

Une curiosité architecturale et mathématique d'un pavage de Penrose

Le pavage de l'église Santa Maria de Mahón à Minorque (Espagne)

Équipe Géométrie de l'IREM de Normandie-Caen

I – En partant d'un pentagone

Nous avons présenté dans notre ouvrage *Le nombre d'or, nouvelles activités ludiques* (voir la bibliographie) des exemples de pavages réalisés à partir des triangles et rectangles d'or. Un article signalé par Ruben Rodriguez, tiré du journal espagnol *El mundo* et relatif à un dallage visible dans une église de Minorque, a piqué notre curiosité.

Dans ce papier, il était présenté comme un pavage de Penrose d'un type particulier : les pavés semblaient être disposés de façon aléatoire mais parfaite : côtés et sommets jointifs.

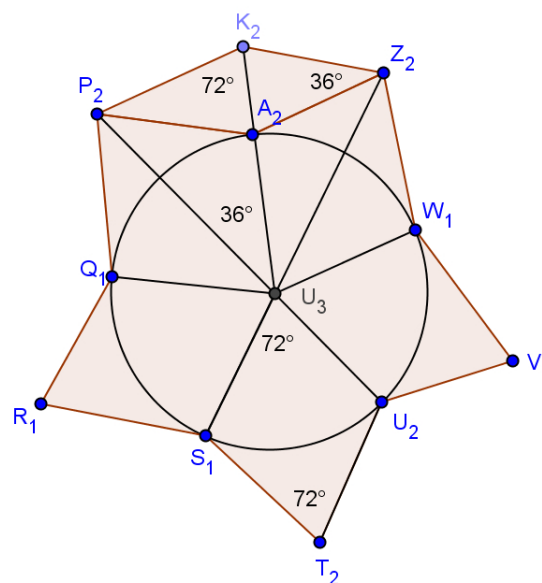
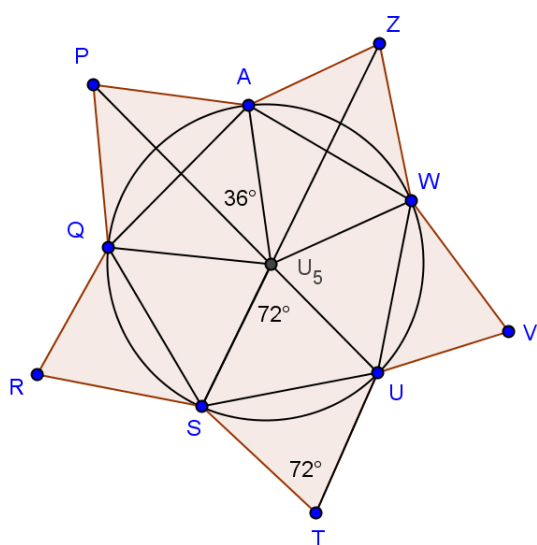
Nous présentons ci-dessous deux figures explicatives de la construction de ces deux losanges, avec les mesures d'angles obtenues par le calcul et le logiciel *GEOTRECE*.

Voici ci-contre (sur la photographie du sol) un détail du centre de ce pavage. Remarquons que cette partie centrale est un pentagone régulier étoilé que nous avons tout d'abord cru être le pentagone étoilé régulier classique lié aux triangles d'or. Une observation plus précise nous en a dissuadé. Ce pavage est constitué de deux losanges : l'un assez proche du carré, l'autre plus étiré

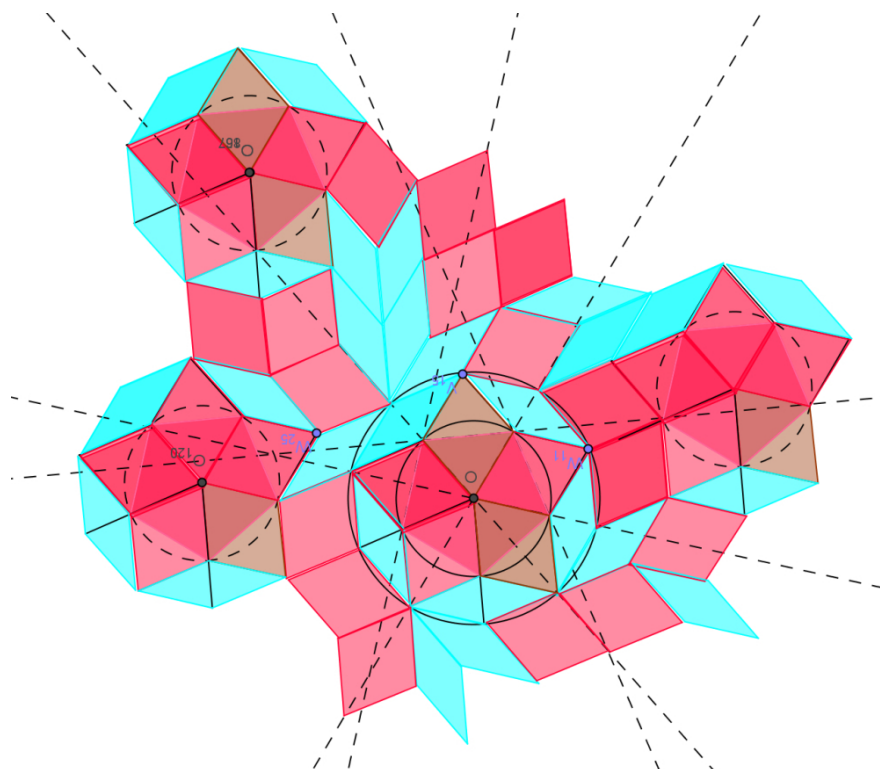
avec l'un de ses angles de mesure proche de π .



Il nous a semblé intéressant de présenter cette réalisation à des élèves de niveaux variés afin de voir ou revoir des constructions géométriques classiques puis d'effectuer des calculs sur ces constructions. **Une présentation détaillée avec exercices et corrigés** est disponible sur le lien : <http://www.math.unicaen.fr/irem/spip.php?article197>



Nous avons ensuite réalisé un pavage aléatoire avec *GEOTRECE* en traçant tout d'abord les deux pavés puis en utilisant les fonctions *ROTATION* et *SYMETRIE* du logiciel :

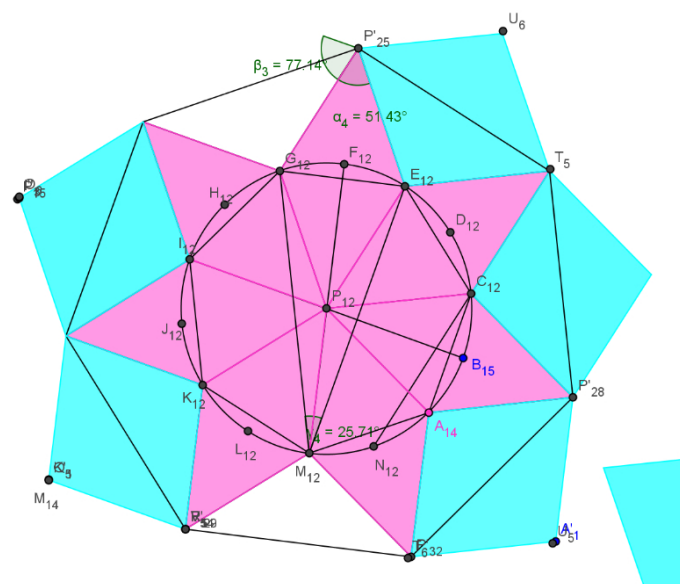
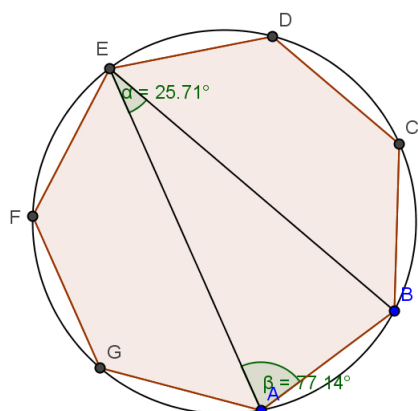


Remarque : à l'expérience nous constatons qu'il faut un peu de soin au cours de la construction afin de ne pas « arriver sur un cul de sac » mais il y a tout de même une grande liberté de pose.

II – En partant d'un heptagone

Nous nous sommes alors interrogé sur un cas qui ne semblait pas avoir été étudié :
Serait-il possible de construire un pavage aléatoire à partir d'un heptagone ?

Voici une partie de notre parcours de recherche avec l'affichage par *GEOGEBRA* des mesures d'angle que nous avons confirmé par le calcul :



Lorsque nous avons de nouveau essayé de paver le plan avec ces deux nouveaux losanges, nous avons eu une surprise : il y avait des trous ! Nous sommes revenu à nos calculs d'angles. Lors de la construction des losanges de Penrose que nous pouvons qualifier « d'or » car ils sont constitués de deux triangles d'or accolés, nous avons :

- Deux triangles d'or obtus accolés par leur grand côté ;
- Deux triangles d'or aigus accolés par leur petit côté.

Les angles des deux losanges sont donc respectivement :

36° et 144° pour le premier soit $\pi/5$ et $4\pi/5$;

72° et 108° pour le second soit $2\pi/5$ et $3\pi/5$.

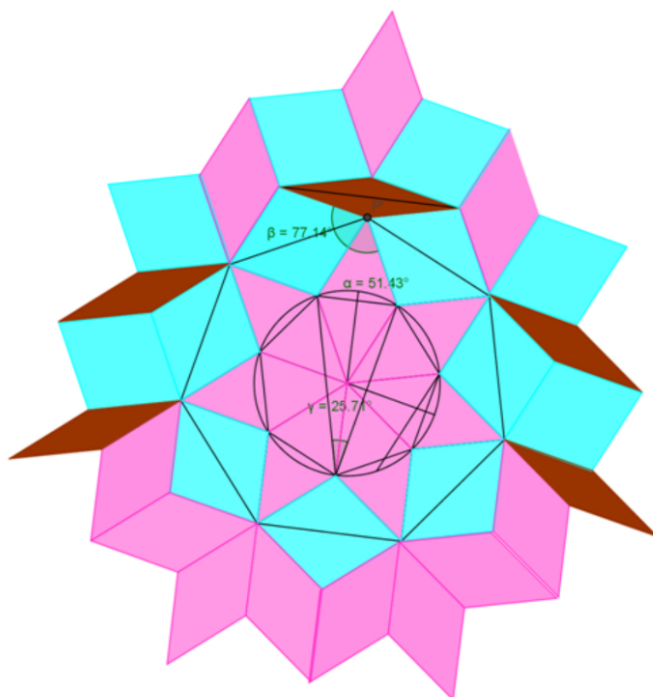
Nous disposons donc de tous les angles de mesure inférieure à π et multiples de $\pi/5$ regroupés par paires, dont la somme est π puisque nous utilisons des losanges.

Une étude simple permet de s'assurer que ces « angles physiques » permettent de paver le plan – avec soin cependant – de manière aléatoire. (Nous détaillons

cette étude dans notre article en ligne sur le site de l'IREM de Normandie)

Qu'en est-il de l'heptagone ?

Voici ci-dessous, un exemple que nous avons essayé de rendre esthétique : Nous avons tracé l'heptagone étoilé de départ en rose puis les losanges suivants en turquoise et continué le processus : il apparaît alors des petits losanges bordeaux. Nous avons poursuivi par symétrie pour obtenir une certaine régularité.



Une extension du pavage de type 3 de Penrose à partir de l'heptagone.

Reprise de l'étude et généralisation

Lorsque $p = 5$ les multiples de $\pi/5$ inférieurs à π sont : $2\pi/5$ $3\pi/5$ $4\pi/5$ ceux-ci définissent seulement deux losanges car la somme des angles d'un losange est 2π . Ainsi seuls conviennent les couples : $\pi/5$ et $4\pi/5$; $2\pi/5$ et $3\pi/5$.

Lorsque $p = 7$ les multiples de $\pi/7$ sont : $2\pi/7$ $3\pi/7$ $4\pi/7$ $5\pi/7$ $6\pi/7$. Ces angles définissent 3 losanges grâce aux couples : $\pi/7$ et $6\pi/7$; $2\pi/7$ et $5\pi/7$;

$3\pi/7$ et $4\pi/7$. Essayons de généraliser ce résultat : p étant premier tous les entiers qui lui sont inférieurs sont premiers avec lui. Il y en a $p - 1$. Ce nombre est pair car p est impair (sauf 2). Les losanges utilisés dans les pavages de ce type utilisent chacun une paire de mesure d'angles, de somme égale à π . Il y a $\frac{(p-1)}{2}$ paires possibles. Il y a donc, pour tout p premier, $\frac{(p-1)}{2}$ losanges possibles pour paver le plan de cette façon.

Danielle Salles-Legac avec la contribution de Ruben Rodriguez Herrera, Philippe Langlois, Mathieu Blossier.

Bibliographie

Rodriguez Herrera et Danielle Salles-Legac *Le nombre d'or, nouveautés mathématiques ludiques*, édition 2015 de l'IREM de Normandie.

Brigitte Rozoy, *De MC ESCHER aux dessins à motifs répétitifs*, brochure numérisée téléchargeable sur le site web de l'IREM de Normandie : <http://www.math.unicaen.fr/irem/>

La version détaillée de cet aperçu se trouve à l'url : <http://www.math.unicaen.fr/irem/spip.php?article197>