

Point de vue : le vocabulaire des mathématiques

Les mots structurent la pensée, et les pensées structurent l'humain en devenir !

L'enseignement des mathématiques n'a pas pour unique finalité l'enseignement de contenus. Il stimule l'esprit par la logique, par le raisonnement rigoureux, par l'exactitude des notions et par leur articulation, et contribue ainsi à la formation d'êtres humains autonomes et lucides. Mais s'il revendique cette ambition, il ne peut pas être lui-même imprécis, inexact ou manquer de rigueur et de cohérence. Or il nous semble que l'utilisation très répandue de certains mots « magiques » nuit à la compréhension mathématique des élèves sur le long terme. Des mots non appropriés aux mathématiques tendent à un enseignement « en surface » basé sur l'apprentissage par cœur, à une pensée floue et à une compréhension erronée des choses. Quelle que soit la pratique didactique menée par ailleurs, on ne peut faire l'économie d'une réflexion sur le vocabulaire adéquat qui l'accompagne.

Cet article se borne à quelques remarques sur des mots ou expressions d'usage courant au collège, qui, à notre avis, risquent de donner une perception inexacte des enjeux de la discipline.

1. Passer de l'autre côté

Cette expression est notamment utilisée pour résoudre une équation du type $x + b = c$. Certes, l'enseignant connaît parfaitement l'opération mathématique qu'elle dissimule. Mais il n'en va pas de même pour l'élève : au mieux, il entendra, une seule fois, dans un cadre théorique, qu'il s'agit de soustraire un nombre de chaque côté de l'égalité. Mille fois ensuite, on lui dira seulement qu'il s'agit de « passer de l'autre côté » ce qui risque d'entraver sa compréhension des mathématiques sur le long terme. Lorsque les problèmes se compliqueront (du type $ax + b = c$, $x^2 + b = c$, etc.), il sera confronté à une accumulation de règles comme : « avec un + ou un -, je passe de l'autre côté et je change le signe » si c'est une multiplication, « je passe de l'autre côté, en bas, et sans changer le signe » et si c'est un carré « je passe l'exposant de l'autre côté et il devient une racine carrée » et ainsi de suite. À chaque situation particulière sa petite technique particulière. Toutes ces techniques relèvent davantage de la dextérité que de la logique cérébrale. Dans cette apparente absence de logique, les élèves qui rencontrent le plus de difficultés en mathématiques ont bien du mal à s'y retrouver. Et comment résoudre $e^x = 5$ en Terminale lorsqu'on « passe de l'autre côté » depuis le collège ?

Sous cette forme, l'apprentissage des mathématiques apparaît comme un assemblage peu intelligible de techniques, sans lien entre elles. C'est selon nous la notion d'équilibre dans l'égalité qui devrait être mise en avant et non le déplacement de termes. En vérité, la seule action qu'il soit possible d'effectuer sur une éga-

lité tout en la conservant est d'effectuer la même opération (ou d'appliquer la même fonction) de chaque côté de l'égalité. Cet unique principe, très simple, reste valable quel que soit le niveau d'enseignement.

2. Simplifier

Les mathématiques laissent peu de place à la subjectivité. Or ce qui est simple pour quelqu'un est parfois compliqué pour un autre. Ainsi, notre expérience nous suggère que *simplifier une fraction* ou *simplifier une expression algébrique* sont des manières de parler qu'il conviendrait d'éviter.

On a $\frac{68}{100} = \frac{17}{25}$. Mais peut-on affirmer que la fraction $\frac{17}{25}$ est plus simple que $\frac{68}{100}$? Nos élèves auraient plutôt tendance à considérer $\frac{68}{100}$ comme un problème de calcul et 0,68 comme sa solution. Comment justifier alors l'utilisation du verbe simplifier ? Il nous semble qu'il est préférable de se forcer à utiliser l'expression *réduire la fraction*, d'autant que l'adjectif irréductible est courant tandis qu'insimplifiable est pratiquement inusité.

Par ailleurs, voici l'énoncé d'un exercice tiré d'un manuel scolaire de Seconde générale :

Simplifier l'expression $3x^2 - x(2x + 5) + 4$.

Le corrigé donne $x^2 - 5x + 4$, mais devrait-on invalider la réponse d'un élève doué qui factoriserait le polynôme et obtiendrait $(x - 1)(x - 4)$? Quelle est la forme la plus simple ?

3. Barrer, enlever, supprimer

Tous les enseignants de mathématiques ont rencontré le type de production suivant :

$$\frac{3 + 5}{4 + 5} = \frac{3}{4}$$

« Oui, Madame, j'ai barré les 5 ! J'ai toujours appris à faire comme ça : quand y a un 5 en haut et un 5 en bas, on peut les barrer, enfin les supprimer quoi, vous voyez bien ce que je veux dire, non ? On fait comme ça, on les enlève ! »

Voici un autre exemple. Il s'agit d'une production d'une élève de Terminale S ayant de très bons résultats en mathématiques depuis le collège :

$$\frac{4u_n + 5}{u_n + 8} = \frac{4 + 5}{8}$$

Sur la feuille, cette élève a barré les u_n . Elle avait pourtant réussi de manière irréprochable tout le début d'un exercice difficile sur les suites, sujet dont elle a acquis une compréhension assez profonde. Son erreur pourrait laisser croire, à tort, qu'elle n'a pas le niveau lui permettant d'être en Terminale S. Elle provient d'une compréhension antérieure erronée des fractions. Au collège, elle apprenait que « lorsqu'il y a une multiplication, on barre, mais lorsqu'il y a une addition, on ne barre pas ». Règle apprise le temps d'un contrôle, pour

la bonne note, puis oubliée, aussi rapidement qu'elle avait été enregistrée.

Pour éviter ces automatismes incertains consistant à « barrer », « enlever », « supprimer », etc., je propose de mener les calculs de façon à mettre en évidence le rôle du nombre 1. On peut par exemple raisonner ainsi :

$$\frac{15}{20} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{5} = \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$$

Cette procédure permet à l'apprenant de comprendre qu'on ne réduit pas $\frac{3 \times 5}{4 \times 5}$ de la même manière que $\frac{3+5}{4+5}$ – qui est d'ailleurs irréductible !

4. Changer, mettre, sortir

Les élèves apprennent qu'il faut « changer les signes dans une parenthèse » lorsqu'il y a un signe moins devant. Voici un résultat typique de cet enseignement. Il s'agit de la production d'un élève très appliqué à ce qu'on lui enseigne qui écrit : $-(a - b) = -(-a + b)$. Il le justifie ainsi : « Bah oui monsieur, j'ai changé les signes dans la parenthèse ! ».

Les élèves apprennent aussi à « mettre le carré » sur chaque terme de la parenthèse lorsqu'il s'agit d'une multiplication, mais à ne pas le mettre lorsqu'il s'agit d'une addition. Ils apprennent encore à « sortir » un 9 d'une racine carrée et que « le 9 se transforme en 3 ». Des apprentissages de ce type les éloignent des mathématiques qui sont en jeu et les emmènent encore sur le terrain de la dextérité.

Dans tous ces cas, nous pensons que formuler explicitement des règles de distributivité apporte davantage de logique et d'universalité : distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, distributivité unilatère de

la puissance par rapport à la multiplication. Ces règles sont claires, susceptibles d'être entendues par tous. De plus, comme nous l'a fait remarquer Ruben Rodriguez, elles se prêtent bien au travail de correspondance entre univers des figures géométriques et univers des nombres et des calculs.

Conclusion

Le vocabulaire que nous remettons en question est très largement utilisé en classe, ainsi que dans les manuels scolaires. De bonne foi, on recourt à des mots d'apparence non technique, apparemment plus audibles, plus abordables, plus aimables. Nous avons souvent croisé des élèves ayant un grand sens de la logique, qui étaient considérés comme rencontrant des difficultés en mathématiques. Ne serait-ce pas plutôt une certaine absence de logique dans les modes d'enseignement des savoirs et savoir-faire qui est à la source de leurs difficultés ?

On découvre régulièrement que les connaissances les plus élémentaires des étudiants ou autres post-bacheliers scientifiques sont parfois très fragiles : l'accumulation de mots imagés et de recettes techniques telle qu'on la connaît au collège ne ferait-elle pas obstacle à la construction de connaissances solides ? Une finalité de l'enseignement des mathématiques est d'élever l'esprit logique de tous. Pour tous les élèves, nous pensons qu'un vocabulaire approprié et précis est souhaitable, au bénéfice de leurs capacités de raisonnement et d'argumentation.

Aurélien Detey