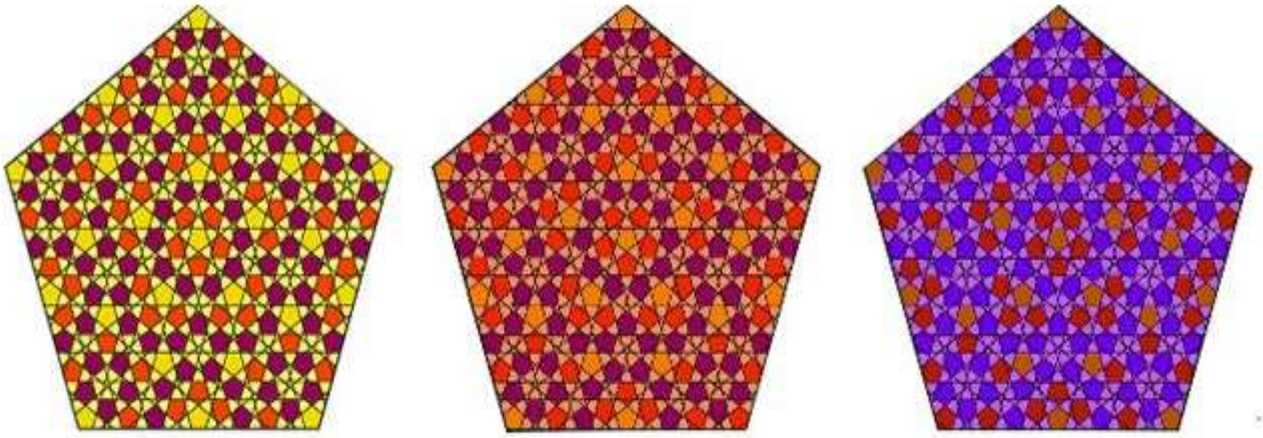


Activités autour des pavages de Frédéric Mansuy

Par Danielle Salles-Legac (*)

Introduction

Nous souhaitons, dans les pages qui suivent, vous présenter et vous faire participer à une (toute petite) partie des travaux de Frédéric Mansuy. De nombreux mathématiciens amateurs ont fait progresser les mathématiques et sont souvent restés dans les mémoires par un théorème ou une notion importante. Nous pensons bien sûr à Ramanujan ce personnage mystérieux mais aussi à Viète et à Fermat…

Sans vouloir choquer sa modestie, Frédéric Mansuy a, lui aussi un parcours peu commun puisqu'il a débuté sa vie professionnelle avec un CAP de tisserand et l'a poursuivie comme imprimeur. Il nous a conté que les travaux du Prix Nobel de chimie (en 2011) Daniel Schechtman pour sa découverte des Quasi-cristaux, s'étaient révélés un déclencheur puissant de sa recherche. Nous avons fait sa connaissance lors des journées internationales de l'Association des chercheurs passionnés par les suites de Fibonacci qui ont eu lieu l'année passée à Caen (**) où il présentait ses travaux.

Ses travaux sont présentés en ligne (voir la bibliographie) et aujourd'hui nous n'allons que les effleurer mais nous espérons vous donner l'envie d'aller plus avant.

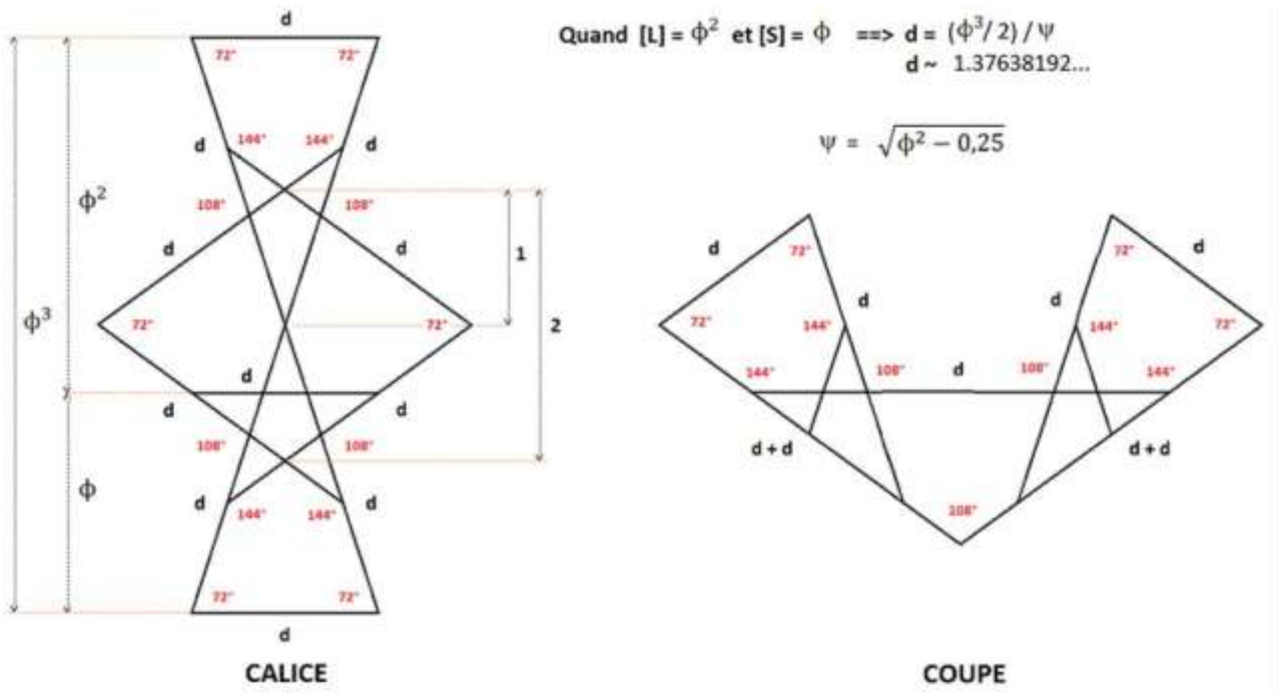
Nous vous présentons donc une activité destinée aux élèves du Collège et de la classe de seconde ainsi qu'aux élèves professeurs. Elle est destinée à remettre en mémoire -ou faire connaissance avec- les notions de pentagone, triangle d'or, nombre d'or, mesure des angles des polygones réguliers, mesure des angles inscrits dans un cercle, pavages de Penrose.

(*) Avec la collaboration précieuse de Frédéric Mansuy et Ruben Rodriguez.

(**) Merci à notre collègue Christian Ballot, spécialiste de ces suites, de nous avoir mis en relation avec Frédéric.

2 Activités autour des pavages de Frédéric Mansuy par Danielle Salles-Legac

I - Construction du calice de Mansuy

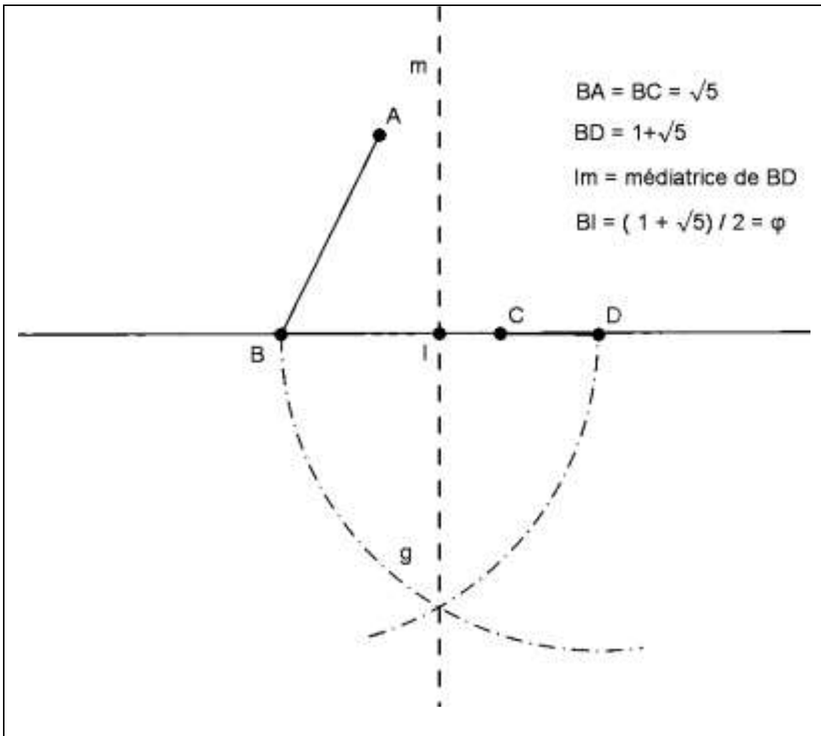


Voici le calice et la coupe. Ces deux objets sont à la base des constructions des pavages de Mansuy. Essayons de faire connaissance avec eux.

Observez attentivement les deux objets géométriques, pouvez-vous identifier une figure présente deux fois dans chaque objet ?

Comment s'appelle la figure qui n'apparaît que dans le premier objet ?

Avec le logiciel GEOGEBRA nous construirons cette figure :



Tout d'abord rappelons la construction géométrique de la longueur φ (PHI).

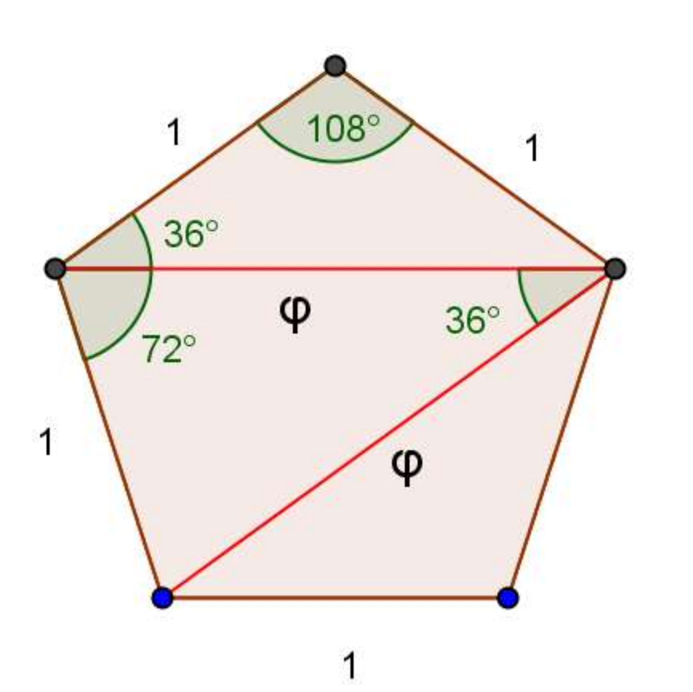
Nous vous demandons de commenter sur votre cahier cette construction.

Remarquons que la grille est dessinée en carrés unités.

Rappelons que : φ vérifie

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0.$$

Quelques rappels utiles sur les pentagones convexes et les pentagones étoilés

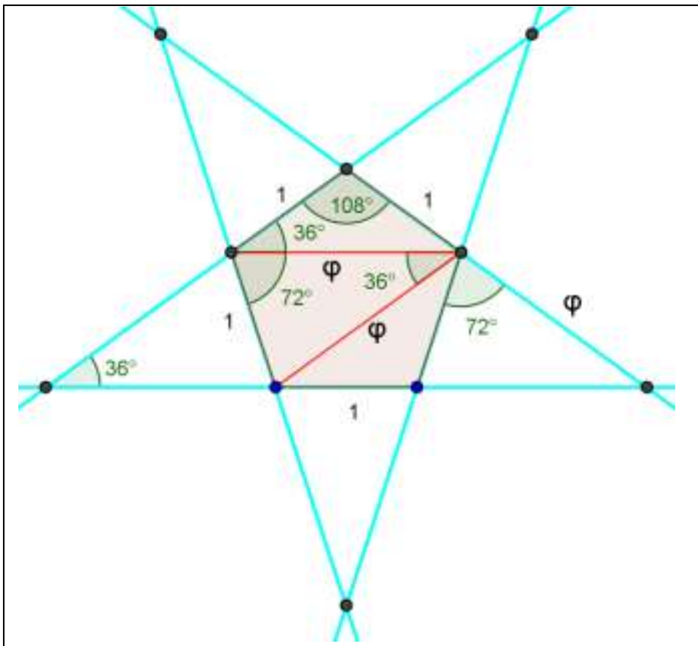


Nous avons construit ci-contre grâce à l'ordre : **« Polygone régulier »** un pentagone régulier convexe de côté 1 ainsi que deux de ses diagonales de mesure φ. Nous avons ainsi défini un **triangle de côtés 1, φ, φ appelé « triangle d'or aigu » dont les angles mesurent :**

36° , 72°, 72 ° et un triangle de côtés 1, 1, φ appelé « triangle d'or obtus » dont les angles mesurent :

108°, 36°, 36°.

Nous allons maintenant, en prolongeant les côtés du pentagone convexe, construire un pentagone étoilé et calculer les mesures de celui-ci.

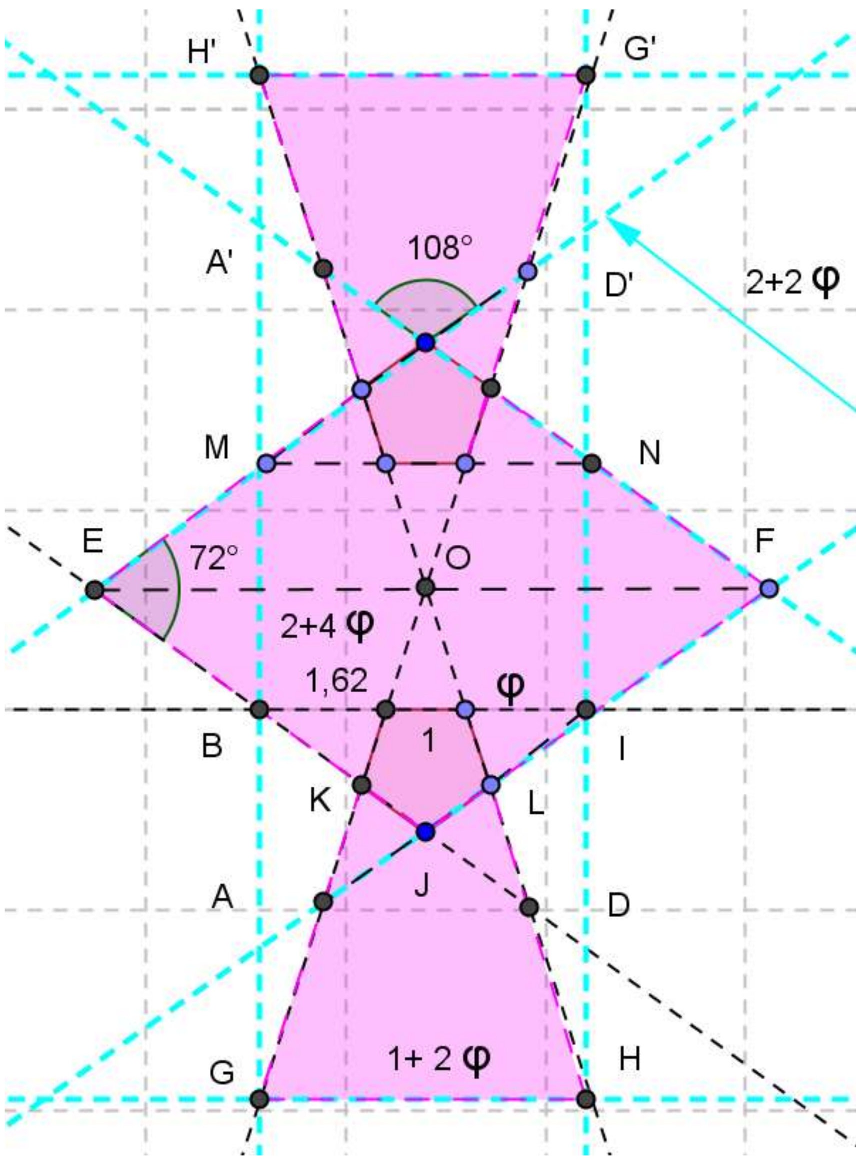


Par des observations géométriques simples nous constatons que les pointes ainsi obtenues sont des

triangles d'or aigus de côtés de mesure :

1, φ, φ.

Le pentagone étoilé ainsi construit va être la base de notre étude du pavage de Mansuy et en particulier de son « calice ».



Suggestions pour le tracé du calice : Grâce à l'ordre « polygone régulier » de GEOGEBRA nous traçons tout d'abord un pentagone convexe de côté de mesure 1 puis le pentagone étoilé BADIO construit en prolongeant ses côtés, ses diagonales ont pour mesure **1+2φ** .

Remarque importante

Nous avons pris pour cette construction les mesures **habituellement utilisées dans l'enseignement secondaire** pour l'introduction des pentagones convexes et/ou étoilés à savoir : **Les côtés du petit pentagone convexe ont pour mesure 1 et les diagonales du pentagone étoilé BADIO ont pour mesure :**

$1 + 2\varphi = \varphi^2 + \varphi = \varphi^3$.

Nous vous demandons tout d'abord de calculer les angles des deux triangles AOD et BOI. Rappelons que ces deux triangles sont appelés respectivement :

Triangle d'or aigu et Triangle d'or obtus.

Nous traçons ensuite avec l'ordre « droite perpendiculaire », deux droites perpendiculaires à (BI), passant par B et I (en vert), distantes de **1+2φ** .

Nous prolongeons les côtés [OA] et [OD] qui rencontrent les droites précédentes en G et H. **Nous obtenons le pied du calice [GH].**

Nous prolongeons les droites (GO) et (HO).

Grâce à l'ordre « symétrie par rapport à un point, nous traçons le triangle G'H'O symétrique du triangle GHO par rapport au point O.

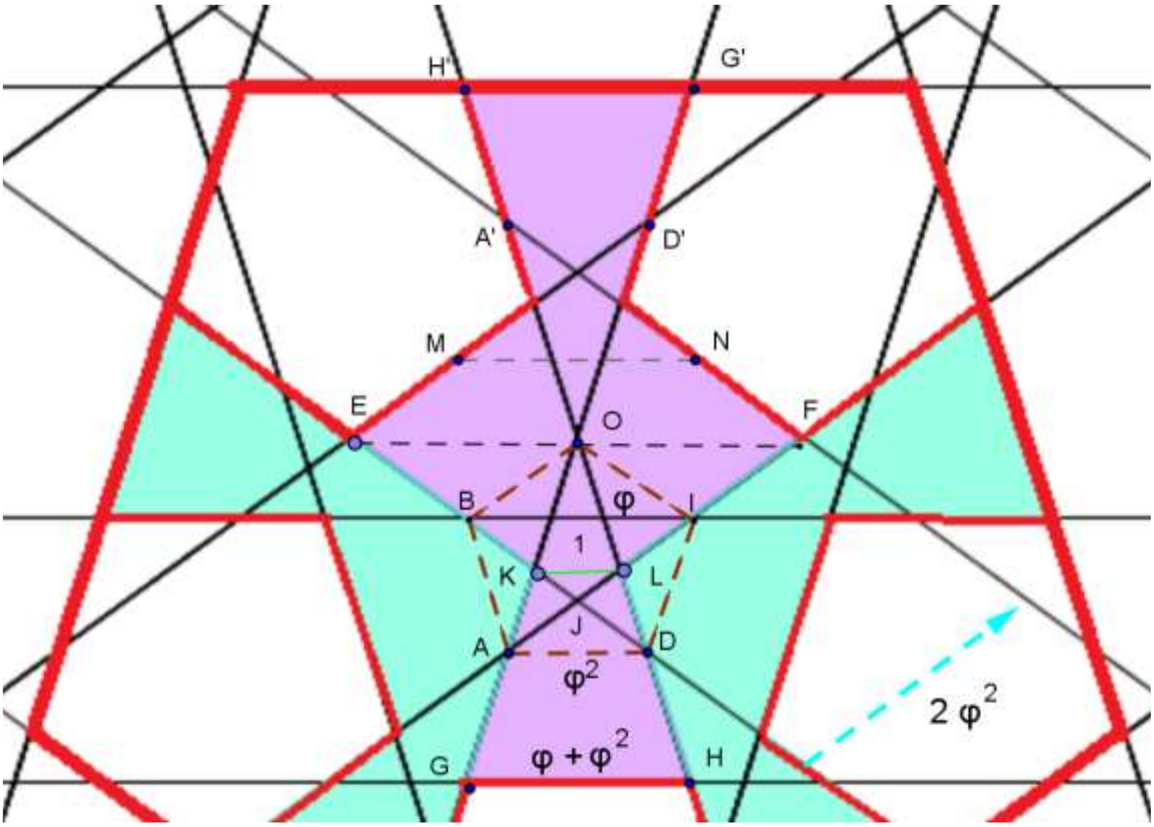
Nous obtenons le col du calice.

Nous traçons, grâce à l'ordre « parallèle à une droite », la droite parallèle à (BI) passant par O (en pointillé noir).

Nous prolongeons les droites (AI) et (DB) qui rencontrent la droite précédente en E et F.

Nous traçons la droite (ED') symétrique de la droite (ED) par rapport à l'axe (EF), ainsi que la droite (FA') symétrique de (FA) par rapport à l'axe (EF).

Le calice est terminé. Nous aimerions que les élèves proposent LEUR solution et la décrivent SOUS FORME d'une « NARRATION DE RECHERCHE » (*).



(*) Une narration de recherche, très recommandée depuis les années 2000 est le récit par l'élève de ses choix de recherche, de ses erreurs éventuelles, des leçons qu'il en a tirées, ceci afin de développer son esprit critique et sa rédaction de textes mathématiques.

6 Activités autour des pavages de Frédéric Mansuy par Danielle Salles-Legac

Construction de la coupe

Nous continuerons par la coupe, en utilisant éventuellement les composantes du calice.

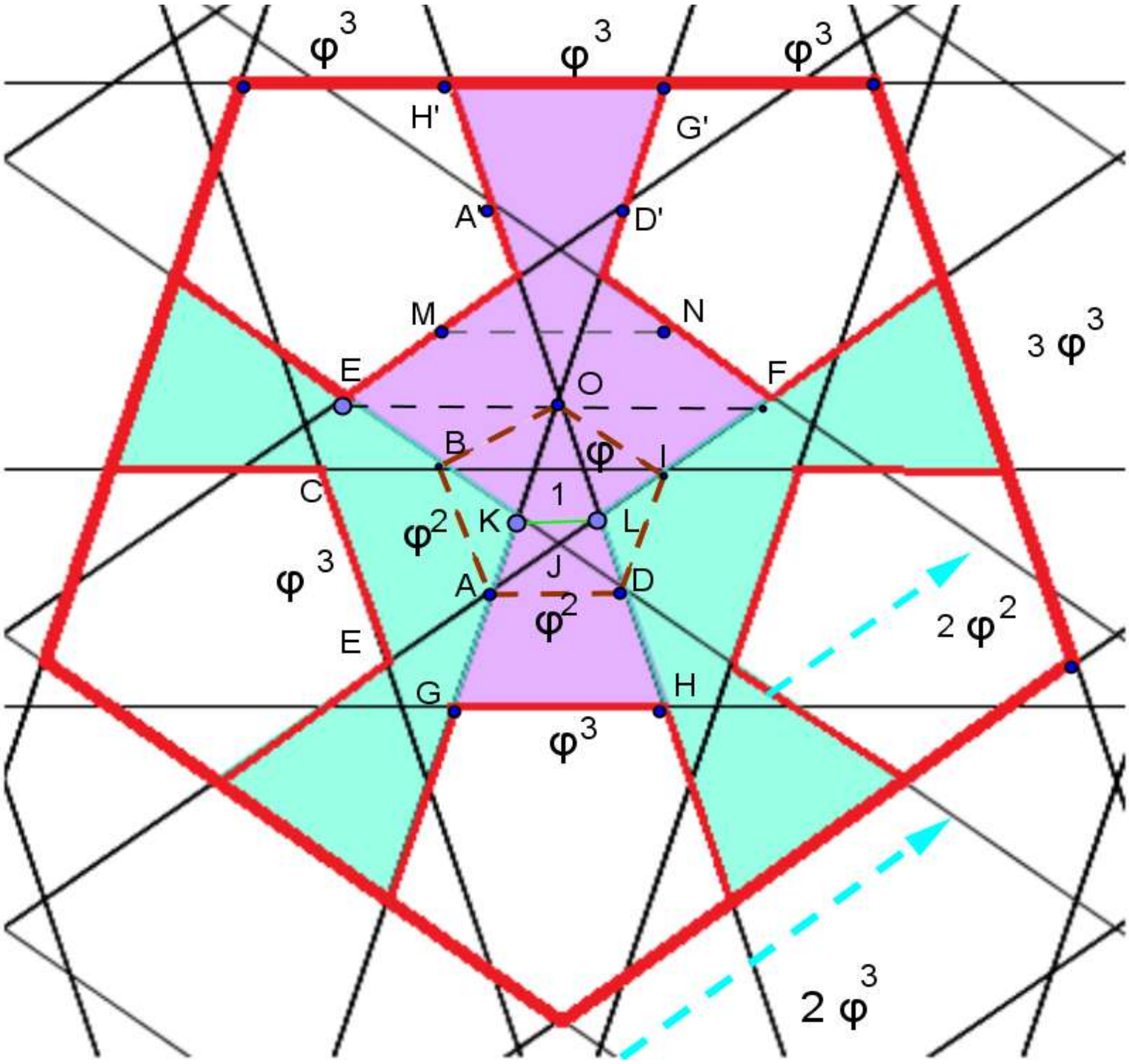
Afin de bien se fixer les idées, nous reproduisons la grille que nous a construit Frédéric Mansuy, à laquelle nous avons joint notre construction du calice avec le nom de ses sommets. Nous utiliserons ensuite cette grille pour construire la coupe.

Remarque importante : rappelons que nous avons tracé deux droites parallèles :

(GH') et (HG') distantes de $1+2\varphi$ ou encore $\varphi^2 + \varphi = \varphi^3$.

Nous allons étudier l'aspect mathématique de ces constructions :

- Le pentagone convexe BADIO a pour mesure de ses côtés $1 + \varphi = \varphi^2$, on sait qu'alors la mesure de ses diagonales est $1 + 2\,\varphi = \varphi^2 + \varphi$.



Petite chasse au trésor

Rappelons que, par construction, **les triangles AOD et BOI sont des triangles d'or.**

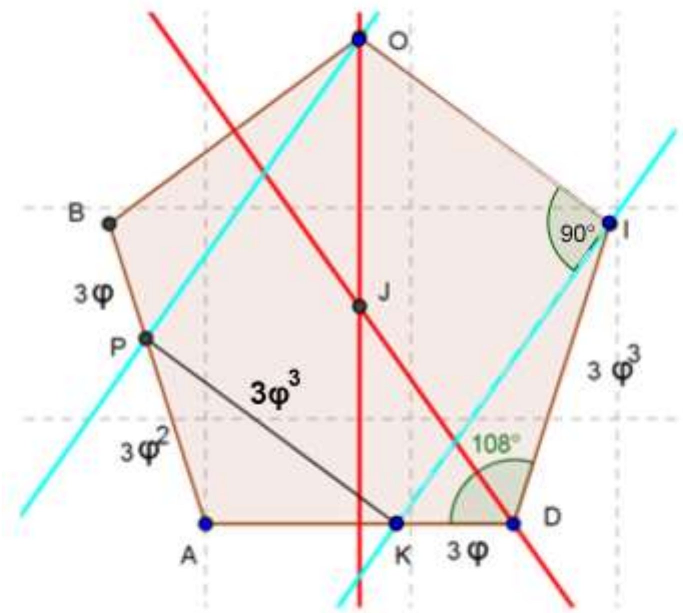
En observant la figure pouvez-vous en trouver d'autres éventuellement à une échelle φ^n?

Le pentagone convexe de côté $3\varphi^3$ (voir la figure précédente), centré en J, en rouge sur la figure nous a permis, en observant le modèle de la page 5, de **construire deux coupes, en vert sur la figure.**

Construction de la coupe en utilisant la figure précédente

Nous observons qu'à chaque pointe du pentagone BADIO convexe se trouve un triangle d'or aigu de petit côté de mesure $\varphi + \varphi^2 = \varphi^3$, il y a quatre triangles verts et un triangle violet. La coupe entière est obtenue en coloriant le polygone non régulier AKBCE en vert. La mesure de [AE] est égale à celle de [OK] soit 1 + $\varphi = \varphi^2$ ainsi que celle de **[BA]. KA = BK = φ et CE = φ^3.**

Annexe : Un exercice de révision des propriétés des triangles quelconques (pour les lycéens et les élèves professeurs)



Rappelons la formule de calcul d'un côté a d'un triangle connaissant la mesure de deux de ses côtés b et c et celle de l'angle qu'ils définissent ; (formule de Al Kashi) :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos(\hat{A}).$$

L'un des pentagones réguliers de notre étude a des côtés de mesure $3\varphi^3$□□

Nous rappelons que les angles intérieurs d'un pentagone régulier ont pour mesure 108°.

Nous vous demandons tout d'abord de tracer de façon simple avec un ordre GEOGEBRA un segment [KP] de mesure $3\varphi^3$□□ parallèle au côté [OI] du pentagone dont les extrémités P et Q se trouvent sur les côtés [AB] et [DA] du pentagone. Nous avons ainsi défini un rectangle OPKI dont nous allons calculer la longueur.

Donc cos(Â) = $(-a^2 + b^2 + c^2)/2bc$.

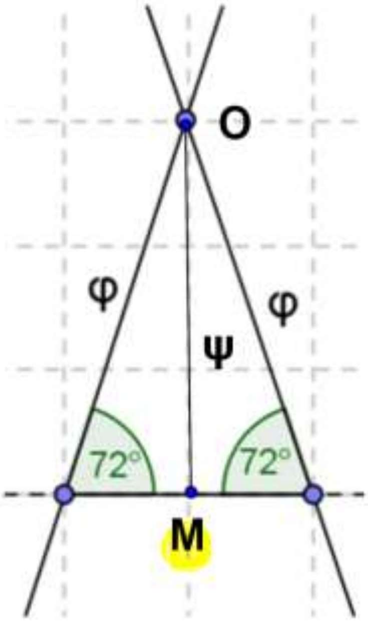
Appliquons cette formule au triangle KID : $a = 3\varphi$; $b = 3\varphi^3$; KDI = 108° donc

$a^2 = 9\varphi^2 + 9\varphi^6 - 18\varphi^4 \cos 108°$.

On sait que cos 108 = - cos (180 – 108) = - cos 72°.

Nous allons utiliser un triangle d'or aigu afin de calculer cos 72°.

Nous avons figuré la hauteur [OM] de mesure notée Ψ du triangle d'or de mesures des côtés 1, φ, φ, très utile dans les travaux de Mansuy.



Calculons tout d'abord la mesure **OM = Ψ dans le triangle OML rectangle en M.**

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \Psi^2 = \varphi^2. \text{ D'où } \Psi = \sqrt{\varphi^2 - 0{,}25}.$$

Calcul de cos 72°

Cos 72° = $1 / 2\varphi = 1 / (1+\sqrt{5}) = \varphi^{-1} / 2$. Donc :

$a^2 = 9\varphi^2 + 9\varphi^6 - 18\varphi^4 \cos 108° =$

$9\varphi^2 + 9\varphi^6 - 18\varphi^4 \times (-\varphi^{-1}/2) =$

$9\varphi^2 + 9\varphi^6 + 9\varphi^3 = 9(\varphi^2 + \varphi^6 + \varphi^3)$

On peut, à l'aide des propriétés du nombre φ, calculer φ^2, φ^3 et φ^6.

Rappel des propriétés du nombre φ :

$\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$; ainsi $\varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}$ où

F_n et F_{n-1} sont deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci .

Donc : $\varphi^2 = F_2\varphi + F_1 = \varphi + 1$; $\varphi^3 = F_3\varphi + F_2 = 2\varphi + 1$;

$\varphi^6 = F_6\varphi + F_5 = 8\varphi + 5$.

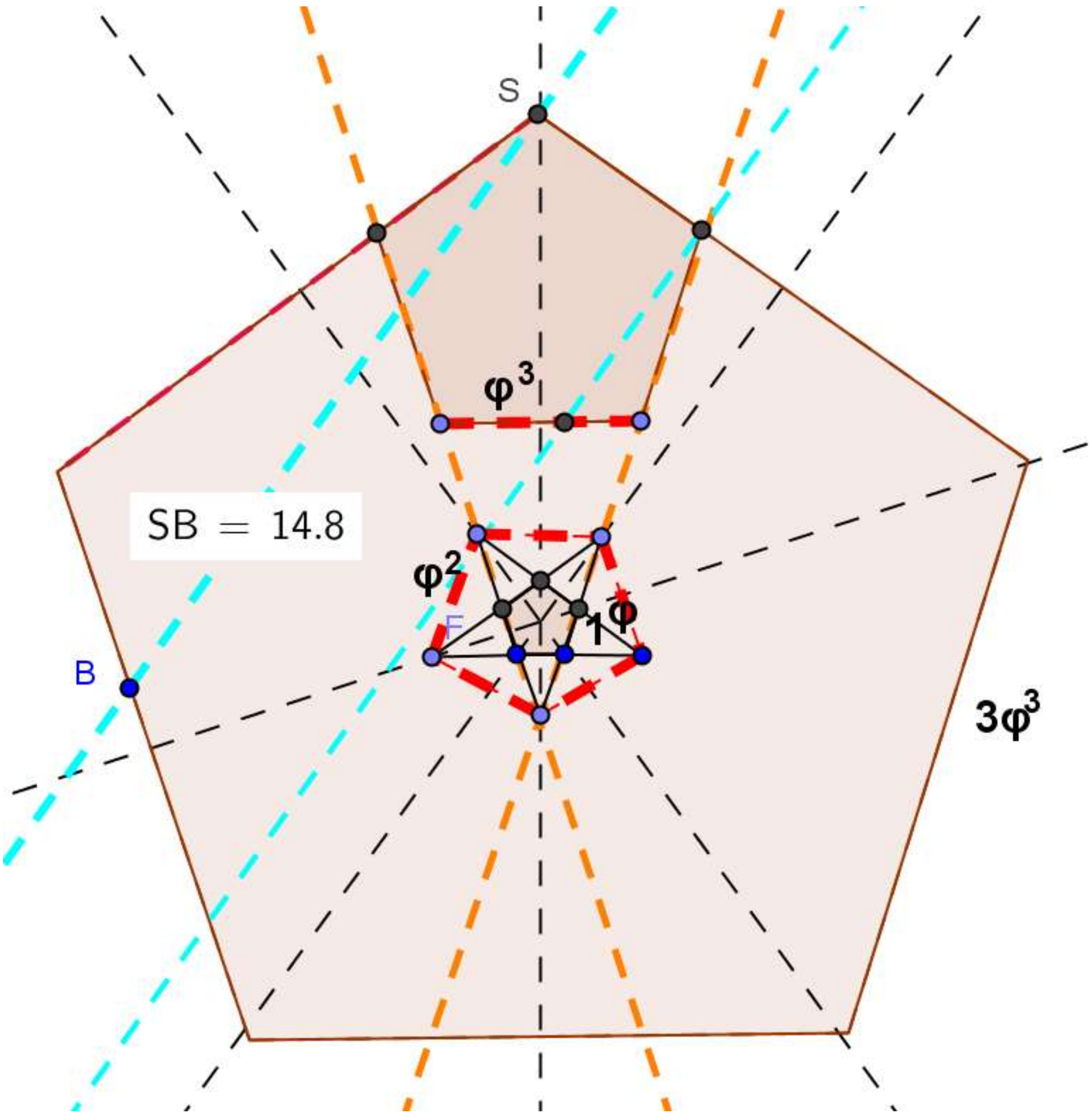
Alors a^2 est égal à :

$9(\varphi^2 + \varphi^6 + \varphi^3) = 9(\varphi + 1 + 8\varphi + 5 + 2\varphi + 1) = 9(11\varphi + 7)$

Donc a = 3 x $\sqrt{11\varphi+7}$; a = 3 x 4,97979657 = 14,9 (0,1 près).

Vérification avec les figures de GEOGEBRA

Nous demandons alors de tracer le pentagone convexe de côté de mesure 1 puis le pentagone étoilé de côté de mesure 1+2φ, d'enveloppe convexe de côté de mesure φ^2. Ensuite un pentagone convexe de côté de mesure φ^3 avec les méthodes indiquées plus haut (construction de la coupe) et enfin le pentagone convexe de côté de mesure 3 φ^3 et enfin le segment [SB] pour lequel nous demandons à GEOGEBRA d'afficher la mesure soit 14,8 au dixième près.



Bibliographie

Shalom Eliahou Image des mathématiques : Pavages, symétrie d'ordre 5 et suites de Fibonacci. En ligne

http://images.math.cnrs.fr/Pavages-symetrie-d-ordre-5-et-suite-de-Fibonacci-un-amateur-passionne.html

Mansuy Frédéric : Supersymétrie d'ordre 5. En ligne :

http://supersymetrie.fr/

Mansuy Frédéric : The Fibonacci Quarterly". En ligne :

https://www.fq.math.ca/Papers1/55-5/Mansuy.pdf

-0-