

Amida-kujis, les mathématiques au service du « hasard »

Du jeu à l'étude de sa relation au groupe symétrique

La conférence présentée par Stéphane Gaussen¹ aux journées nationales de l'APMEP² à Lyon est à l'origine de cet article, présentant un sujet qui a piqué ma curiosité. Nous verrons notamment comment les Asiatiques tirent au hasard dans une famille qui doit faire la vaisselle, qui doit sortir les poubelles, qui doit promener le chien... grâce aux amidakujis. Je vais pour commencer citer une partie d'un beau travail fait par des collégiens, que j'ai découvert via l'Internet suite à cette conférence. Il a été impulsé par l'association Math.en.JEANS³ et réalisé par des élèves du collège de Montbrison (Loire), encadrés par leurs professeurs et par Stéphane Gaussen. Voici comment ces élèves introduisent le sujet :

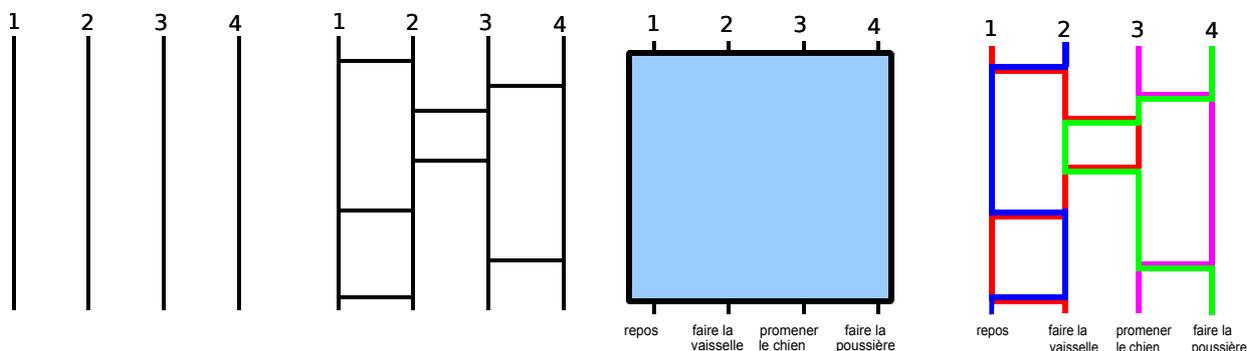
« Les amidakujis sont un jeu de hasard japonais tout comme la courte paille ici en France. Ce jeu permet de décider au hasard qui va gagner un lot ou de choisir qui va faire les tâches ménagères. Il permet une distribution aléatoire.

Principe : On place des traits verticaux, ils doivent être parallèles (on en place autant que l'on veut). Au-dessus des barres vous placez des nombres (1,2,3,4,5,...) ou bien des prénoms.

Vous placez ensuite des traits horizontaux : ils doivent être placés au hasard. Mais attention, deux traits ne doivent jamais être au même niveau. On place ensuite au hasard en bas des barres verticales des lots, des tâches ménagères... tout en ayant pris soin de couvrir l'amidakuji.

Pour savoir qui fait quoi, on dévoile barres et traits, puis on trace les chemins⁴. Lorsque que l'on descend le long des barres verticales en partant des nombres, on doit obligatoirement emprunter les barres horizontales rencontrées. On glisse le long des barres (toujours en descendant) jusqu'à une tâche.

Ici, sur la figure suivante : repos – faire la vaisselle – promener le chien – faire la poussière



Donc le 1 va faire la vaisselle, le 2 va se reposer, le 3 va promener le chien et le 4 va faire la poussière. »

Dans la partie I de cet article, je citerai, avec très peu de commentaires personnels, le travail des collégiens de Montbrison qui ont étudié trois questions posées par Stéphane Gaussen au sujet de ces figures. Dans la partie II, nous étudierons, sous une forme généralisée que j'ai développée dans l'esprit des questions initiales, les liens qu'elles entretiennent avec le groupe symétrique. Je propose dans cette partie la construction de quelques algorithmes permettant de produire des amidakujis associés à la donnée de permutations d'un ensemble d'objets. Enfin, dans une partie III plus algébrique et théorique, nous définirons le groupe des amidakujis, en incluant notamment une présentation par générateurs et relations de ce groupe.

Ainsi, un procédé ludique banalement employé en Extrême Orient met-il en lumière de belles mathématiques.

1. Stéphane Gaussen est professeur à l'Université Jean Monnet de Saint-Étienne. Il est membre de l'équipe Algèbre, Géométrie et Logique de l'Institut Camille Jordan (UCBL). Son domaine de recherche concerne la théorie des représentations. Il s'agit d'une branche des mathématiques fondamentales née à la fin du XIXe siècle avec les travaux de Frobenius et de Burnside et qui s'est développée au XXe siècle par des contributions de Schur et Weyl. Ce secteur très actif à l'heure actuelle se situe aux confluent de l'algèbre, de la géométrie, de la théorie des groupes, de l'analyse et de la combinatoire. Par ailleurs, il est très impliqué dans la diffusion des mathématiques et dans le programme Math.en.JEANS.

2. Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public.

3. L'association Math.en.JEANS impulse et coordonne des ateliers de recherche qui fonctionnent en milieu scolaire, de l'école primaire jusqu'à l'université, et qui reconstituent en modèle réduit la vie d'un laboratoire de mathématiques.

4. J'ai ici précisé le retrait du cache et permuté les couleurs des chemins 3 et 4 du document original pour une meilleure lisibilité du dessin.

I – Des collégiens⁵ exposent leur travail de recherche sur les amidakujis.

Les participants

Élèves : AIRED A. (4ème 3) BAROU C. (4ème 2) BLANC A. (4ème 9) BOS T. (4ème 3) BRUYERE T. (4ème 9) CHAUMETTE C. (4ème 9) CHERMANNE M. (3ème 5) CHILLET A. (3ème 4) COUILLOT M. (4ème 2) DE HARO C. (4ème 3) DEHEEGER L. (4ème 9) DUFOURD C. (4ème 9) EYRAUD S. (4ème 3) FAURE D. (4ème 9) GAY Y. (4ème 13) GUENOT J. (4ème 3) JUNHKE E. (4ème 9) JUNHKE G. (3ème 12) MAISONNEUVE J. (3ème 4) MARTIN L. (4ème 9) PAGLIARINI L. (3ème 4) POYET L. (4ème 7) QUINTEIRO P. (4ème 9)

Professeurs : CASSE G., GERENTES JB., SIBILLE JF.

Chercheur : GAUSSENT S. (Université St-Étienne)

Les questions

Le sujet traite de l'étude des Amida-Kuji, jeu de hasard japonais. Le but de la recherche a été de démontrer le bon fonctionnement du jeu, puis de trouver une technique pour maîtriser ce qui apparaît au départ comme du hasard.

Stéphane GAUSSENT nous a proposé trois questions :

- 1) Pourquoi deux chemins n'arrivent-ils jamais au même endroit ?
- 2) Comment placer les barres pour obtenir un résultat voulu ?
- 3) Pour une permutation donnée, comment trouver le dessin avec un minimum de barres qui donne cette permutation ?

Nous avons trouvé une solution à la première question et nous l'avons démontrée :

« Il n'y a jamais deux chemins en même temps sur une jambe. »

Pour la deuxième question, nous avons trouvé plusieurs méthodes de résolution et nous en présentons trois dans cet article.

Enfin, nous avons émis une conjecture pour la troisième question, que nous ne sommes pas parvenus à démontrer : « A chaque permutation donnée, il existe un dessin qui permet de réaliser cette permutation avec un minimum de barres. »

Lexique⁶ des termes utilisés dans la suite :

Jambe : Segment vertical fixe qui soutient les barres horizontales.

Barre : Segment horizontal fixe reliant deux jambes.

Trajet : Déplacement d'une jambe de départ jusqu'à une jambe d'arrivée en suivant les règles des amidakujis.

Escalier : Trajet particulier descendant ou ascendant non nécessairement achevé, vers la droite ou vers la gauche.

Chemin : Trajet achevé.

Question 1

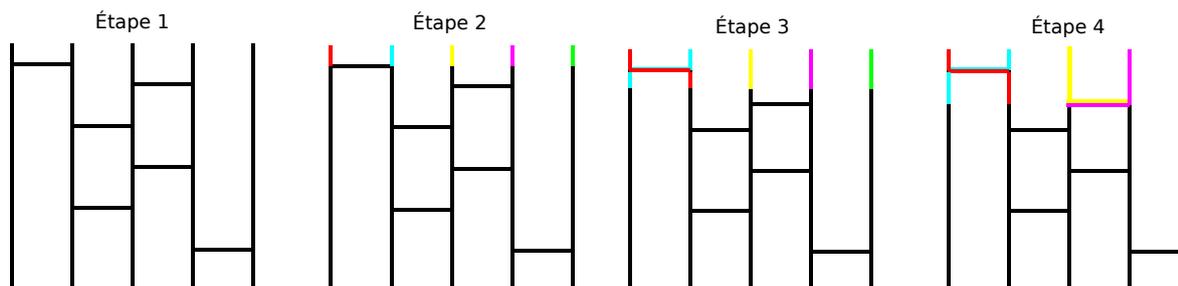
Pourquoi deux chemins n'arrivent-ils jamais au même endroit ? (« Pourquoi deux personnes ne feront-elles pas la même tâche ménagère ? »)

Lorsqu'on effectue un trajet, on est obligé de suivre les barres rencontrées. Lors d'un trajet, quand on prend une barre, le trajet de la jambe d'à côté prend la barre en sens inverse ce qui fait permuter les deux trajets. Ainsi, deux trajets ne sont jamais sur la même jambe et n'arrivent donc pas au même endroit. Deux chemins pourraient arriver au même endroit si deux barres étaient situées au même niveau⁷. Mais cela serait contraire aux règles du jeu des amidakujis.

5. Session MeJ 2012/2013 - Collège Mario Meunier – Montbrison (Loire 42) professeurs : CASSE G., GERENTES JB., SIBILLE JF. et un groupe de leurs élèves (18 en quatrième et 5 en troisième) – Le document original repris ici est disponible à l'url : <https://www.mathenjeans.fr/content/les-amida-kuji-collège-mario-meunier-montbrison>

6. Je précise ici sans citer explicitement leur document, qu'avant d'aborder les réponses aux questions, les élèves prennent soin de définir dans un lexique les termes utilisés dans la suite, schéma à l'appui. Voir leur document original disponible à l'url : <https://www.mathenjeans.fr/content/les-amida-kuji-collège-mario-meunier-montbrison>

7. Note des élèves : Si deux barres étaient situées au même niveau en ayant une jambe en commun, même en supposant que chaque trajet ne prenne qu'une seule barre et que le trajet de la jambe du milieu choisisse une des deux barres.



Étape 1 : Situation initiale

Étape 2 : Tous les chemins partent en même temps mais le bleu et le rouge rencontrent une barre et s'intervertissent.

Étape 3 : Les chemins continuent.

Étape 4 : Les chemins magenta et jaune rencontrent à leur tour une barre et s'intervertissent.

Et ainsi de suite jusqu'à ce que les chemins arrivent en bas. Il n'y a donc jamais deux couleurs en même temps sur une même jambe.

Question 2

Comment placer les barres pour avoir le résultat voulu ?

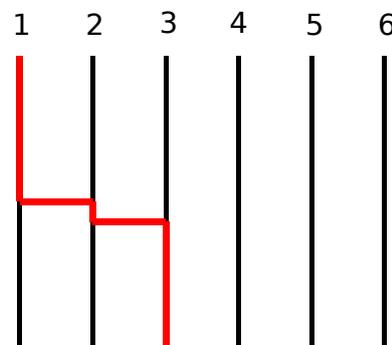
(« Comment placer les barres pour que le 1 fasse la vaisselle, que le 2 se repose ... ? » ou « Comment maîtriser le hasard ? »)

Nous avons trouvé trois solutions⁸ :

Solution 1

Étape 1 :

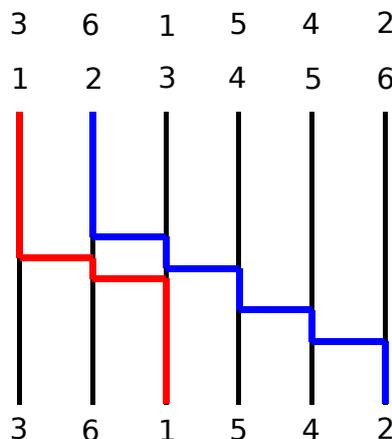
- Je commence par créer le chemin du 1.
- Je mets une barre au milieu des jambes (1 et 2).
- Je fais un escalier descendant vers la droite.



Étape 2 :

- Je vérifie si le chemin du 2 n'est pas déjà tracé. Ici le chemin du 2 n'est pas déjà tracé : on doit le créer.
- Pour créer ce chemin on fait des escaliers descendants vers la droite qui sont toujours au-dessus des autres.
- Je crée un escalier descendant pour obtenir le 2.

En partant du 2, je vais faire un escalier descendant à droite au-dessus de celui du 1, et à chaque fois que je mets une barre, je vérifie si le chemin est tracé sinon je continue à rajouter des barres.

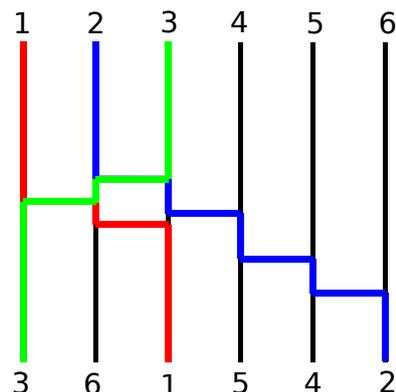


8. Les élèves présentent trois démarches conduisant à deux réponses de formes distinctes (2 et 3 fournissent des réponses géométriquement superposables via des glissements verticaux de certaines barres). Nous pouvons identifier les trois méthodes présentées en "méthode gauche-droite (resp. droite-gauche) depuis la ligne du haut" pour la solution 1 (resp. 2), et "méthode droite-gauche depuis la ligne du bas" pour la solution 3.

Étape 3 :

Je vérifie si le chemin du 3 n'est pas déjà tracé.

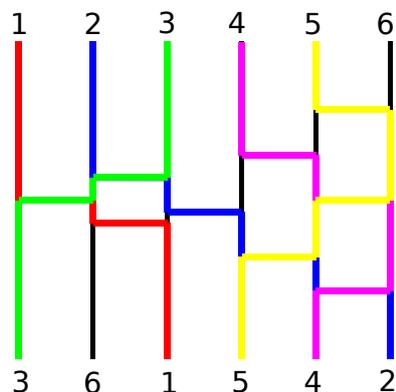
Ici le chemin du 3 est déjà tracé.



Étape 4 :

- Je répète la même procédure pour le 4 et le 5.

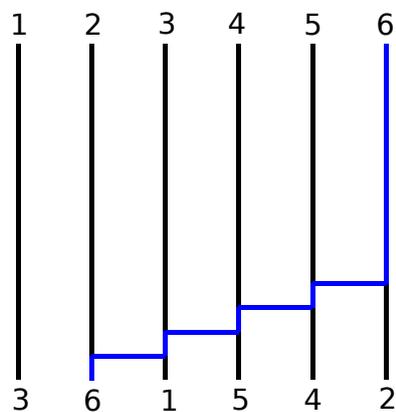
- Le chemin du 6 sera forcément bon !! (d'après la question 1)



Solution 2

Étape 1 :

- Je commence par créer le chemin du 6.
- Je mets une barre au milieu des jambes (5 et 6).
- Je fais un escalier descendant vers la gauche.



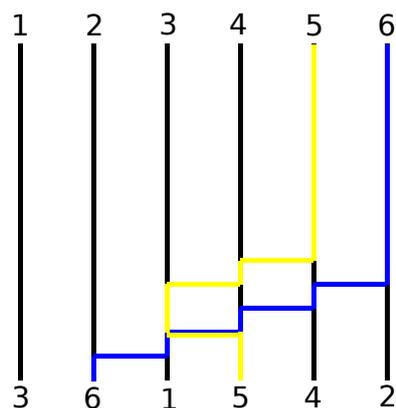
Étape 2 :

- Je vérifie si le chemin du 5 n'est pas déjà tracé. Ici le chemin du 5 n'est pas déjà tracé : on doit le créer.

- Pour créer ce chemin on fait des escaliers descendants vers la gauche qui sont toujours au-dessus des autres.

- Je crée un escalier descendant pour obtenir le 5.

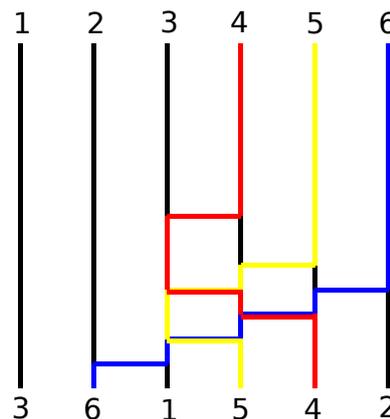
En partant du 5 : à chaque fois que je mets une barre, je vérifie si le chemin est tracé sinon je continue à rajouter des barres.



Étape 3 :

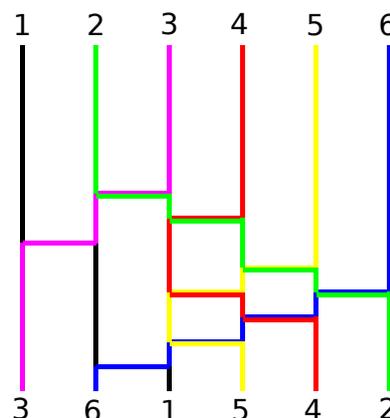
- Je vérifie si le chemin du 4 n'est pas déjà tracé. Ici le chemin du 4 n'est pas déjà tracé : on doit le créer.
- Pour créer ce chemin on fait des escaliers descendants vers la gauche qui sont toujours au-dessus des autres.
- Je crée un escalier descendant pour obtenir le 4.

En partant du 4 : à chaque fois que je mets une barre, je vérifie si le chemin est tracé sinon je continue à rajouter des barres.



Étape 4 :

- Je répète la même procédure pour le 3 et le 2.
- Le chemin du 1 sera forcément bon ! (d'après la question 1)

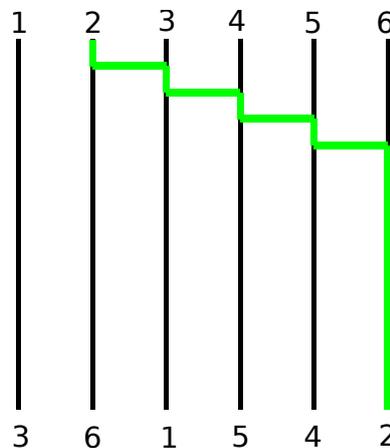


Solution 3

C'est la solution avec laquelle nous avons continué nos recherches :

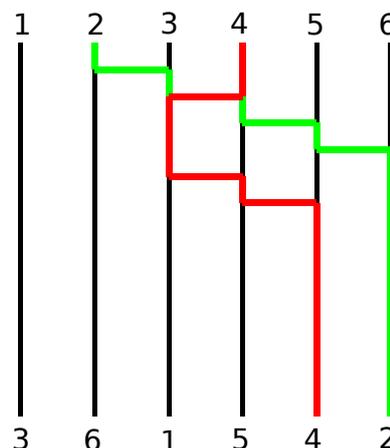
Étape 1 :

- On commence par créer le chemin du 2 (le nombre en bas à droite), puis on fera le chemin du 4, puis du 5, ensuite du 1, etc.
- Les barres permettant de créer le chemin du 2 seront les plus hautes, en dessous il y aura les barres du 4, etc.
- Les barres permettant de construire le chemin du 3 seront les plus basses. Pour créer le chemin du 2, on part d'en haut et on fait un escalier descendant vers la droite.
- Pour créer le chemin du 2, on part d'en haut et on fait un escalier descendant vers la droite.



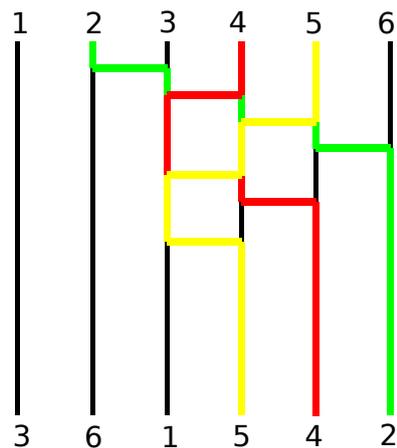
Étape 2 :

- On veut créer le chemin du 4.
- On vérifie s'il n'est pas déjà tracé : ici ce n'est pas le cas.
- On part du 4 (en haut), on emprunte le chemin du 2 et on ajoute des barres (en dessous de celle du 2).
- A chaque barre ajoutée, on vérifie si le chemin est tracé ou pas.



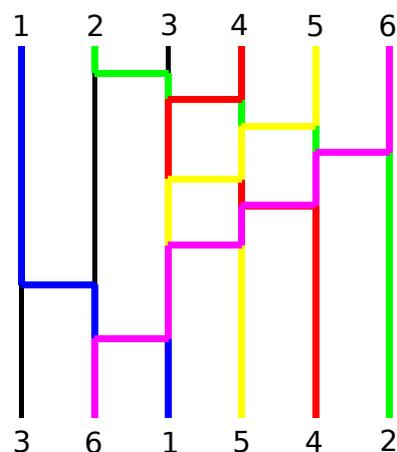
Étape 3 :

- On veut créer le chemin du 5.
- On vérifie s'il n'est pas déjà tracé : ici ce n'est pas le cas.
- On part du 5 (en haut), on emprunte le chemin du 2 et du 4, on ajoute des barres (en dessous de celle du 2 et du 4).
- A chaque barre ajoutée, on vérifie si le chemin est tracé ou pas.



Étape 4 :

- On réitère la procédure pour le 1, puis pour le 6.
- Enfin le chemin du 3 sera déjà tracé (d'après la question 1)



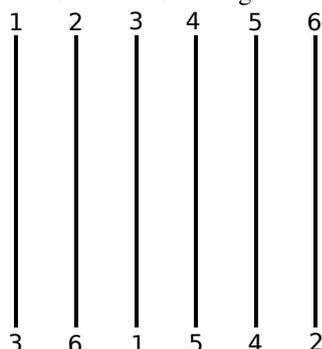
Question 3

Pour une permutation donnée, comment trouver le dessin avec un minimum de barres qui donne cette permutation ? C'est la même question que la question 2) avec une condition supplémentaire : on veut mettre le minimum de barres.

Nous avons remarqué⁹ que parmi nos méthodes, la méthode n° 3 nous permettait d'obtenir le plus petit nombre de barres. Stéphane Gaussent nous a confirmé que cette méthode donnait le nombre minimum de barres, mais nous ne savons pas l'expliquer ou le démontrer.

Nous avons cependant trouvé une méthode qui permet de calculer ce nombre minimum de barres. Tout d'abord, le résultat d'un amidakuji dépend de deux choses :

- le décalage ;
- le nombre¹⁰ de nombres inférieurs à droite sur la ligne d'en bas.



Décalages	-2	-4	+2	-1	+1	+4
nombre de plus petits à droite sur la ligne du bas	2	4	0	2	1	0
Total	0	0	2	1	2	4

a) Le décalage est l'écart entre la position de départ d'un nombre et sa position d'arrivée.

Sur cet exemple, le 1 a un décalage de 2 par rapport au 1 d'arrivée. Ce résultat peut se vérifier grâce à une formule qui consiste à faire le nombre du haut moins le nombre du bas. Par exemple, pour savoir le décalage du 4, il suffit de faire 5 - 4 c'est à dire 1. Pour le 6, on fera 2 - 6 c'est-à-dire un décalage de -4.

Il existe deux types de décalages :

- Le décalage sur la droite qui donne un décalage positif. (exemple : le 1 et le 2)
- Le décalage sur la gauche qui donne un décalage négatif. (exemple : le 3 et le 6)

b) Passons maintenant au nombre de nombres plus petits qu'un nombre, à droite sur la ligne du bas. Pour cela, il nous suffit de prendre un nombre, de compter combien de nombres inférieurs il y a à sa droite sur la ligne du bas.

Le 3 a deux nombres inférieurs à lui à droite sur la ligne du bas : le 1 et le 2.

Au final pour savoir le nombre minimum de barres pour placer correctement un nombre, il faut ajouter¹¹ le décalage et le nombre de plus petits à droite sur la ligne du bas.

Ainsi sur notre exemple, pour placer le 5 il faut placer 1 barre, pour le 4 il faut 2 barres. Sur cet exemple, le 5 aura besoin d'une barre pour arriver à son point car : -1+2=1

Ainsi donc pour connaître le nombre minimum de barres pour compléter un amidakuji, il nous suffit d'ajouter ces totaux¹².

Sur l'exemple précédent il faut 0 + 0 + 2 + 1 + 2 + 4 = 9 barres au minimum pour le compléter.

9. Je cite le texte des élèves. Ici les deux types de réponses proposées à la question 2 conduisent à neuf barres, ce qui ne permet pas d'en privilégier une parmi elles.

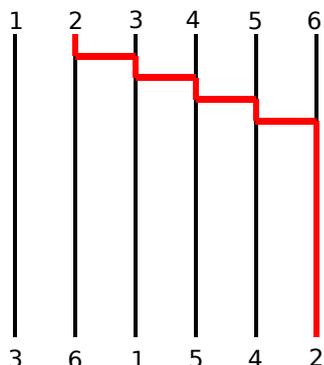
10. Autrement dit, le nombre des inversions dans la permutation.

11. La ligne "Total" peut simplement – sans passer par les décalages – être obtenue de droite à gauche en comptant directement le nombre de nombres plus grands qu'un nombre, à gauche sur la ligne du bas, i.e. les inversions de la permutation.

12. Les élèves n'ont pas vu que la somme algébrique des décalages est toujours nulle. Sa prise en compte est donc inutile ici, seule compte la somme du nombre des inversions.

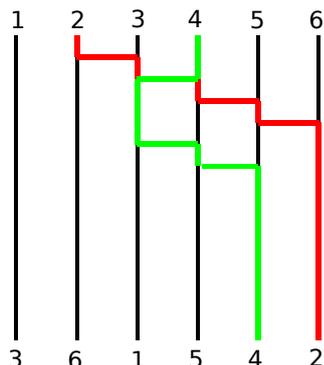
Retour question 2 : En calculant le minimum de barres horizontales, il est très facile de les placer. On commence toujours par le dernier nombre de bas à droite donc le 2.

Pour le 2, il faut 4 barres horizontales en escalier ascendant à gauche le plus haut possible à partir du 2 du bas.



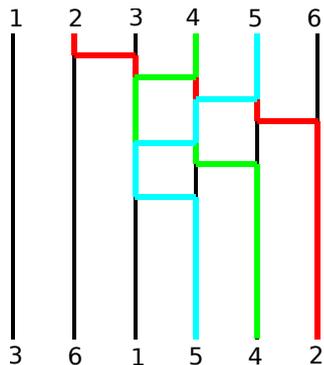
Décalages	-2	-4	+2	-1	+1	+4
nombre de plus petits à droite sur la ligne du bas	2	4	0	2	1	0
Total	0	0	2	1	2	4

Pour le 4, il faut 2 barres horizontales en escalier ascendant à gauche en dessous des barres du 2 à partir du 4 du bas.



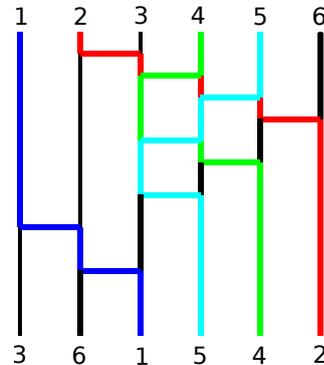
Décalages	-2	-4	+2	-1	+1	+4
nombre de plus petits à droite sur la ligne du bas	2	4	0	2	1	0
Total	0	0	2	1	2	4

Pour le 5, il faut 1 barre horizontale en escalier ascendant à gauche en dessous des barres du 4 à partir du 5 du bas.



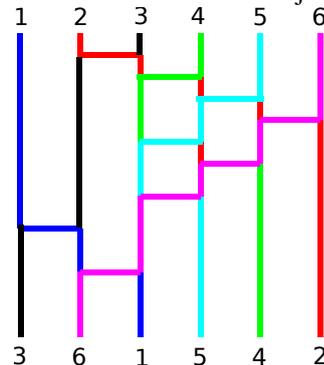
Décalages	-2	-4	+2	-1	+1	+4
nombre de plus petits à droite sur la ligne du bas	2	4	0	2	1	0
Total	0	0	2	1	2	4

Pour le 1, il faut 2 barres horizontales en escalier ascendant vers la gauche à partir du 1 du bas.



Décalages	-2	-4	+2	-1	+1	+4
nombre de plus petits à droite sur la ligne du bas	2	4	0	2	1	0
Total	0	0	2	1	2	4

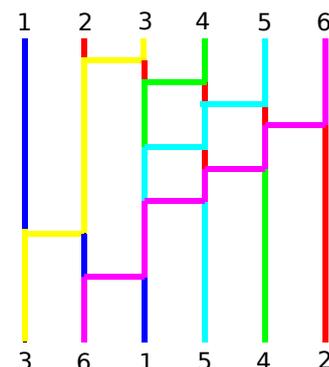
Pour le 6, il ne faut aucune barre horizontale car il arrive déjà à son point à partir du 6 du bas.



Décalages	-2	-4	+2	-1	+1	+4
nombre de plus petits à droite sur la ligne du bas	2	4	0	2	1	0
Total	0	0	2	1	2	4

Et pour le 3, d'après la question 1, il ira directement à son point d'arrivée sans ajouter de barre horizontale à partir du 3 du bas.

Ligne du bas	3	6	1	5	4	2
Décalages	-2	-4	+2	-1	+1	+4
nombre de plus petits à droite sur la ligne du bas	2	4	0	2	1	0
Total	0	0	2	1	2	4



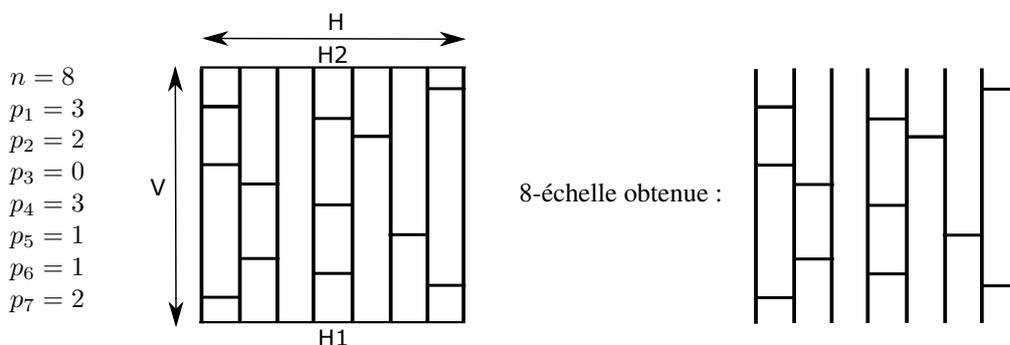
II – Les amidakujis et leur relation avec le groupe symétrique \mathfrak{S}_n

1. Amidakujis ou n -échelles : définitions, vocabulaire et usage

Ces figures, comme nous l’avons constaté dans la section précédente, permettent de représenter des applications (injectives) de l’ensemble E des n objets placés aux extrémités hautes des n segments verticaux, vers l’ensemble F ¹³ des objets placés aux extrémités basses des n segments verticaux. Dans la suite, nous choisirons toujours $F = E$, ainsi les différents chemins de l’amidakuji étudié représenteront des bijections de E dans E , autrement dit des permutations de E .

Nous précisons d’abord la définition des figures et les termes employés à leur sujet.

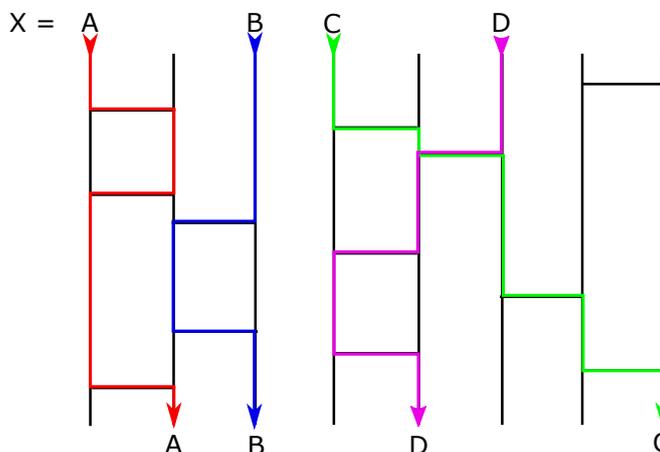
Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , l’axe (O, \vec{i}) donne la direction horizontale et l’axe (O, \vec{j}) donne la verticale. Nous considérons un rectangle R de hauteur V , dont $H1$ et $H2$ sont les deux côtés horizontaux de longueur H , et un entier n tel que $n \geq 2$. Nous subdivisons alors R en $n - 1$ rectangles $R_i (1 \leq i \leq n - 1)$ de dimensions $V \times (\frac{H}{n-1})$. De plus, dans chaque rectangle R_i nous plaçons p_i (éventuellement aucun) segments horizontaux de longueur $\frac{H}{n-1}$ de telle sorte que les p ($p = \sum_i p_i$) segments rajoutés soient situés à des distances de $H1$ deux à deux distinctes appartenant à l’intervalle $]0, V[$.



Définition 1 – n -échelle¹⁴ : C’est l’ensemble constitué des n segments verticaux (appelés aussi **montants**) et des **barres** horizontales les reliant que l’on extrait du rectangle R en retirant les côtés horizontaux. Voir figure ci-dessus.

Définition 2 – point de jonction : Les points extrémités des barres horizontales sont appelés points de jonction.

Définition 3 – Chemin sur une n -échelle : Soit X l’extrémité haute d’un montant. Le chemin issu de X est la ligne brisée obtenue en parcourant, de haut en bas ou horizontalement, tous les segments délimités par les points de jonction rencontrés jusqu’à l’extrémité basse d’un montant. Le chemin change impérativement de direction (verticale ou horizontale) à la rencontre de chaque point de jonction et se poursuit sans ambiguïté car les barres se situent à des niveaux distincts. Voir figure ci-dessous



13. Nous pouvons affecter plusieurs fois le même objet aux n places disponibles, par exemple pour une loterie où il y a plusieurs perdants. Ainsi $1 \leq \#(F) \leq n$

14. C’est la dénomination suggérée par le dessin que j’ai choisie pour franciser le terme japonais amidakuji.

2. Propriétés des n -échelles et des chemins associés

Prop. 1 - Injectivité du procédé : Nous généralisons le résultat de la question 1 de l'atelier MATH.en.JEANS relaté dans la section I. Nous énonçons la proposition suivante.

Considérons une n -échelle et n objets X_1, X_2, \dots, X_n que nous plaçons aux extrémités hautes des n montants, et auxquels nous associons n chemins issus de ces objets. Choisissons un montant quelconque de cette n -échelle.

Un point quelconque de ce montant est un point de jonction ou ne l'est pas. Dans le premier cas, il est le point de passage de **deux chemins exactement** issus d'objets X_k et X_l . Dans l'autre cas, il est le point de passage d'**un unique chemin** issu de l'un des objets X_1, X_2, \dots, X_n . En particulier, l'extrémité inférieure d'un montant est le point d'arrivée d'un unique chemin.

Corollaire : Les chemins de toute n -échelle représentent une application injective de l'ensemble des n objets X_1, X_2, \dots, X_n placés aux extrémités hautes des n montants dans l'ensemble des objets affectés aux extrémités basses des n montants.

Preuve : Nous raisonnons par récurrence sur le nombre de barres, noté p . Le résultat est immédiat pour $p = 0$ car il n'y a aucun point de jonction, et ainsi les chemins sont les n montants. Pour $p = 1$, seuls deux montants possèdent un unique point de jonction par lequel passent seulement les deux chemins issus de ces montants. Les autres points des montants sont, soit sur un de ces deux montants (au dessus ou en dessous d'un point de jonction, soit sur un montant sans point de jonction qui correspond à un seul des chemins possibles.

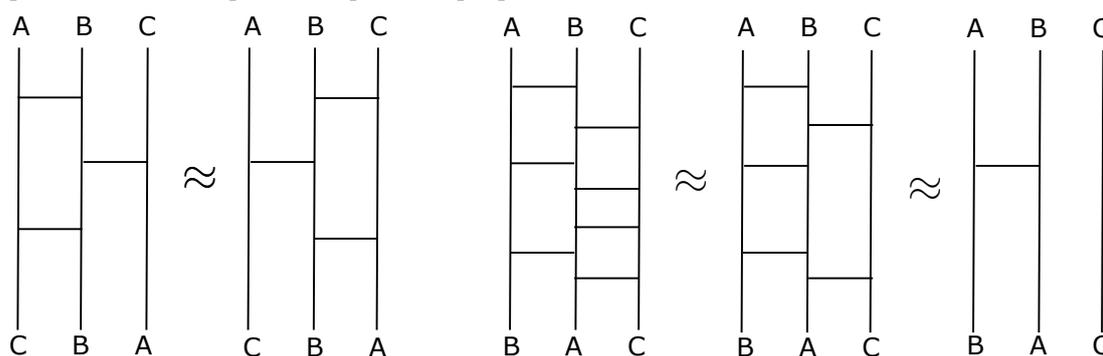
Pour établir le caractère héréditaire du prédicat sur p entier naturel, $\mathcal{H}(p)$: "pour tout $k \leq p$ toute n -échelle à k barres satisfait à la proposition 1 énoncée ci-dessus", il suffit de "scier" les montants au dessus de la dernière barre du bas, puis d'appliquer l'hypothèse de récurrence conjuguée avec le résultat vu pour $p = 1$.

Nous pouvons maintenant affirmer que toute n -échelle représente une permutation de l'ensemble E des n objets X_1, X_2, \dots, X_n placés aux extrémités hautes des n montants.

Prop. 2 – n -échelle sans barre : Une n -échelle sans barre représente la permutation identité.

Prop. 3 – n -échelle avec une seule barre : Une n -échelle avec une seule barre représente la transposition des éléments associés aux deux montants reliés.

Prop. 4 – Plusieurs représentations pour une permutation : Comme le montrent les exemples suivants, une permutation donnée peut être représentée par plusieurs n -échelles distinctes.



Prop. 5 – Chemins croisés : Nous énonçons la proposition suivante.

Si deux chemins issus des objets X et Y se croisent alors le(s) croisement(s) se recouvrent sur des barres horizontales. La position relative des objets X et Y (X à droite ou à gauche de Y) est conservée (resp. inversée) dans la permutation finale lorsque le nombre de croisements de ces deux chemins est pair (resp. impair).

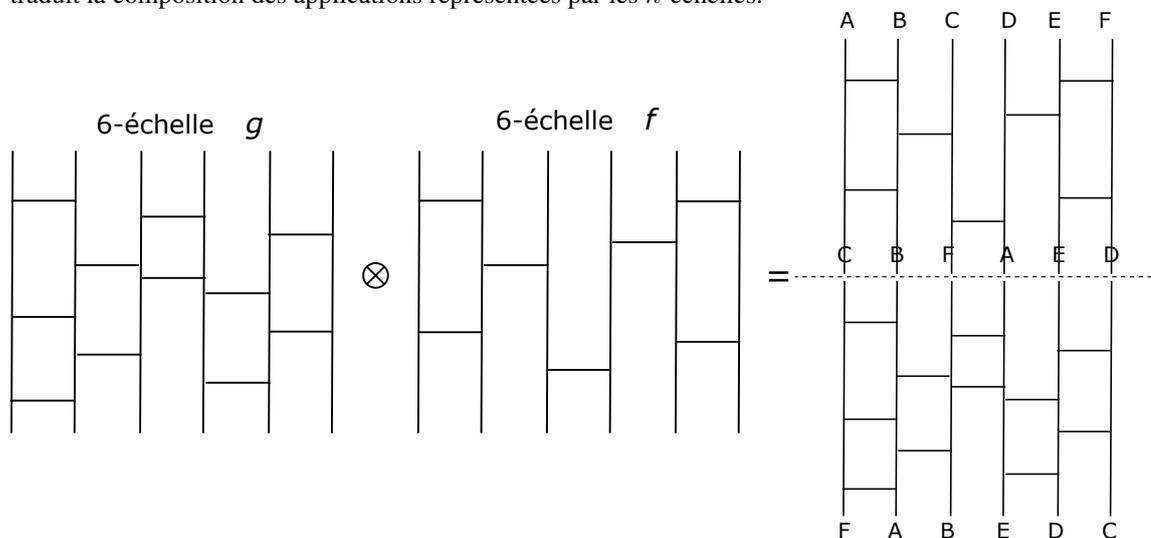
Corollaire : Une n -échelle ayant une seule barre représente une permutation qui possède une unique inversion.

Prop. 6 – Opération \otimes sur l'ensemble \mathcal{E}_n des n -échelles : Définition et propriétés.

L'assemblage par mise bout à bout des montants de deux n -échelles produit une nouvelle n -échelle. Plus précisément, soient f_{n,p_1} et g_{n,p_2} deux n -échelles. Nous notons $g \otimes f$ la n -échelle h_{n,p_1+p_2} obtenue en joignant les extrémités **inférieures** des montants de f aux extrémités **supérieures** des montants de g , ce qui

s'écrit¹⁵ $h = g \otimes f$. Nous pouvons aussi définir $k = f \otimes g$. C'est une n -échelle, en général distincte de h , pour $n \geq 3$. L'opération est « visiblement » associative. L'opération n'est pas commutative pour $n \geq 3$. La n -échelle sans barre est un élément neutre pour cette opération. Nous sommes en présence d'une structure de monoïde.¹⁶

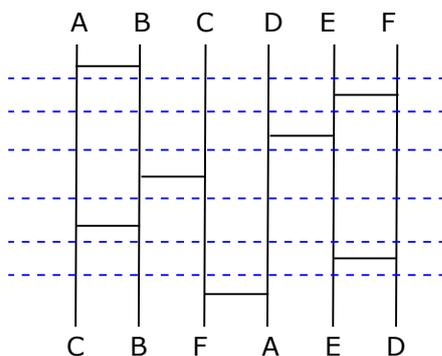
La correspondance de (\mathcal{E}_n, \otimes) dans (\mathfrak{S}_n, \circ) est un morphisme. En effet la mise "bout à bout" des montants traduit la composition des applications représentées par les n -échelles.



Une remarque : Si nous calculons $h_1 = f' \otimes f$ où f' est la n -échelle obtenue comme image de f par symétrie axiale horizontale, l'axe étant la droite joignant le bas des montants de f , nous constatons que h_1 représente la permutation identité. Idem si l'on calcule $h_2 = f \otimes f'$.

Il est aussi possible de décomposer une n -échelle en un produit de deux n -échelles en sciant les montants à un niveau intermédiaire entre deux barres.

Prop. 7 – Décomposition d'une n -échelle en produit de p " n -échelles" à une seule barre : Considérons une n -échelle ayant p barres où $p \geq 2$. Nous pouvons itérer la décomposition en produit de deux mentionnée à la fin de la prop. 6 précédente. Nous saucissonnons notre n -échelle en tranches de n -échelles à une barre et le tour est joué.



Nous pouvons en tirer deux conséquences intéressantes.

- La permutation représentée par la n -échelle ainsi décomposée est le produit de composition de p transpositions¹⁷.
- D'après la prop. 5, chaque produit \otimes à gauche par une nouvelle n -échelle à une barre augmente **au plus**¹⁸ le nombre d'inversions de la permutation obtenue dans le produit partiel, **de une unité**. Il s'ensuit que le nombre des inversions de la permutation représentée par notre n -échelle à p barres est inférieur ou égal au nombre¹⁹ de barres.

15. ce qui correspond de haut en bas à f suivi de g .

16. Ensemble muni d'une loi de composition interne associative ayant un élément unitaire

17. Il s'agit de transpositions du type $s_i = (i, i + 1)$ où $1 \leq i \leq n - 1$ lorsque $E = \llbracket 1, n \rrbracket$. Nous retrouvons ici le résultat de la prop. 1 qui énonce que toute n -échelle représente une permutation de $\mathfrak{S}_n(E)$.

18. À l'étape k où $1 \leq k \leq p$, le nombre d'inversions N_k du produit partiel vaut $N_k = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \varepsilon_i$ ($\varepsilon_i = \pm 1$). Il peut éventuellement diminuer lorsque k croît.

19. Pour une permutation représentée par une n -échelle, il est supérieur ou égal au nombre d'inversions de la permutation. Nous ne pouvons pas représenter celle-ci par une n -échelle avec moins de barres que le nombre d'inversions.

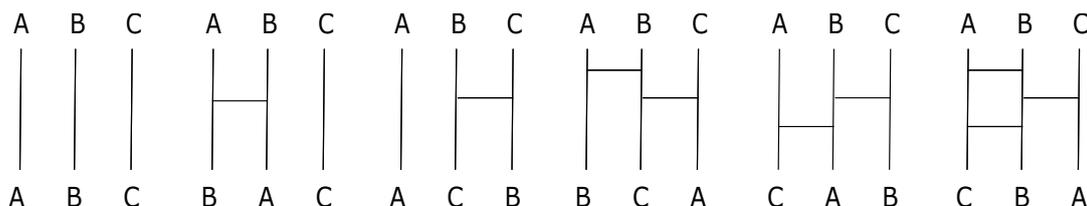
3. Représentation des permutations de \mathfrak{S}_n par des n -échelles

Il nous reste à examiner les questions 2 et 3 que Stéphane Gaussent a posées aux collégiens, dans le cadre de notre généralisation où $\#(E) = n$.

a) Existence d'une représentation pour une permutation quelconque de $\mathfrak{S}_n(E)$

Nous commençons par nous demander si la réponse est connue pour des cas particuliers.

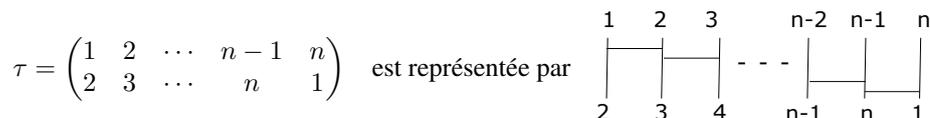
- Lorsque $n = 2$, nous avons à représenter l'identité et la transposition $s_1 = (1, 2)$. La réponse est immédiate : la 2-échelle sans barre et la 2-échelle à une seule barre.
- Pour $n = 3$, nous passons aussi rapidement en vue les six permutations, d'où la réponse :



Nous observons que les deux figures en escalier (descendant et montant) à deux barres correspondent aux deux 3-cycles de \mathfrak{S}_3 . Cette situation apparaît être généralisable.

Une autre remarque : Dans le cas de la transposition s_1 qui laisse invariant l'objet C, nous pouvons nous ramener au cas $n = 2$ en plaçant un montant sans point de jonction sous C, pour construire un 3-échelle qui convient.

- La permutation circulaire de longueur n , $\tau = (1, 2, \dots, n - 1, n)$ de \mathfrak{S}_n est représentée par une n -échelle à $n - 1$ barres disposées en "escalier descendant de gauche à droite" entre tous les montants.



Nous voyons également (cf. prop. 6 fin) que τ^{-1} est représentée par une n -échelle à $n - 1$ barres disposées en "escalier montant de gauche à droite" entre tous les montants.

Nous pouvons dès lors représenter τ^k et τ^{-k} pour tout entier naturel k .

Nous sommes maintenant en mesure de prouver par récurrence sur $n = \#(E)$ que toute permutation de E possède une représentation par une n -échelle. Énonçons le prédicat \mathcal{H} portant sur n où $n \geq 2$:

$\mathcal{H}(n)$: "pour tout k , $2 \leq k \leq n$, toute permutation de $\mathfrak{S}_k(E)$ où $\#(E) = k$ se représente par une k -échelle"

1. Nous avons vu au début du 3-a) que $\mathcal{H}(2)$ est vrai.
2. Le caractère héréditaire du prédicat sur n entier naturel se déduit des remarques précédentes.

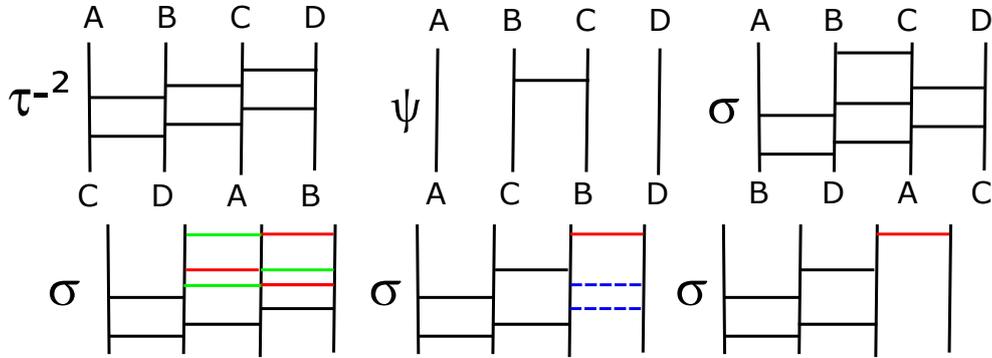
Soit $n \geq 2$ et $E = \{a_i \mid i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket\}$ tel que $\#(E) = n + 1$. Nous supposons que $\mathcal{H}(n)$ est vrai. Soit σ une permutation quelconque de $\mathfrak{S}_{n+1}(E)$. Les remarques précédentes nous incitent à ramener la question de l'existence d'une représentation de σ dans le cas $n + 1$ au cas n en utilisant une permutation auxiliaire ψ ayant le point a_1 invariant ($\psi(a_1) = a_1$). k étant le rang de a_1 dans la liste $[\sigma(a_i) \mid i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket]$, nous itérons la permutation circulaire τ , $k - 1$ fois, sur la liste $[\sigma(a_i) \mid i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket]$ pour obtenir une liste commençant par a_1 .

Considérons alors la permutation $\psi = \tau^{k-1} \circ \sigma$. Posons $E' = \{a_i \mid i \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket\}$. Alors $\#(E') = n$, $\psi(a_1) = a_1$ et $\psi(E') = E'$. D'après l'hypothèse de récurrence, nous savons représenter la restriction de ψ à E' par une n -échelle pour en déduire ensuite, une $n + 1$ -échelle, notée m , associée à ψ sur E , en lui rajoutant à gauche un montant sans point de jonction. Nous désignons par q une $(n + 1)$ -échelle représentant τ^{1-k} . Comme $\sigma = \tau^{1-k} \circ \psi$, il s'ensuit que $q \otimes m$ est une $(n + 1)$ -échelle qui représente σ , CQFD.

Le raisonnement par récurrence est ainsi validé, donc pour tout $n \geq 2$, $\mathcal{H}(n)$ est vrai.

Toute permutation de $\mathfrak{S}_n(E)$ possède une représentation par une n -échelle.

Illustration du passage de n à $n + 1$ pour $n = 3$: $\sigma = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & D & A & C \end{pmatrix}$. Ici $k = 3$, nous calculons :
 $\tau^2 [B \ D \ A \ C] = [A \ C \ B \ D]$ d'où $\psi = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & B & D \end{pmatrix}$ qui vérifie $\psi(A) = A$. Nous représentons τ^{-2} et ψ et $\sigma = \tau^{-2} \circ \psi$ par les 4-échelles respectives $q, m, q \otimes m$:



Nous remarquons que la 4-échelle obtenue pour σ n'est pas minimale. Nous pouvons trouver en remplaçant dans la première représentation de σ la "fourchette" verte par la rouge, puis en supprimant les deux barres bleues pointillées, une 4-échelle équivalente ayant 5 barres. Dans la suite, nous allons répondre à cette généralisation de la question 3 de la première section.

b) Un algorithme récursif de construction d'une n -échelle minimale représentant une permutation quelconque

Reprenons l'exemple précédent avec $\sigma = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & D & A & C \end{pmatrix}$. L'idée simple de l'algorithme consiste à placer les premières barres d'une 4-échelle correspondant à une permutation σ_1 pour obtenir l'image $B \ ? \ ? \ ?$ où les trois "?" découlent du choix des barres pour que $\sigma_1(A) = B$.

Notons l'inversion (B, A) dans l'image $(B \ D \ A \ C)$ de σ . Pour la réaliser, il nous suffit de placer une barre entre les deux montants issus de A et B, en prenant $\sigma_1 = (A, B)$ (transposition).

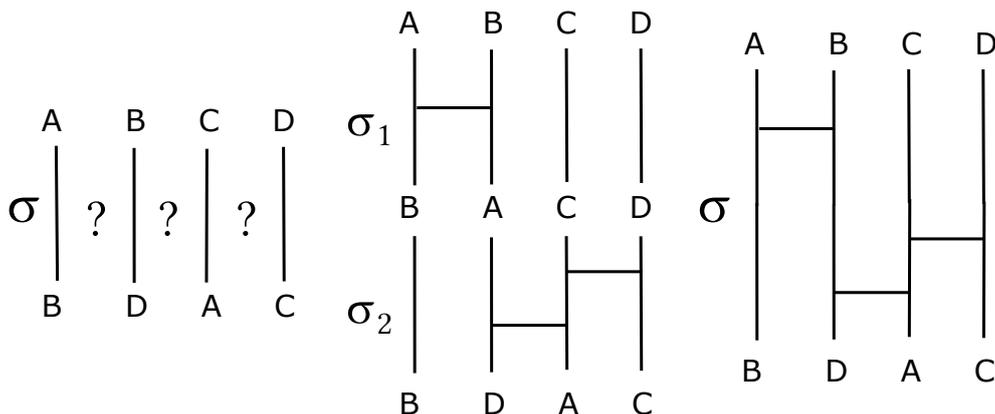
Nous avons $\sigma_1 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & C & D \end{pmatrix}$.

Nous allons maintenant créer des barres correspondant à une permutation σ_2 pour obtenir l'image $(B \ D \ ? \ ?)$ où les deux "?" découlent du choix des barres pour que $\sigma_2(B) = B$ et $\sigma_2(A) = D$. Nous pouvons constater qu'il suffit de travailler avec la restriction de σ_2 à $(A \ C \ D)$ pour obtenir $(D \ ? \ ?)$.

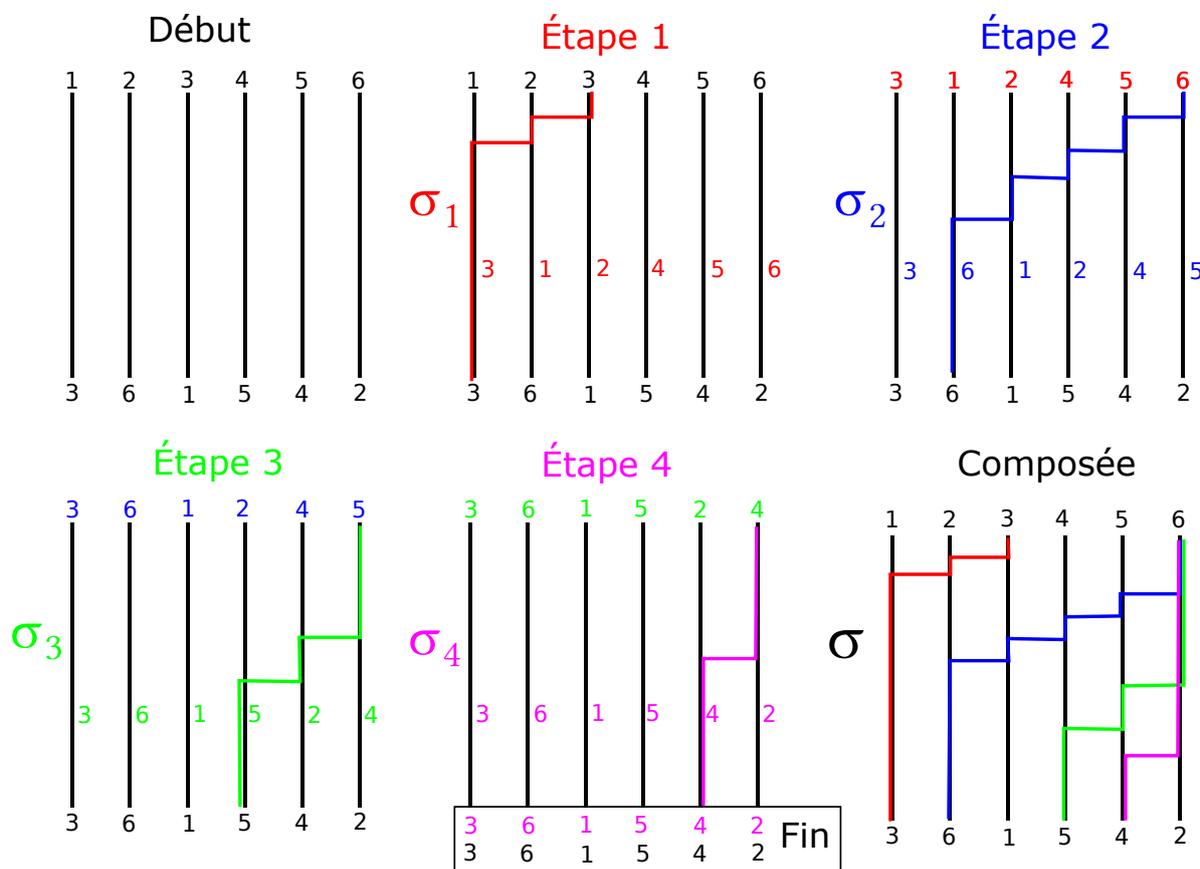
C'est le même travail – récursion – que celui du départ avec une taille de données qui est **passée de 4 à 3**. Ici nous notons deux inversions (D, A) et (D, C) dans l'image $(B \ D \ A \ C)$ que nous réalisons à l'aide de deux barres "en escalier montant de gauche à droite" entre les trois montants issus de A, C et D.

Avec ce choix, nous avons $\sigma_2(B, A, C, D) = (B, D, A, C)$. Donc $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1$ et nous avons représenté σ par une 4-échelle à trois barres. Le nombre total d'inversions dans l'image $(B \ D \ A \ C)$ vaut 3.

Donc, d'après la remarque de la prop. 7 (II-2) nous avons affaire à une représentation minimale.



Voici l'application de l'algorithme à l'exemple choisi par les élèves pour les questions 2 & 3. Nous retrouvons une 6-échelle analogue à celle que les élèves ont obtenue comme solution 1 de la question 2. À chaque étape nous introduisons un nombre de barres correspondant au nombre d'inversions (dans la ligne du bas) de l'élément choisi. Nous vérifions ici que nous avons un total de neuf barres, ce qui correspond au nombre des inversions de la permutation. La représentation est minimale au sens du nombre (ici 9) de barres utilisées. Nous pouvons cependant écrire $\sigma = (1, 3) \circ (2, 6) \circ (4, 5)$ qui est le produit de seulement 3 cycles disjoints d'ordre 2.



L'algorithme procède par un balayage de gauche à droite sur la ligne du bas, alors que celui proposé par les collégiens en réponse à la question 3 procède de façon similaire mais de droite à gauche.

Passons à la description et la preuve générale de cet algorithme, à la suite de cette première approche informelle sur deux exemples.

Entrées : Un ensemble fini $E \mid \#(E) = n$ et un couple (L, M) d'arrangements de n éléments de E . L est la liste source et M la liste but. Dans le dernier exemple, $E = \llbracket 1, 6 \rrbracket$, $L = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$ et $M = [3, 6, 1, 5, 4, 2]$.

Sortie : Nous convenons que les montants d'une n -échelle sont numérotés de 1 à n (gauche vers droite) et que la position d'une barre joignant les montants i et $i + 1$ est numérotée i pour $1 \leq i \leq n - 1$. L'algorithme doit retourner une liste S d'entiers pris dans $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, qui définit du haut vers le bas lorsqu'elle est lue de gauche à droite, les positions numérotées des barres d'une n -échelle réalisant via ses chemins l'application de L sur M . Dans le dernier exemple, $S = [2, 1, 5, 4, 3, 2, 5, 4, 5]$.

Traitement des données : La liste L induit une relation d'ordre "inférieur à" sur E pour laquelle la suite indexée des éléments de L est strictement croissante. Un couple (i, j) d'éléments distincts de E est dit "en inversion" lorsque j est inférieur à i . Nous supposons que les listes intervenant dans ce qui suit sont indexées à partir de 0. Nous allons construire la liste S en deux temps.

Tout d'abord, nous allons mémoriser dans une n -liste R les nombres d'inversions des couples (i, j) pour chaque élément i de M , j parcourant les éléments de M d'index strictement supérieur à celui de i (autrement dit situés à droite de l'élément i), en considérant pour le dernier élément i de M (d'index $n - 1$) que ce nombre est 0.

Le passage par cette étape intermédiaire va nous permettre trouver une solution minimale. Pour créer R , nous parcourons M de gauche à droite. Une fonction récursive terminale²⁰ permet de construire cette liste R . En pseudo-code, nous écrivons à partir des n -listes L et M :

```

E : Ensemble de cardinal  $n$  ;
L : Arrangement de  $n$  éléments de E ; M : Arrangement de  $n$  éléments de E ;

Fonction INVERSIONS (L : liste, M : liste) : liste
  Si (longueur(M)==1) Alors
    | Retourner [0] ;
  Sinon
    k ← Nb d'inversions du premier élément de M ;
    L' ← L privée du premier élément de M ;
    M' ← M privée du premier élément de M ;
    Retourner [k] ⊕ INVERSIONS (L', M') ; [⊕ : concaténation]
  Fin Si
Fin

```

Application de la fonction INVERSIONS de l'algorithme à $L = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$ et $M = [3, 6, 1, 5, 4, 2]$.

Listes $M' = M_i$	Inversions	k	Liste R	Listes $L' = L_i$	Index
$M = [3, 6, 1, 5, 4, 2]$	(3, 1); (3, 2)	2	$R = [2, \dots]$	$L = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$	2
$M_1 = [6, 1, 5, 4, 2]$	(6, 1); (6, 5); (6, 4); (6, 2)	4	$R = [2, 4, \dots]$	$L_1 = [1, 2, 4, 5, 6]$	4
$M_2 = [1, 5, 4, 2]$	\emptyset	0	$R = [2, 4, 0, \dots]$	$L_2 = [1, 2, 4, 5]$	0
$M_3 = [5, 4, 2]$	(5, 4); (5, 2)	2	$R = [2, 4, 0, 2, \dots]$	$L_3 = [2, 4, 5]$	2
$M_4 = [4, 2]$	(4, 2)	1	$R = [2, 4, 0, 2, 1, \dots]$	$L_4 = [2, 4]$	1
$M_5 = [2]$	\emptyset	0	$R = [2, 4, 0, 2, 1, 0]$	$L_5 = [2]$	0

Nous remarquons que l'index dans la liste L , de l'élément de M sélectionné à chaque étape est égal au nombre k des inversions comptées pour cet élément. En effet, les listes L' restent ordonnées par valeurs croissantes et sont indexées à partir de 0. Cela nous fournit une méthode générale pour obtenir le nombre k des inversions à chaque étape.

Connaissant la liste R , il nous faut maintenant en déduire une liste S correspondant à une n -échelle qui applique L sur M . Nous allons procéder en considérant des cycles²¹ successifs représentés par des n -échelles qui vont **progressivement** appliquer les éléments de L sur ceux de M . En assemblant ensuite, via l'opération \otimes ces différentes n -échelles, nous obtiendrons une solution satisfaisant aux contraintes voulues.

Nous utilisons les notations suivantes pour désigner les éléments de M et R : $M = [m_0, m_1, \dots, m_j, \dots, m_{n-1}]$ et $R = [r_0, r_1, \dots, r_j, \dots, r_{n-1}]$. Toutes les n -listes considérées sont indexées par les entiers de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Pour une n -liste X , $X[i]$ est l'élément d'index i et $X[i : j]$ est la séquence des éléments d'index $k | i \leq k \leq j$. Ainsi $M[0] = m_0$, $R[j] = r_j$ et $M[0 : 2] = (m_0, m_1, m_2)$.

Partant de la liste L , nous construisons²² à l'aide de la liste R , une suite (finie de longueur n) de n -listes T_0, T_1, \dots, T_{n-1} avec les règles qui suivent :

1. $T_0 = L$
2. Si $r_0 = 0$ (c.-à-d. $m_0 = L[0] = T_0[0]$, car le nombre $r_0 = 0$, des inversions pour m_0 est égal à l'index de cet élément dans la liste L) alors $T_1 = T_0$,
sinon $T_1 = [\sigma_0(T_0[0 : r_0]), T_0[r_0 + 1, n - 1]]$ où σ_0 est la permutation circulaire de longueur $r_0 + 1$ qui transforme $T_0[0 : r_0]$ en $[T_0(r_0), T_0[0 : r_0 - 1]]$.

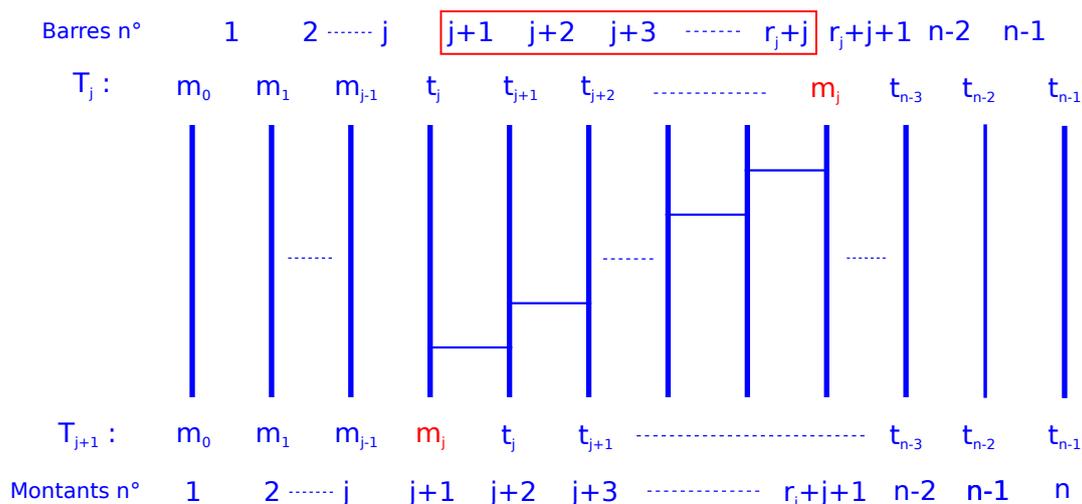
20. Dans ce cas, la récursion équivaut à l'itération.

21. Des permutations circulaires sur des listes extraites de L associées aux éléments non nuls de R .

22. Dans l'exemple p. 15, $T_0 = L, T_1 = [3, 1, 2, 4, 5, 6], T_2 = [3, 6, 1, 2, 4, 5], T_3 = T_2, T_4 = [3, 6, 1, 5, 2, 4], T_5 = [3, 6, 1, 5, 4, 2]$.

Donc $T_1 = [m_0, L[0], \dots, L[r_0 - 1], L[r_0 + 1 : n - 1]]$, car $T_0 = L$ et $L[r_0] = m_0$ (le nombre r_0 d'inversions pour m_0 est égal à l'index de cet élément dans la liste L , comme vu précédemment dans l'algorithme INVERSIONS). Dans ce cas, les éléments de T_1 d'index supérieur ou égal à $r_0 + 1$ sont ceux de T_0 . La permutation circulaire agit sur les éléments de T_0 d'index compris entre 0 et r_0 . Une n -échelle à r_0 barres ayant pour numéros $[r_0, r_0 - 1, \dots, 2, 1]$ va représenter la transformation de T_0 en T_1 .

3. Pour tout $j \in \llbracket 1, n - 2 \rrbracket$, si $r_j = 0$ alors $T_{j+1} = T_j$,
 sinon $T_{j+1} = [T_j[0 : j - 1], \sigma_j(T_j[j : r_j + j]), T_j[r_j + j + 1 : n - 1]]$ où σ_j est la permutation circulaire de longueur $r_j + 1$ qui transforme $T_j[j : r_j + j]$ en $[T_j(r_j + j), T_j[j + 1 : r_j + j - 1]]$. Dans ce cas, les j premiers éléments et ceux d'index supérieur ou égal à $r_j + j + 1$ de T_{j+1} sont ceux de T_j . La permutation circulaire agit sur les éléments d'index compris entre j et $r_j + j$. Une n -échelle à r_j barres ayant pour numéros $[r_j + j, r_j + j - 1, \dots, j + 2, j + 1]$ va représenter la transformation de T_j en T_{j+1} .



Pour représenter par une n -échelle la transformation de T_0 en T_{n-1} , nous composons via l'opération \otimes les différentes n -échelles que l'on sait produire pour représenter les transformations de T_j en T_{j+1} pour j tel que $j \in \llbracket 0, n - 2 \rrbracket$ et $r_j \neq 0$. Pour obtenir la liste des numéros de barres utilisés dans l'assemblage de ces n -échelles il nous suffit de concaténer dans l'ordre, de gauche à droite, les listes de numéros obtenues dans les représentations des passages de T_j à T_{j+1} lorsque $r_j \neq 0$.

L'algorithme fournissant la liste S des numéros de barres de la n -échelle qui représente la transformation de T_0 en T_{n-1} s'exprime en pseudo-code par :

```

Entrée : R : n-liste des inversions (de gauche à droite) ;
Sortie : S : liste des numéros de haut en bas pour lecture de gauche à droite ;

Fonction NUMEROS_BARRES (R : liste) : liste
    S ← [] ;
    Pour i de 0 à (longueur(R)-1) faire
        Si (R[i] ≠ 0) Alors
            S ← S ⊕ [R[i]+i, R[i]+i-1, . . . , i+1] ; [ajout progression arithmétique de ri termes (raison = -1)]
        Fin Si
    Fin Pour
    [⊕ : concaténation]
    Retourner S ;
Fin
    
```

Prouvons pour terminer que l'algorithme donne une représentation qui correspond à la permutation de L en M , et que celle-ci est bien minimale.

Il nous faut d'abord établir que $T_{n-1} = M$: Nous procédons par récurrence en établissant que pour tout $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, $T_i = [m_0, m_1, \dots, m_{i-1}, L'_i]$ où L'_i est la liste L privée des éléments m_k pour $0 \leq k \leq i - 1$.

Pour tout $j \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, T_{j+1} est défini en fonction de T_j , par une règle qui permute éventuellement les éléments de T_j , donc les éléments de T_{j+1} sont les mêmes à l'ordre près que ceux de T_j . Comme $T_0 = L$, les éléments de T_j sont ceux de la liste L . Considérons le prédicat $\mathcal{P}(i) : T_i = [m_0, m_1, \dots, m_{i-1}, L'_i]$ sur $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Vu la remarque précédente, nous savons déjà que L'_i est la liste L privée des éléments m_k pour $0 \leq k \leq i-1$.

1. Nous avons vu que $\mathcal{P}(1)$ est vrai, car en définissant T_1 , nous avons vu que $T_1[0] = m_0$.

2. Soit k fixé tel que $k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$ et $T_k = [m_0, m_1, \dots, m_{k-1}, L'_k]$ (Hypothèse de récurrence).

Nous avons vu dans les remarques sur le calcul de la liste R que le nombre r_k , des inversions pour m_k est égal à l'index de cet élément dans la liste L'_k , donc son index dans T_k est $k + r_k$.

Si $r_k = 0$, nous avons $T_k[k] = m_k$ donc ayant $T_{k+1} = T_k$, il s'ensuit que $T_{k+1} = [m_0, m_1, \dots, m_k, L'_{k+1}]$.

Si $r_k \neq 0$ nous avons $T_k[k+r_k] = m_k$, il s'ensuit par construction de T_{k+1} , que $T_{k+1} = [m_0, m_1, \dots, m_k, L'_{k+1}]$.

Donc \mathcal{P} est héréditaire sur $\llbracket 1, n-2 \rrbracket$.

Puisque $\mathcal{P}(1)$ est vrai et \mathcal{P} est héréditaire, nous en déduisons que $\mathcal{P}(i)$ est vrai pour tout i de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Nous avons donc bien $T_{n-1} = [m_0, m_1, \dots, m_{n-1}] = M$, car $L'_n = []$.

La liste S donne bien une solution transformant L en M . Montrons pour finir, que nous obtenons un nombre minimal de barres. Nous avons vu dans l'étude des n -échelles que le nombre total des inversions de M minorait toujours le nombre de barres.

Ici, pour notre solution associée à la liste S , nous avons construit S par étapes, en partant de la liste $[\]$, par concaténations successives de listes de longueur $R[i] = r_i$ pour $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Donc le nombre d'éléments de S , c.-à-d. le nombre de barres, vaut $\sum_{i=0}^{n-1} r_i$. Or cette dernière somme, la somme de tous les éléments de R , est aussi le nombre total des inversions de M . La solution trouvée par l'enchaînement de nos deux algorithmes précédents est donc minimale.

Cette étude nous permet de conclure que le groupe $\mathfrak{S}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ est engendré par les $n-1$ transpositions $s_i = (i, i+1)$. Toute permutation dont le nombre d'inversions vaut p peut s'exprimer minimalement comme un produit de p transpositions s_i .

Voici un script Python donnant une solution S obtenue par l'algorithme précédent.

```
# produit pour chaque élément de M la liste des nb d'inversions
#en balayant M de gauche à droite. Modifie L et M.
def inversions0(L,M):
    if len(L)==1: return [0]
    else:
        x=M.pop(0)
        k=L.index(x)
        del L[k]
        return [k]+inversions0(L,M)

#pour conserver les listes X et Y d'origine passées en paramètres
def INVERSIONS_gd(X,Y):
    L=X[:];M=Y[:];
    return inversions0(L,M)

#"NUMEROS_gd" produit dans l'ordre (haut vers bas en lisant de gauche à droite)
#les numéros des montants portant le point de jonction gauche de la barre
#à partir de la liste R des nb d'inversions produite par "INVERSIONS_gd".
# Suite d'escaliers "montants".

def NUMEROS_gd(R):
    S=[]
    for i in range(len(R)):
        S=S+list(range(R[i]+i,i,-1))
    return S

X=[1,2,3,4,5,6];Y=[3,6,1,5,4,2]
S=NUMEROS_gd(INVERSIONS_gd(X,Y));S
```

c) Une version droite-gauche de cet algorithme de construction d'une n -échelle minimale représentant une permutation quelconque

Comme l'ont fait les élèves dans leur recherche, nous pouvons aussi envisager le balayage de la liste M en partant de la droite, c.-à-d. du dernier élément de la liste M .

Tout d'abord, nous allons mémoriser dans une n -liste R ²³ les nombres d'inversions des couples (i, j) pour chaque élément i de M , j parcourant les éléments de M d'index strictement inférieur à celui de i (autrement dit situés à gauche de l'élément i), en considérant pour le premier élément i de M (d'index 0) que ce nombre est 0. En pseudo-code, nous écrivons à partir des n -listes L et M :

```

E : Ensemble de cardinal  $n$  ;
L : Arrangement de  $n$  éléments de E ; M : Arrangement de  $n$  éléments de E ;

Fonction INVERSIONS_bis (L : liste, M : liste) : liste
  Si (longueur(M)==1) Alors
    | Retourner [0] ;
  Sinon
    |  $k \leftarrow$  Nb d'inversions du dernier élément de M ;
    |  $L' \leftarrow$  L privée du dernier élément de M ;
    |  $M' \leftarrow$  M privée du dernier élément de M ;
    | Retourner  $[k] \oplus$  INVERSIONS_bis ( $L', M'$ ) ; [ $\oplus$  : concaténation]
  Fin Si
Fin
    
```

Le calcul du nombre d'inversions de l'élément i de M est donné par $k = l - p - 1$ où l est la longueur de la liste L' et p est l'index de l'élément i dans la liste L' . En effet, au cours de l'exécution de l'algorithme, les listes L' qui restent ordonnées par valeurs croissantes, sont indexées à partir de 0 et nous dénombrons les éléments de M plus grands que i dont l'index est strictement inférieur à celui de l'élément i .

De façon similaire à ce qui a été fait précédemment pour l'algorithme NUMEROS_BARRES, nous construisons une liste S ²⁴ déduite de la liste R produite par INVERSIONS_bis(L, M). Cela revient à créer une n -échelle présentant du haut vers le bas, une suite d'escaliers descendants aboutissants sur des montants de numéros décroissants. Nous obtenons aussi une solution contenant un nombre minimal de barres égal au nombre d'inversions de la permutation $L \mapsto M$. En pseudo-code, nous écrivons à partir de la liste R :

```

Entrée : R :  $n$ -liste des inversions (de droite à gauche) ;
Sortie : S : liste des numéros de haut en bas pour lecture de gauche à droite ;

Fonction NUMEROS_BARRES_bis (R : liste) : liste
  |  $p \leftarrow$  longueur(R) ;
  |  $S \leftarrow []$  ;
  | Pour  $i$  de 0 à (longueur(R)-1) faire
  | | Si ( $R[i] \neq 0$ ) Alors
  | | |  $S \leftarrow S \oplus [p-i-R[i], p-i-R[i]+1, \dots, p-i-1]$  ; [ajout progression arithmétique de  $r_i$  termes (raison 1)]
  | | Fin Si
  | | Fin Pour
  | | [ $\oplus$  : concaténation]
  | | Retourner  $S$  ;
Fin
    
```

23. Dans l'exemple traité par les collégiens, $R = [4, 2, 1, 2, 0, 0]$ qui est obtenue via les "décalages", dans l'ordre inverse sur la ligne "Total", question 3 pp. 7-9.

24. L'exemple traité par les collégiens donne $S = [2, 3, 4, 5, 3, 4, 3, 1, 2]$ qui se déduit de $R = [4, 2, 1, 2, 0, 0]$.

Voici un script Python donnant par cet algorithme, une solution S d'un type différent de celui obtenu en II-b). C'est le type de celle donnée par les élèves comme réponse à la question 3 : $S = [2, 3, 4, 5, 3, 4, 3, 1, 2]$

```
# produit pour chaque élément de M la liste des nb d'inversions
# en balayant M de droite à gauche. Modifie L et M

def inversions1(L,M):
    if len(L)==1: return [0]
    else:
        x=M.pop(-1)
        p=L.index(x)
        k=len(L)-p-1
        del L[p]
        return [k]+inversions1(L,M)

# pour conserver les listes X et Y d'origine passées en paramètres

def INVERSIONS_dg(X,Y):
    L=X[:];M=Y[:]
    return inversions1(L,M)

# "NUMEROS_dg" produit dans l'ordre (haut vers bas en lisant de gauche à droite)
# les numéros des montants portant le point de jonction gauche de la barre
# à partir de la liste R des nb d'inversions produite par "barres_dg".
# Suite d'escaliers descendants.

def NUMEROS_dg(R):
    S=[]
    p=len(R)
    for i in range(p):
        S=S+list(range(p-i-R[i],p-i))
    return S

X=[1,2,3,4,5,6];Y=[3,6,1,5,4,2]
S=NUMEROS_dg(INVERSIONS_dg(X,Y));S
```

Nous pouvons maintenant grâce à l'extension "*matplotlib*" de Python, obtenir directement le dessin de n -échelles associées à un couple (L, M) d'arrangements de n éléments d'un ensemble E à n éléments.

Préambule nécessaire pour la suppression des axes du graphique

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# pour supprimer les axes de coordonnées
fig, ax = plt.subplots()

ax.spines['right'].set_visible(False)
ax.spines['top'].set_visible(False)
ax.spines['left'].set_visible(False)
ax.spines['bottom'].set_visible(False)
#ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
#ax.yaxis.set_ticks_position('left')
ax.yaxis.set_ticks([])
ax.xaxis.set_ticks([])
```

La procédure graphique

```

def ECHELLE(S,X,Y):# S est la liste des "barres"
    n=len(X)
    #montants verticaux: traits   lw=2 pour n>=7
    for i in range(1,n+1):
        plt.plot([i,i],[0,len(S)+1],color='b',lw=2)

    #barres horizontales : traits   lw=2 pour n>=7
    for i in range(len(S)):
        plt.plot([S[i],S[i]+1],[len(S)-i,len(S)-i],color='b',lw=2)

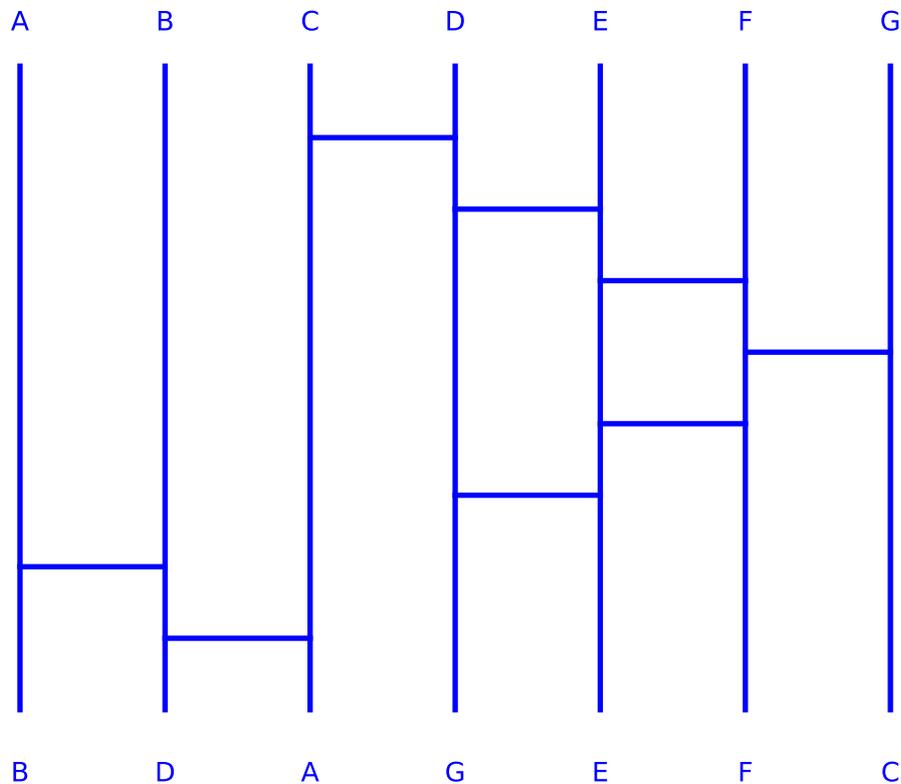
    #affichage des données X et Y: fontsize=10 et ordonnée-1 pour Y (n<=10)
    # ordonnée à modifier pour n>=15
    for i in range(1,n+1):
        plt.text(i,len(S)+1.5,str(X[i-1]),color='b',horizontalalignment='center',fontsize=10)
        plt.text(i,-1,str(Y[i-1]),color='b',horizontalalignment='center',fontsize=10)

    #Pour obtenir directement l'image au format voulu (extension .png, .eps, .pdf, etc.)
    # plt.savefig("n-echelle.png") # à supprimer pour activer.

    plt.show()

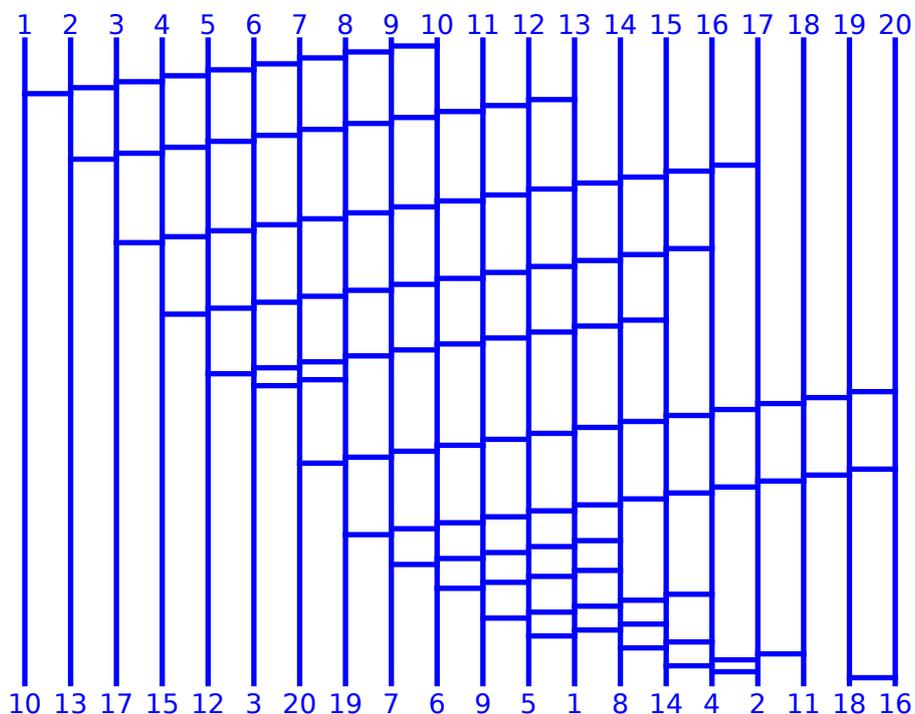
X=['A','B','C','D','E','F','G'];Y=['B','D','A','G','E','F','C']
# On a d'abord obtenu S par S=NUMEROS_dg(INVERSIONS_dg(X,Y))
S=[3,4,5,6,5,4,1,2]
ECHELLE(S,X,Y)

```

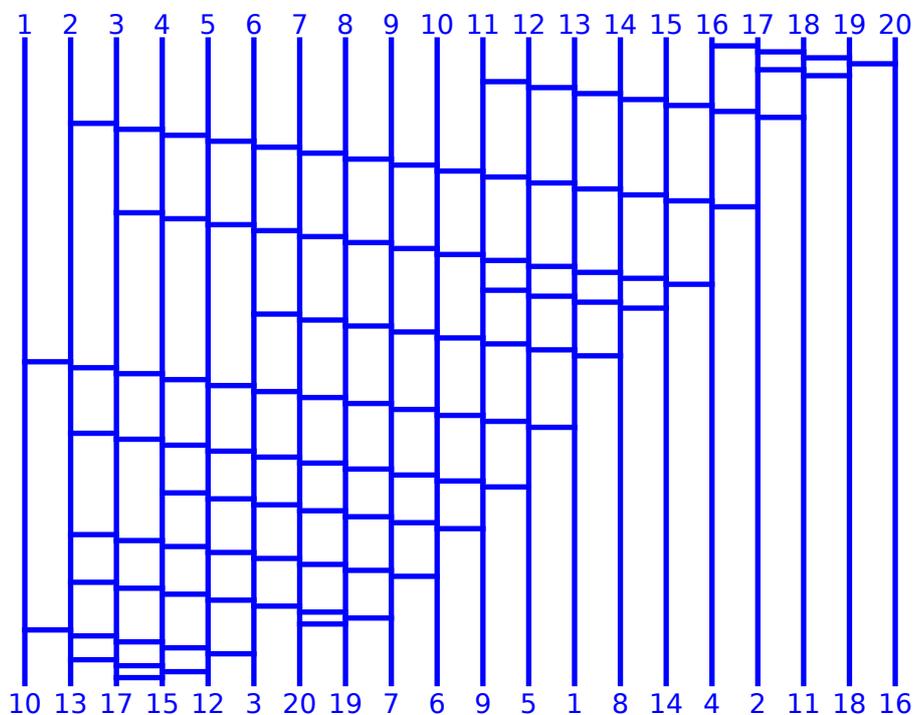


7-échelle : Graphique obtenu avec le script qui précède.

Représentations²⁵ de la permutation $Y = [10, 13, 17, 15, 12, 3, 20, 19, 7, 6, 9, 5, 1, 8, 14, 4, 2, 11, 18, 16]$ par deux 20-échelles construites par les programmes précédents. Cette permutation possède 107 inversions (nombre minimum de barres). La forme²⁶ des solutions obtenues sera exploitée dans la partie III pour le cas "droite-gauche".



20-échelle obtenue avec le script "gauche-droite".



20-échelle obtenue avec le script "droite-gauche".

25. Ce cas particulier se généralise : le groupe $\mathfrak{S}_n([1, n])$ est engendré par les $n - 1$ transpositions $s_i = (i, i + 1)$. Toute permutation dont le nombre d'inversions vaut p peut s'exprimer minimalement d'au moins deux manières comme un produit de p transpositions s_i .

26. Des escaliers descendants (resp. montants) aboutissant sur des (resp. partant de) montants d'échelle de numéros décroissants (resp. croissants) dans le cas "droite-gauche" (resp. "gauche-droite").

III – Le groupe (E_n, \cdot) des n -échelles (ou amidakujis) associé au monoïde 27 (\mathcal{E}_n, \otimes) . Une présentation de ce groupe isomorphe à \mathfrak{S}_n par générateurs et relations.

1. Une relation d'équivalence \approx définie sur \mathcal{E}_n . L'espace quotient E_n

Nous considérons la relation binaire \approx définie sur \mathcal{E}_n par :

$\forall f \in \mathcal{E}_n, \forall g \in \mathcal{E}_n \quad f \approx g \quad \text{SSI} \quad f \text{ et } g \text{ représentent la même permutation } \sigma \text{ de } \mathfrak{S}_n.$

La relation binaire \approx ainsi définie est une relation d'équivalence (preuve laissée au lecteur).

Nous étudions maintenant la compatibilité de la relation \approx avec la loi de composition \otimes :

Soient f_1 et $g_1 \in \mathcal{E}_n$ telles que $f_1 \approx g_1$ (f_1 et g_1 représentent la même permutation σ_1)

Soient f_2 et $g_2 \in \mathcal{E}_n$ telles que $f_2 \approx g_2$ (f_2 et g_2 représentent la même permutation σ_2)

Alors, $f_2 \otimes f_1$ représente la permutation $\sigma_2 \circ \sigma_1$. Il en est de même pour $g_2 \otimes g_1$, donc $f_2 \otimes f_1 \approx g_2 \otimes g_1$.

Il s'ensuit que la loi de composition \otimes passe au quotient. En la notant " \cdot " nous constatons que (E_n, \cdot) est un monoïde (nous notons " $\mathbf{1}$ " la classe de \mathcal{E}_n représentée par la n -échelle f_0 sans barre associée à la permutation identité).

De plus, pour toute n -échelle $f \in \mathcal{E}_n$, il existe une n -échelle $f' \in \mathcal{E}_n$ telle que $f' \otimes f \approx f \otimes f' \approx f_0$. Nous en déduisons que (E_n, \cdot) est un groupe.

Par ailleurs, par passage au quotient, le morphisme de \mathcal{E}_n dans \mathfrak{S}_n définit un morphisme de groupes entre (E_n, \cdot) et (\mathfrak{S}_n, \circ) . Ce dernier est évidemment injectif vu la définition de la relation \approx . Nous avons prouvé dans la partie II que toute permutation pouvait être représentée par une n -échelle, donc ce morphisme est aussi surjectif. Cela établit l'isomorphisme entre (E_n, \cdot) et (\mathfrak{S}_n, \circ) .

2. Générateurs de (E_n, \cdot) . Relations satisfaites par ces générateurs.

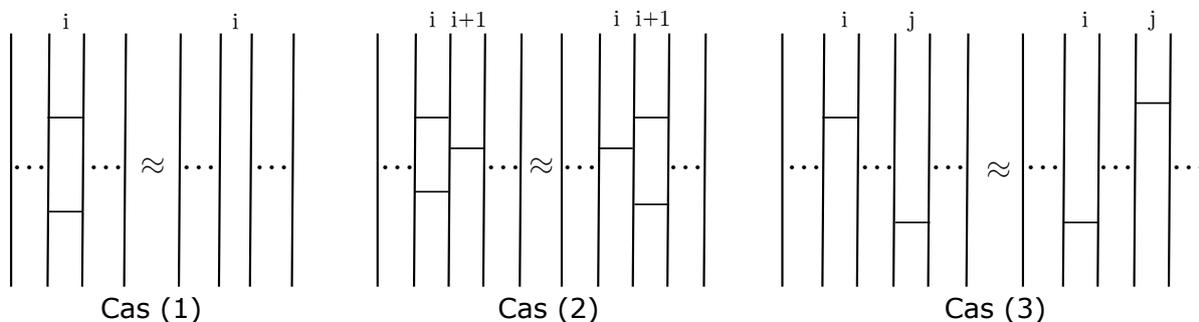
Nous avons vu dans la partie II que toute n -échelle de \mathcal{E}_n est un produit (\otimes) de k (entier naturel) n -échelles à une seule barre. Notons b_1 (resp. b_i où $1 \leq i \leq n - 1$) l'élément de E_n représentant la n -échelle ayant une unique barre placée en position n° 1 (resp. en position n° i). Il s'ensuit que tout élément x de E_n peut s'écrire $x = b_{i_1} \cdot b_{i_2} \cdot \dots \cdot b_{i_k}$ où $(i_1, i_2, \dots, i_k) \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket^k$. Autrement dit $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}$ est une partie génératrice de E_n .

Enfin nous avons constaté sur quelques exemples de la partie II, que ces générateurs de E_n satisfaisaient les relations suivantes :

$$\forall i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket \quad b_i \cdot b_i = b_i^2 = \mathbf{1} \tag{1}$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n - 2 \rrbracket \quad b_i \cdot b_{i+1} \cdot b_i = b_{i+1} \cdot b_i \cdot b_{i+1} \tag{2}$$

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket^2, |i - j| \geq 2 \quad b_i \cdot b_j = b_j \cdot b_i \tag{3}$$



27. Ensemble muni d'une loi de composition interne associative ayant un élément unitaire.

3. Présentation abstraite de (E_n, \cdot) par générateurs et relations.

Nous allons prouver que le groupe G_n défini par l'ensemble des générateurs $X = \{g_1, g_2, \dots, g_{n-1}\}$ auxquels on impose, en substituant g_i à b_i , de satisfaire les relations (1), (2) et (3), est isomorphe à E_n .

Nous pouvons déjà en employant la propriété universelle du groupe G_n , affirmer que l'application de X dans E_n qui envoie g_i sur b_i pour $1 \leq i \leq n-1$, se prolonge en un unique morphisme φ de G_n dans E_n puisque les relations (1), (2) et (3) sont satisfaites dans les deux groupes. De plus, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}$ est une partie génératrice de E_n . Il en découle que le morphisme φ est surjectif. Il nous reste à établir que c'est un isomorphisme. Pour ce faire, nous allons majorer le cardinal de G_n par celui de E_n qui vaut $n!$.

Nous conjecturons en nous inspirant de la forme²⁸ du résultat fournie pour tout élément de E_n par l'algorithme « droite-gauche » (cf. II.3.c, p. 26-28) que tout élément de G_n peut s'exprimer comme un mot formé d'une succession de paquets P_k où $1 \leq k \leq n-1$ et $P_k = g_k g_{k-1} \dots g_{i_k}$ les index étant décroissants et consécutifs avec $i_k \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Plus précisément, nous énonçons un lemme que nous établissons ensuite par récurrence sur n .

Lemme : Tout élément $w \in G_n$ s'exprime sous la forme :

$$w = \dots \underbrace{g_k g_{k-1} \dots g_{i_k+1} g_{i_k}}_{P_k} \dots \underbrace{g_{n-2} g_{n-3} \dots g_{i_{n-2}+1} g_{i_{n-2}}}_{P_{n-2}} \dots \underbrace{g_{n-1} g_{n-2} \dots g_{i_{n-1}+1} g_{i_{n-1}}}_{P_{n-1}}$$

où pour $1 \leq k \leq n-1$, $1 \leq i_k \leq k+1$ avec la convention que le paquet P_k ne figure pas si $i_k = k+1$.

Ainsi w est un mot d'au plus $n-1$ paquets où chaque paquet P_k écrit est le mot $g_k g_{k-1} \dots g_{i_k}$ où les index sont décroissants et consécutifs avec $i_k \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

Dit autrement, tout élément de G_n s'obtient en supprimant²⁹ dans l'ordre, les dernières lettres de chaque paquet, en partant de la décomposition de l'élément le plus long contenant $n-1$ paquets P_k de longueur k pour $1 \leq k \leq n-1$:

$$\underbrace{g_1}_{P_1} \underbrace{g_2 g_1}_{P_2} \underbrace{g_3 g_2 g_1}_{P_3} \dots \underbrace{g_k g_{k-1} \dots g_1}_{P_k} \dots \underbrace{g_{n-2} g_{n-3} \dots g_1}_{P_{n-2}} \underbrace{g_{n-1} g_{n-2} \dots g_1}_{P_{n-1}}$$

Nous notons pour $n \geq 2$, $\mathcal{H}(n)$ le prédicat énoncé au départ.

Pour $n = 2$, le résultat est évident car $G_1 = \{g_1, 1\}$ où 1 correspond au mot vide.

Nous supposons $\mathcal{H}(n)$ vrai et procédons en deux étapes pour montrer que \mathcal{H} est héréditaire à partir de $n = 2$. Soit w un élément quelconque G_{n+1} .

Étape A : Nous établissons que w peut s'écrire avec au plus une occurrence de g_n . Supposons que w ait une écriture contenant un nombre minimal d'occurrences de g_n supérieur ou égal à 2.

Dans ce cas, il existe $w' \in G_n$ et $x, y \in G_{n+1}$ tels que : $w = x g_n w' g_n y$

1. Si w' contient une occurrence de g_{n-1} , nous avons d'après l'hypothèse de récurrence

$$w' = w'' g_{n-1} g_{n-2} \dots g_{i_{n-1}+1} g_{i_{n-1}} \text{ où } w'' \text{ ne contient pas d'occurrences de } g_{n-1}.$$

D'après les relations (3), w'' et g_n commutent ainsi que g_i pour $i \leq n-2$. Dans ce cas, nous avons :

$$w = x g_n w'' g_{n-1} g_{n-2} \dots g_{i_{n-1}} g_n y = x w'' g_n g_{n-1} g_{n-2} \dots g_{i_{n-1}} y. \text{ Avec les relations (2) il vient}$$

$$w = x w'' g_{n-1} g_n g_{n-1} g_{n-2} \dots g_{i_{n-1}} y.$$

Nous avons mis en évidence une écriture de w contenant une occurrence de g_n en moins. Cela contredit la minimalité supposée des occurrences de g_n .

2. Sinon $w' = w''$ où w'' ne contient pas d'occurrences de g_{n-1} . D'après les relations (1) et (3) :

$$w = x g_n w'' g_n y = x w'' g_n^2 y = x w'' y \text{ (} g_n^2 = 1 \text{ - mot vide). Cela met en évidence une écriture de } w \text{ contenant deux occurrences de } g_n \text{ en moins, qui contredit la minimalité supposée des occurrences de } g_n \text{ dans l'écriture de } w.$$

Ainsi l'étape A est validée. Cette étude nous permet de conclure que le groupe $\mathfrak{S}_n(\llbracket 1, n \rrbracket)$ est engendré par les $n-1$ transpositions $s_i = (i, i+1)$. Toute permutation dont le nombre d'inversions vaut p peut s'exprimer minimalement comme un produit de p transpositions s_i .

Étape B : Soit $w \in G_{n+1}$

1. Si w s'écrit sans occurrences de g_n , alors $w \in G_n$ et d'après l'hypothèse de récurrence w peut s'écrire sous la forme voulue (ici sans paquet P_n).
2. Si w s'écrit avec une seule occurrence de g_n , alors $w = x g_n y$ où $x, y \in G_n$. Ayant $y \in G_n$, d'après l'hypothèse de récurrence nous pouvons affirmer que l'on a soit $y = z g_{n-1} g_{n-2} \dots g_{i_{n-1}}$, soit $y = z$ avec $z \in G_{n-2}$. Comme z et g_n commutent, nous avons $w = x z g_n y'$ où l'on a soit $y' = g_{n-1} g_{n-2} \dots g_{i_{n-1}}$,

28. $S = [2, 3, 4, 5, 3, 4, 3, 1, 2]$ est associée à $\underbrace{b_2 b_1}_{P_2} \underbrace{b_3}_{P_3} \underbrace{b_4 b_3}_{P_4} \underbrace{b_5 b_4 b_3 b_2}_{P_5}$ en renversant l'ordre des éléments.

29. Éventuellement tous les générateurs g_k d'un paquet, ce qui le fait disparaître.

soit $y' = 1$ (y' mot vide). Sachant que $xz \in G_n$, nous pouvons d'après l'hypothèse de récurrence, l'écrire sous la forme voulue qui dans les deux cas, conduit pour w à une forme satisfaisant le prédicat \mathcal{H} en jeu. Nous avons établi que \mathcal{H} est héréditaire à partir de $n = 2$.

Majoration du cardinal de G_n .

D'après le lemme précédent, chaque élément de G_n est le "produit" de $n - 1$ paquets P_k où $1 \leq k \leq n - 1$, chacun étant soit absent(vide), soit constitué d'au plus k générateurs g_i d'index décroissants et consécutifs ($P_k = g_k g_{k-1} \cdots g_{i_k}$). Cela conduit à un maximum de $k + 1$ écritures possibles pour chaque valeur de k .

Donc $\#(G_n) \leq \prod_{k=1}^{n-1} (k + 1) = 2 \times 3 \cdots \times n = n!$. Il s'ensuit que $\#(G_n) \leq \#(E_n)$. Par conséquent le morphisme surjectif φ de G_n dans E_n est un isomorphisme.

Nous avons ainsi réciproquement, présenté (E_n, \cdot) et le groupe isomorphe (\mathfrak{S}_n, \circ) par un ensemble de $n - 1$ générateurs assujettis aux relations (1), (2) et (3).

Liens web sur les amidakujis et bibliographie

Une vidéo "youtube" présentant les amidakujis : [vidéo](#)

Le document original, reproduit ici p. 7-14, de l'**atelier MeJ** : [Amidas-Kuji-Montbrison-2013](#)

La conférence de **Stéphane Gaussent** aux journées nationales APMEP Lyon 2016 : [JN Lyon 2016](#)

Un autre travail du **collège de Montbrison** sur les amidakujis : [Amidas-Kuji-Montbrison-2014](#)

Shuttle Puzzle : [page du site "cut-the-knot"](#) avec applet java

Pour la partie III-3), [Jérôme Germoni - Université Claude Bernard-Lyon I](#)

Je me suis inspiré de ce document pdf (obtenu sur internet) en l'adaptant à mon exposé sur les n -échelles.

Dans ce document, trois références de livres sont indiquées :

Josette Calais, *Éléments de théorie des groupes*, PUF, chap. IX.

Jean-Yves Mérindol, *Nombres et Algèbre*, EDP Sciences.

Nathan Jacobson, *Basic Algebra II*.