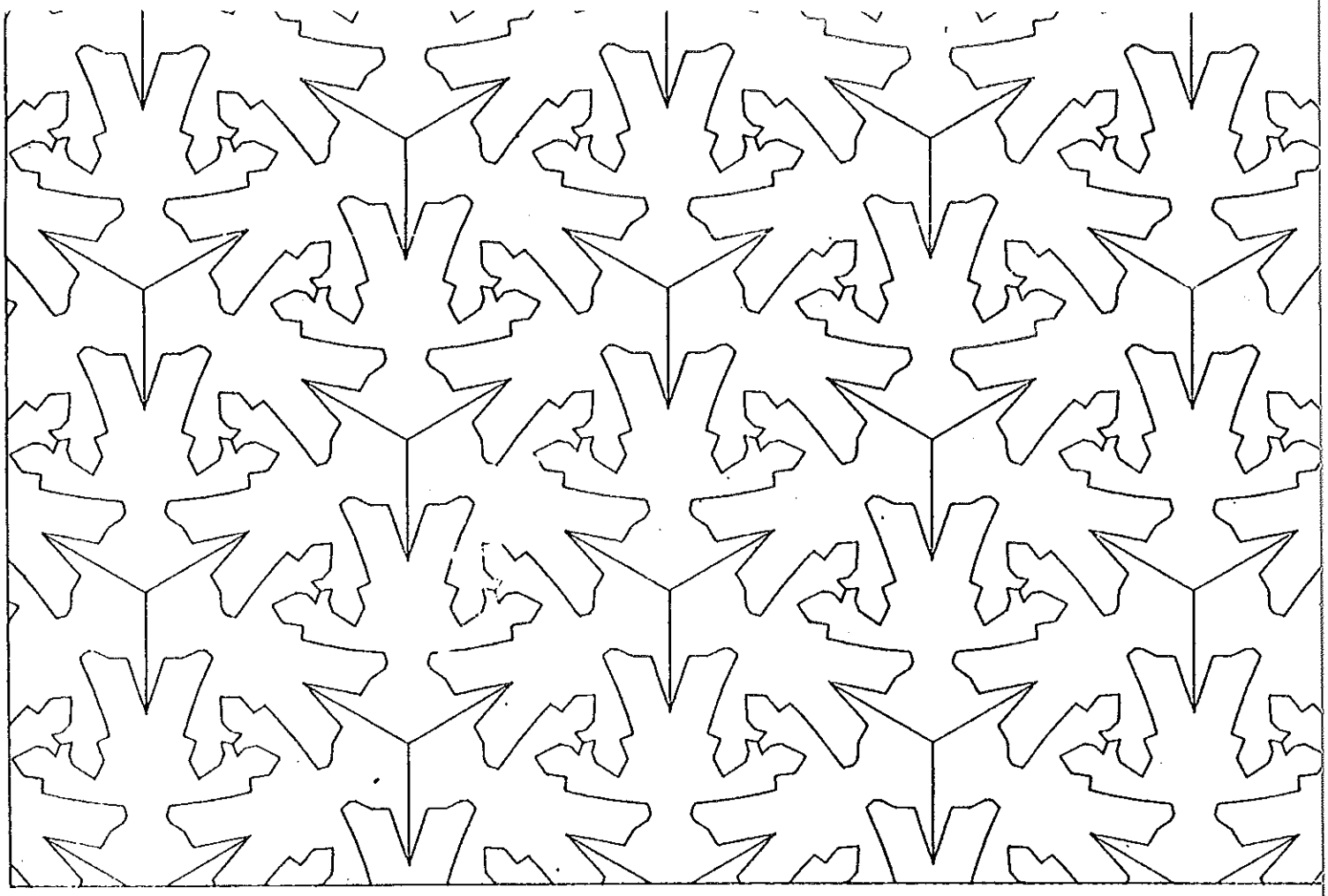


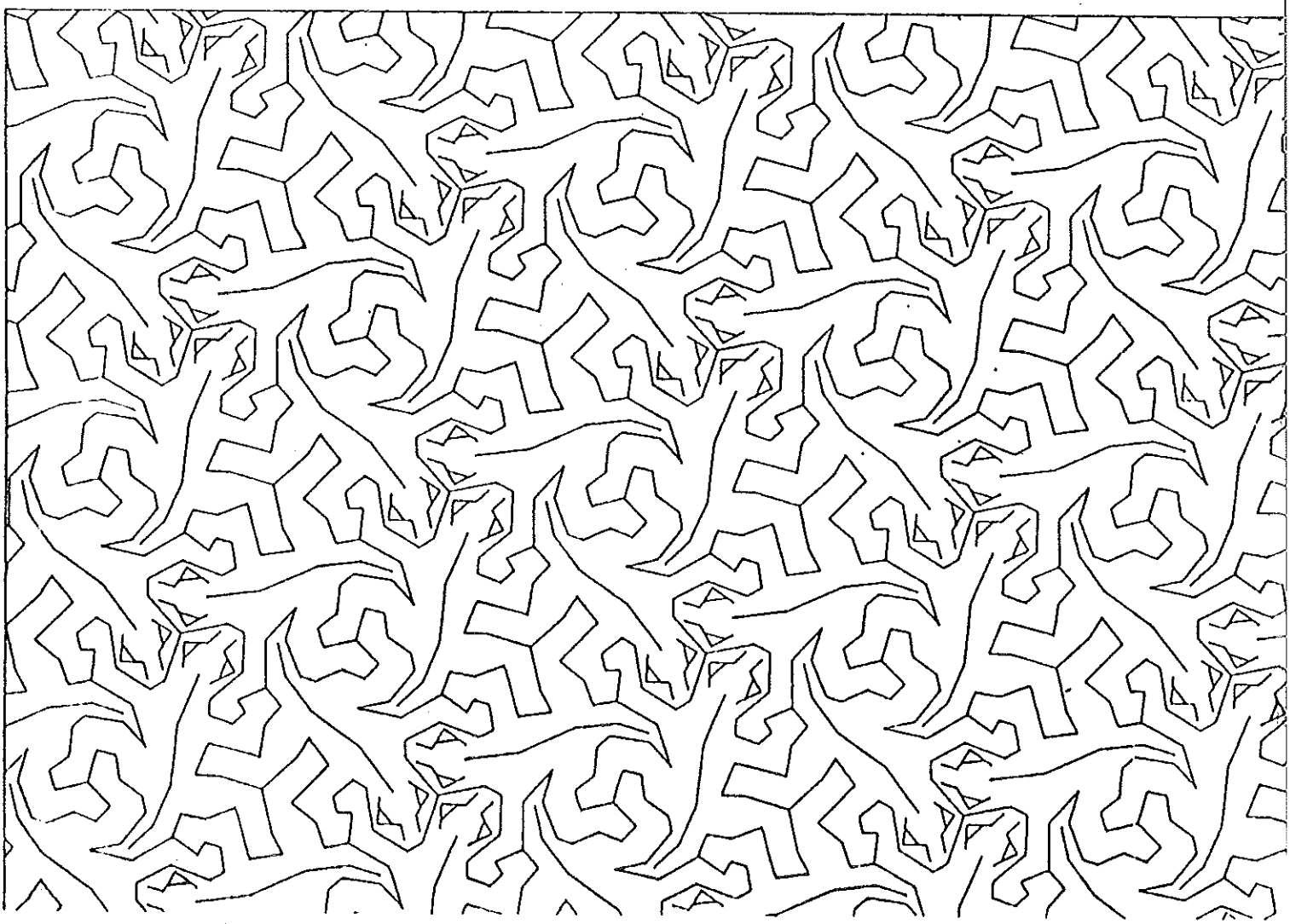


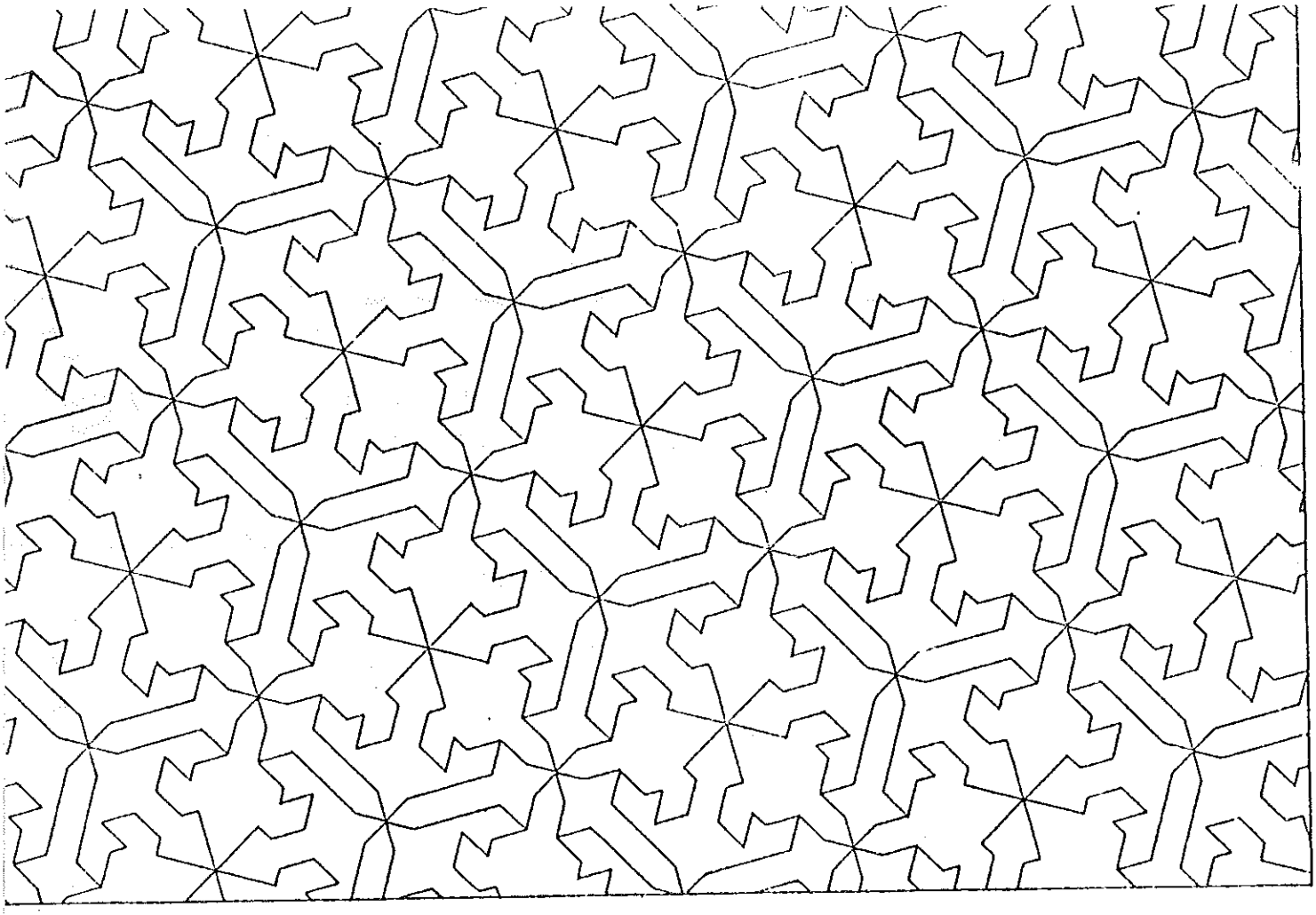


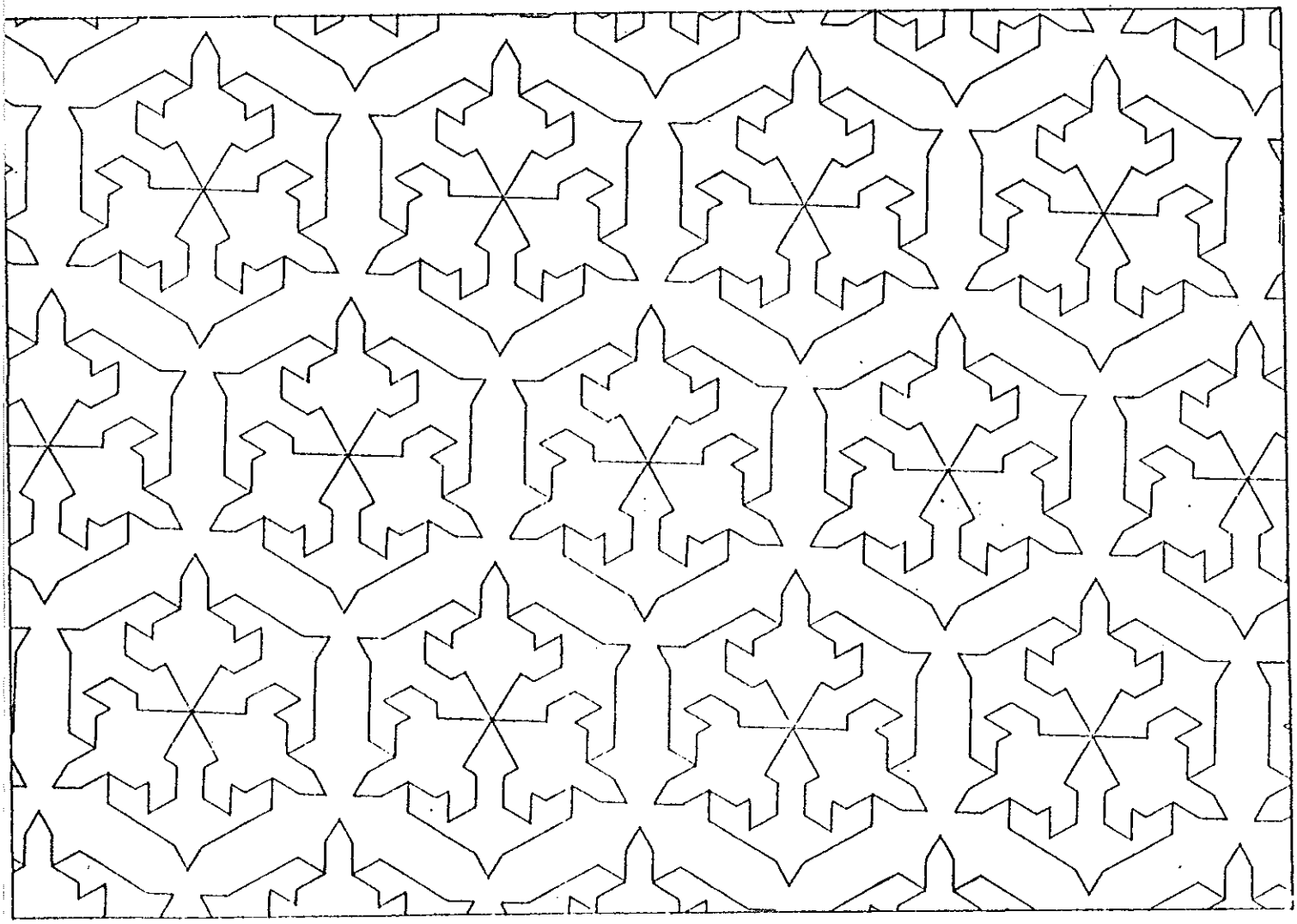


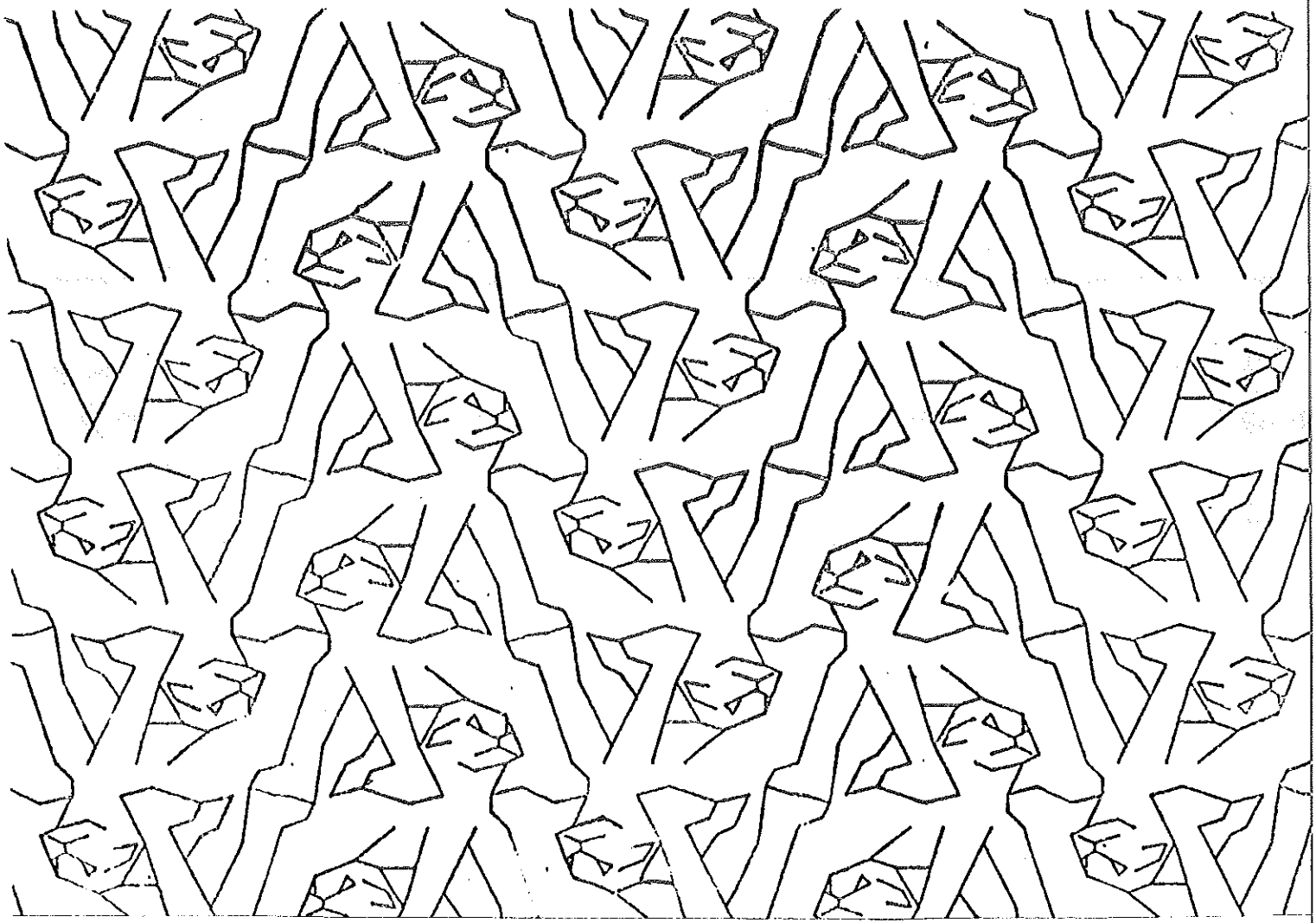


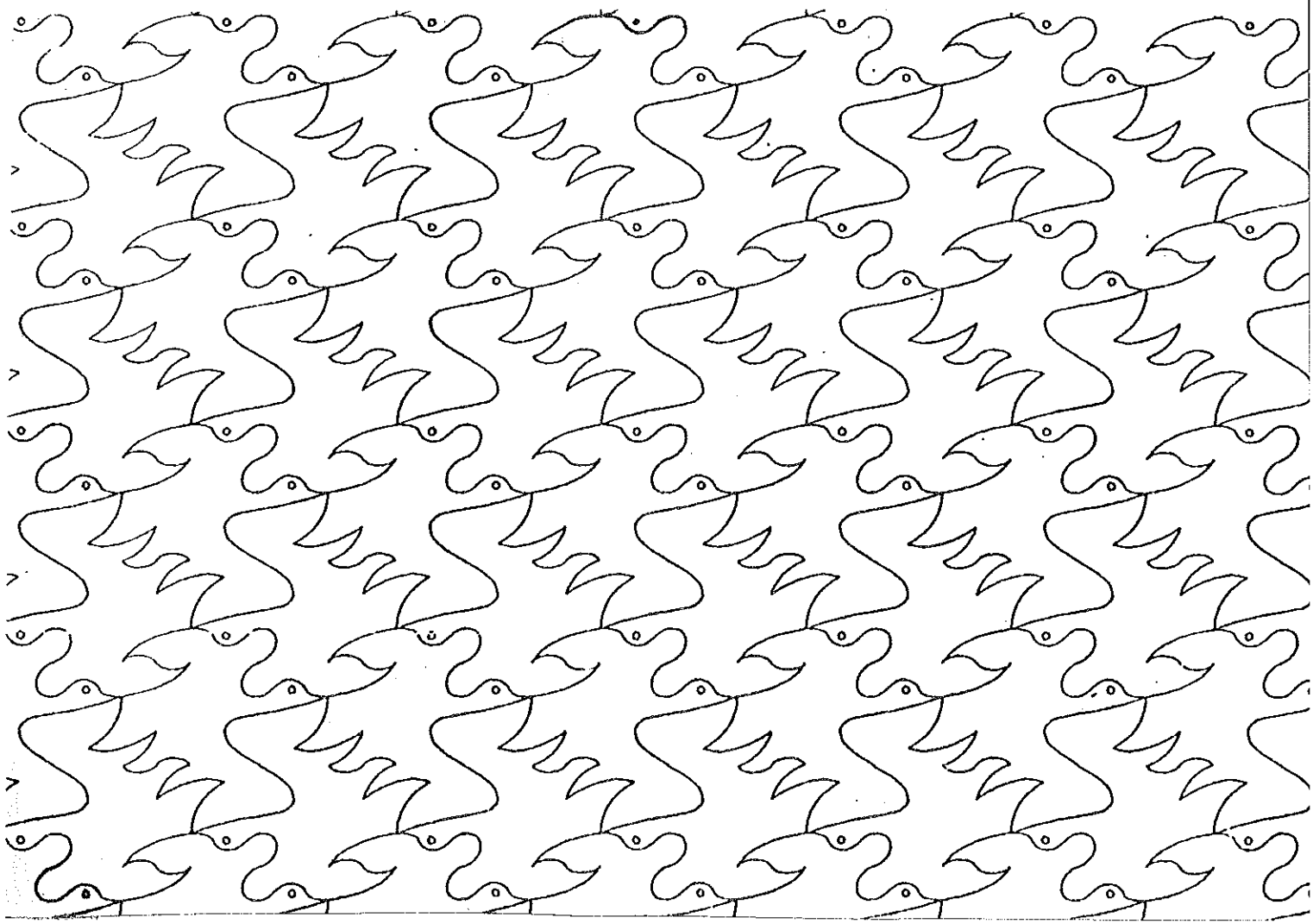












Des regards neufs à travers de vieux trous.

EDITIONS : I.R.E.M de Basse-Normandie IUT - Bd Mal Juin -14000 CAEN

REALISATION : Ghislaine HUE - Anne MADIC - Hiver 1981-82

DEPOT LEGAL : N°