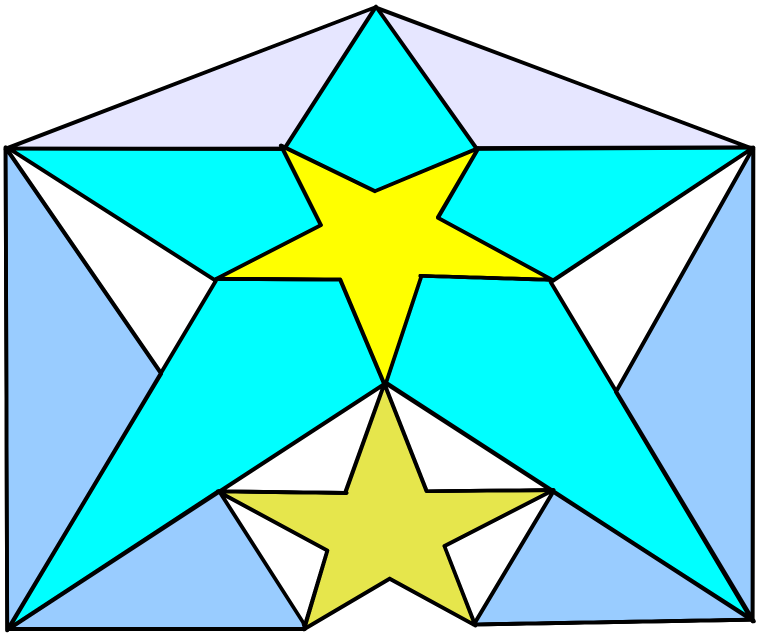
I.R.E.M. de Normandía   Universidad de Caen



Jugar y aprender con El número de oro

Actividades variadas geométricas y algébricas en relación con la historia del arte y la biología

Ruben RODRIGUEZ HERRERA Danielle SALLES-LEGAC
Jean-Pierre LE GOFF Abderrahmane NITAJ   Michel SOUFFLET
Anne-Marie BOCK   Silvia SÁNCHEZ D'ARRIGO
Caen Francia   Publicación de Julio 2016

JUGAR Y APRENDER CON EL NÚMERO DE ORO

Actividades variadas para los aficionados de matemáticas lúdicas Y los alumnos de la secundaria superior

por Ruben Rodriguez Herrera, Danielle Salles-Legac
Michel Soufflet, Jean-Pierre Le Goff, Abderrahmane Nitaj
Silvia Sánchez D'Arrigo, Eric Lehman, Anne-Marie Bock

ADVERTENCÍA

Les proponemos varias actividades tanto para los alumnos de secundaria básica y superior, los estudiantes profesores que para la gente interesada por los entretenimientos y la cultura matemáticos.
Son de niveles diferentes para dar ideas de estudio para todos: jóvenes y menos jóvenes.

SUMARIO

Capítulo I-1 à 1-3 por Ruben Rodriguez
Capítulo I-1 Una secuencia a cerca del número de oro en relación con la , ampliación-reducción para la clase de tercero del colegio secundario básico (diremos ahora **CSB**). Página 3
Capítulo I-2 Variantes sobre trayecto alrededor del número de oro en tercero. Construcción del "rectángulo de oro" a partir de un ángulo de 72°; Propiedades del pentágono regular, Recorrer sobre "el triángulo de oro" y el "triángulo sagrado" de Pitágoras. Página 15
Capítulo I-3 Variantes sobre el trayecto alrededor del número de oro en tercero. Otra construcción sobre un problema a partir del cuadrado. Página 30
Capítulo II por Abderrahmane Nitaj: Matemáticas e Historia del Arte; actividades transversales alrededor del número de oro. Página 39
Capítulo III-1 por Danielle Salles: Pavimento del plano y doble espiral, algunas otras espirales. Página 58
Capítulo III-2 por Michel Soufflet: El número de oro en el liceo secundario superior (diremos ahora **LSS**), en formación de los profesores y también los aficionados Página 89
Capítulo IV por Danielle Salles, Ruben Rodriguez y Christian Ballot: Iniciación a la teoría de las ecuaciones algébricas módulo un número primo, el caso del número de oro. Página 101

Capítulo V-1 por Jean Pierre Le Goff, Ruben Rodriguez, Danielle Salles: Definiciones y propiedades de los pentágonos celestes convexos y estrellados Página 122
Capítulo IV-2 por Danielle Salles, Ruben Rodriguez: Al encuentro del pentágono celeste. Página 135
Anexo: medidas antiguas Página 163
Bibliografía Página 175
Indexo. Página 176

Capítulo I-1

Una secuencia alrededor del número de oro
por Ruben Rodriguez

Pintura de Raphaël:
"*La escuela de Atenas*"
Detalle: Platón y Aristotes

Nivel: CSB
Objetivos: a través del trayecto propuesto, los alumnos vuelven a investir propiedades de la geometría, desarrollan sus capacidades de investigar, de modelisar, de formalizar a través de propiedades geométricas y propiedades del álgebra, luego autoevaluarse.
.
Palabras claves: el número de oro, el rectángulo de oro, la proporción, los ángulos complementarios, los triángulos de "la misma forma", las propiedades algébricas del cálculo literal, las identidades notables, la raíz cuadrada, las ecuaciones.
.
Material: papel encartonado, instrumentos de geometría, tijeras, computador.

Introducción
Este trabajo ha sido iniciado como consecuencia de una reunión del equipo de formadores del "rectorat" de Caen. Una de nuestras colegas deseaba trabajar con sus alumnos el número de oro en una óptica a la vez matemática y a la vez de la historia del arte, pero no había encontrado textos de actividades satisfactorias en las diferentes publicaciones tanto en biblioteca como en línea.

En efecto las publicaciones ponían sobre todo en exergo las relaciones bien conocidas en la arquitectura (el Partenón), las artes (pintura del siglo XVI) las proporciones "ideales" humanas (Leonardo de Vinci) etc. Podemos por otra parte considerar que estas relaciones son a veces un poco imaginarias, son numerosas y a pesar de eso, interesantes de estudiar.

Las posibilidades de investigaciones matemáticas y didácticas alrededor del número de oro son extremadamente variadas como usted podrá comprobarlo en los textos que vamos a proponerle. En efecto los autores de nuestros textos son diferentes y estudiaron las actividades dirigidas para públicos diferentes

Las tres actividades que siguen pues son dedicadas en particular a las clases de secundaria pero podrán además serles propuestas a alumnos profesores.
Algunos recogidas sobre el aspecto cultural e histórico del número de oro (Este aspecto será desarrollado más ampliamente en el capítulo de nuestro colega Abderrahmane Nitaj).
Ya evocamos el Partenón construido en Atenas en el siglo V antes de J.C. bajo la dirección del arquitecto Phidias cuya fachada se inscribe en un rectángulo de oro (es decir la proporción de la longitud del largo y ancho es el número de oro).
En su memoria el número de oro es a menudo anotado φ (que es la inicial de Phidias en griego), Leonardo de Vinci concretó su visión de las proporciones "ideales" humanas con la proporción del número de oro en su "Hombre de Vitruvio" famoso.
No podemos abstenernos de citar a Pitágoras y su escuela evocando el pentágono regular (la relación de la diagonal a su lado es el número de oro) porque el pentágono, convexo o estrellado llamado también pentáculo ha sido utilizado muy ampliamente a causa de su aspecto estético por numerosas sectas y religiones. Más lejos todavía en el tiempo ciertos autores descubrieron el número de oro en ciertas proporciones de pirámides de Egipto.
Somos muy prudentes sobre estas interpretaciones, sin embargo forman parte de nuestra cultura y merecen que nos interesamos.
Elaboramos las tres secuencias que van a seguir con la preocupación de hacer experimentar las propiedades apasionantes del número de oro y de sus acólitos no sólo comprobando éstas sino que las descubren" con las manos" como a menudo lo afirmamos en nuestras publicaciones precedentes.
Se trata si es posible, como lo hacían los matemáticos griegos de quienes ya hablamos, de hacer reflexionar al alumno, dibujar, medir, trazar figuras complementarias útiles, manipular, es decir construir matemáticas y así descubrir propiedades.

2) Análisis didáctico "a priori" para los alumnos profesores
Vamos a describir los factores que van a determinar nuestras elecciones didácticas.
- Epistemología matemática algébrica el número de oro se escribe:
$(1+\sqrt{5})\,/\,2$
Es un número irracional, pues este factor nos señala que el nivel en el CSB es bien el del tercero porque los alumnos pueden dar sentido aritmético a esta escritura.
- Epistemología genética didáctica: los alumnos del tercero encontraron los números irracionales del tipo:
$\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$...
A partir de los cálculos pitagóricos sobre medidas de los lados de figuras geométricas o bien a partir de los cálculos de áreas, (recordemos que los matemáticos pitagóricos percibían el "cuadrado" de un número como el área de un cuadrado de lado este número y la "raíz" de un número como el lado de un cuadrado de área de medida este número); pues este factor nos señala que es a partir de cálculos sobre longitudes o áreas, que los alumnos efectivamente pueden encontrar el número de oro!

- Epistemología matemática geométrica: el número de oro aparece por primera vez en los problemas geométricos sobre figuras planas alrededor del rectángulo de oro, pues este factor nos señala que es a partir de las actividades geométricas alrededor del rectángulo que los alumnos darán sentido en el número de oro.
Epistemología ontólogica matemática: en el momento de los primeros años de mi carrera me interesé por un aspecto fundamental de toda actividad matemática, sea de un alumno, sea de un matemático.
Se trata de la dialéctica, (del griego dialektikê: atravesar de parte a parte por el lenguaje, la razón, la.discussion, etc.).

Nombramos este fenómeno más precisamente: "sicomorfismo", (ver otros artículos sobre el sitio IREM math.unicaen.fr / irem y sobre todo sobre:
CanalU 01: los universos y los sicomorfismos por R. Rodriguez: Canal-U www.canal-u.tv Vídeo).
Estos sicomorfismos se realizan entre el momento cuando el alumno, gracias a sus realizaciones, observaciones y acciones en su universo experimentable construye sus acciones mentalmente y para avanzar sobre cuestiones que sobrepasan el nivel experimentable, debe más tarde formalizar y construir un

universo formalizado que le permitirá anticipar, porque está en relación de morfismo, (con sentido matemático). Las idas y vueltas entra el universo experimentable y el universo formalizado forman el fenómeno que nombramos sicomorfismo.

Sesión n°1

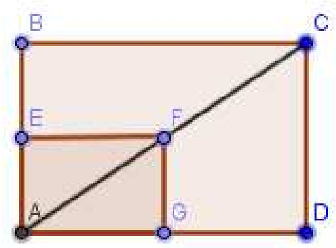
Objetivo: encontrar propiedades en un universo experimentable que corresponden a propiedades matemáticas del programa del colegio para saber "si dos rectángulos tienen la misma forma", (la misma forma en el sentido de la ampliación-reducción y las figuras semejantes).

Fase 1 Los alumnos son invitados a construir rectángulos y a recortarlos sobre el papel encartonado.

Así, en la clase, habrá una gran gama de rectángulos. Los alumnos los comparan con los de sus compañeros para decir si son o no la ampliación o la reducción del suyo, con "sentido de la fotocopiadora" que guarda "la misma forma".

Los alumnos probablemente van a encontrar que muchos de los rectángulos de los compañeros no tienen "la misma forma".

Fase 2 Cada alumno es invitado a construir un rectángulo y recortarlo para conseguirlo al segundo que tuviera la misma forma. Normalmente en un trayecto sobre la ampliación-reducción a lo largo del colegio los alumnos deben haber encontrado este problema de construcción en el nivel precedente del cuarto. Se libra aquí, algunas estrategias importantes adoptadas por los alumnos: O alinear los rectángulos a partir de una vértice común de tal modo que las diagonales sean tan transportadas por el mismo eje (figura 1), (condición suficiente para resolver el problema, pero también necesario si las diagonales no son llevadas por el mismo eje entonces los rectángulos no tienen la misma forma).



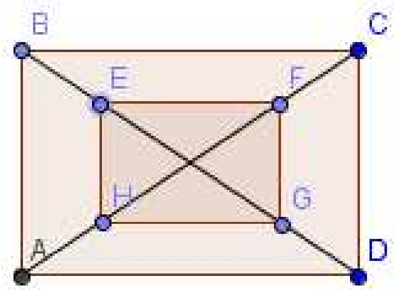


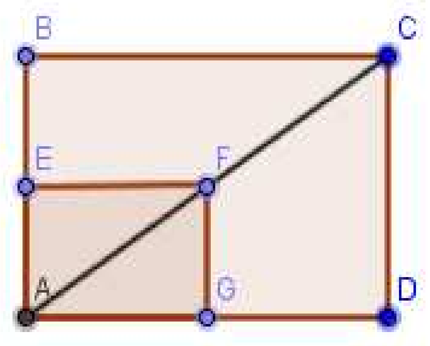
Figura 1 Figura 2

O alinear las extremidades de las diagonales a partir de los centros de los rectángulos que coinciden. Lo que es una condición suficiente.

Fase 3 A partir de una de las condiciones encontradas en el universo expérimentable de la manipulación acabamos, después de discusión e intercambio en una condición más formalizada sobre la igualdad de los ángulos de las diagonales con un lado de los rectángulos. Para esto les proponemos la cuestión siguiente a los alumnos:

¿Cómo saber, sin desplazarlos ni recortarlos, si dos rectángulos tienen o no la misma forma?

Por ejemplo a partir de la solución manipuladora siguiente:

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Acabamos en dos formalizaciones matemáticas:
"Basta que los ángulos de cada diagonal en cada rectángulo con los lados del rectángulo sean iguales" aquí es por ejemplo el ángulo $\widehat{\mathbf{CAD}}$ que es igual al ángulo $\widehat{\mathbf{FAG}}$.

O "basta que las relaciones entre las longitudes de dos lados de cada rectángulo sean iguales" Aquí tenemos por ejemplo CD / AD = FG / AG.</td>
</tr>
</table>

Sesión n°2

Les proponemos a los alumnos partir de la construcción siguiente cuyo objetivo es llegar a una construcción que permite encontrar rectángulos de oro y el número de oro.

Fase 1 A partir de un rectángulo dado construido por el alumno, juxtaponerle un cuadrado sobre uno de los lados para formar otro rectángulo. Nos interrogamos entonces: ¿ el rectángulo inicial y el rectángulo final tienen la "misma forma"? Hay una gran probabilidad que no tuvieran la "misma forma".

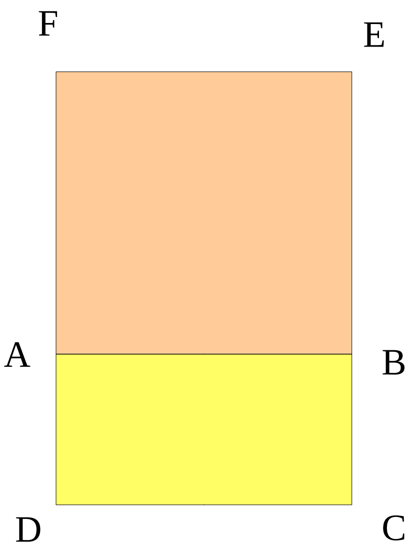
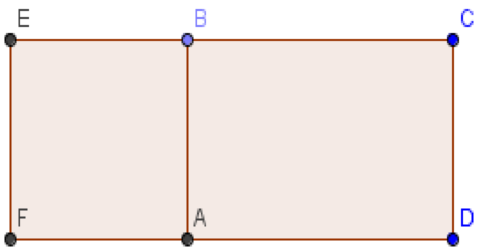


Figura 4

Los alumnos encuentran con la ayuda del profesor una condición necesaria: "El cuadrado debe ser pegado a partir del lado más largo del rectángulo", si no obtenemos un rectángulo todavía más alargado que no tendrá la forma "misma". En la figura 4, al lado dónde se pegó un cuadrado sobre el lado más largo, tiene más posibilidad allí para que ambos tipos de rectángulo FECD y ABCD sean la forma "misma".

Aunque no sean en la misma orientación "vertical-horizontal" de sus anchos y largos.

Figura 5



En cambio, sobre la figura 5 donde se pegó el cuadrado sobre el lado más corto no hay ninguna posibilidad que el rectángulo BCDA y ECDF sean de "misma forma".

Los alumnos argumentan con la ayuda de dos propiedades:
1) Las diagonales [AC] y [FC] no son llevados por el mismo eje o
2) Las relaciones CD / FD y CD / AD no son iguales porque FD> AD pues CD / FD < CD / AD.

Fase 2 Aquí los alumnos están puestos en actividad de investigación para descubrir un método que permita encontrar un rectángulo tal como cuando se le añade un cuadrado a partir del gran lado encontramos un rectángulo de "la misma forma".

En esta fase los alumnos encuentran con la ayuda del profesor, las condiciones geométricas necesarias. Utilizamos el método de resolución geométrica que parte de una construcción de figura supuesta resuelta y dibujada por ajustes, (un software como GEOGEBRA es el bienvenido).

Por ejemplo: reflexionamos sobre el hecho que las rectas (AC) y (BD) son necesariamente perpendiculares.
Esto a causa del hecho de que los rectángulos ADFB y BCEA deben ser de la misma forma pues igualdades de ángulos deben ser respetadas, lo que los alumnos con la ayuda del profesor observan, así como los ángulos complementarios.

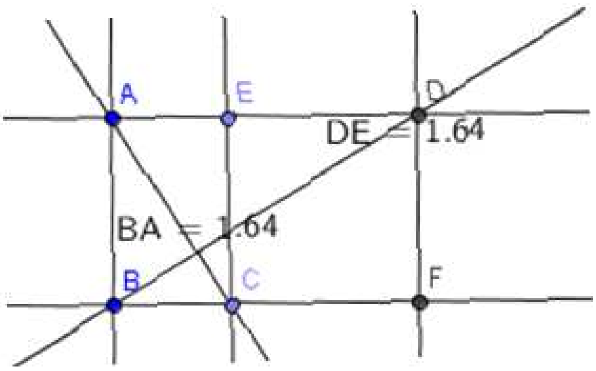
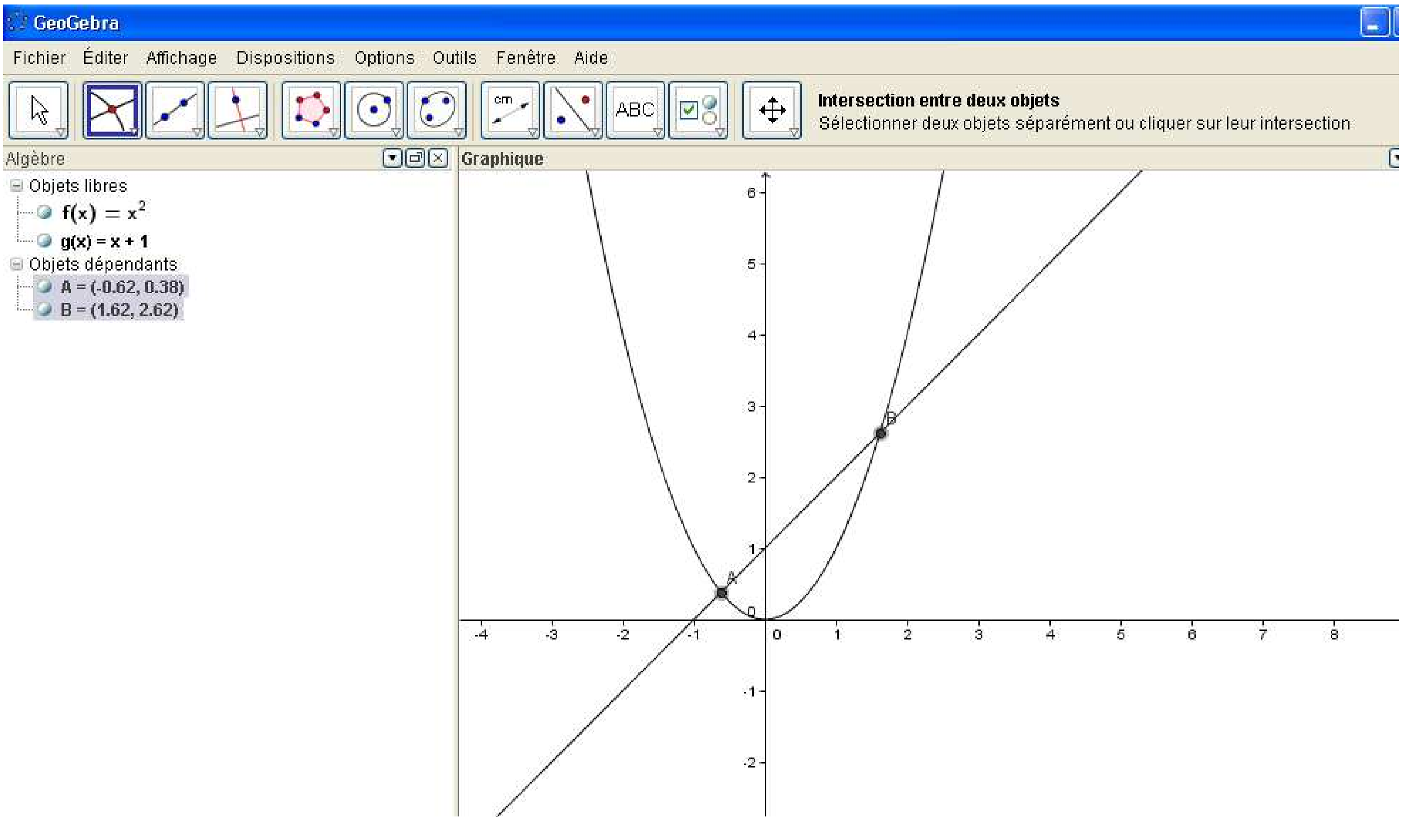


Figura 6

Los alumnos lo encuentran pues con la ayuda del profesor la propiedad de los ángulos complementarios en un triángulo rectángulo. Lo mismo descubrimos con los alumnos los triángulos rectángulos semejantes: ABC; AEC; ABD; BDF; y otros más pequeños.

Lo mismo que, simultáneamente, tenemos la igualdad AB = ED, además que (EC) y (BC) son obligatoriamente perpendiculares.
Pues debemos actuar simultáneamente, por ejemplo, la distancia AB y la posición de la recta (AC). Entonces (BD) es determinado porque debe ser perpendicular a (AC) y (EC) debe ser perpendicular a (BC). Aquí los alumnos hicieron la buena geometría y se dieron cuenta de la dificultad en resolver este problema sólo por la geometría. El momento es bien preparado para darse cuenta del valor del método algébrico.
Fase 3 Los alumnos con la ayuda del profesor aplican un método algébrico a partir de las medidas, a partir de la igualdad de las relaciones y de la utilización de una incógnita.
Utilisamos una figura solución en la cual escogemos por ejemplo la longitud AE como la unidad, pues AE = 1 luego una incógnita AB = x.

Escribimos la relación AB / AE = x/1 en el rectángulo AECB y (x+1) / x en el rectángulo ADFB.
Los alumnos se interrogan: ¿ cuánto vale esta relación cuando los dos son iguales? Para esto el profesor los invita a tratar el problema con la ayuda de funciones. La igualdad de las relaciones conduce a los alumnos a escribir que $x^2 = x+1$.
Pues definimos las funciones f y g con $f(x) = x^2$ y $g(x) = x+1$ donde x está un valor positivo y buscamos con GEOGEBRA y con una hoja de cálculo un valor aproximado de x.
He aquí ayudándose de GEOGEBRA encuentran, por intersección de las curvas, el valor x = 1,62.



	A	B	C	D
31	1,41	1,9881	2,41	
32	1,42			
33	1,43	2,0449	2,43	
34	1,44	2,0736	2,44	
35	1,45			
36	1,46	2,1316	2,46	
37	1,47			
38	1,48	2,1904	2,48	
39	1,49			
40	1,5	2,25	2,5	
41	1,51			
42	1,52	2,3104	2,52	
43	1,53			
44	1,54	2,3716	2,54	
45	1,55			
46	1,56	2,4336	2,56	
47	1,57			
48	1,58	2,4964	2,58	
49	1,59			
50	1,6	2,56	2,6	
51	1,61			
52	1,62	2,6244	2,62	
53	1,63			
54	1,64	2,6896	2,64	
55	1,65			
56	1,66	2,7556	2,66	
57	1,67			
58	1,68	2,8224	2,68	
59	1,69			
60	1,7	2,89	2,7	
61	1,71			

Figura 8

Con la hoja de cálculo los alumnos encuentran de nuevo el valor 1,62 que hace que x^2 se es próximo de x+1, en efecto sobre la hoja de cálculo obtienen $1{,}62^2 = 2{,}6244$ y 1,62+1 = 2,62.

Observación: ciertos alumnos pueden ser interesados por los cálculos de las áreas del rectángulo ADBF y del rectángulo AECB luego EDFC guardando a AE = 1 y AB = x y utilizando la igualdad de la suma de las áreas:

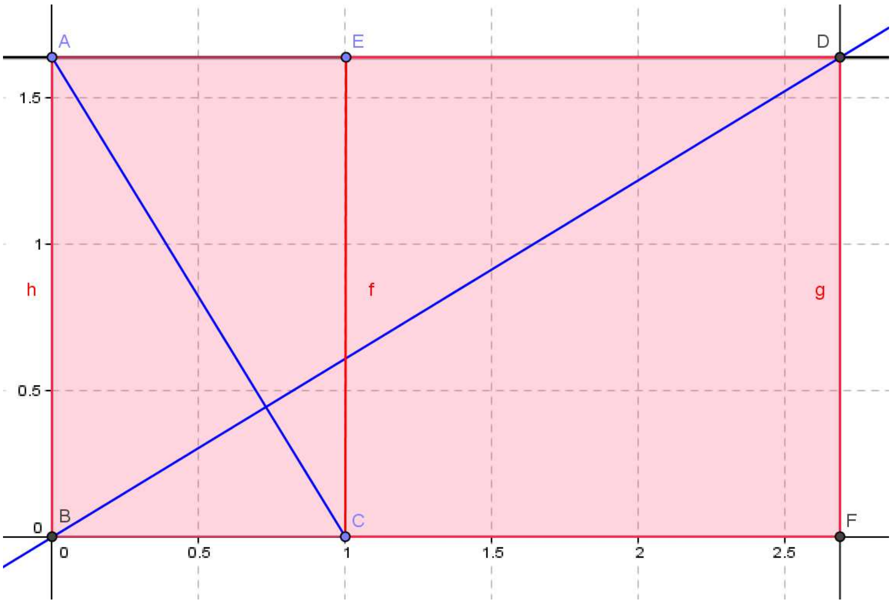
Área de AECB + área de EDFC = área de ADFC. En efecto, en colegio, utilizamos a veces los cálculos de área con relación a x. Si es el caso, obtenemos otra ecuación: $x + x^2 = x(x+1)$ y

aprovechamos de eso para hacer cálculos algebraicos.

Así como los alumnos lo demuestran, esta ecuación es verificada cualquiera sea el número x, pues no es la ecuación que determina la solución de nuestro problema. Esto con el fin de que los alumnos afirmen más convencidos que es la igualdad de la relación:

AB / AE = AD / AB quien da la buena ecuación.

Medidas dadas por GEOGEBRA: AE = 1; BA = DE = DF = 1,64.



Fase 4 A partir de sus conocimientos en álgebra sobre los cálculos y las identidades notables, trabajamos una resolución de la ecuación:

$x^2 = x+1$, el objetivo es encontrar un método para calcular un valor de x, solución que obligatoriamente debe ser un número positivo.

Observación 1: los alumnos deben haber asimilado antes las identidades notables y tener una buena familiaridad con los cálculos algébricos. Aquí, con la ayuda del profesor, trabajamos primero la transformación algébrica $x^2 - x = 1$;

- Luego la investigación de $x^2 - x$ como $(x - 1/2)^2 - ¼$ y
- Por fin la transformación de $x^2 - x = 1$ como: $(x - 1/2)^2 - ¼ = 1$
- Luego $(x - 1/2)^2 = 1 + ¼$ y por fin $(x - 1/2)^2 = 5/4$.

Tenemos dos posibilidades:

$$\text{Primero}: x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ que da: } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Segundo}: x - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ que da: } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

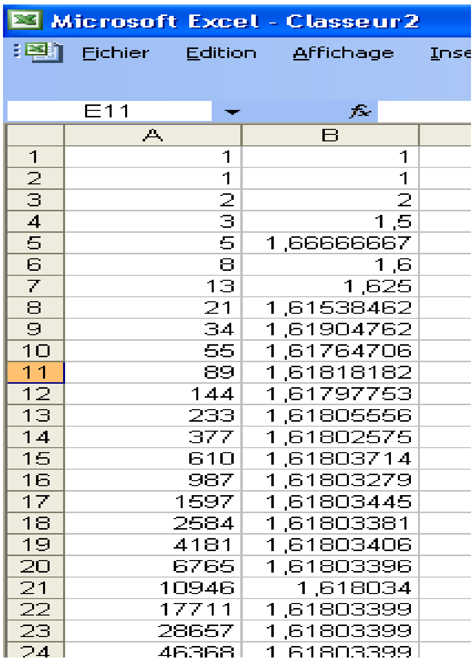
En este momento los alumnos discuten sobre el signo de ambos valores encontrados y rechazan la segunda solución para escoger la solución:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Observación 2: aunque la fórmula general de la resolución de una ecuación de segundo grado no esté en el programa, aquí en clase del colegio estos cálculos son más fáciles comprender y sobre todo son justificados por una investigación, lo que motiva a los alumnos.

Observación 3: es un enfoque triple:
Geométrico
Resolución de una ecuación por valores aproximados
Resolución algébrica que es muy formadora y que corresponde bien a un objetivo de fin de clase de CSB.

Sesión 3 Objetivo cultural
Historia de las artes y de las matemáticas a través del número de oro: he aquí algunos ejemplos. (Para un estudio detallado de las secuencias de Fibonacci, vea el capítulo II y III-2).



	A	B
1	1	1
2	1	1
3	2	2
4	3	1,5
5	5	1,66666667
6	8	1,6
7	13	1,625
8	21	1,61538462
9	34	1,61904762
10	55	1,61764706
11	89	1,61818182
12	144	1,61797753
13	233	1,61805556
14	377	1,61802575
15	610	1,61803714
16	987	1,61803279
17	1597	1,61803445
18	2584	1,61803381
19	4181	1,61803406
20	6765	1,61803396
21	10946	1,618034
22	17711	1,61803399
23	28657	1,61803399
24	46368	1,61803399

1) Los alumnos son invitados a escribir términos de la secuencia de Fibonacci así como la relación entre dos números consecutivos de la secuencia: un término dividido por lo precedente y verificar que este relación tiende hacia el número de oro.

(Tenemos ya 13 / 8 = como 1,625 y un truncamiento es 1,61803398875). Trabajarán también en hoja de cálculo.

2) Los alumnos encuentran, en investigación documental, que el número de oro vale $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Pueden entonces realizar una construcción geométrica del rectángulo de oro con la ayuda de los instrumentos. Por ejemplo utilizando el teorema de Pitágoras en un triángulo bien escogido para obtener desde el principio $\sqrt{5}$ unidades.
Los alumnos buscan en Internet y en el centro documental del colegio con la ayuda del profesor de artes plásticas informaciones sobre el número de oro en el arte.
Verifican por las medidas que ciertos relaciones en las obras de arte dan aproximaciones del número de oro.

Por ejemplo sobre una foto de cara del Partenón medir y calcular la relación entre la longitud y la anchura del rectángulo trazado sobre la foto y quien exactamente rodea el Partenón. (Vea también el capítulo II).

Conclusión

He aquí un trayecto posible de los alumnos en colegio sobre una secuencia de tres sesiones que hay que hacer en equipo con el profesor de artes plásticas en CBS.

Así como usted lo comprobó los alumnos trabajan primero en un universo experimentable y poco a poco según las preguntas asimilan un universo formalizado dónde logran resolver el problema de construcción de un rectángulo de oro. Encuentran así el famoso número de oro y descubren que **este número atravesó la historia de las artes y las religiones hasta nuestros días.**

Capítulo I-2
Construcción del "rectángulo de oro" a partir de un ángulo de 72° Propiedades del pentágono regular, trayecto sobre el "triángulo de oro" y el "triángulo sagrado de Pitágoras"

por Ruben Rodriguez

Nivel: CBS, aficionados advertidos
Objetivos: a través de un trayecto de actividades los alumnos reinvierten propiedades de la geometría, desarrollan las capacidades de investigar, de modelizar, formalizar a través de propiedades geométricas y también propiedades del álgebra, autoevaluarse.
Palabras claves: número de oro, rectángulo de oro, proporción, ángulos complementarios, triángulos de "la misma forma", las propiedades algébricas del cálculo literal, las identidades notables, la raíz cuadrada, las ecuaciones.
Material: papel encartonado, instrumentos de geometría, tijeras, computador, software de geometría, por ejemplo, GEOGEBRA.
Observación: en este trayecto alrededor del rectángulo de oro nos parece indispensable, del punto de vista cultural y tan geométrico, encontrar una construcción a partir del triángulo de oro y del pentágono regular, lo mismo que encontrar el número de oro en el **"triángulo sagrado"** de Pitágoras.
Fase 1 Nosotros trabajamos en la construcción del pentágono regular a partir de los ángulos de medida $\frac{360}{5} = 72°$.
Vamos a irnos en esta fase del análisis por los alumnos de las propiedades del pentágono regular para poder encontrar un programa de construcción.
Particularmente utilizamos dos propiedades características:
- El pentágono regular es inscriptible en un círculo;
- Todos sus lados de misma longitud. Así como otras propiedades como, por ejemplo: los ángulos al centro correspondientes a cada lado tienen las misma medida $\frac{360}{5} = 72°$.

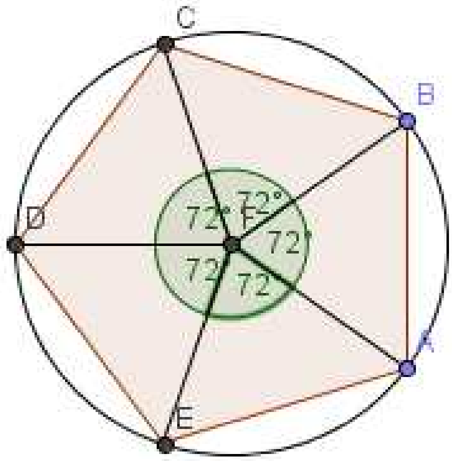
<table>
<tr>
<td>

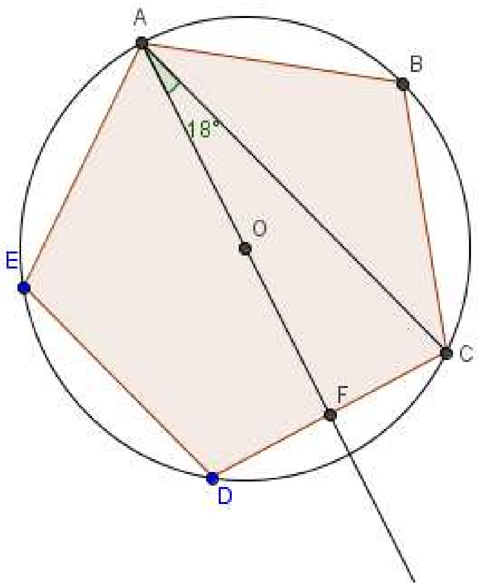
Figura 1</td>
<td>Los alumnos encuentran el programa más fácil: el que traza un círculo luego los cinco ángulos de 72° en el centro cuyos lados encuentran el círculo en los vértices ABCDE del pentágono. Los alumnos entonces son invitados a deducir de eso la naturaleza de los cinco triángulos y las medidas de sus ángulos. Reinvierten así sus competencias en geometría. Los cinco triángulos son isósceles y sus ángulos a la base miden 54°.</td>
</tr>
<tr>
<td>

Figura 2</td>
<td>Analizamos luego otros programas, por ejemplo el que se va del trazado de una diagonal del pentágono.
Con los alumnos llegamos a la construcción siguiente:

1)Trazamos un círculo de centro O
2) Colocamos un punto A sobre el círculo y trazamos una semi-recta [AO) luego un ángulo de 18° teniendo esta semi-recta como lado.. La otra parte de este ángulo corta el círculo sobre C
3) Trazamos el punto D simétrico de C con relación a la recta (AO)
4) Completamos el pentágono regular transportando la longitud CD.</td>
</tr>
</table>

Observación: los triángulos tales como ACD son dichos "triángulos de oro", porque contienen el "número de oro", como lo veremos más tarde con los alumnos.

Fase 3 el número de oro en el pentágono

Cuando los alumnos construyeron bien el pentágono regular a partir del ángulo de 72°, nos interesamos por la proporción entre la longitud de una diagonal y la longitud del lado del pentágono.

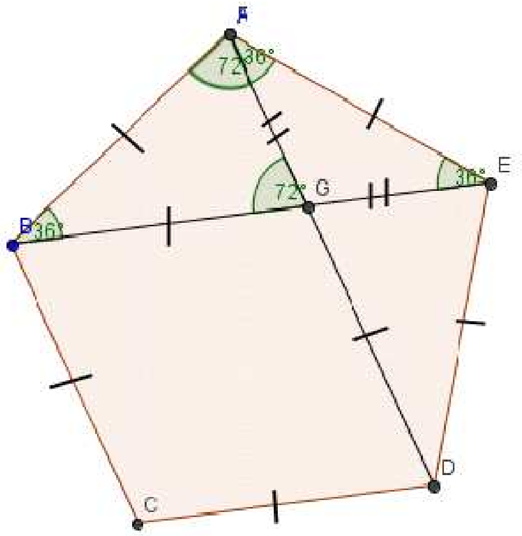


Figura 3

Trazamos, por ejemplo, dos tipos de diagonal [AD] y [BE] que se cortan sobre G. Observamos con los alumnos que los triángulos AED y AGE son isósceles y tienen dos ángulos superponibles de medida 36° y el tercero de 108°.
Lo mismo los triángulos ABG y GED son isósceles tienen dos ángulos de 72° y uno del 36°. Los triángulos AGE y AED son semejantes pues:

AD / AE = AE / AG =

AE / (AD-AG).

Escogemos a [AE] como unidad, es decir AE = 1 y ponemos: AD = x utilizamos luego la igualdad de las relaciones: AD / AE = AE / (AD - AE) lo que se escribe: x / 1 = 1 / (x - 1).
Obtenemos: x (x - 1) = 1 o bien $x^2 = x + 1$.
Cuya raíz positiva es el número de oro encontrado anteriormente. Los triángulos lo mismo forma que ADC son llamados los "triángulos de oro".

Pues la relación entre la diagonal y el lado de un pentágono regular es el número de oro.

Fase 4 proponemos la construcción siguiente:

1) Trazamos un segmento [AB] luego dos perpendiculares a (AB): una sobre A y la otra sobre B.
Trazamos a la mediadora de [AB] y un ángulo de 72° teniendo un lado [AB], el segundo lado corta a la mediadora D.
3) Trazamos el círculo de centro A y de radio AD que intercepta uno de las perpendiculares de (1) en F.
4) Completamos el rectángulo ABGF y el cuadrado FGHJ.
Entonces los rectángulos AFGB y AJHB son dos rectángulos de oro.

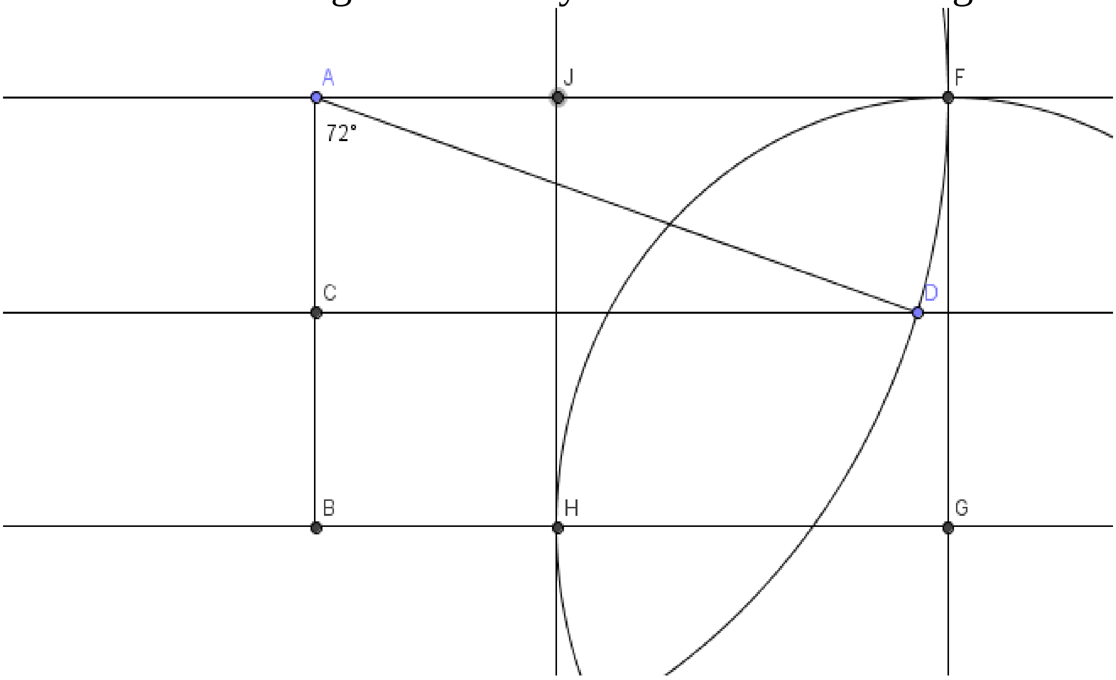


Figura 4

Los alumnos argumentan a partir del número de oro encontrado en el trabajo con pentágono regular: si se toma por ejemplo a AB = 1 entonces la proporción AF / AB es igual al número de oro.

Fase 5

Los alumnos son invitados a buscar informaciones sobre el número de oro, el triángulo de oro y el pentágono regular en relación con la historia de las artes, la arquitectura, la naturaleza y el número de oro...

He aquí algunas informaciones que puedan suscitar entre los alumnos la envía de demostrar todavía la validez de otras construcciones que contienen el número de oro.

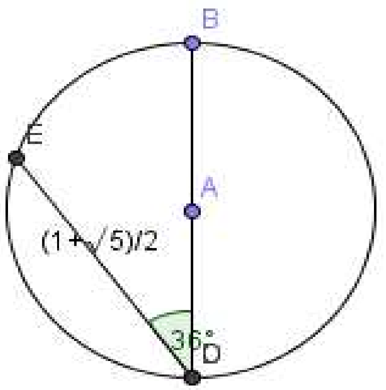


Figura 5

1) Método antiguo a partir de los ángulos

He aquí un método de construcción que no es muy conocido. Puede ser más antiguo, porque utiliza los ángulos, pues supone buenos conocimientos en Astronomía. Trazamos un círculo de centro A y de diámetro [BD] de medida 2, luego un ángulo de vértice D, de medida 36° cuyo segundo lado encuentra el círculo sobre E. Entonces el segmento [DE] tiene como medida el número de oro.

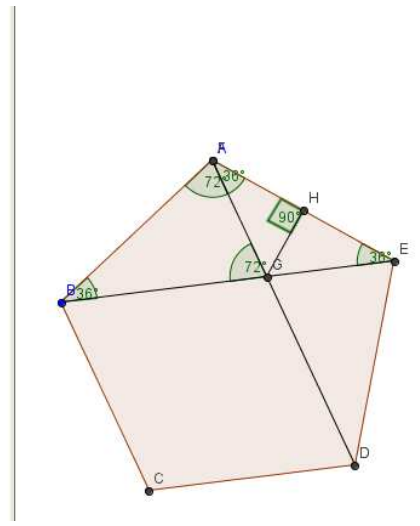
Esta figura es utilizada para Pentagramas que sirven para construir el Poliedro famoso de Dürer, en su cuadro "Melancolía I" en 1514.

Los alumnos pueden demostrarlo con la ayuda del profesor calculando primero el coseno de 36° en la figura del pentágono.

Figura 6: Aquí tenemos AH = 1/2 porque abemos elegido : $AE = 1$ y

$AG = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Entonces $\cos 36° = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$;

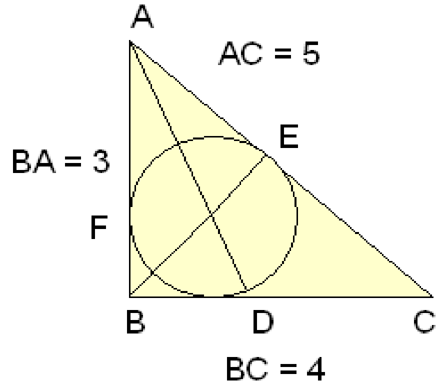
Es decir la mitad del número de oro.

	Entonces en la figura precedente vemos que si BD = 2, ya que cos 36° es igual a la mitad del número de oro, pueden escribir que ED / 2 es igual a la mitad del número de oro pues ED es igual al número de oro que vale $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Figura 6

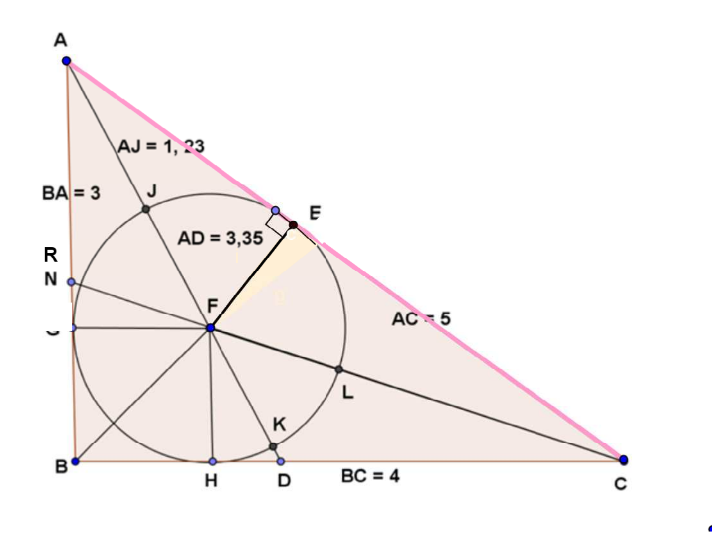
Los alumnos observan que si se construye un rectángulo que tiene para dimensiones: la longitud iguala al radio ED y la anchura igual a AD obtenemos un rectángulo de oro.

2) El número de oro en la **"Geometría sagrada"**

Búsqueda sobre "El triángulo sagrado o de Pitágoras" que tiene para longitud de los lados 3; 4; 5 en una unidad cualquiera, su círculo inscrito y sus bisectrices.

Figura 7 	Fase 1 Los alumnos son invitados a trazar el triángulo ABC (con una unidad de 2cm), rectángulo sobre B, AB = 3 unidades, (es decir 6cm), BC = 4 unidades, (es decir 8cm), AC = 5 unidades (es decir 10cm). Luego trazan las tres bisectrices, el círculo inscrito, los radios a los puntos de contacto de los tres lados tangentes.

Obtienen así un conjunto de triángulos que son invitados a estudiar. Encuentran cuáles son semejantes, así como otras propiedades de las figuras simples usuales que son incluidas en esta rica figura.

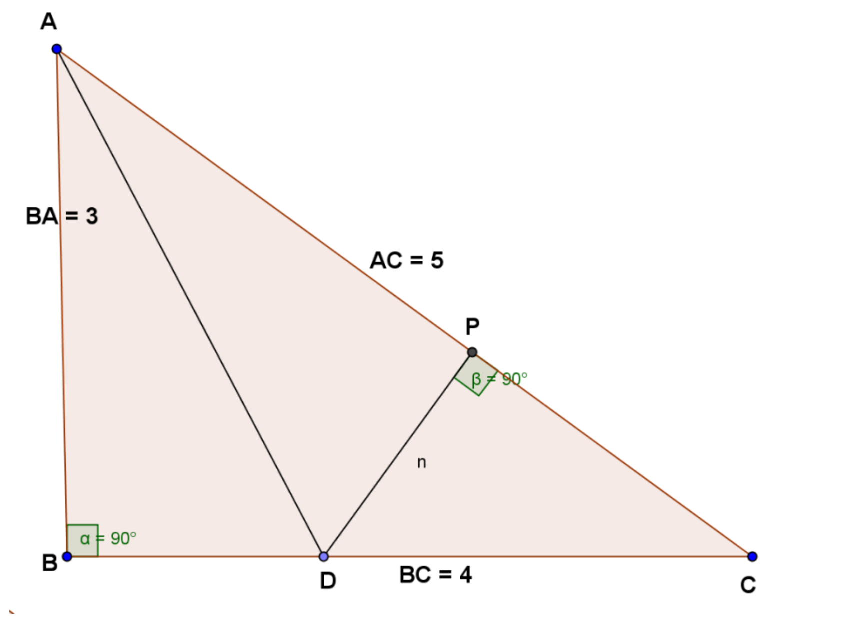


En "El triángulo sagrado de Pitágoras" el cálculo de la longitud de sus bisectrices permite reencontrar el número de oro. Al lado una figura que los alumnos pueden obtener con software GEOGEBRA. Figura 8

He aquí una lista no exhaustiva de propiedades, que los alumnos, según sus competencias, encontrarán y demostrarán.

1) BHFG es un cuadrado
Las argumentaciones aquí son de una dificultad ligera para los alumnos de tercero.
2) Los triángulos AGF y AEF son superponibles.
Aquí la dificultad de la argumentación es mediana.
Ídem para "los triángulos CHF y CEF que son superponibles".
Luego triángulos semejantes como, por ejemplo:
Los triángulos ABD y AGF son semejantes, porque los tres ángulos de ABD son lo mismo medida respectivamente que los tres ángulos de AGF. En esta familia de los triángulos semejantes, pueden encontrar otros, por ejemplo: FHD.

Fase 2
Invitamos a los alumnos que se interesen por cada bisectriz del triángulo ABC y a hacer una figura simple con esta bisectriz



Por ejemplo:
Aquí observamos la bisectriz (AD) para evaluar la distancia AD. Sugerimos trazar el perpendicular sobre P a partir de D con el fin de poner en evidencia el otro punto P sobre el lado [AC] que está en la misma distancia de la bisectriz que B. Figura 9

Observamos que AP = AB = 3 y que PC = 5 - 3 = 2.
Reflexionamos sobre el triángulo DPC que es semejante al triángulo ABC, siempre con argumento de los ángulos.
Podemos escribir que: PC / DC = BC / AC, es decir:
2/DC = 4/5 pues DC = 5 / 2 y BD = BC - DC = 4 - 5/2 = 3/2.
Los alumnos calculan con la ayuda del teorema de Pitágoras aplicado sobre el triángulo ABD.
$AD^2 = AB^2 + BD^2$.
$AD^2 = 3^2 + (3 / 2)^2 = 9 + 9 / 4 = 9 (1 + 1/4) = (9 / 4)(5)$.

Y $AD = \frac{3}{2}\sqrt{5}$. Encontramos con los alumnos: $AD + \frac{3}{2} = 3 \times \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ahora bién $BD = \frac{3}{2}$ entonces : AD + BD es igual a tres veces el numero de oro.

Observación: podemos invitar a los alumnos a verificar experimentalmente por las medidas sobre su figura, lo que da:
8 / 3 = 1,6 que es una aproximación por defecto a 0,1 cerca del número de oro.
Observemos ahora la bisectriz (RC) y la longitud RC. Invitamos a los alumnos que aplican el mismo método que para la bisectriz precedente.

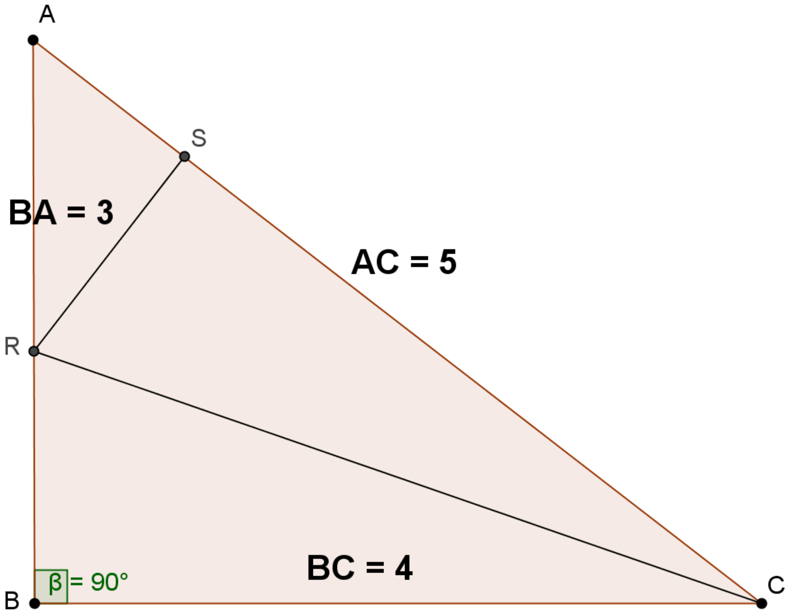


Figura 10

AS = 5 - 4 = 1
AS / AR =
AB / AC
Es decir:
1 / AR = 3 / 5
entonces
AR = 5 / 3 y
RB = 3 – 5 / 3 =
4 / 3 y
$RC^2 = 4^2 + (4 / 3)^2 =$
16 + 16 / 9 =
16 (1 + 1/9) =
(16 / 9)(10).

$$RC = \frac{4}{3}\sqrt{10} =$$

$$\frac{4}{3}\sqrt{2}\times\sqrt{5}.$$

Los alumnos verifican experimentalmente estos resultados por las medidas sobre el papel o con la ayuda del software GEOGEBRA. Los alumnos dicen que RC no tiene una relación tan simple con el número de oro como AD.

Para acabar esta investigación sobre "el triángulo sagrado", las bisectrices y el número de oro, calculamos la longitud de la bisectriz [BT] del ángulo recto de vértice B.

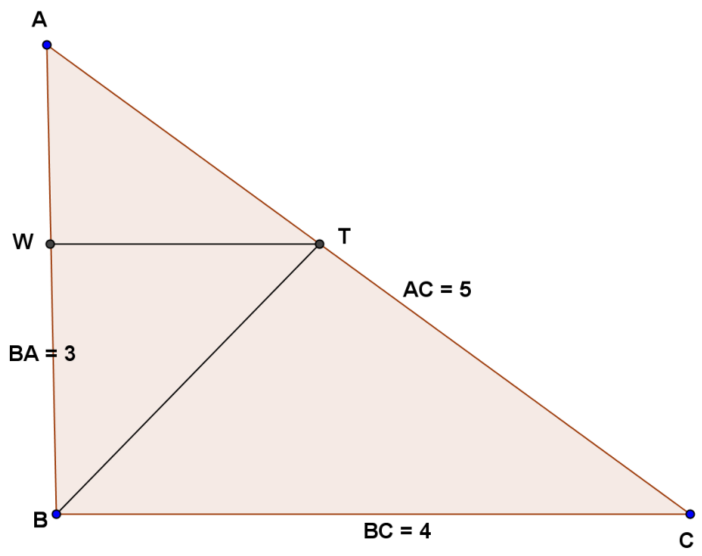


Figura 11

Si trazamos la perpendicular a (AB) pasando por T tenemos:
WT = WB ;
WT / (AB - WT) =
BC / AB, es decir:
WT / (3 - WT) = 4/3.
Entonces
3WT = 12 - 4WT y
WT = 12 / 7.

$$\text{Ahora } BT = \frac{12}{7}\sqrt{2}.$$

Los alumnos verifican experimentalmente con las medidas este resultado.
Los alumnos dicen que esta longitud de la tercera bisectriz no tiene tampoco una relación simple con el número de oro.

Conclusión: los alumnos dicen que solamente la bisectriz del ángulo opuesto al lado de 4 unidades del triángulo sagrado de Pitágoras tiene una relación simple con el número de oro.

Comentarios: los alumnos encuentran en su investigación documental sobre el número de oro otras propiedades que atraen su interés y que enriquecen su cultura al mismo tiempo que encuentran una imagen más positiva de las matemáticas porque el número de oro hasta se encuentra en la naturaleza.
Por ejemplo los alumnos pueden buscar si es verdad que, la disposición de las flores centrales (o florones) de los girasoles o margaritas, o semillas, sobre el receptáculo dibuja espirales. Éstas responden a reglas precisas y se disponen sea en la dirección de las agujas de un reloj, o sea en sentido opuesto, más los números de florones de cada tipo de espiral son constantes y son unos números sucesivos de la sucesión de Fibonacci, (la sucesión que los alumnos pueden también estudiar un poco en tercera), por ejemplo 34/21 o 55/34 o 89/55 y comprueban que, 34/21 = 1,61 (al centésimo cerca) lo mismo que otros cocientes.
(Para un estudio detallado de las espirales el lector puede consultar el capítulo III.)
Los alumnos encuentran en sus investigaciones documentales, que aparentemente, el cuerpo humano también sería "regido por las proporciones divinas".
Estos estudios deben ser fundados sobre observaciones estadísticas y los alumnos pueden reinvertir sus competencias en estadísticas del programa del tercero para estudiar este "mito" sobre el cuerpo humano.
Anotemos que somos muy reservados sobre este dominio, que, a nuestro sentido puede ser fuente de posturas poco científicas. Descubren también el término "divina proporción" sobre la cual volveremos más delante que emana de una preocupación más matemática.

En efecto, el matemático Euclides ha, desde el tercer siglo antes de J.C. introducido en sus "Elementos" la noción de "media y extrema razón" que será así designada más tarde.
Se trata de secar un segmento en dos segmentos desiguales de tal modo que la relación del más grande al más pequeño sea igual a la relación del segmento entero al más grande. (Usted puede consultar por ejemplo el sitio en francés de la academia de Rouen (Francia): http: // lycees.ac-rouen.fr/bruyeres/maths/propd iv.html).
Volveremos sobre esta noción en los capítulos II y III-2 donde desarrollemos el estudio de la utilización del número de oro en pintura y en arquitectura.

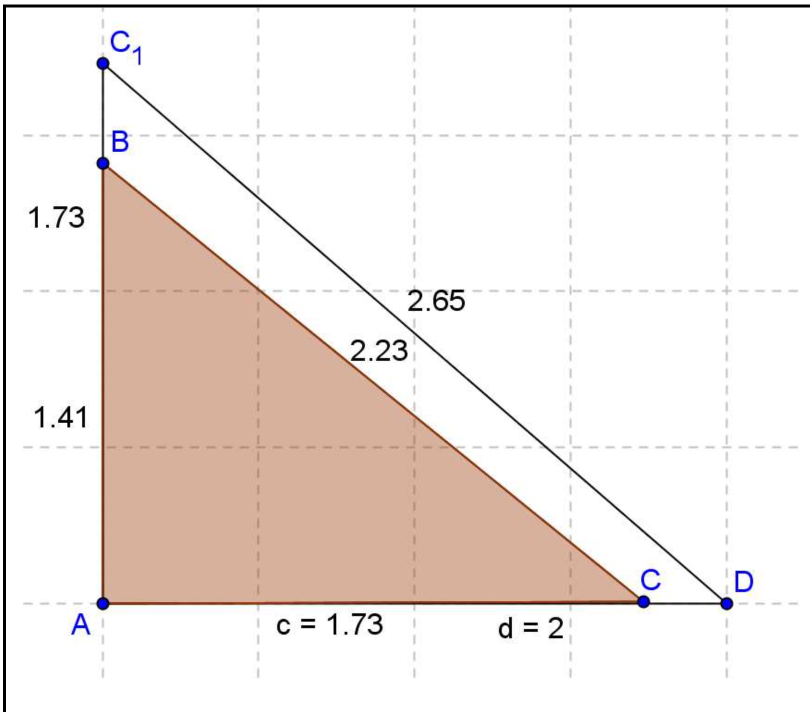
Otra pista interdisciplinaria se encuentra entre la poesía, la música y el número de oro..Por ejemplo en la música de las palabras del poema de Baudelaire (en francés) donde se comprueba un ritmo armonioso de hacía de 8 pies y de hacía de 5 pies, (sílabas fonéticas, "e" mudos de fin de hacia no son considerados) (y 8 / 5 = 1,6).

Que j'aime voir, Chère indolente, De ton corps si beau, Comme une étoffe vacillante, Miroiter la peau !	Qué me guste ver, querida indolente, De tu cuerpo por muy bello, Así como una tela inestable, ¡ Espérera la piel! Charles Beaudelaire

Annexo

Variante al triángulo sagrado: el "pequeño triángulo sagrado" para la clase de la segundaria superior (por Danielle Salles)
Les proponemos a los alumnos construir con GEOGEBRA dos segmentos ortogonales [AC] y [AB], secantes A de medidas respectivas, en valores acercados al centésimo: 1,41 (a saber $\sqrt{2}$,) y 1,73 (a saber $\sqrt{3}$,). Preguntamos entonces a los alumnos de cuáles números enteros estos valores son las raíces al centésimo, podrán valerse de la calculadora (observación didáctica al final de párrafo). Luego de completar el triángulo rectángulo sobre A tan obtenido y de hacer fijar la medida de [BC] por el software, encontramos 2,23.

Pedimos entonces si este valor aproximada no sería el de $\sqrt{5}$ al centésimo, lo que es el caso. Tenemos pues un triplete notable de tres raíces de números primos que definiesen a un triangulo rectángulo.
Les pedimos entonces a los alumnos de sugerir a nosotros otro triplete de raíces de números enteros que define un triángulo rectángulo. Basta evidentemente con añadir los primeros para encontrar el tercero.
Así : $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$(=2), $\sqrt{7}$, verifican bién le teorema de Pitágoras, entonces son las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.



Sobre la figura al lado dónde representamos ambos tripletes encontrados, observamos que ambos triángulos rectángulos construidos son semejantes.
Le dejamos reflexionar y calcular ¿Que relación hay entre las áreas de ambos triángulos?
Respuesta: Están en una proporción: $\sqrt{2}$.

He aquí el pequeño tema de reflexión que les proponemos a los alumnos, a los profesores y a los aficionados.

"Encontrar todos los tripletes de números primos cuyo las raíces cuadrados permiten trazar triángulo rectángulo".
Recordamos que ($\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$) es uno, pero ($\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$(=2), $\sqrt{7}$) no es bueno porque 4 no es un número primo.

El tercer número de la sucesión de números primos debe ser la suma de ambos precedentes, les aconsejamos pues observar la criba de Eratóstenes en donde los números primos son indicados en rojo: Diremos la técnica empleada en esta criba:

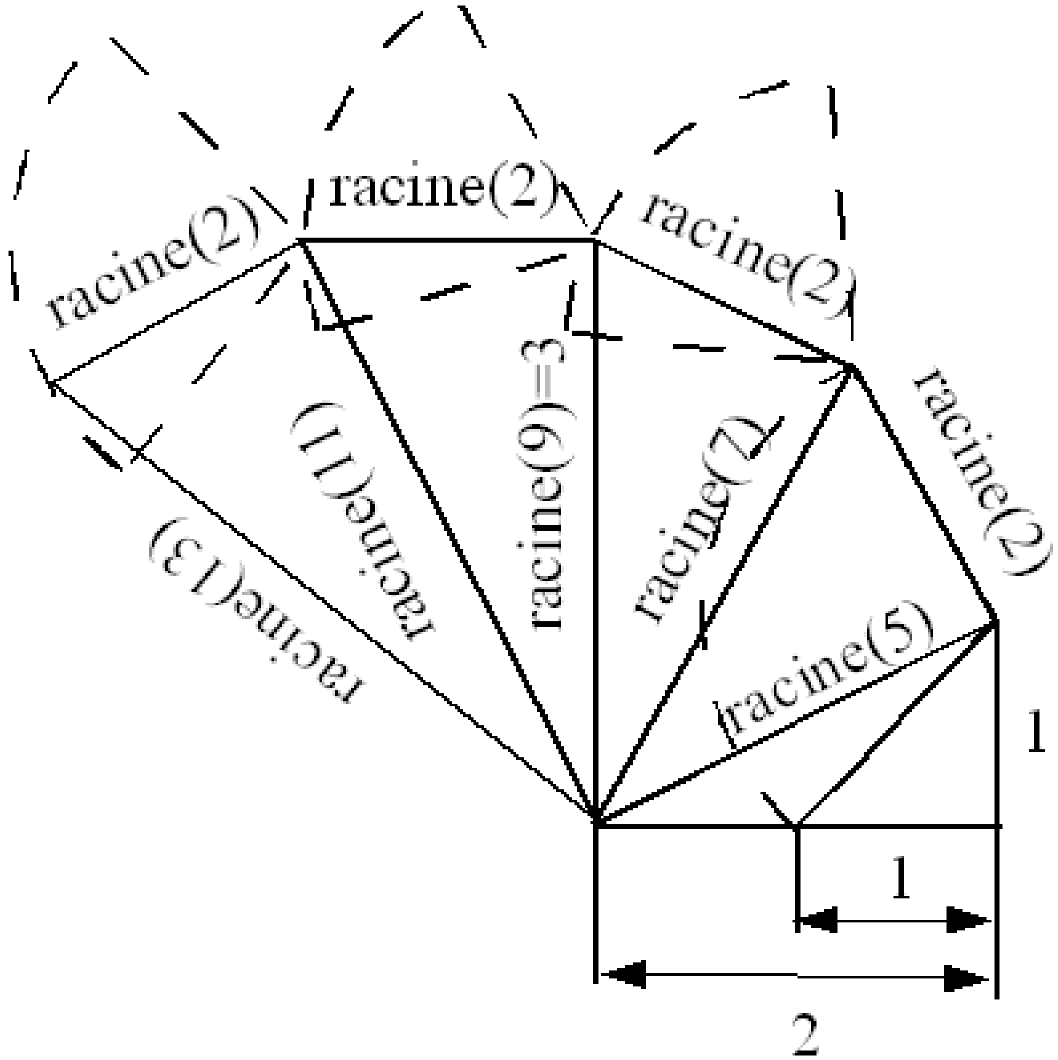
Escribimos en un tablero de 10 líneas y 10 columnas, los números de 1 a 100, línea por línea.

Tachamos en este tablero sucesivamente los múltiplos de 2, 3, 5 etc. Es entonces fácil visualizar los números no tachados y quienes son primos.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

¿ Podemos tener tres números primos impares? ¿ NO (Por qué?) Uno de los tres pues es par, lo solo posible es 2, pues el primero es dos y ambos siguientes se siguen a 2 cerca. Encontramos: (2, 11, 13) ; (2, 17, 19) ; (2, 41, 43) ; (2, 71, 73).

Invitamos a ustedes a buscar sobre internet la lista de los números primos hasta 10 000 para encontrar otros. Representamos como en la espiral de Teodoro los primeros tripletes.



He aquí dos tripletes encontrados en el sitio noe-educación: Http: // noe-education.org /
((2, 21191, 21193 y 2, 21557, 21559). Más generalmente, los tripletes de números primos que responden a la cuestión son de la forma: (2, p-2, p).

Observación didáctica

Cuando se inicia a los alumnos la noción de raíz cuadrada, está de uso, o de calcular en primer lugar, la raíz cuadrada de un número entero con la ayuda de la calculadora, o de calcular ésta por una división euclidiana poco enseñada en nuestros días y qué recordamos, página siguiente.

Para el placer de ver de nuevo cosas "queridas viejas" he aquí el método propuesto por T. Eveilleau: (¡al programa del diploma de estudios primarios -estudiantes de 14 años de edad- en 1910! En Francia). Le aconsejamos ejercitarse.

…

217. — Soit à extraire la racine carrée de 1 389.

13.8 9	37
4 8.9	67
4 6 9	7
2 0	469

Le plus grand carré contenu dans 13 est 9, dont la racine carrée est 3. Je pose 3 à la racine : — 3 fois 3 font 9 ; 9 ôtés de 13, il reste 4.

J'abaisse la tranche suivante, 89. — Je sépare le chiffre 9 sur la droite de 489 ; je double le chiffre 3 de la racine, ce qui fait 6, et je dis : En 48, combien de fois 6? Il y est 7 fois. Je place 7 à la droite de la racine, ce qui fait 37, et à la droite de 6, ce qui fait 67, et je multiplie 67 par 7. Le produit 469 peut se retrancher de 489, et donne 20 pour reste. Ce reste 20 n'est pas plus grand que 2 fois 37 ; donc le chiffre 7 est bon. Donc la racine cherchée est 37, à moins d'une unité.

¡En cambio el problema recíproco que consiste en pedirles a los alumnos encontrar, a un número dado decimales cerca, el número cuyo número dado es su raíz cuadrada jamás es, a nuestro conocimiento, puesto, aunque a la reflexión, no sea difícil! ¡En efecto, basta con ascender el número a la potencia 2! Justamente, ya que no es difícil, pongámoslo, en efecto es un gran principio de didáctica: la de la reciprocidad, decimos también **reversibilidad**. Un problema será de tan mejor asimilado como habrá sido estudiado de modo directo y de modo recíproco.

Capítulo I -3

Variantes sobre el trayecto alrededor del número de oro en CBS

Por Ruben Rodriguez

Nivel: CBS y aficionados

Objetivos: a través de un trayecto de actividades variadas los alumnos reinvierten propiedades de la geometría, desarrollan las capacidades de procurar, de modelizar, formalizar a través de propiedades geométricas y también propiedades del álgebra, autoestimarse.

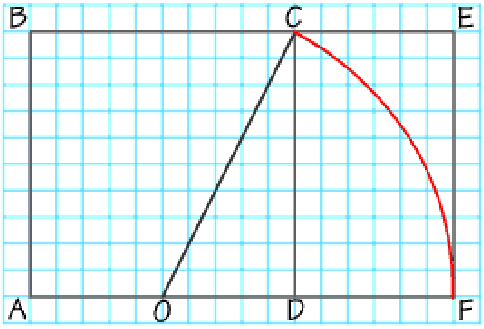
Palabras claves: número de oro, rectángulo de oro, informe, proporción, ángulos complementarios, triángulos de "la misma forma", las propiedades algébricas del cálculo literal, las identidades notables, la raíz cuadrada, las ecuaciones.

Material: papel encartonado, instrumentos de geometría, tijeras, software de geometría.

Primera variante

Podemos también hacer otra construcción sobre un problema que se vaya del cuadrado. Les distribuimos a los alumnos la figura más lejos y les pedimos encontrar un modo de construcción.

Luego les pedimos, con software de geometría, construir un rectángulo de oro a partir de un cuadrado.



1 sobre papel cuadrillado

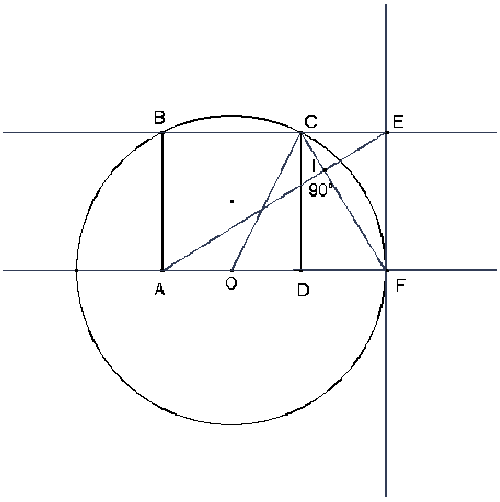


Figura 2 sobre papel unido

Les proponemos a los alumnos a partir del cuadrado ABCD dibujado construir dos rectángulos: un gran ABEF y un pequeño CEFD que sean de la “misma forma” designamos por O el medio de [AD] (figura 1).
El problema didáctico es:¿ cómo dar sentido a esta elección de O en el medio de [AD]? El sentido que se puede dar en el tercer paso por el álgebra porque en cuanto escogió O medio de [AD], es posible justificarlo por cálculos, en esta clase.
La construcción propuesta es la siguiente: partir de un cuadrado ABCD, prolongar el lado [AD] que se corta con círculo de centro O y de radío OC para obtener el punto F, luego completar el rectángulo DFEC (ver figura 2).

Cálculos: Se prende por ejemplo AB = 1.
Se calcula OD = 1 / 2 y $OC^2 = OD^2 + DC^2$. Lo que da:
$OC^2 = (1 / 2)^2 + 1^2 = ¼ + 1 = 5/4$ y entonces $OC = (\sqrt{5})/2$.
Entonces $AF = ½ + (\sqrt{5}) / 2 = (1+ \sqrt{5}) / 2$ y se calcula los proporciones AF / AB et EF / DF. Tenemos $AF / AB = (1+ \sqrt{5}) / 2$ porque AB = 1 ;
De otra parte $DF = (\sqrt{5}) / 2 - 1/2 = (\sqrt{5} – 1)/2$. Lo que da:
$EF / DF = 1 / ((\sqrt{5} – 1) / 2) = 2 / (\sqrt{5} – 1)$.
Se propone de verificar que:

AF / AB = EF / DF. Los alumnos con el profesor dicen que es lo mismo que verificar si: AF x DF es igual à AB x EF. Se calcula después: AF x DF =

$(1 + \sqrt{5}) / 2 \;\text{x}\; (\sqrt{5} – 1) / 2 = (\sqrt{5} – 1 + 5 - \sqrt{5}) / 4 = 4 / 4 = 1.$

Y AB x EF = 1 x 1 = 1. Entonces las proporciones son iguales y los rectángulos ABEF et FDCE tienen la "misma forma".

Variante 2 podemos también hacer otra construcción dinámica con software GEOGEBRA sobre un problema que se va del rectángulo.

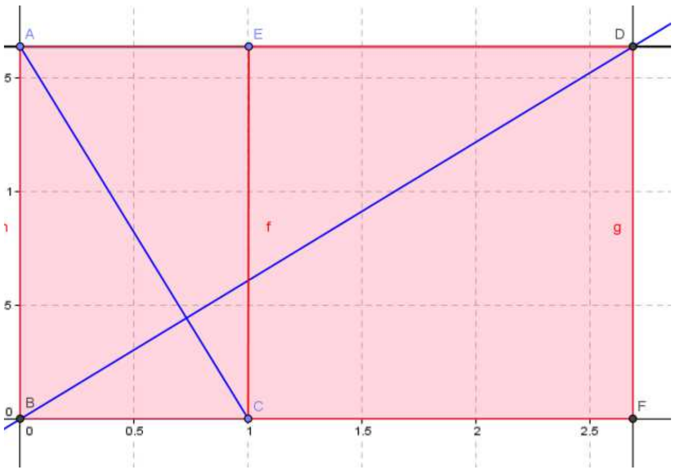
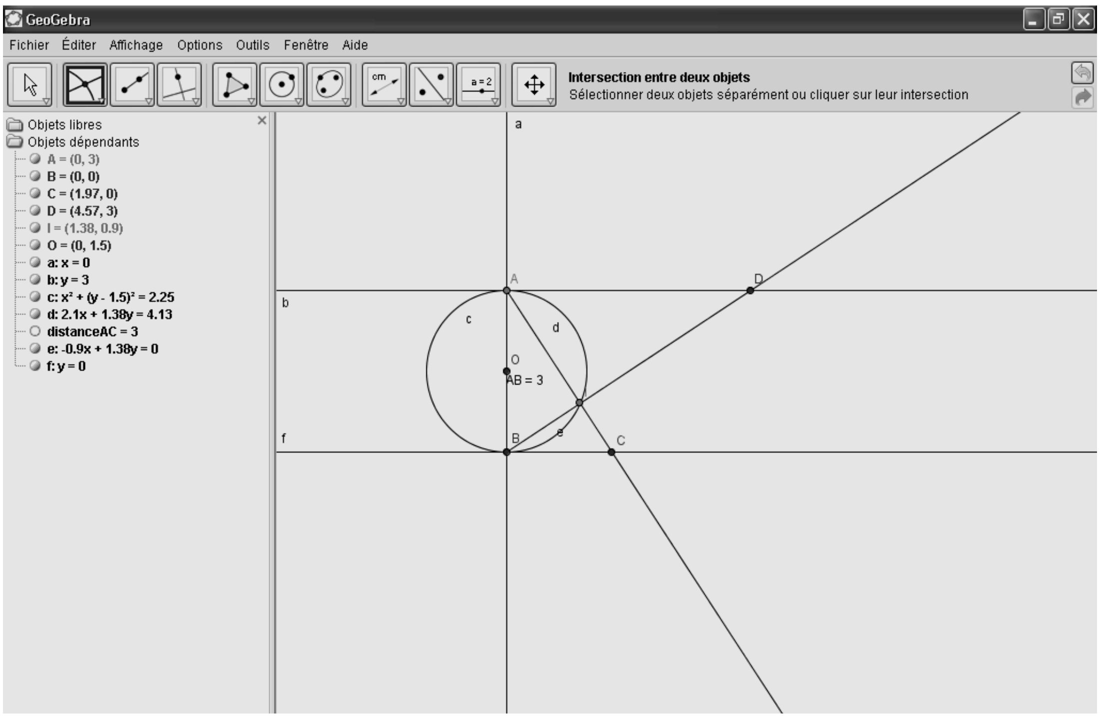
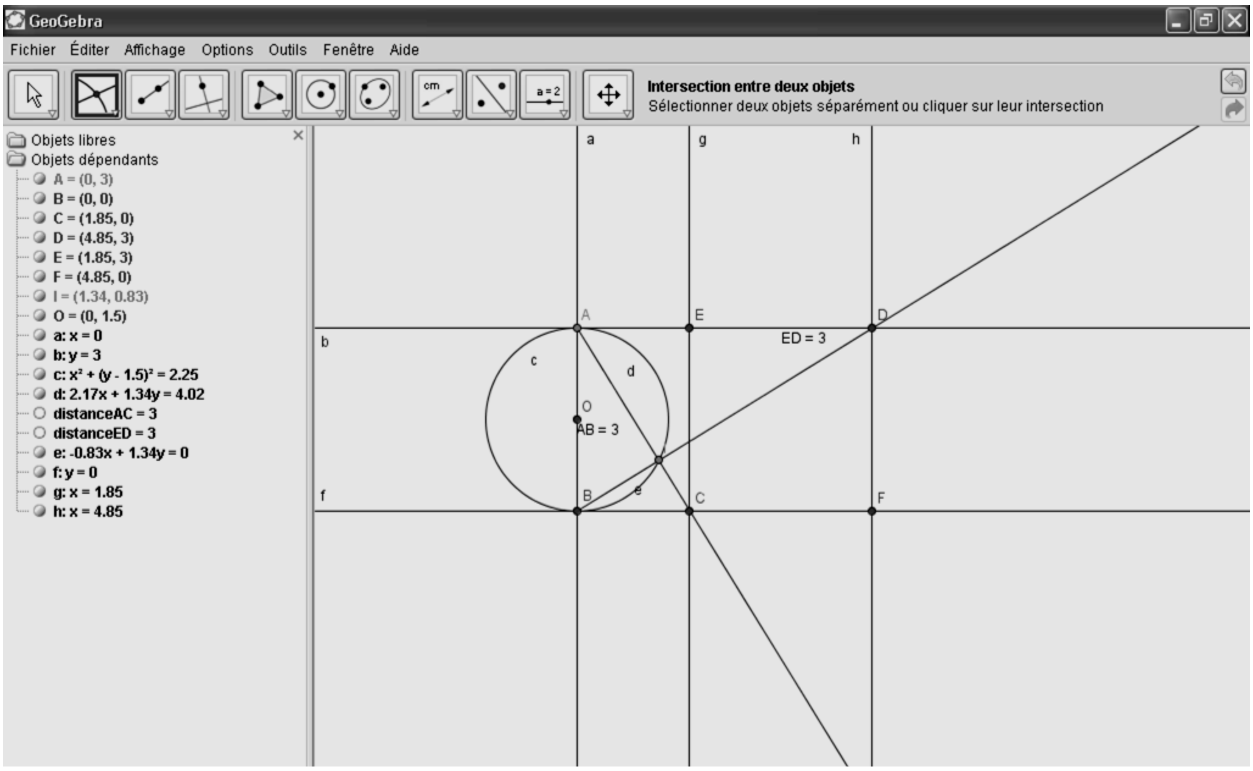


Figura 3

Cuando los alumnos analizaron bien la figura al lado, y cuando comprendieron bien que el ángulo recto entre las rectas (AC) y (BD) era una condición necesaria para que los triángulos ABC y BDF sean semejantes, podemos tratar una construcción con software GEOGEBRA.



Partimos de un ángulo recto A y de un punto B sobre uno de los lados del ángulo recto, la distancia AB siendo tomado por unidad 1. Observando que el ángulo de las rectas (AC) y (BD) debe ser derecho, trazamos un semicírculo de diámetro [AB].
Más tarde escogemos un punto I variable sobre el semicírculo. Luego le trazamos un perpendicular a (AB) que pasa por B, que corta la recta (AI) sobre C. La recta (AI) corta la otra parte del ángulo recto inicial sobre D.
Por fin trazamos el punto E con el fin de que ABCE sea un rectángulo. Evaluamos las distancias ED y AB por GEOGEBRA, observamos que no se parecen iguales.
Hacemos mover el punto I que es atado al semicírculo hasta que las distancias ED y AB sean iguales. Luego completamos el cuadrado EDFC.
Obtenemos así dos rectángulos de oro ADFB y AECB.
Los alumnos pueden demostrar de nuevo, tomando
AB = 1 entonces ED = 1 y, como los triángulos ABC et BAD son semejantes que:
AB / BC = AD / AB.

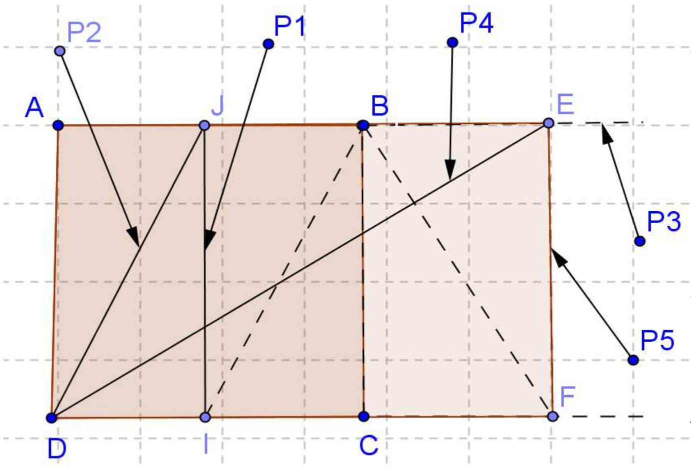


Observación: así como usted lo ve este trayecto sobre el número de oro y el rectángulo de oro es muy rico y permite trabajar un gran número de capacidades de los alumnos en geometría.

Variante3 propuesta por Danielle Salles

Siempre es interesante proponer a los alumnos trayectos diferentes para estudiar el mismo problema con el fin de ayudarles a construir bien sus psicomorfismos. Así les proponemos a veces a los alumnos el problema resuelto, a ellos de demostrar la exactitud de los razonamientos.

Podemos proponer a los alumnos la versión siguiente por plegado en forma de adivinanza, les distribuimos a los alumnos una hoja fuerte sobre la cual es dibujado un cuadrado ABCD, acompañado por el "modo de empleo" siguiente:



Les pedimos entonces a los alumnos efectuar el pliegue y justificar esta construcción.

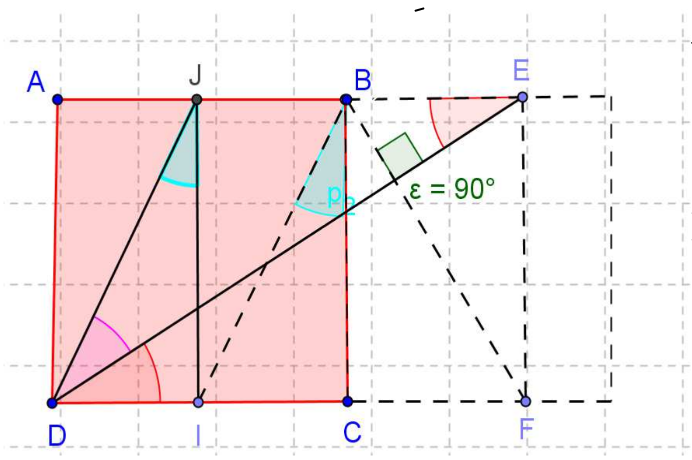
Indicamos los pliegues por su orden: Pn

Sea ABCD un cuadrado, por el primer pliegue, trazamos el segmento [IJ] que junta los medios de dos lados opuestos. Por el segundo pliegue, trazamos el segmento [DJ]. Por el tercer pliegue prolongamos la recta (AB) a la derecha de B. Por el cuarto pliegue trazamos la bisectriz de $\widehat{CDJ}$ la que encuentra la recta (AB) sobre E. Por el quinto pliegue, trazamos a EF) perpendicular a (AB) sobre E.

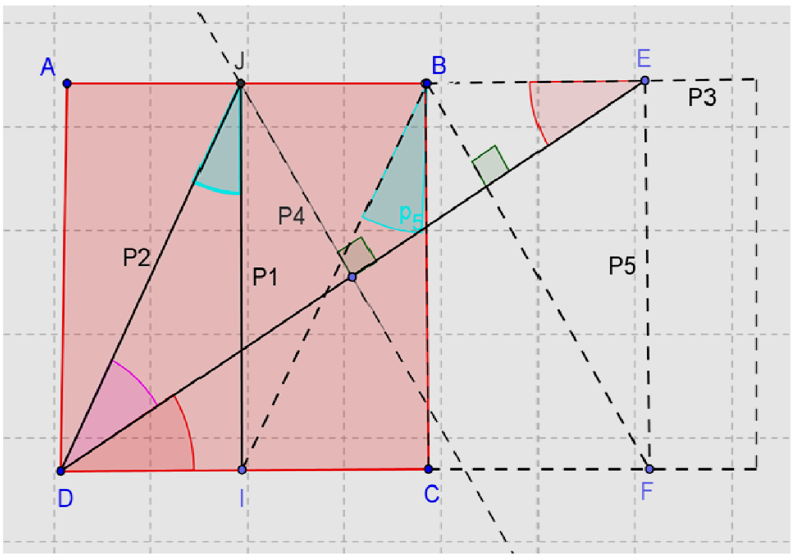
Adivinanza:

¿Cual es la naturaleza de los cuadriláteros AEFD y BEFC?

Respuesta: son rectángulos de oro.



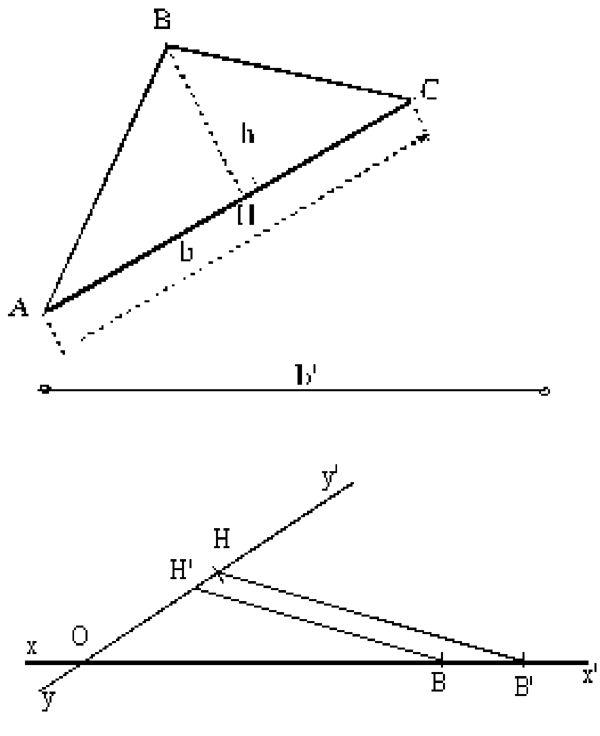
La semirrecta [DE) siendo la bisectriz de $\widehat{CDJ}$, los ángulos $\widehat{CDE}$ y $\widehat{EDJ}$ son iguales (superponibles)..
Los segmentos [DF] y [AE] siendo paralelos, $\widehat{CDE}$ es igual a $\widehat{DEA}$. El triángulo DJE es entonces isósceles de vértice J y JE = DJ. Ya que:
AJ = AB / 2 y AD = AB ;
El rectángulo AEFD es de oro.
Teniendo en cuenta que esta demostración muy simple que consiste en trasladar por pliegue la longitud: DJ sobre la recta (AB) a partir de J, podemos proponer el pliegue más simple:
Conservamos los tres primeros pliegues, luego por un pliegue con J fijo y trayendo D sobre [AB) obtenemos el punto E (trazamos, de hecho, la bisectriz del ángulo DJE).
Acabamos como anteriormente para obtener F.
El número de pliegues es lo mismo.



Variante 4: Una construcción que utiliza las medidas proporcionales.
Recordamos que cuando se construye los rectángulos de oro AEFD y BEFC, estos tienen sus medidas de sus lados proporciónales:

AE / BC = BC / BE = $(1+\sqrt{5})/2$ (El número de oro). Pues, si ya se dispone de un rectángulo de oro construido, sería interesante poder construir geométricamente rectángulos sucesivos de oro de pequeño lado impuesto por ejemplo.
Comencemos por recordar a una técnica que utiliza el teorema de Tales para construir longitudes proporcionales.
Propusimos en otro trabajo el problema siguiente.

Variante 5: una construcción que utiliza las medidas proporcionales
Recordemos que cuando se construye los rectángulos de oro AEFD y BEFC, éstos tienen las medidas proporcionales de sus lados: AE / BC = BC / BE = $(1+\sqrt{5})/2$ (el número de oro). Pues, si ya se dispone de un rectángulo de oro construido, sería interesante poder construir geométricamente rectángulos sucesivos de oro de pequeño lado impuesto por ejemplo. Comencemos por recordar a una técnica que utiliza el teorema de Tales para construir longitudes proporcionales. Propusimos en otro trabajo el problema siguiente:



¿Siendo dado un triángulo de base b y altura h, cómo construir un triángulo lo mismo área de que la base b ' es dada y diferente de b? ¿Podemos hacerlo con la regla y el transportador (compás a puntas secas)?
Solución: tracemos dos secantes rectas desde O: (x'Ox) y (y'Oy). Sobre [Ox') traslademos a partir de O las longitudes b de extremidad B y b ' de extremidad B ', sobre [Oy) traslademos la longitud h de extremidad H.

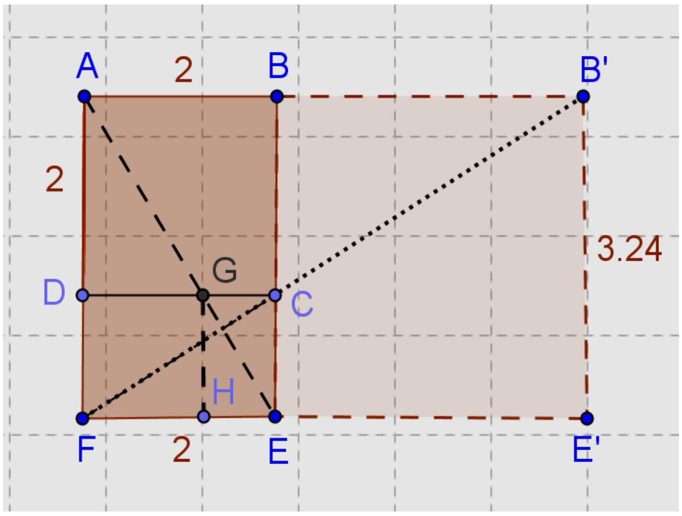
Tracemos la recta (B' H) luego la recta paralela a (B' H) que pasa por B.
La intersección de esta recta con [Oy) es anotada H ' y la h ' = OH '.

Por el teorema de Tales tenemos h ' / h = b / b ', de donde b'h ' = bh pues el área de los triángulos de base b ' y de altura la h' es la misma que el de los triángulos de base b y de altura h.
Esta construcción es fácilmente realizable a la regla y al compás a puntas secas, como lo mostramos en nuestra obra "Nuevas prácticas de la geometría" ediciones del IREM de Basse-Normandie.

Pues construimos de modo simple un "cuarta proporcional" de tres longitudes dadas. Observamos que las proporciones son inversas proporciones de las acostumbradas utilizadas en los triángulos semejantes ya que aquí se trata de cálculo de área, pues son los productos que deben ser conservados.
Sin embargo esta técnica puede ser fructuosa para construir rectángulos sucesivos de oro, luego comparar el crecimiento de las longitudes de sus lados al de sus áreas.

Así supongamos que ya hayamos construido un rectángulo de oro ABEF por uno de los métodos precedentes por lo tanto de un cuadrado ABCD.

Es fácil continuar las construcciones prolongándole el lado [AB] de una longitud igual a BE para obtener el rectángulo de oro que sigue en punteado.



Por definición del rectángulo de oro las relaciones de los lados de los rectángulos sucesivos de oro: DC / CE; FA / FE; FE / E'B ' deben ser iguales entre ellos y al nombre de oro:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Por ejemplo : $\frac{FE'}{E'B'} = \left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \times \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \times \frac{2}{1+\sqrt{5}} =$

$$\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}{-4} = \frac{3+\sqrt{5}-3\sqrt{5}-5}{-4} = \frac{2+2\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

¿Cómo están los aires de estos rectángulos así construidos?

El más pequeño tiene para aire $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, el siguiente $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, el tercero: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\frac{8+4\sqrt{5}}{4}=2+\sqrt{5}.$

Estas áreas no respetan la proporcionalidad de los lados respectivos y se plantea una cuestión interesante: ¿podemos prever la sucesión de las áreas?

Otra cuestión que se inspira en la planteada en nuestro pequeño problema sobre los triángulos: ¿podemos construir gracias al teorema de Tales un rectángulo de oro de lado pequeño impuesto?

Conclusión de los artículos de los capítulos precedentes: un trayecto rico e interdisciplinario alrededor del número de oro en la enseñanza de las matemáticas contribuye al desarrollo de las competencias geométricas y también los valores culturales, la estética de las formas. Es la investigación que da otra dimensión a los estudios matemáticos en el colegio y no hay que vacilar enseñando a transmitir a nuestros jóvenes alumnos, este amor para la belleza que existe en las matemáticas, entre las que el número de oro, el rectángulo de oro, el triángulo de oro, el triángulo sagrado son sólo un bello ejemplo.

-0-

Capítulo II Matemáticas e Historia del Arte

Actividades transversales alrededor del número de oro
por Abderrahmane Nitaj

Actividades transversales en Matemáticas, Artes plásticas, Historia-geografía, Tecnología.

Instrumentos: procesador de textos, Hoja de cálculo, instrumentos de geometría.
Palabras claves: matemáticas: raíces cuadradas, Teorema de Pitágoras, Trigonometría, Rectángulo, Triángulo, Espiral, Pentágono regular, Sucesiones de Fibonacci, Pirámide

Parte I. El número de oro

Parte II. El número de oro en la geometría.

1. El rectángulo de oro.
2. La espiral de oro.
3. El triángulo de oro.
4. El pentágono regular.
5. El octógono regular.

Parte III. El número de oro en la pintura.
1) El sacramento de la última cena, por Salvador Dali
2) El Hombre de Vitrubio por Leonardo de Vinci.
3) El nacimiento de Venus por Sandro Botticelli.

Parte IV. El número de oro en la arquitectura.
Parte IV. El número de oro en la naturaleza.
Parte V. Cálculos con el número de oro
Parte VI. El mito del número de oro

Enlaces útiles: documentos:
http://accromath.uqam.ca/contents/pdf/lenombredor.pdf

Film: http://www.dailymotion.com/video/x5uzbz_video-le-nombre-dor-tpe-marc_creation
Film: http://www.dailymotion.com/video/x8xxkx_le-nombre-dor-113_creation.

Y también el muy interesante artículo de Edouard Lucas:
http://edouard-lucas.clg.ac-amiens.fr/IMG/pdf/les_nombres_dans_l_art.pdf

Parte I. El número de oro. El valor exacto del número de oro es

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Es a menudo designado por la letra griega "φ".

A) **Historia:** ¿buscar por qué el número de oro es designado por φ?

B) **Matemáticas**:

A) Calcular y expresar un valor aproximado de φ a 0,001

B) Calcular y expresar el valor exacto de φ^2, en función de φ

C) Calcular y expresar el valor exacto de $\varphi+1$, en función de φ

D) Deducir que $\varphi^2 = \varphi+1$.

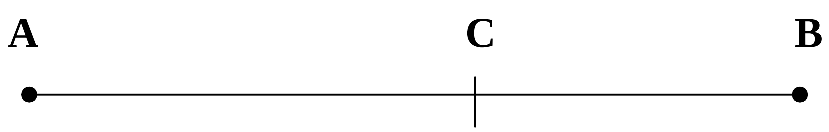
Parte II. El número de oro en la geometría. La Divina proporción

A) **Matemáticas**:

Llamamos **divina proporción** la relación que permite dividir un segmento [AB] en dos segmentos [AC] y [CB] de tal modo que "El cociente de más grande al más pequeño es igual al cociente del total al más grande

Ver también el muy interesante artículo de Edouard Lucas (en francés):
http://edouard-lucas.clg.ac-amiens.fr/IMG/pdf/les_nombres_dans_l_art.pdf

Aquí una figura que representa esta división, escriba usted la propiedad en la forma algebraica.

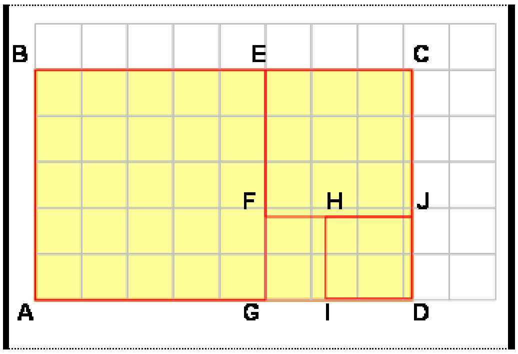


1) El rectángulo de oro:

A) Buscar la definición de un rectángulo de oro.
B) Dibujar un rectángulo de oro:
Trazar un cuadrado ABCD de 6 cm de lado.
Colocar el punto K, medio de [AD].

Colocar el punto E de la semirecta [AD) tal como KE = KC.
Colocar el punto F tal que DEFC sea un rectángulo.
C) Vamos a mostrar que ABFE es un rectángulo de oro. Para esto:
I) Calcular a KD.
II) Mostrar que el valor exacto de KC es $KC = \sqrt{45}$ (en cm).
III) Escribir a KC bajo la forma $a\sqrt{b}$ con a y b enteros (b el mas pequeño posible.)
IV) Calcular el valor exacto de AE.
V) Mostrar que: $\frac{AE}{AB} = \varphi$

2) La espiral de oro: (hacer un dibujo a la escala)

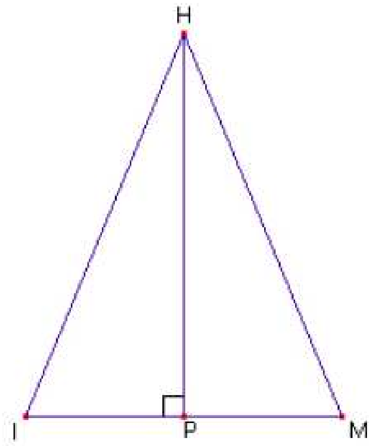


A) i) Trazar un rectángulo ABCD tal como AB = 8,9 cm y BC = 14,4 cm.
ii) Calcular a 0,001 y deducir de eso la naturaleza del rectángulo ABCD.
B) i) Trazar el cuadrado ABEG.
ii) Calcular a EC.
iii) Calcular a 0,001 y deducir de eso la naturaleza del rectángulo ECDG.
C) i) Trazar el cuadrado ECJF.
ii) Calcular a DJ.
iii) Calcular $\frac{CD}{EC}$ a 0,001 y deducir la naturaleza del triángulo DJFG.

d) i) Trazar el cuadrado DJHI.
ii) Calcular IG.
iii) Calcular $\frac{DJ}{IG}$ a 0,01 y deducir la naturaleza del rectángulo GIHF.
e) Trazar el arco de círculo $\widehat{IJ}$ de centro H.

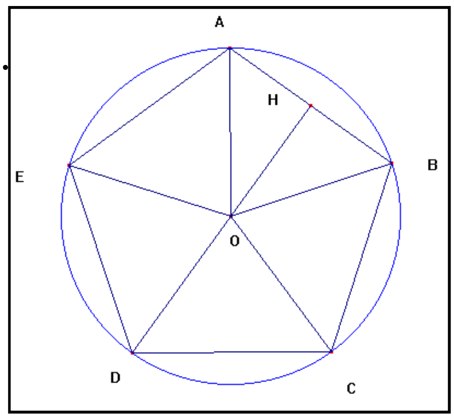
f) Trazar el arco de círculo $\overset{\frown}{JE}$ de centro F.
g) Trazar el arco de circulo $\overset{\frown}{EA}$ de centro G.
h) ¿Cual es la figura obtenida por intermedio de los arcos de círculo?

Buscar la definición del triángulo de oro.
Consideramos el triángulo HMI, isósceles de vértice H,
tal que IH = 23,3 cm e IM = 14,4 cm
I) Mostrar que a 10^{-3} , HMI es un triángulo de oro.
II) Mostrar que (HP) es la mediatriz del segmento [IM]
III) Calcular la medida del ángulo $\widehat{HIP}$ a 1 grado
IV) Calcularle el ángulo $\widehat{IHM}$ a 1°.

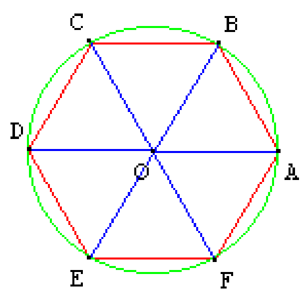


4) El pentágono regular.
El pentágono es un polígono que tiene 5 lados.
El pentágono regular es un polígono regular de cinco lados.
Está inscrito en un círculo y tiene 5 ángulos al centro de la misma medida.

Consideramos un círculo de radio OA = 5 cm y un pentágono regular ABCDE.
Sea [OH] la altura del triángulo OAB de vértice 0.
A) Mostrar que la medida de un ángulo al centro es 72°.
B) Calcular la medida del ángulo $\widehat{AOH}$.
C) Calcular OH a 0,001 .
D) Calcularle AB a 0,001 .
E) En el triángulo rectángulo DHA, calcular AD a 0,001 .
F) Mostrar que $\frac{AD}{DC} \simeq \varphi$.

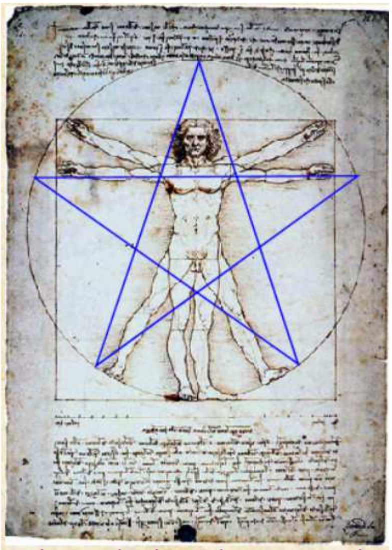


5) El hexágono regular.
El hexágono regular es un polígono que tiene 6 lados de la misma longitud.
Y está inscrito en un círculo y tiene 6 ángulos al centro

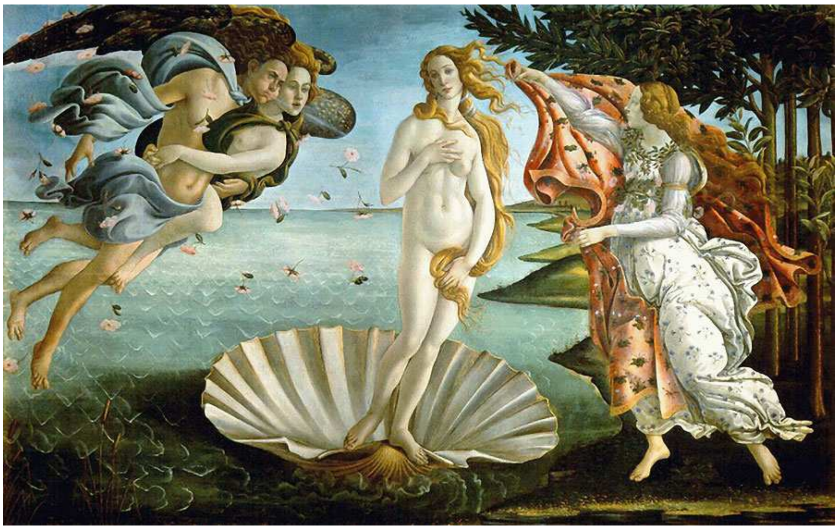


de la misma medida.
Consideramos un círculo de radio 5 cm.
A) Mostrar que la medida de un ángulo al centro es 60°.
B) Calcular las medidas de los ángulos.
C) Deducir de eso la naturaleza del triángulo OAB y la longitud AB.
D) Trazar figuras geométricas en la imagen siguiente.

Parte III. El número de oro en la pintura.
1) El sacramento de la última cena, el Salvador Dali.
La pintura de esta página, de Salvador Dali es llamada "El sacramento de la última cena".
A) Artes plásticas: resumir en 4 líneas máximo la vida de Salvador Dali.
B) Artes plásticas: describir en 4 líneas máximo la pintura más arriba.
C) Matemáticas: describir la figura geométrica del plano que rodea a la persona central.
D) Matemáticas: describir la figura geométrica del espacio, formado por pentágonos, que rodea la escena.
E) Artes plásticas: describir otra pintura célebre de Dali.
3) El Hombre de Vitrubio, Leonardo da Vinci La representación al lado derecho es muy célebre, es debida a Leonardo da Vinci.
A) Artes plásticas: resumir 4 líneas máximo la vida de Leonardo da Vinci.



B) Artes plásticas: describir en 4 líneas máximo esta pintura.
Matemáticas: describir las figuras geométricas que rodean al personaje central.
C) Matemáticas: ¿ trazamos una estrella sobre esta pintura, Cómo encontrar con precision el centro del círculo circunscribe?
D) Artes plásticas: describir otras realizaciones célebres de Leonardo da Vinci.



El nacimiento de Venus,
por Sandro Botticelli

A) Artes plásticas: resumir 4 líneas máximo la vida de Sandro Botticelli.

B) Artes plásticas: Describir en menos de 4 líneas esta pintura.

Matemáticas: las dimensiones originales de este cuadro son de 278,5 cm y 172,5 cm. ¿Cuál es la relación entre este cuadro y el número de oro?

Parte IV. El número de oro en la arquitectura.

1) El Partenón, Atenas
A) Historia: decir cuál es el período histórico de construcción del Partenón**.**
B) Geografía: situar con bastante precisión la ciudad de Atenas en el mapa abajo.

C) Matemáticas: decir el nombre de tres matemáticos griegos célebres en el programa de matemáticas del CBS.

D) **Matemáticas:** buscar las dimensiones reales del Partenón, determinar la relación con el número de oro.

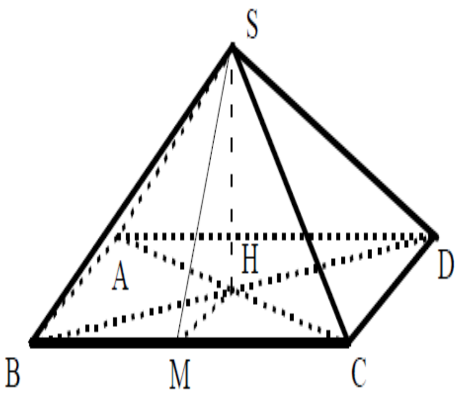
2) La pirámide del Louvre

A) Historia: dar el período de construcción de la pirámide del Louvre.

B) Geografía: ¿ En cuál país se encuentran las más célebres pirámides del mundo? ¿Cuál es la capital de este país?

C) Matemáticas: buscar las dimensiones de la pirámide de Khéops.

Altura; naturaleza de la base;
dimensiones de la base
Dar la fórmula del volumen de una pirámide
Calcular el volumen de la pirámide de Khéops
Estimar su peso suponiéndola llena y la densidad de las piedras igual a **3.**



D) **Matemáticas**: consideramos la pirámide regular aquí al

lado con una base cuadrada: BC = 230.400 m, SH = 146.58 m
donde H está el centro del cuadrado ABCD
Anotamos M el medio de [BC]
¿Cuál es el tipo del triángulo SHM? Calcularle a SM a 0,001.
Mostrar que $\left(\frac{SM}{SH}\right)^2 \approx \varphi$ a 0,001.

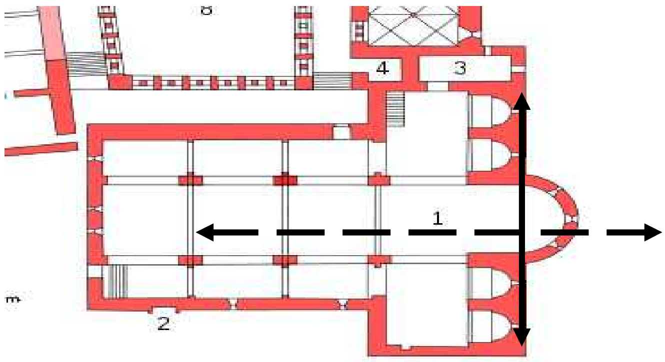
3) Recogida histórica: medidas en la Edad Media de Francia
Los constructores de catedrales de la edad media utilizaban medidas "móviles" gracias a indicaciones relativas a sus brazos, lo que era muy práctico pero un poco aproximado. Las numerosas personas conocen, hasta en nuestros días, la medida aproximada (en cm)de su paso, de su brazo y de sus dedos estirados para obtener medidas "groso modo" útiles en la vida corriente.
En la edad media justamente cada uno media según sus miembros, se suponía que todos los adultos hombres tenían medidas similares pero eso es muy aproximado.

Citemos estas medidas, un poco diferentes según la época y los lugares, en la orden creciente y su medida en cm:
- La palma (de la mano) 7,64
- La cuadra (la mano estirada) 12,63
- El empan 20
- El pie 32,36
- El codo 52,36.

¿Respeta la relación entre estas medidas sucesivas de indices n / (n-1) la divina proporción φ? El término de orden n es igual a la suma de ambos precedentes (Es decir los términos sucesivos forman una sucesión de Fibonacci que estudiaremos más precisamente en el capítulo V.)

4) La abadía del Thoronet en Francia (según el libro de Robert Chalavoux:
"Número de oro, naturaleza y obra humana", edición a Chalagam)
A) Historia y geografía: ¿ en cuál región de Francia se encuentra la abadía de Thoronet? ¿En cuál época fue construida?

B) Matemáticas: he aquí el plan de la iglesia de este abadía, tomando por unidad de medida la anchura de la nave, tomada a la mitad del espesor de las paredes, (indicada por una flecha doble gruesa), encuentre medidas del
edificio en relación con número de oro y su inverso.



Parte V. Cálculos con el número de oro

Existen varias fórmulas para calcular el número de oro. Podemos someter a un test algunos bastante fácilmente con la máquina de calcular o una hoja de cálculo. El número de oro sirve también para resolver ciertos problemas de matemáticas como el del problema de la reproducción de los conejos.

La sucesión de Fibonacci. He aquí el problema que propuso el matemático italiano: Leonardo Pisano apodado Fibonacci:

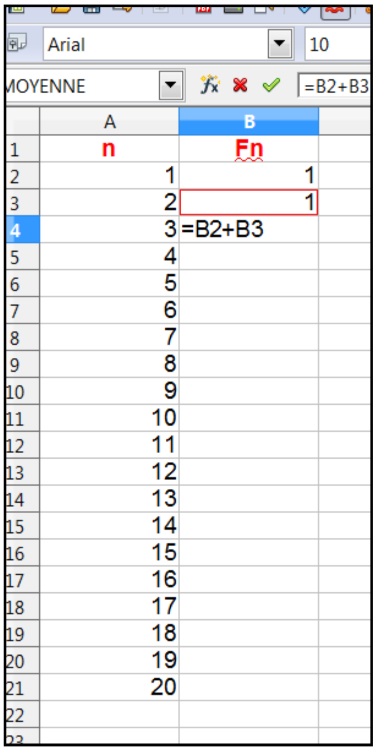
"¿Poseyendo inicialmente un par de conejos, cuántos pares obtenemos en doce meses si cada par engendra cada mes un nuevo par a partir del segundo mes de su existencia?"

A) Historia: resumir en menos de 4 líneas la vida de Leonardo Pisano apodado Fibonacci.
B) Geografía: describir un monumento celebra en la ciudad de Pisa.
C) Historia: situar con bastante precisión la ciudad de Pisa en el mapa.
Historia: describir un hecho notable ocurrido en el mundo entre 1180 y 1250.

C) Matemáticas: para responder a la cuestión de Fibonacci, designamos por Fn el número de pares de conejos al principio del n-iemo mes.

Completar el tablero siguiente y determinar una relación entre el valor de Fn y los valores que la preceden.

Mes n° *n*	1	2	3	4	5	6
Fn = Número de pares	1	1	2	3	5	8



Para continuar a estudiar la succencion de Fibonacci, se utiliza la computadora.

Abrir una hoja de OpenOffice

- Sobre la casilla A2, escribir 1.
- la casilla A3, escribir 2.
- Seleccionar las casillas A2 y A3 y deslazar hasta la casilla A21.
- Sobre la casilla B2, escribir 1.
- Sobre la casilla B3, escribir 1, en la casilla B1, escribir Fn.
- En la casilla B4, escribir =B2+B3 y validar.
- Seleccionar la casilla B4 y deslazar hasta la casilla B21.

Encontrar une relación entre el valor de *Fn* y los valores que la preceden.

Para los alumnos profesores:

¿Cuál es el valor más pequeño de n para el cual las 5 primeras cifras después de la coma son los del desarrollo decimal de φ?

Demostrar que $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo número entero n> 1.

Sea la deinición $\bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, demostrar que:

$$Fn = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\left(\varphi^n - \bar{\varphi}^n\right)$$ para todos los números enteros n>1.

2) La formula de las "fracciones continuas"(es decir fracciones que se continúan)

La formula siguiente: $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$ permite de encontrar valores cada vez mejor aproximadas del número de oro.

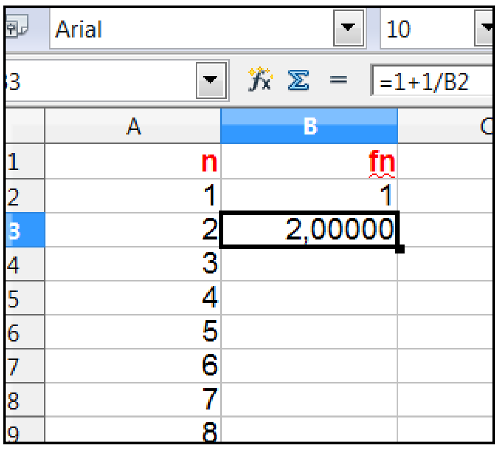
$$\boxed{\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots\dots\dots}}}}}$$

Designamos por f_n el valor de la fracción con *n* adiciones. Así:

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1 + \frac{1}{1}, \quad f_2 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}, \quad f_3 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}, \quad f_4 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}$$

i) Calcular f_1 , f_2, f_3 y f_4. ¿Podemos encontrar de nuevo f_5 con el ayudo de las sucesiones de Fibonacci?

ii) Calculamos esta fórmula con un tablero del computador calculando f_n.



- Abrir una hoja de open office Calc
- En la casilla A1, escribir n
- En la casilla B1, fn (f_n)
- En la casilla A2, escribir 1
- En la casilla A3, escribir 2
- Seleccionar las cases A2 y
- A3 y deslizar, hasta la casilla A22.
- En la casilla B2, escribir =1
- y validar.
- En la casilla B3, escribir =1+1/B2 y validar.
- Seleccionar la casilla B3 y poner 5 cifres después la vírgula.

– Seleccionar la casilla B3 y deslazar hasta la casilla B22.
– ¿Cuál es la más pequeña valor de n para qué $f_n \simeq 1,61803$?

Completar f_{10} = y f_{20} =

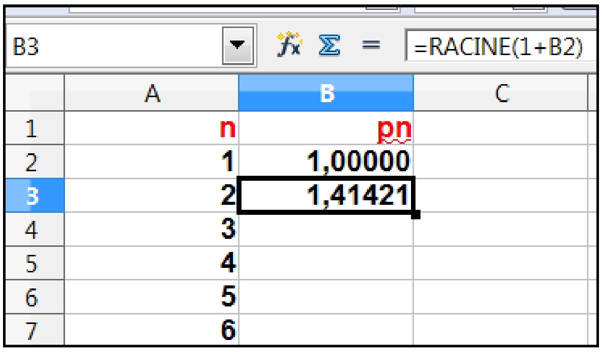
3) La formula de las raíces cuadradas.

La formula siguiente permite encontrar valores mas y mas del número de oro.

$$\boxed{\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+........}}}}}}$$

Para los alumnos profesores: demostrar esta fórmula observando que: $\varphi = \sqrt{1+\varphi}$.

Sometamos a un test esta fórmula con la ayuda de una hoja de cálculo calculando p_n donde n está el número de raíces cuadradas.


B3 =RACINE(1+B2)

	A	B	C
1	n	pn	
2	1	1,00000	
3	2	1,41421	
4	3		
5	4		
6	5		
7	6		

Abrir una hoja de openoffice Calc
En la casilla A1, pegar n
En la casilla B1, pegar p_n
? En la casilla A2, pegar 1
? En la casilla A3, pegar 2

Seleccionar la casilla A2 y A3 y sacar, el ratón apretado, hasta la casilla A20
En la casilla B2, pegar =RACINE (1) y validar.
En la casilla B3, pegar =RACINE (1+B2) y validar.
Seleccionar la casilla B3 y poner 5 cifras después de la coma.
Seleccionar la casilla B3 y tirar, el ratón apretado, hasta la casilla B20.
? ¿Cuál es el valor más pequeño de n para el cual p_n aproxime 1,61803?

Completar p_{10} = y p_{20} = a 10^{-5} .

Parte VI. El mito del número de oro.
Desde hace siglos, el número de oro ha fascinado los espíritus. ¡Muchas afirmaciones todavía circulan sobre el número de oro en el siglo XXI!
Consultar las páginas siguientes y citar por lo menos 5 vegetales donde el número de oro parece estar presente.
1er enlace: http://leventtourne.free.fr/livreouvert/NombreOr/
2ndo lazo: http://ethnoplants.bestgoo.com/spiritualite-f35/la-geometrie-sacree-des-plantes-t1209.htm

¿Según usted, las afirmaciones siguientes son creíbles?

Al siglo V antes. Cristo.: el escultor griego Phidias utiliza el número de oro para decorar el Partenón en Atenas, en particular para esculpir la estatua de Atenea.
Pártenos. También utiliza la raíz cuadrada de 5 como coeficiente de proporción.

Verdadero Falso
Los egipcios utilizaron a la vez Pi y Phi para la construcción de las grandes pirámides.
Verdadero Falso

Al siglo III antes. Cristo.: Euclides evoca la división de un segmento en "extremo y media razón en el libro VI Elementos".

Verdadero Falso

Al siglo X: utilización del número de oro para la construcción de la catedral Notre-Dame-de-Paris.

Verdadero Falso

·En 1498: Fra Luca Pacioli, un monje profesor de matemáticas, con la ayuda de Leonardo da Vinci, escribe "De divina proportione"; obra totalmente dedicada al número de oro.

Verdadero Falso

Durante el XX^e siglo pintores como Dalí y Picasso, así como arquitectos como Le Corbusier, utilizaron el número de oro.

Verdadero Falso

Indicaciones de soluciones matemáticas por Danielle Salles

Parte I. El número de oro

A) Historia El número de oro de oro es designado por la letra φ porque es la inicial de Phidias, el arquitecto griego que concibió el Partenón..

B) Matemáticas Un valor a la milésima es: 1,618.

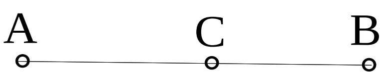
$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right) = \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).$$

El valor exacto de $1+\varphi$ es : $1+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \varphi^2.$

Parte II. El número de oro en la geometría

La divina proporción

Observamos el reparto de un segmento [AB] en [AC] y [CD],

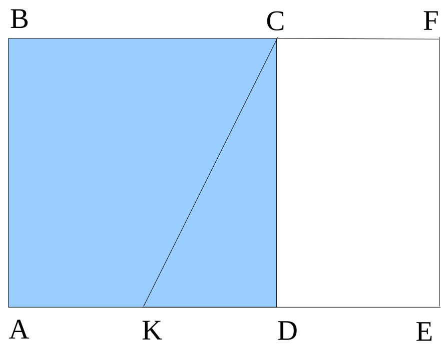


Desiramos que: $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AB}{AC}$; notamos la medida de $CB = 1$

y la de AC = x, ninguna medida es nula entonces:

$AC^2 = AB.CB$ es decir:

$x^2 = x + 1$, notaremos φ la raiz posítiva de esta ecuación.



KD = 3 cm

$KC^2 = 36 + 9$ entonces $KC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ cm ;

$AE = 3\sqrt{5} + 3$ y $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{3\sqrt{5}+3}{6} = \varphi$.

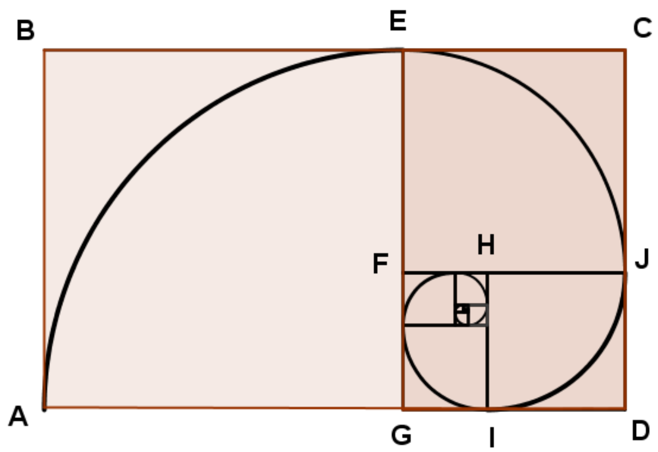
$\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{14,4}{8,9} = 1,618$ es decir φ a la millésima.

$EC = 14,4 - 8,9 = 5,5$; $\dfrac{CD}{EC} = \dfrac{8,9}{5,5} = 1,618$ es decir

φ a la millésima.

El rectángulo ECDG es de oro (a la millésima).

Lo mismo para los rectángulos siguientes.



La figura obtenida es una espiral dicha de oro o dorada.
Sea el pentágono regular inscrito en un círculo de rayo OA, sus ángulos al centro son todos iguales a 360° / 5 = 72°. Ya que [OA] es una altura relativa en el vértice de un triángulo isósceles, es también la bisectriz del ángulo AOB, la medida del ángulo AOH es pues 36°.

El hexágono regular Por las mismas razones que más alto el ángulo en el centro tiene para medida: 360 / 6 = 60°. Al ser regular el hexágono, todos los triángulos de vértice O son isósceles, admiten dos ángulos de 60° pues el tercer ángulo tiene como medida 180 - 2 x 60 = 60°. El triángulo OAB es entonces equilátero, ya que la medida de sus tres lados es igual a OB y AB = OB = OA = 5cm.

Parte III. El número de oro en la pintura
Observamos un círculo, después lo que parece un cuadrado, y luego un pentágono inscrito en el círculo. Podemos encontrar con precisión el centro del círculo trazando las diagonales del pequeño pentágono convexo definido por las diagonales del gran pentágono estrellado.

El nacimiento de Venus 278,5 / 172,5 = 1,614 a la milésima que está una aproximación al centésimo del número de oro.
El Partenón mide 69,51 metros sobre 30,88 metros, 69,51/30,88 = 2,25. La pirámide de Keops tiene una base prácticamente cuadrada por lados 230,3 m (el error máximo es 20 cm). Su altura es 147m.
El volumen de una pirámide es igual al tercio del producto del área de su superficie de base por su altura. El volumen de la pirámide es pues: 230,3 x 147 = 33854 m^3, al metro cúbico. Se admite que su densidad es 3; (la densidad de los sólidos es la proporción de la masa volumétrica de este material a la del agua) esto nos permite calcular su peso que es :
33854 x 3 = 101562 103 kg. Al ser regular la pirámide de base cuadrada ABCD de centro O, [SH] es la altura de la pirámide pues [SH] es ortogonal al plano de la base ABCD y, en particular, en [HM]. El triángulo SHM es pues rectángulo sobre H. En el triángulo SHM apliquemos el teorema de Pitágoras.

$HM^2 + SH^2 = SM^2 = (230{,}40/2)^2 + (146{,}58)^2 = 34756{,}7364 = 186{,}431^2$ Entonces SM = 186,431.

SM/SH = 186,431/146,58 = 1,272. SM / SH = 1,618 = φ a la milésima.

Parte IV Recuerdo histórico: medidas a la Edad media Repitamos estas medidas en la orden creciente y su medida en cm:

- La mano 7,64 12,63/7,64 = 1,65 al centésimo

- La cuarta 12,63 20/12,63 = 1,58
- El empan 20 32, 36/20 = 1,62
- El pie 32,36 52,36/32,36 = 1,62
- El codo 52,36.

La división de estas medidas sucesivas n / (n-1) respeta aproximadamente la divina proporción. Estas medidas son atadas al ser humano y no pueden ser exactas.
Como tenemos, más o menos:
Mano + cuarta = empan 7,64 + 12,63 = 20,27
Palma + empan = pie 12,63 + 20 = 32,63
Empan + pie = codo 20 + 32,36 = 52,36.

Los resultados son bastante satisfactorios teniendo en cuenta la observación precedente.

Parte V. Cálculos con el número de oro. Sucesión de Fibonacci

Mes n° *n*	1	2	3	4	5	6
Fn = Número de pares	1	1	2	3	5	8

"***¿Poseyendo inicialmente un par de conejos, cuántos pares obtenemos en doce meses si cada par engendra cada mes un nuevo par a partir del segundo mes de su existencia?***"
.
Mostremos que Fn = Fn-1 + Fn-2.
Supongamos que al mes de orden n-2 tengamos Fn-2 pares, y que al mes de orden n-1, tengamos Fn-1 pares.

Al mes de orden n tendremos Fn-1 pares del último mes aumentados de los pequeños de Fn-2 pares del mes precedente que ahora tienen edad de reproducirse, pues tendremos Fn = Fn-1+Fn-2 pares.
Tenemos pues: F7 = 13; F8 = 21 F9 = 34; F10 = 55; F11 = 89;
F12 = 144; F13 = 233, F14 = 377, F15 = 610.
Observamos que la división de los dos últimos términos es igual a 1,618 es decir φ a la milésima.
Recordamos que:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ y } \bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ son}$$

las raices de la ecuación: $x^2 - x - 1 = 0$

Para demostrar que $F_n = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\left(\varphi^n - \left(\bar{\varphi}\right)^n\right)$

para todo número entero n>1, se hace una recurrencia sobre n.. Si n=1 pues n=2

Para n=1 tenemos: $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)(\varphi - \bar{\varphi}) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\sqrt{5} =$

1 = F_1. Para n=2 tenemos:

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)(\varphi^2 - \bar{\varphi}^2) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)(1+\varphi-1-\bar{\varphi}) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)(\varphi - \bar{\varphi}) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\sqrt{5} = 1 =$$

F_2.
La hipótesis de recurrencia esta verificada cuando n=1 y n=2.

Supongamos que $\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\varphi^n - \left(\bar{\varphi}\right)^n\right) = F_n$ **(1)** hasta n.

Recordamos que $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Ahora multiplicando la expresión (1) por $\varphi + \bar{\varphi}$ **(= 1)** tenemos:

$\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\varphi^n - \left(\bar{\varphi}\right)^n\right)(\varphi + \bar{\varphi}) = F_n$. Calculamos:

$$F_n(1) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\varphi^{n+1} - \left(\overline{\varphi}\right)^{n+1}\right) + \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\varphi^{n}\,\overline{\varphi} - \varphi\,\left(\overline{\varphi}\right)^{n}\right) =$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\varphi^{n+1} - \left(\overline{\varphi}\right)^{n+1}\right) + \frac{\sqrt{5}}{5}\,\varphi\,\overline{\varphi}\,\left(\varphi^{n-1} - \left(\overline{\varphi}\right)^{n-1}\right) =$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\varphi^{n+1} - \left(\overline{\varphi}\right)^{n+1}\right) + (-1)\left(\varphi^{n-1} - \left(\overline{\varphi}\right)^{n-1}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\varphi^{n+1} - \left(\overline{\varphi}\right)^{n+1}\right) - F_{n-1}.$$

Entonces $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{\,n+1}\right)$. Lo que termina la recurrencia.

Una bella colmena salvaje con células hexagonales en el jardín de Danielle

Verano 2013

Capítulo III-1

Pavimentación del plano y la espiral doble, algunas otras espirales

Por Danielle Salles

Actividades transversales para la clase de CSBS (*), los alumnos profesores y los aficionados

A pedido de uno de nosotros (**) he aquí una definición general de las espirales propuesta por varios diccionarios:
Una espiral es una curva trazada por un punto que gira alrededor de un punto fijo alejándose de eso.
Esta definición no es en realidad bastante general porque le presentaremos en estas páginas la espiral doble a dos centros (***)…
La aceptaremos en primera aproximación.

I - Un pavimento del plano en relación con número de oro

Desarrollamos las nociones de cometa y de deltoides (o flechilla) (figuras 1 y 2) en una de nuestras publicaciones destinadas a introducir estas nociones de los alumnos del colegio (ver la bibliografía). El conjunto de estos dos objetos permite solar el plano de modo estético. Es Roger Penrose en los años 1980 quien desarrolló el pavimento (ver más abajo con una cometa y un deltoides (que llama "flechilla") especiales.

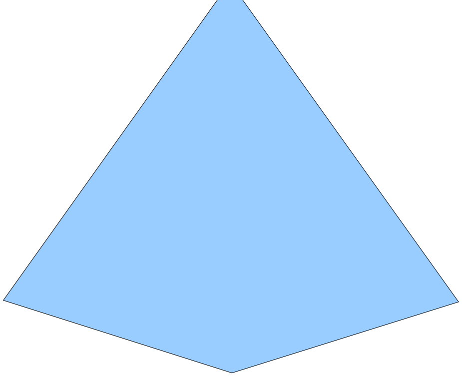


Figura 1

Figura 2

(*) Curso Secundario Basico y Superior. (**) A-M. Bock;
(***) "Le Larousse en trois volumes" nos propone una con 4 centros!

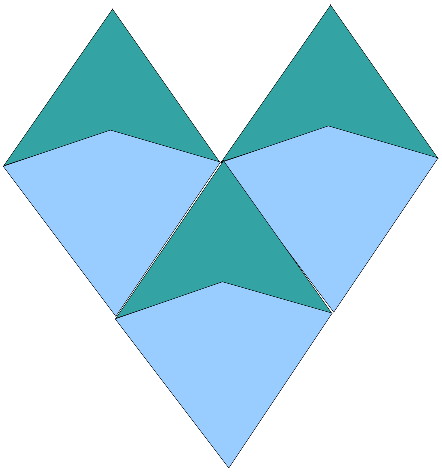


Figura 3

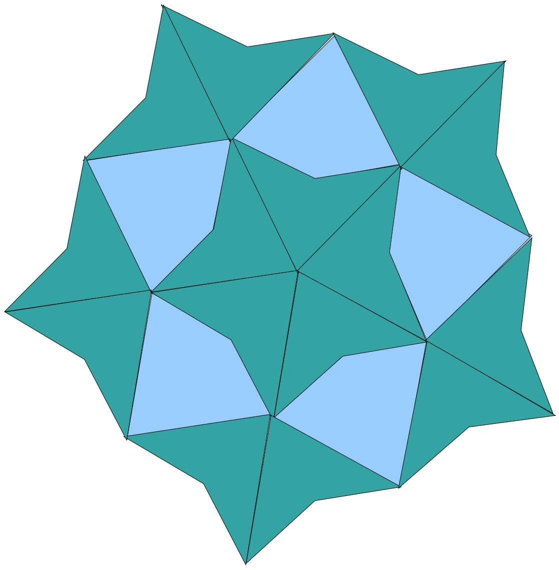


Figura 4

Estas dos figuras permiten construir pavimentos regulares (figura 3) y no regulares (figura 4).
Estas dos figuras de base son muy interesantes ya que recubren regularmente el pentágono como usted puede comprobarlo juntando ciertos vértices de las piezas.
En efecto he aquí las medidas de los lados de ambas piezas indicadas por J.P. Delahaye en "Para la ciencia" (en francés) de noviembre de 2013.

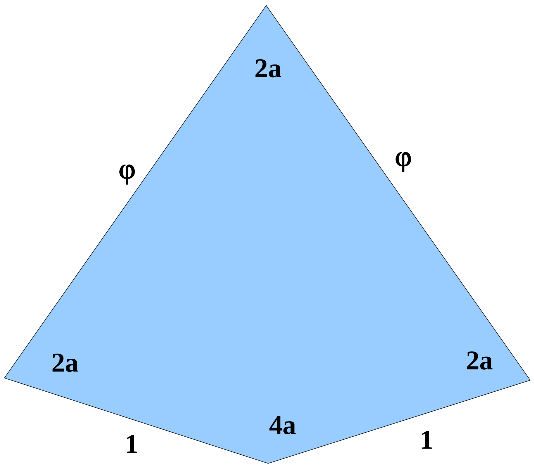


Figura 5

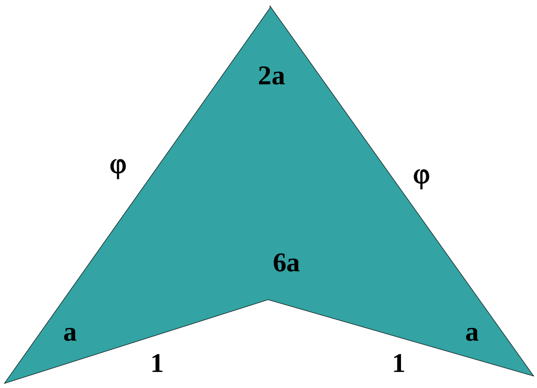


Figura 6

Preguntas a propósito de estas figuras

1) ¿Puede calcular la medida "a" en grados del ángulo “a” escogido como unidad de ángulo?

2) Queremos trazar la cometa (fig. 5) y la flechilla (fig. 6) sumando y suprimiendo un pequeño triángulo a un gran triángulo, cuáles son los ángulos de estos dos triángulos?

3) ¿Puédase enunciar las propiedades siguientes: ¿Medidas de ángulos y de longitudes de los 4 otros triángulos isósceles que constituyen ambas piezas?
4) Ambos lados iguales del pequeño triángulo isósceles siendo escogidos como unidad de medida, ¿Es la medida φ indicada como medida exacta de los lados iguales del gran triángulo?

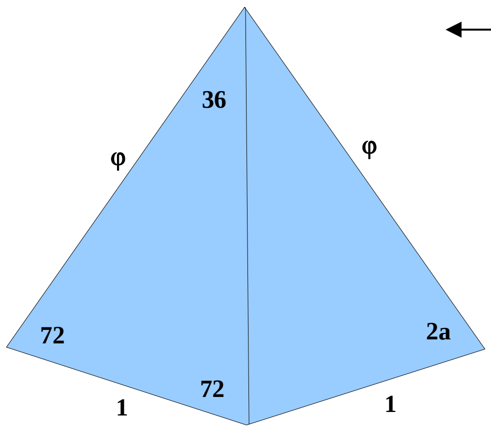


Figura 7 Observemos ambos triángulos isósceles iguales (superponibles) que constituyen esta cometa particular. Según los cálculos precedentes, cada triángulo tiene para ángulos: para la base ángulos de medida 72° y para ángulo en el vértice 36°. ¿Es pues un triángulo de oro que constituye el pentágono regular de lado 1 y de diagonal φ que construimos?

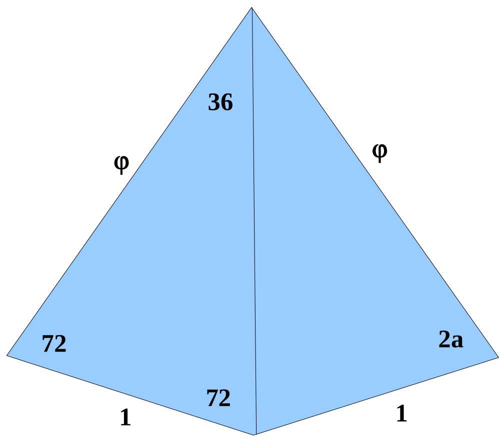
Indicaciones de soluciones

1) La suma de los ángulos de un cuadrilátero convexo es de medida 360°, la suma 4a+2a+2a+2a = 10a es igual a 360° pues a tiene medida 36°
2) El gran triángulo es isósceles de ángulo en el vértice 72° pues sus ángulos en la base miden (180-72) / 2 = 54°
El pequeño triángulo es isósceles de ángulo en el vértice 144° pues sus ángulos en la base miden (180-144) / 2 = 18°. Verificamos que 54+18 = 72 = 2a.
3) Ambos triángulos isósceles que constituyen la cometa tienen como ángulo en el vértice un ángulo de medida 36°, de ángulo en la base 72°. Verificamos que 72 + 72 + 36 = 180°.
Ambos triángulos isósceles que constituyen la flechilla tienen como ángulo en el vértice un ángulo de medida 108°, de ángulos en la base de medida 180 - 108) / 2 = 36°.
Verificamos que 36 + 36 108 = 180°.
La cometa es la suma geométrica (Yuxtaposición sin espacio vacío ni recubrimiento) de ambos triángulos, la flechilla o el deltoides es bien la diferencia geométrica de ambos triángulos.
Así podemos yuxtaponer ambas piezas como sobre la figura 3. Pero podemos también yuxtaponerlos a lo largo de los lados del gran triángulo como sobre la figura 4.

Podemos prolongar el pavimento de la figura 4 alternativamente con cometas luego flechillas, pero la figura queda centrada y su diámetro aumenta a cada "anillo"; este pavimento entonces no es regular.

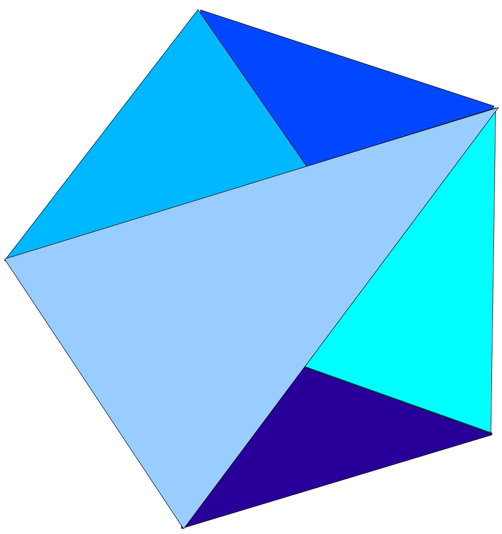
.

Vamos a encontrar este tipo de pavimento en el párrafo siguiente.
4) Observemos ambos triángulos isósceles planos (superponibles) que constituyen esta cometa particular.



Utilizando los cálculos precedentes, cada triángulo tiene ángulos iguales de medida 72° y para ángulo al vértice 36°.
Es pues un triángulo de oro que constituye el pentágono regular de lado de medida 1 y de diagonal que vamos a construir.

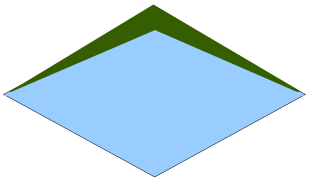
Figura 8



En la figura 9 al lado, hecha "sólo con la mano" coloreamos los triángulos sucesivos de oro, en colores cada vez más claros, con el fin de poner en evidencia los recubrimientos de triángulos dorados.
Esta figura nos hace pensar en la construcción del pentágono con la ayuda de una cinta anudada muy cuidadosamente (vea nuestra publicación en el I.R.E.M. de Basse-Normandie: "Nuevas prácticas de la geometría" y el capítulo 1-4) Figura 9

Cuestión: la condición: "la cometa está constituida por dos triángulos de oro" ¿ le parece necesaria para el pavimento del plano?
¿De otro modo podemos construir un pavimento regular (o también no regular) del plano con cometas y flechillas cualquieras? ¿Deben verificar una condición para esto?

Sobre la figura 3 observamos que las cometas y las flechillas son ensambladas de tal modo que forman rombos, y sabemos que los rombos pavimientan el plano.
Pues si recortamos un rombo cualquiera para obtener una cometa y una flechilla como sobre la figura más abajo, podremos pavimientar el plano con estas piezas de modo original.



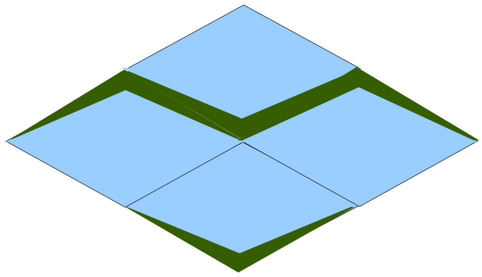


Figura 10

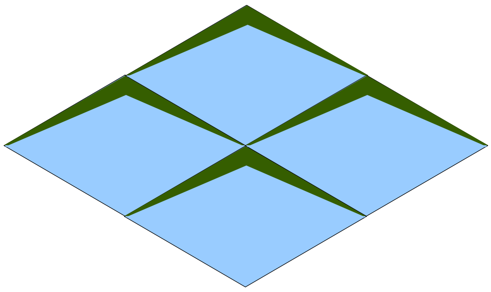
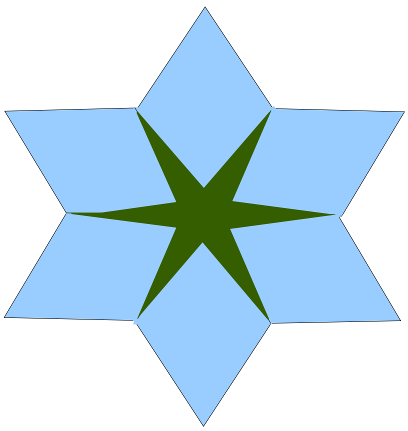
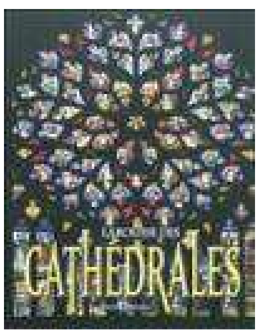


Figura 11

Pero, como los ángulos de los rombos son cualquieras, no podemos construir pavimento irregular como sobre la figura 4.
Tratamos entonces de deformar nuestra figura (utilizamos el software OpenOffice.draw) con el fin de que los ángulos agudos de los rombos midan 60°.





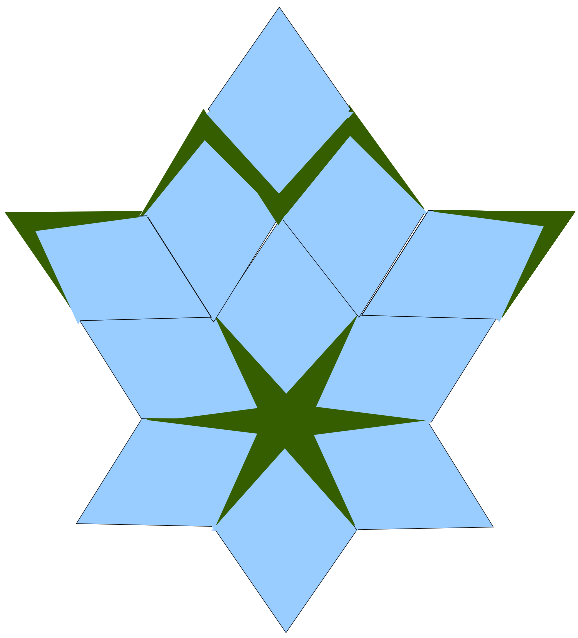


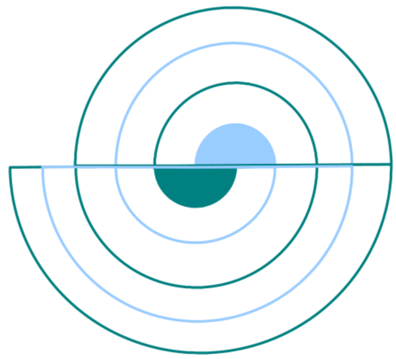
Figura 12

A la izquierda la cobertura del " Larousse des Cathédrales"

Obtenemos entonces un rosetón que le pedimos estudiar con el fin de decir si se puede continuar así un pavimento regular.
Para una actividad divertida sobre pavimento no regular en relación con rectángulo de oro, vea el anexo al final de este capítulo.
He aquí luego un bello ejemplo de pavimento a cinco puntas: un rosetón de catedral, bastante raro, en general están más bien a seis puntas, vea también el magnífico pentaclo de la catedral de Amiens al primer capítulo.

II – 1 Doble espiral
Observamos la figura siguiente inspirada del artículo J.P. Delahaye: Representa una espiral doble, escriba un proyecto arquitectónico de esta figura para un amigo ausente (*), usted describirá en primer lugar el dibujo general de la figura, ¿Al que se parece por ejemplo?

Luego usted enunciará un texto de construcción geométrico con palabras cotidianas, que puede comenzar por ejemplo por:



"Usted traza sobre una hoja, preferentemente cuadriculada, dos semicírculos que se hacen frente la extremidad de uno sobre el centro del otro … "

Luego un texto de construcción redactado como un ejercicio de geometría:
"Sean A, B, C, D cuatro puntos tales que AB = BC = CD de una recta “horizontal” del plano. Trazamos un semicírculo en el semiplano superior de diámetro [BD] de centro C luego un semicírculo en el semiplano inferior de diámetro [AC] y de centro B etc."

¡Si su amigo llega tratar a este dibujo gracias a sus explicaciones sólo verbales, usted es un buen profesor!

(*) Es el “juego de teléfono” es decir como utilizando un teléfono sin imágenes visuales.

¿ Si el radio de los dos primeros círculos es tomado como unidad de medida cual es la longitud de los radios sucesivos? Explíquese porqué.

Indicaciones de soluciones
Un ejemplo de texto descriptivo
Letra al amigo

Descripción: cuando miras la figura encuentras que ella se parece a una concha de caracol enrollada pero en una concha de caracol las capas sucesivas son cada vez más gruesas. Allí dan la impresión de tener totalmente la misma anchura.

Programa de construcción

Trazas sobre una hoja, preferentemente cuadriculada, dos semicírculos que se hacen frente pero que son deslizados, encontrarse la extremidad de uno sobre el centro del otro. Coloreas el de la arriba de la recta en azul claro, el de abajo en azul oscuro. Por encima del primero trazas un semicírculo en azul oscuro, del mismo centro que el precedente pero de radio escogido para que su extremidad izquierda llegue sobre la extremidad izquierda del semicírculo azul oscuro.

Bajo el pequeño círculo azul oscuro trazas un semicírculo azul claro lo mismo centra, de radio escogido para que su extremidad derecha llegue sobre la extremidad derecha del semicírculo azul claro. Continuas así para obtener una espiral azul claro y una espiral azul oscuro incluidas una en la otra.

Construcción geométrica

Material hoja de papel cuadriculado, compás, lápices de color
Trazar sobre una hoja cuadriculada una recta paralela al pequeño lado de la hoja en el centro de la hoja.

Trazar un semicírculo sobre el semiplano superior de la hoja de diámetro [AB] situado sobre la recta, colorear el semidisco en color claro. Llamamos C el centro de este semicírculo.
Trazarle en el semiplano inferior un semicírculo de centro A y de diámetro [CD] de medida igual a AB, D situado a la izquierda de A, colorear el semidisco en color oscuro.

Construcción geométrica

Trazar en el semiplano superior un semicírculo de color oscuro de centro C y pasando por D. Nombrar la medida de su diámetro DE.

Trazar un semicírculo de color claro en el semiplano inferior de centro A pasando por B. Nombrar la medida de su diámetro BF.

Perseguir estas construcciones con el fin de obtener 2 semicírculos oscuros y un semidisco claro en el semiplano superior; 2 semicírculos y un semidisco oscuros así como dos semicírculos claros en el semiplano inferior.

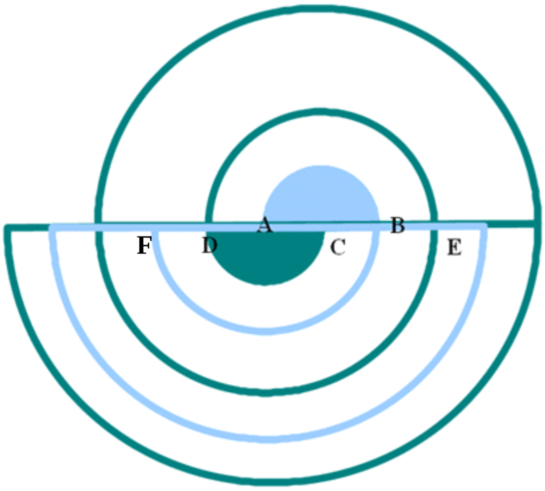


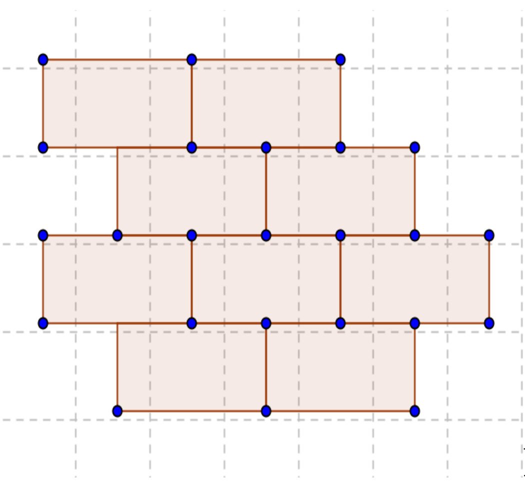
Figura 14

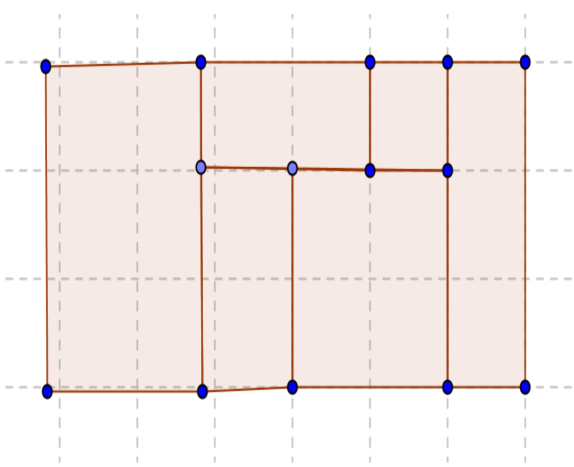
II - 2 Pavimento del plano no periódico

¿Sabe lo que es un pavimento periódico?

He aquí un ejemplo; a la izquierda, de pavimento periódico, diga por qué lo es. Dibuje un pavimento periódico.

Al lado un pavimento no periódico utilizado por ejemplo en ciertas viejas paredes normandas de "plaquetas".





Figuras 15, 16

Si el pavimento es regular por traslación horizontal y\o vertical, podemos deformar una frontera del pavimento a condición de transformar otras fronteras respetando la misma traslación, lo mismo para una traslación vertical. Aquí abajo le presentamos dos pavimentos periódicos simples y los mismos aplicando sobre ciertos puntos de los lados, traslaciones planas.
Dibuje usted mismo(a) un hermoso pavimento con esta técnica.

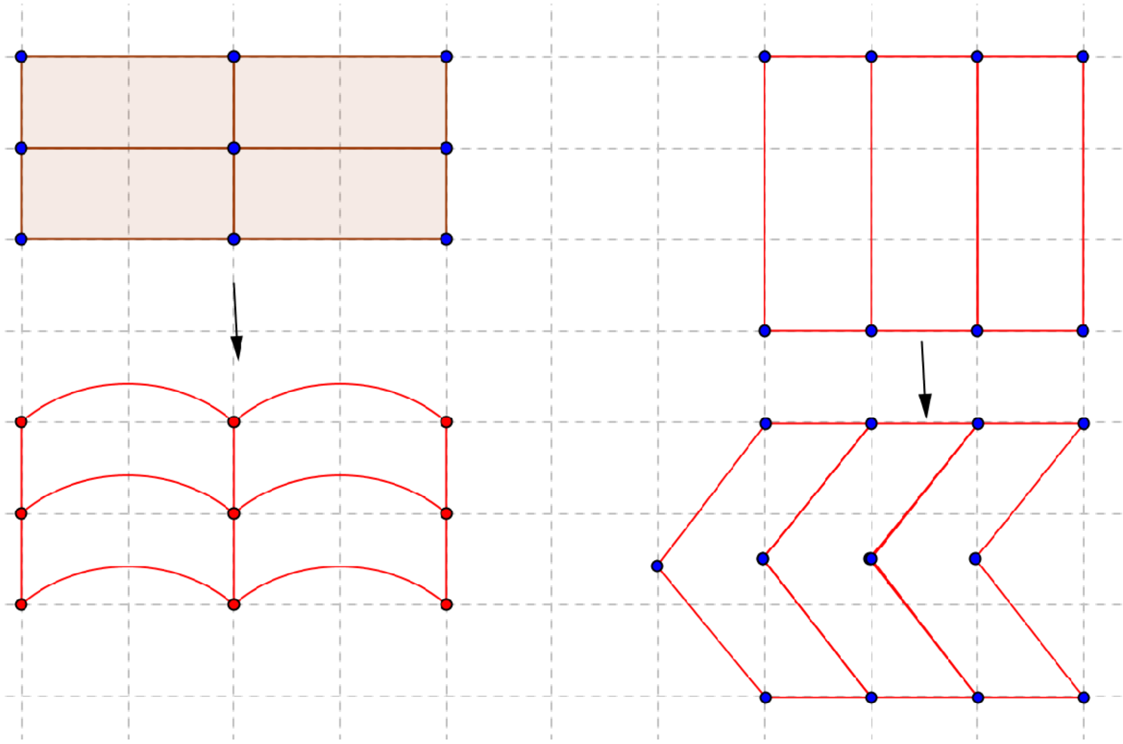


Figura 17

Queremos estudiar un pavimento no periódico de nuestra doble espiral. Comenzamos a parcelar la espiral con triángulos isósceles. Observemos que las bases de los triángulos no siguen por los arcos de espirales sino los triángulos de la capa siguiente son bien fijados a los precedentes.

1) ¿Cuáles son las medidas de los triángulos superponibles que se encuentran en el semicírculo azul claro?
2) ¿Cuáles son las medidas de los triángulos iguales que se encuentran en la semi-corona turquesa? ¿Cómo los construíamos?
3) ¿Cuente el número de triángulos en las semi-coronas sucesivas, puede prever cuánto hay en las semi-coronas siguientes?

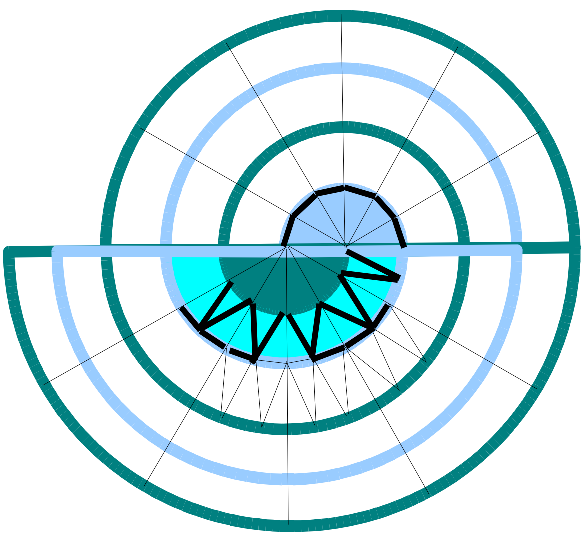
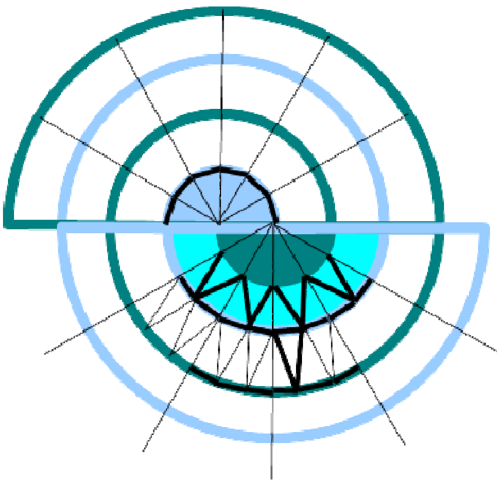
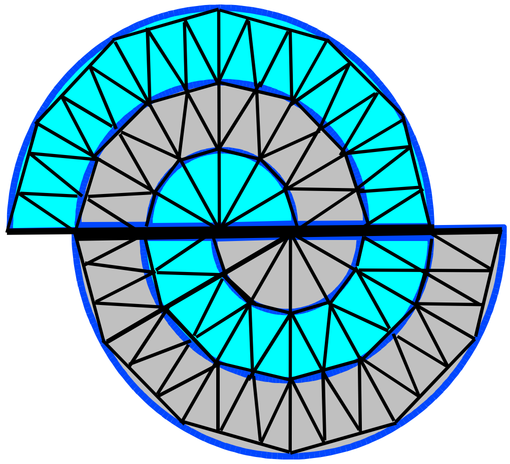


Figura 18

Estudio de la espiral doble representada en la revista "Para la ciencia" (ver principio de este artículo)

Primeramente observamos la espiral doble luego la construimos con un software de geometría como más abajo. La primera de estas figuras es falsa. ¿Por qué?





Figuras 19

Cuando observamos el pavimento propuesto en "Para la ciencia" nos preguntamos si los triángulos se vuelven a pegar bien y si sus envolventes son unos semicírculos. También le proponemos observar una parte del pavimento agrandada en la figura siguiente. El triángulo superior, en azul oscuro proviene de la división del semicírculo en 6 partes, su ángulo en el vértice es pues de medida 30°.
Los triángulos por hipótesis son isósceles, sus ángulos para la base tienen pues para medida: (180-30) 2 = 75°. El radío del círculo que es 1 los lados iguales son de medida 1, la base tiene para longitud c verificando:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{c} = 1 + 1 - 2\cos 30 = 2 - 2\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

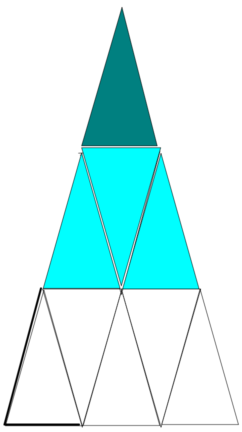


Figura 20

Construcción con los instrumentos geométricos

Figura 20 El primer pavimento contiene 4 triángulos.
Vemos por adición de los ángulos de 30° y 75° que los lados de los triángulos sucesivos son ajustados.

Le dejamos continuar la figura y contar el número de triángulos sucesivos.
Observamos que el siguiente presenta 5 y observemos cómo se construye la figura:
El primer triángulo azul oscuro es orientado con su vértice hacia arriba.
Al nivel siguiente completamos con un triángulo simétrico azul claro puesto sobre el vértice para formar un rombo con triángulo azul claro. Por cada lado de este rombo colocamos dos triángulos azul claro puestos sobre su base. A la etapa siguiente obtenemos 5 triángulos, pensamos que la sucesión es una sucesión aritmética de razón 2. Los alumnos más grandes podrán demostrar por un razonamiento por recurrencia.

Indicaciones de soluciones de los párrafos I y II
Un pavimento es periódico cuando reproduce un motivo por traslación, aquí es el rectángulo azul que es reproducido en las mismas condiciones cada rectángulo que es fijado o sea por su pequeño lado al pequeño lado precedente o sea por su gran lado por el medio del gran lado precedente.

Para que un pavimento sea no periódico baste o sea que se cambia de motivo de modo aleatorio, o sea que cambia la posición del mismo motivo como en el ejemplo de la espiral doble.

Estudio de la espiral doble, observación didáctica
Voluntariamente dejamos en la redacción de este texto una figura errónea construida por uno de nosotros con el fin de dejarle en memoria un caso de efecto de óptica que habíamos desarrollado en nuestra obra "Del dibujo percibido a la figura construida" (bibliografía). En la espiral doble, solada por triángulos isósceles que "van a lo largo" de arcos de círculo, el ojo interpreta las bases de los triángulos sucesivos como las líneas quebrantadas que siguen el arco de círculo.
Comenzamos a trabajar en esta figura errónea pero nosotros somos percibidos que el pavimento no era correcto: ¡los triángulos no tenían totalmente el mismo ángulo en el vértice!

Esto muestra cuánto, en el trabajo geométrico como en todo trabajo matemático, podemos utilizar alternativamente nuestros sentidos y nuestro raciocinio.

Afortunadamente porque nuestros sentidos pueden ser engañados. Esto depende de la distancia donde nos situamos para hacer nuestro estudio:

1) Vista de lejos la espiral da el aire de ser solada "circularmente" por los pequeños triángulos de origen;
2) Vista de cerca es solada por triángulos isósceles luego por trapecios isósceles cada vez más grandes.

III - Las deformaciones de pavimentos

Vamos ahora a intentar transformar este pavimento con las propiedades estudiadas más alta con el fin de obtener por ejemplo un pavimento "en escamas".

Hacemos el primer ensayo aumentando (en color) y suprimiendo (en blanco) una pequeña "escama" en forma de sema-disco a cada triángulo; es claro que "las jorobas no cumplan los hoyos" después de colocación de los triángulos deformados.

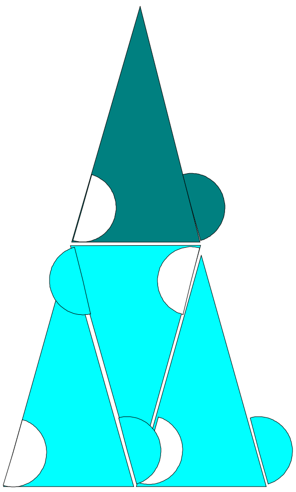


Figura 21

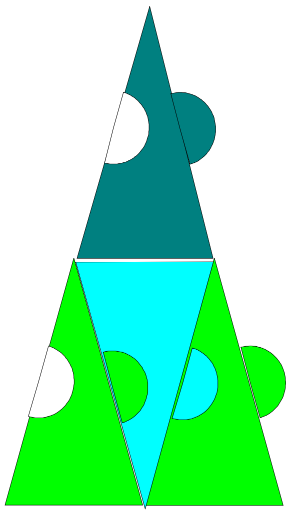


Figura 22

Hacemos pues el segundo ensayo colocando las deformaciones en medio de los lados de los triángulos.

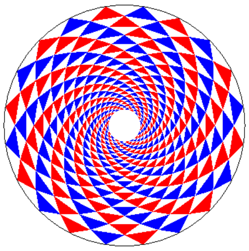
Sometemos esta figura a su sagacidad: ¿tenemos, de nuevo, un "verdadero" pavimento? ¿Para ayudarse coloreamos los triángulos en colores diferentes, las jorobas recubren esta vez los hoyos? ¿Puedes construir otras escamas? El sujeto ha sido tratado abundantemente y presentado si llega por ejemplo en la Fiesta de la Ciencia por nuestros colegas del departamento de matemáticas de la universidad de Caen bajo la denominación de "Labosaïque" vea por ejemplo el enlace:

http: // www.connexions-normandie.fr/tag/labosaique/

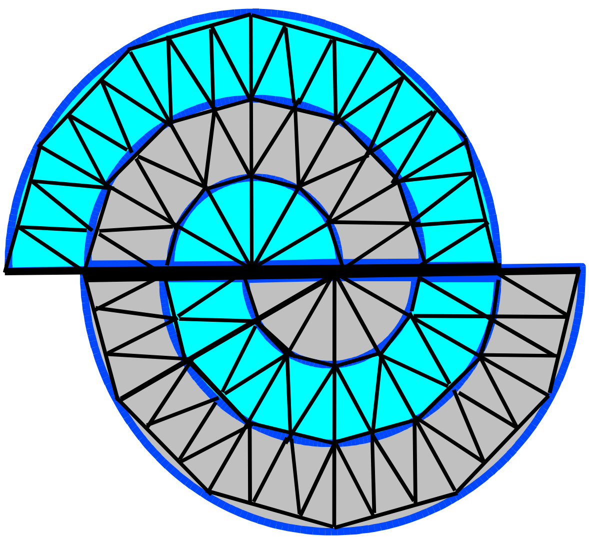
Este sujeto está lleno de recursos para hacer observar y comprender las nociones de transformación en el plano: simetrías y rotaciones a los alumnos.
Les aporta una satisfacción estética inmediata a los alumnos que aprecian de, , haber construido un bello pavimento haciendo matemáticas.
Los pavimentos centrados (como los suelos o las cúpulas en mosaico) utilizados por los arquitectos de cultura romana o árabe son particularmente decorativos (vea la figura 27)
He aquí un enlace que interesa para la clase:
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/MOSAIQUE.pdf

Transformaciones sobre el pavimento de la espiral doble

¿Es posible transformar el pavimento de la espiral doble de tal modo que queda "hermoso"? La precedente es satisfactoria sobre el plano matemático pero no nos satisface estéticamente…



Los pavimentos centrados (como los suelos o las cúpulas en mosaico) utilizados por los arquitectos de cultura romana o árabe son particularmente decorativos (vea la figura 27)



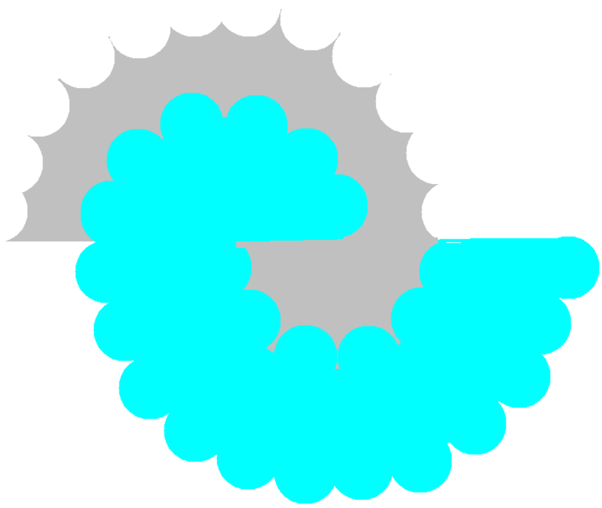


Figura 23 Espiral doble de origen Figura **24 Espiral** transformada y aumentada
¿Efectuamos una transformación sobre el pavimento de la parte central de la espiral, puede decir cuál observando este pequeño "tapíz"?

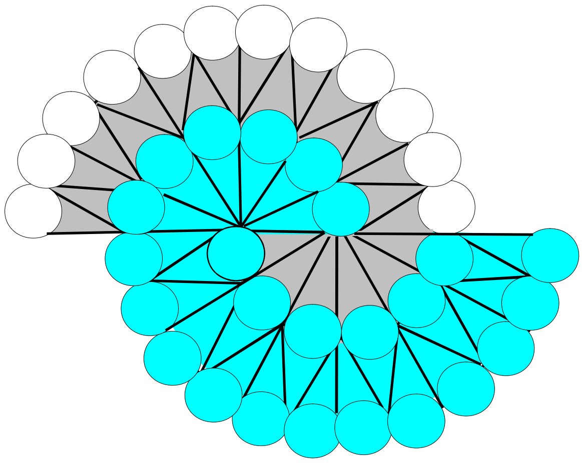


Figura 25: partes ocultadas de la figura 24.

Con el fin de hacerle una vez más "tocar con los dedos" los efectos de óptica sobre las figuras, le damos más abajo las líneas escondidas por nuestro tapíz.
Usted observará que la banda "con huecos" se percibe mucho más pequeña que la banda "con jorobas", sin embargo partimos de la misma doble espiral. Es un "efecto clásico de óptica".

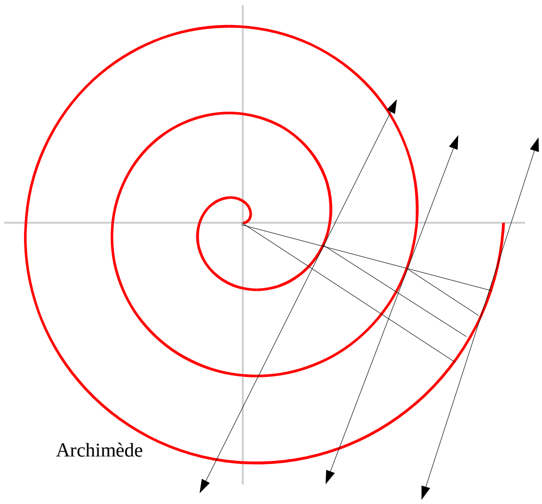
Indicaciones
Cuando se observa este "tapíz", observamos que el borde exterior de la parte gris es concava y que su borde interior también.
Por otra parte la parte turquesa parece bordeada por un festón. Los huecos y las jorobas parecen ser unos semicírculos lo mismo diámetro.
Los números de huecos y de jorobas que se ajustan son iguales: sucesivamente a 6 luego doce. Corresponden bien a ambas bandas grises y turquesas de la figura de origen.
¿Por qué este pavimento es correcto?: ¿sin vacio ni recubrimiento? Porque nos ocupamos de completar cada triángulo turquesa por un semicírculo de diámetro la base de este triángulo y suprimir a cada triángulo gris un semicírculo del mismo diámetro, así cada "triángulo" turquesa exactamente completa cada "triángulo" gris situado sobre la periferia.

Cuestión abierta: ¿Es tal pavimento transponible a las dos otras espirales que le presentamos en este capítulo?

Le presentamos página siguiente estas dos espirales y dos otras también interesantes. He aquí un enlace de un sitio bien documentado sobre las espirales:
http://serge.mehl.free.fr/anx/spira_fibo.html

La espiral logarítmica es continua y derivable en todo punto: la anchura de cada banda de la espiral es estrictamente creciente, parece pues muy difícil de parcelarlo por adoquines iguales salvo en mosaico, lo que los ancestros no se privaron de hacer (figura 27).

Esta espiral posee una propiedad notable: toda semi-recta nacida de su centro encuentra las bandas sucesivas en puntos de la misma pendiente de tangente (figura 25). Desarrollaremos esta propiedad interesante más lejos.
La espiral dorada que estudiamos detalladamente al párrafo IV, formada por cuarto de círculos por los que el diámetro de los círculos quiénes las llevan es multiplicado, a cada paso, por **φ**, es continua y derivable.
La espiral de Teodoro de Cyrène que utilizamos en otras publicaciones permite construir las raíces cuadradas de los números enteros por una sucesión de triángulos rectángulos. Su envolvente es tan llamada espiral de Bernoulli o parabólico.
La espiral de Arquímedes cuyo distancia entre los arcos es cada vez la misma (figura 24).



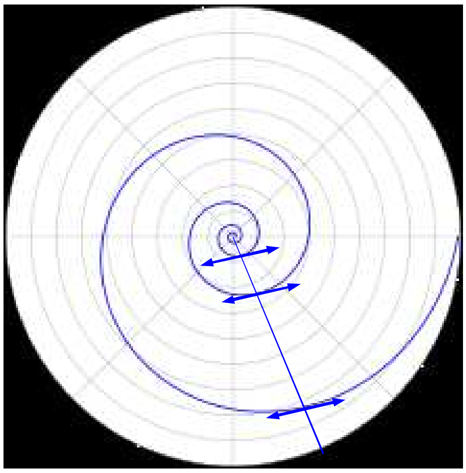


Figura 24 espiral de Archímedes ; Figura 25 espiral logarítmica

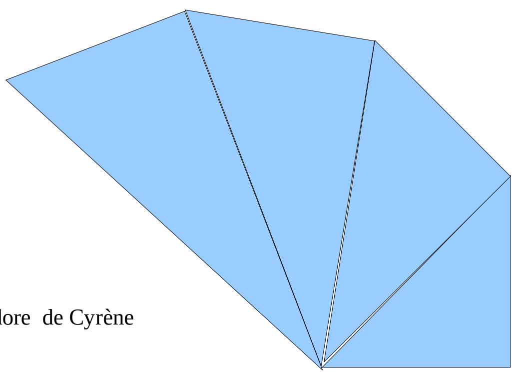


Figura 26 espiral de Théodoro ; Figura 27 suelo romano ornado de mosaico

IV - Un problema recíproco de la construcción de la espiral de oro

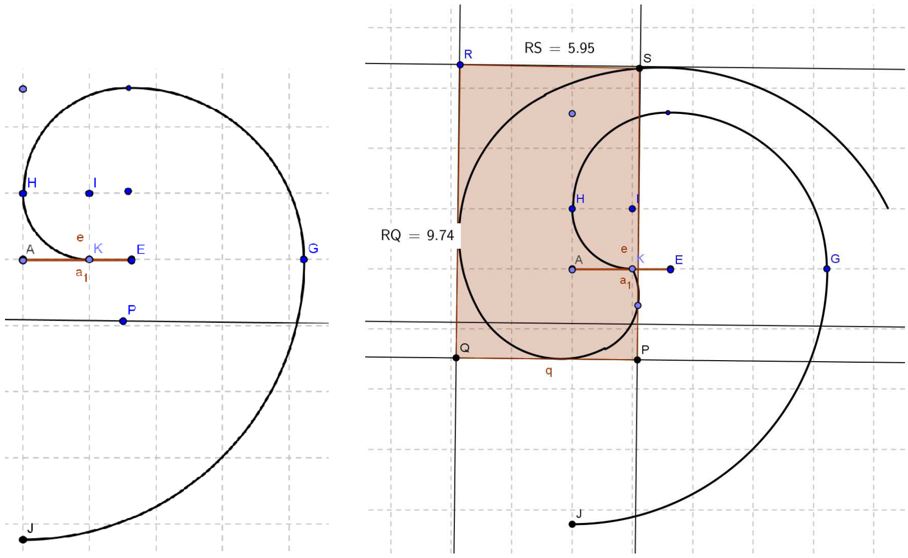
La propiedad de la espiral logarítmica nos permite proponerle un pequeño problema divertido: ¿ siendo dado el gráfico de una espiral logarítmica tal como la de la figura 25, es posible reconstruir una sucesión de rectángulos de oro inscritos en esta espiral?
Para simplificar el problema podremos escoger rectángulos que tendrán los lados paralelos a los ejes de la indicación trazada sobre la figura.

Sugerencias y observaciones

Cuando observamos ambas espirales: logarítmica y dorada, que son ambas tangentes a la espiral rectangular dorada, pero los trazados difieren ligeramente, observamos que cada rectángulo de oro que forma la espiral rectangular dorada es tangente a cuatro puntos de la espiral, pues, sí trazamos sucesivamente cuatro tangentes dos - dos paralelas a los ejes del plano, vamos a obtener, en principio, un rectángulo de oro; lo que vamos a estudiar adelante.

He aquí, para comenzar, el trazado de la espiral dorada formada de cuartos de círculos, trazados en los cuadrados sucesivos que permiten aumentar cada rectángulo de oro con el fin de obtener el rectángulo de oro que sigue de la espiral de oro rectangular.
¿Si, recíprocamente le proponemos tal espiral sin ejes cartesianas, usted puede trazar los rectángulos circunscritos a la espiral que sean unos rectángulos de oro?
En la espiral logarítmica que vamos a proponerle luego y cuya función es continua y por todas partes dérivable, es posible trazar rectángulos de oro con la ayuda de tangentes a la espiral en cualquier punto como se lo mostrará la figura siguiente. No obstante veremos que la aproximación de la espiral logarítmica por la espiral dorada es bastante buena.

No obstante veremos que la aproximación de la espiral logarítmica por la espiral dorada es bastante buena.



Figuras 28

Trazamos la espiral dorada de ejes horizontales y verticales (figura de izquierda) luego la giramos de 90°, luego trazamos un rectángulo circunscrito RSPQ (figura de derecha).

Luego fijamos las medidas de los lados de este rectángulo; el logiciel GEOGEBRA nos libró: RS = 5,95 y RQ = 9,74.

¿ es el rectángulo RSPQ de oro? ¿Encontramos RQ/a RS = 1,63 quién es una buena aproximación al centésimo de φ.

Vamos ahora a interesarnos por una propiedad muy importante de la espiral logarítmica que encuentra son utilización, en particular, en los problemas de navegación marítima.

Le presentamos la espiral logarítmica a escala bastante reducida para tener varias vueltas completas sobre el gráfico.

Usted comprobará que trazamos en tres puntos de la espiral, los "radíos" que les corresponden, es decir las semi-rectas nacidas del centro de la espiral y pasando por estos puntos así como las tangentes de la espiral en estos puntos. Las medidas libradas, al centésimo de grado cerca, por GEOGEBRA de estos ángulos son:

α = 81,91°, β = 81,91°, γ = 98,09°. Los dos primeros números nos satisfacen porque la propiedad característica de la espiral logarítmica es la siguiente:

Toda semi-recta nacida del centro de la espiral encuentra ésta un punto cuya tangente a la espiral a este punto es un ángulo constante (aquí, probablemente 81,91°). ¿La medida de γ nos desconcierta: ¿ es un error de medida? ¿Un mal trazado de la espiral?

Aunque conociendo las pequeñas aproximaciones operadas por GEOGEBRA sobre los trazados de curva, esta diferencia es importante … Nos rendimos… Después de algunos tanteos febriles (desplazamiento de los puntos) comprobamos simplemente que el ángulo de 98,09° es el suplementario del de 81,91°.°.

¡Moralidad, como siempre, seamos desconfiados a propósito de los cálculos efectuados por máquinas!

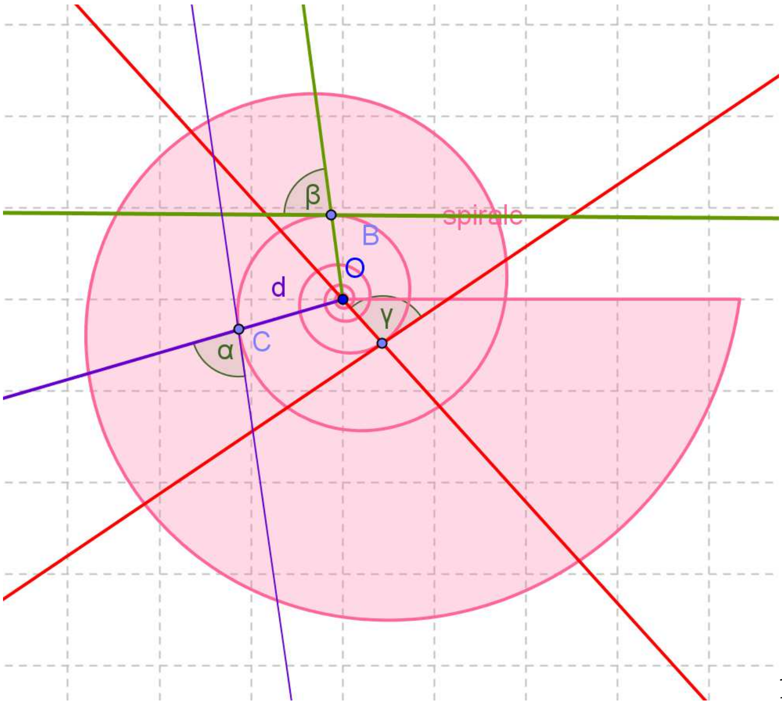


figura 29

Aplicación de las características observadas anteriormente al reconocimiento de diferentes espirales

Le proponemos al lector unas espirales encontradas en diferentes publicaciones, sin indicación de sus especificidades, de determinar de cual tipo son, utilizando solamente la regla.

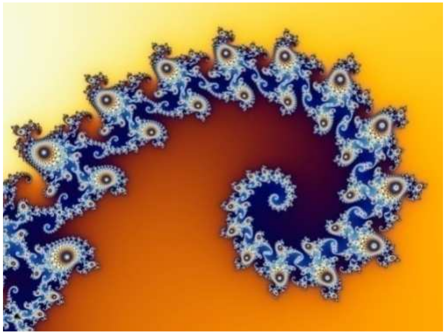
) Una galaxia en espiral;
2) Vista satelizaría de un tornado;
3) Interior de un nautilo;
4) Conjuntos de Mendelbrot;
5) Escalera en espiral;
6) Flor de girasol;
7) Concha de caracol;
8) Conchas de amonita.

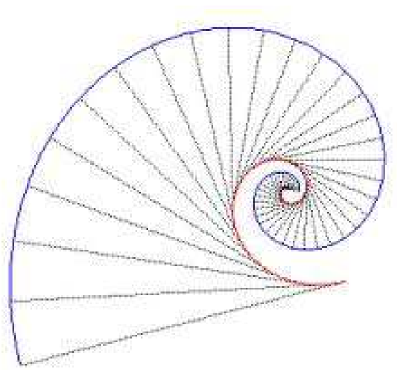
(Podrá ser deseable fotocopiar estas páginas aumentándolos para tener más detalles.)

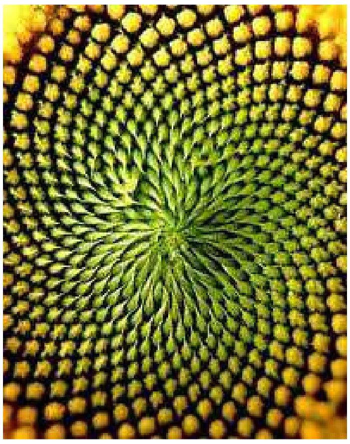

Galaxia


Tornado


Nautilo


Conjunto de Mandelbrot


Escalera en espiral
vista en perspectiva


Girasol


Caracol


Amonita y nautilo enrollados


Amonita desenrollado

Comentarios Estudiar las espirales en la naturaleza no es muy fácil, la literatura para este sujeto es muy rica, citemos por ejemplo el sitio en línea de Teresa Éveilleau: therese.eveilleau. pagesperso-orange.fr (en francés) y también, dejando a lado su aspecto "espiritista" que no es nuestra intención, el sitio:
http: // www.spirit-science.fr/Matiere/spirale.html
que propone fotos muy bellas.
También el artículo de Robert Ferréol sobre el sitio mathcurve: http://www.mathcurve.com/courbes2d/logarithmic/spiraledor01.gif

A la observación sin instrumento, nos parece que ninguna de las espirales propuestas es de Archímedes porque visiblemente la distancia entre espiras aumenta alejándose del centro, es el caso de numerosas espirales de naturaleza biológica.
¿Son logarítmicas? Los numerosos autores lo afirman para las tres primeras limitándose a veces con la espiral de oro que no es logarítmica como lo vimos pero acerca la espiral logarítmica de modo satisfactorio en la inmensa mayoría de las aplicaciones.

No obstante, el interior del nautilo nos aparece un buen ejemplo de espiral logarítmica, trace algunas tangentes para convencerse de eso … Tomemos nuestros instrumentos (regla, escuadra y compas)) para hacernos una idea personal.
¿Según Serge Mehl de quien citamos el sitio, la espiral del caracol es una espiral de oro, que piensa en eso?
El conjunto de Mendelbrot bien conocido por los aficionados de fractales y también a causa de su estética indiscutible es difícil de estudiar a causa de su complejidad. ¿Pero si trazamos arbitrariamente las tangentes a los puntos exteriores de los motivos, no pensamos, a priori, observar una espiral logarítmica, y ustedes?
¡La escalera en espiral, vista en perspectiva, no nos inspira taùpoco demasiado, pero pensemos en las aproximaciones debidas a en la técnica de reproducción de curvas por los ordenadores! ¡Interrogue a un amigo ebanista!
La espiral del girasol es presentada por todas partes como logarítmica pero sobre todo a causa de sus propiedades relativas a las sucesiones de Fibonacci.

Para acabar sobre una nota gustativa observemos conchas de caracol que nadie cita como ejemplo de espiral logarítmica … Es imprudente adelantarse porque los caracoles tienen arquitecturas muy variadas como lo muestra el sitio siguiente que colabora con un museo de historia natural:

http://www.noeconservation.org/imgs/bibliotheque_fichier/090430183326_guide-l.pdf

Por fin para su elegancia le damos a admirar conchas de amonitas fósiles (numerosas en el valle del Orne en Normandía) entre los que están uno, desenrollada - que muestra bien el aumento regular del diámetro de la espiral y del nautilos.

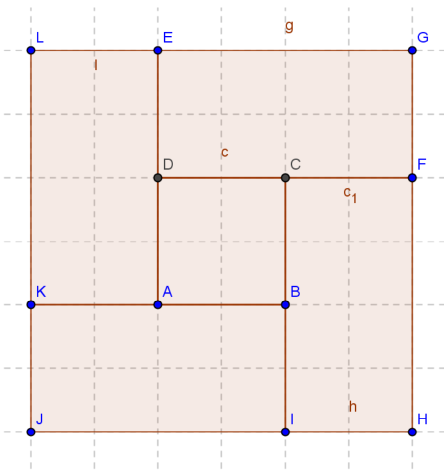
Buscando bien, encontramos, en el jardín, una espiral de Archímedes: bien enrollado el tubo mismo de regadío, de diámetro constante forma una espiral de Archímedes. Así como los rodillos de regaliz de nuestra infancia o el cordaje bien arreglado sobre el puente del barco.
Esta espiral tiene una ecuación polar simple r_n = at donde **a** es un coeficiente real.



Anexo

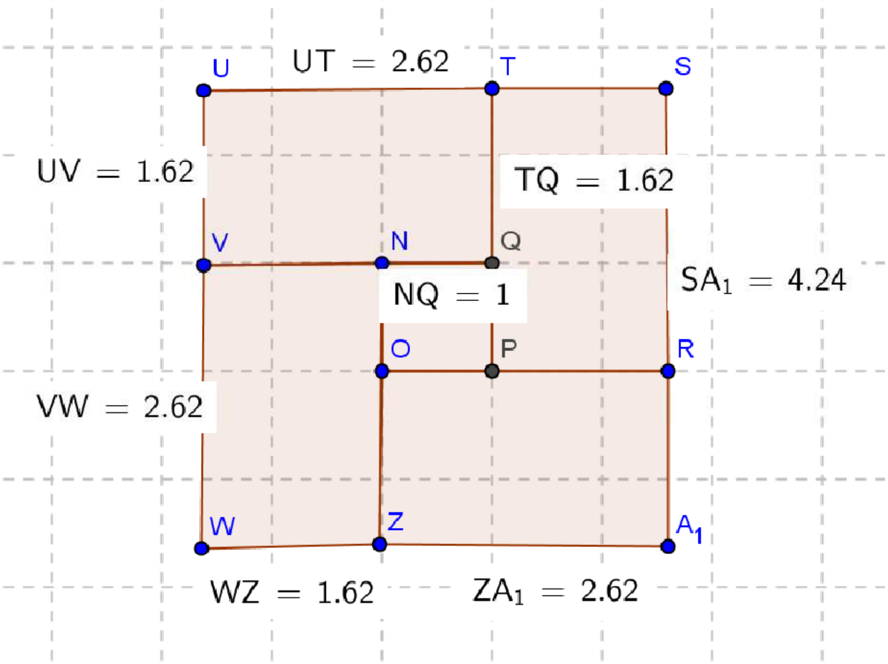
Un pequeño problema disfrutando: los pavimentos dorados

Vamos proponerle construir un pavimento no periódico con un cuadrado y un rectángulo de oro. Supongamos que usted disponía de pavimentos cuadrados y de pavimentos rectangulares y que usted quería guarnecerlo el suelo de su salón del modo siguiente:

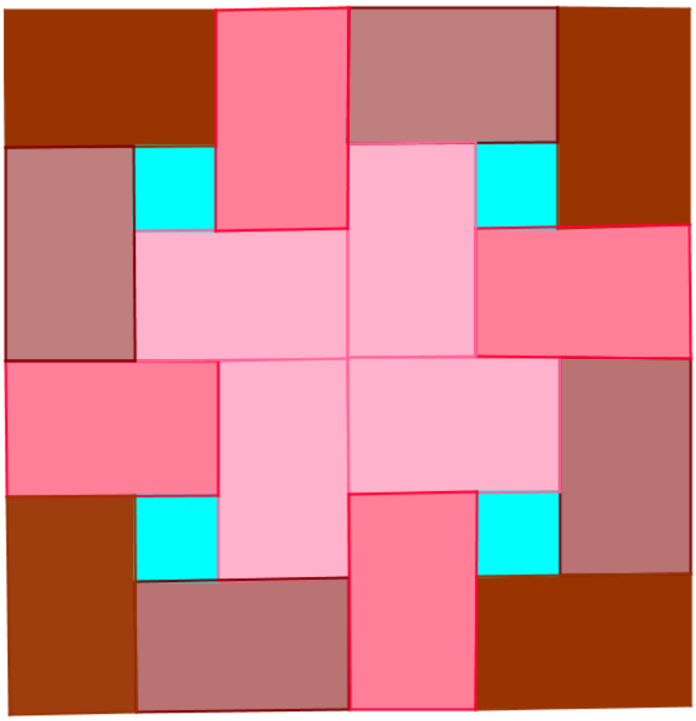


Observe el dibujo, diga si hay una relación entre el lado del cuadrado y los lados de los rectángulos. Usted encuentra, por supuesto, gracias a la regla, que el pequeño lado del rectángulo es igual al lado del cuadrado y que su gran lado es igual a dos veces el lado del cuadrado.
¿Puede construir un pavimento con otras medidas? ¡En particular nos gustaría mucho que el rectángulo fuera de oro!

Llamemos **h** la medida del pequeño lado del rectángulo, **g** la medida del gran lado y **c** la medida del lado del cuadrado. Según la disposición del pavimento es necesario que: c + h = g. Si el rectángulo es de oro, hay que además g/h = φ. Entonces si dividimos los términos de la ecuación por h tenemos: c/h + 1 = φ ; es decir: c/h = $\varphi - 1 = \varphi^{-1}$, O también: **h/c = φ.**



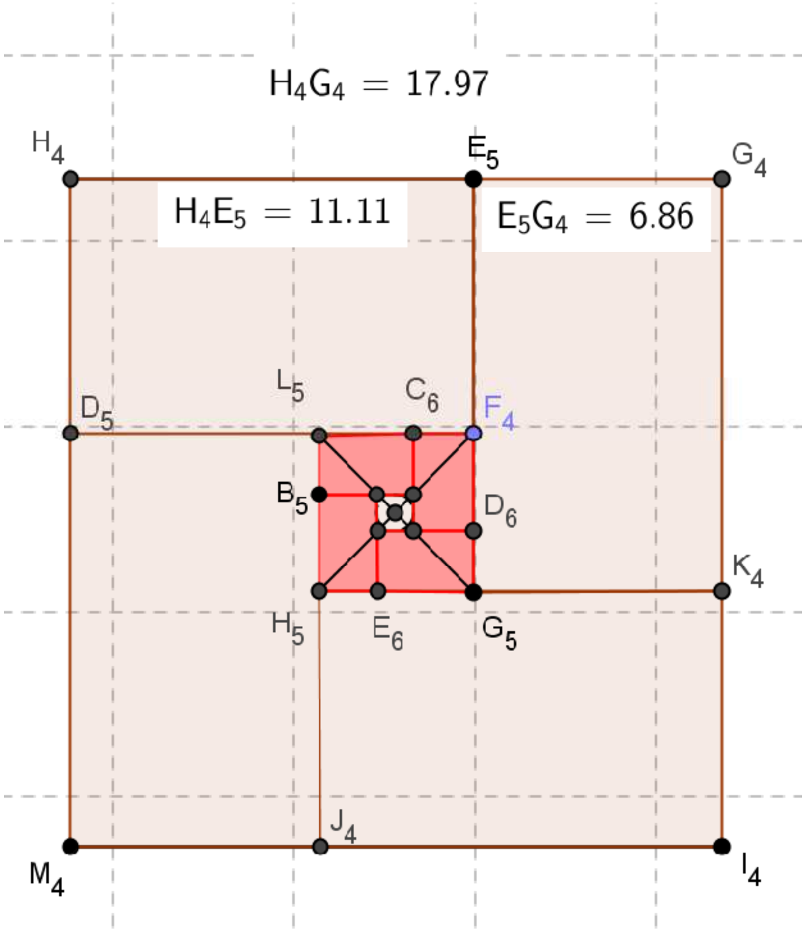
¿La figura obtenida siendo un cuadrado podemos continuar la construcción, o sea yuxtaponiendo cuadrados idénticos para obtener un pavimento repetitivo, o sea con pavimentos de dimensiones creciente para obtener un rosetón de crecimiento regular de razón geométrica **φ.**



Podemos también construir un pavimento en cerámica decorativo con pavimentos de colores diferentes a los cuales se hace una rotación.

Usted observará que aunque habiendo utilizado cuatro veces el mismo motivo el pavimento obtenido no es regular: se parece a un rosetón.

Ahora he aquí la figura formada de rectángulos de oro de dimensiones crecientes:



¿Puede dar la regla de crecimiento de los lados de los rectángulos de oro y el de los cuadrados? Repitamos la primera construcción, el pequeño cuadrado es de lado 1, por un pequeño cálculo encontramos que los 4 rectángulos de oro quiénes lo rodean debían medir: φ y $\varphi+1(=\varphi^2)$, poco diferentes respectivamente de 1,62 y 2,62. El cuadrado así obtenido tiene por medida de su lado: 4,24 es decir: $\varphi^2+\varphi = 2\varphi + 1$.

La sucesión de la construcción siendo similar a un coeficiente multiplicativo φ, los rectángulos siguientes de oro deben medir:

El pequeño lado del rectángulo de oro:

$\varphi\ (2\ \varphi+1) = 2\ \varphi^2+\varphi = 2(\varphi+1) + \varphi = 3\varphi+2 = 6{,}86$ al centésimo cerca.

El gran lado: 6,86 x 1,62 =11,11.

El gran cuadrado: 11,11 + 6,86 = 17 ,97.

Recapitulemos:

Lados de los rectángulos: φ, φ^2 despues φ^3, φ^4.

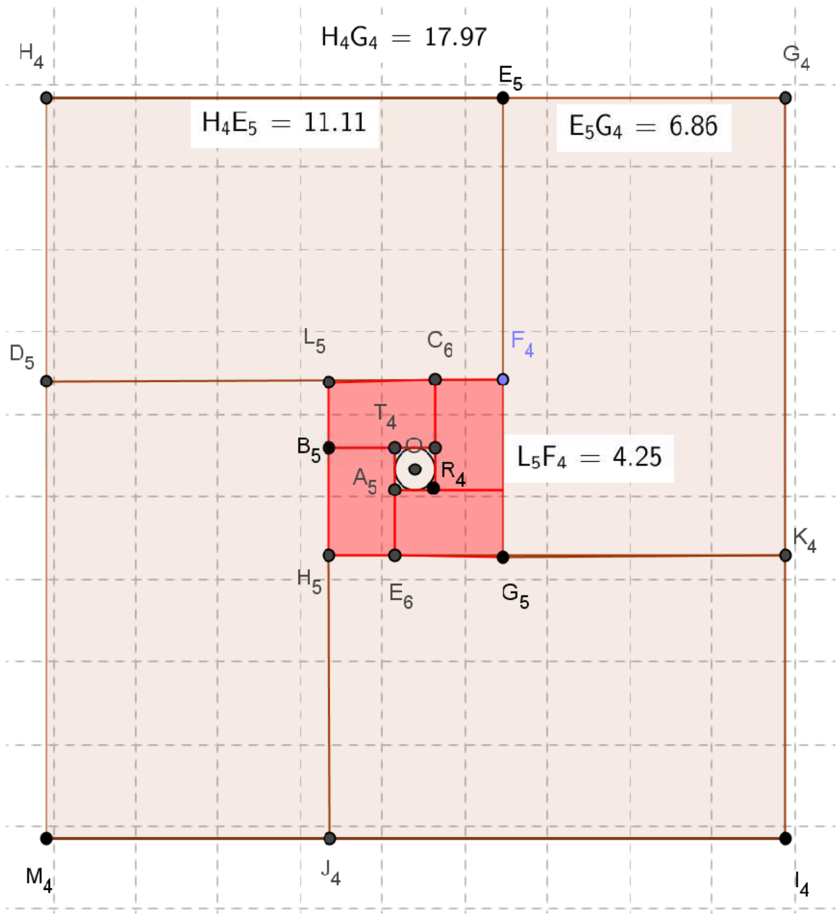
Lados de los cuadrados: 1, $\varphi+\varphi^2$, $\varphi^3+\varphi^4$.

Ahora les proponemos un camino de construcción inversa: ¿siendo dado el grande cuadrado de lado 17,97 y el pequeño cuadrado de lado 4,24 lo mismo centro O, cómo reconstruir el pavimento precedente?

Utilizamos a GEOGEBRA. He aquí una propuesta de construcción. Trazamos ambos cuadrados dados lo mismo centro O; el grande en claro rojo, el pequeño en rojo oscuro.

Trazamos un círculo en blanco de centro O de diámetro 1. Trazamos las paralelas a los cuatro lados del gran cuadrado, las tangentes a este círculo (en rayas continuas rojas). Estas cuatro tangentes definen cuatro pequeños rectángulos de oro dentro del pequeño cuadrado en rojo.

Prolongamos los lados exteriores de estos rectángulos de oro que definen los rectángulos de oro del gran cuadrado en rojo claro.



Para el placer de los ojos, tenemos página siguiente una espiral magnífica grabada en la piedra (petroglifo) presentada sobre el sitio fotosearch.com.

Es una espiral de Archímedes, situada en Tucson en Arizona en Saguaro Parco.

Así como una bella espiral, probablemente situada también en el sudoeste de USA y quien se parece a una galaxia (abajo a la derecha) lo que nos intriga un poco.

Muchos de estos petroglifos han sido grabados por los **Indios Utes que dio su nombre en Utah.**

Estos motivos son utilizados poco frecuentemente, se parece, estos pueblos han utilizado sobre todo círculos (dos o tres) concéntricos, a veces centrados por una cruz que hace pensar en una cruz gaélica (arriba a la derecha). La flor del cactus gigante "saguaro" es el símbolo de Arizona.

Un saguaro en Arizona

¿ Por fin que piensa de la telaraña?

El hombre mide 1,8m.

http://tpearaignee.e-monsite.com/pages/la-toile/

Ahora les presentamos un artículo del “Mundo” comunicado por uno de nosotros: Ruben Rodriguez.

Un singular pavimento matemático

El suelo de la iglesia de Santa María de Mahón, renovado usando las teselaciones de Roger Penrose, tiene un diseño único

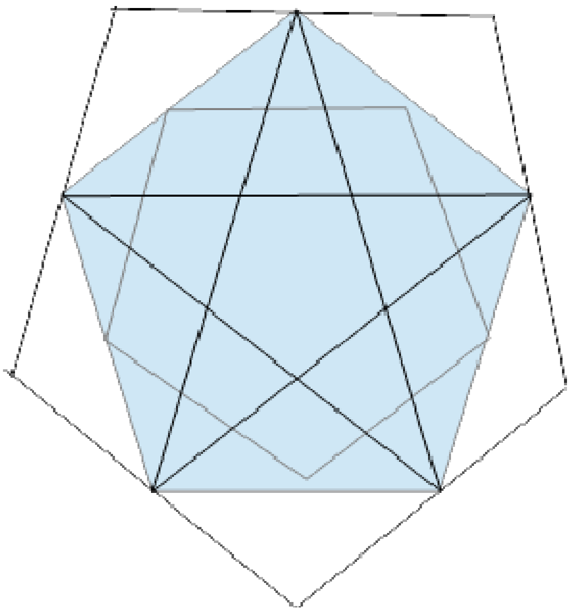
Aunque en sus comienzos se tratara de obras simples y primitivas, desde la antigüedad el hombre ha juntado y colocado sobre una superficie piezas de diferentes materiales buscando crear un conjunto armónico en el que era frecuente la aparición de diseños geométricos. Las distintas maneras de recubrir todo el plano para formar pavimentos sin que quedaran huecos, ni hubiera superposición en las figuras ha sido una constante a lo largo de la historia en distintas culturas y detrás de estos rompecabezas hay muchas matemáticas.
El cotidiano y a la vez extraño mundo de las teselaciones ya ocupó, en el siglo III a. C., la mente de **Arquímedes**, que realizó un estudio acerca de los polígonos regulares que pueden cubrir una superficie plana; se convirtió en una obsesión para los geómetras árabes del **Al Andalus** y saltó, por así decirlo, a otra dimensión, cuando en 1974, el matemático **Roger Penrose**, descubrió un conjunto de dos teselas relacionadas con el numero áureo que podrían recubrir el plano de forma cuasi-periódica y que, combinándolas formaban patrones que aunque parecían regulares, nunca se repetían. Desde entonces, los mosaicos aperiódicos de Penrose han sido muy estudiados, y además de su uso decorativo, se ha descubierto que algunas de sus propiedades tienen aplicaciones en campos tan diferentes como la cristalografía o la geografía.
«Nos apasionan los mosaicos», comenta **Daniel Ruiz**, presidente de la Sociedad Balear de Matemáticas SBM-XEIX, «y este tema lo hemos empleado en muchas ocasiones en divulgación, por eso nos sorprendió que hace unos tres años, durante una visita a Menorca, encontrarnos por casualidad en la iglesia de **Santa María**, en **Mahón**, con un pavimento de Penrose. Este tipo de suelo creo que es único en España, al menos yo no conozco ningún otro lugar donde lo haya». Gracias al sitio:
http://www.elmundo.es/baleares/2015/03/03/54f5af2ee2704ed0548b45b4.html

Aquí a la izquierda el pavimento visto de pié, vemos que la figura principal se parece un pentágono estrellado completado por rombos.

Aquí a la izquierda una fotografía de Roger Penrose, sobre uno de sus maravillosos pavimentos.

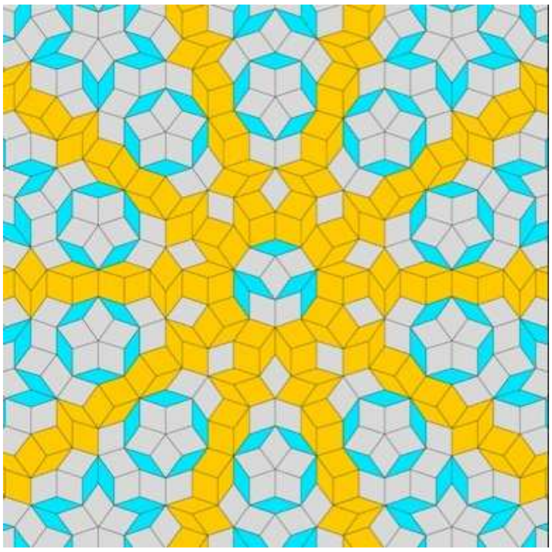
Aquí una vista desde el techo de la iglesia. Sera interesante de tratar de reproducir por ejemplo la figura central con un software de dibujo como GEOGEBRA y luego observarle

Comentario Hemos tratado en otra producción de nuestro équipo IREM de la complementación del pentágono estrellado para obtener otro mas grande, aquí abajo un ejemplo:



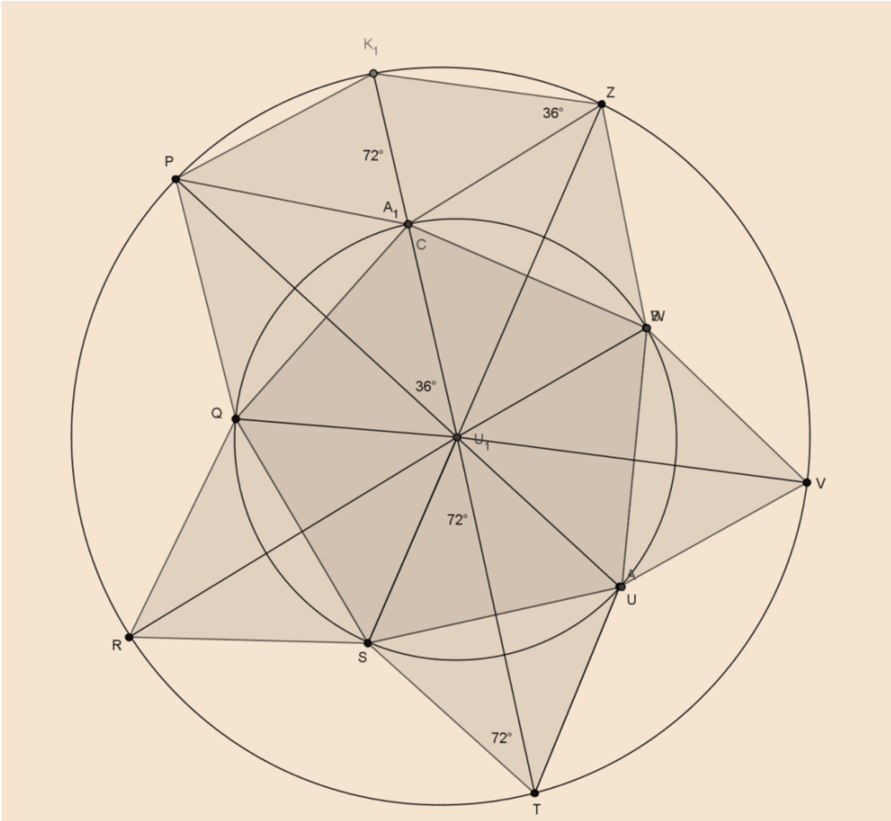
Hemos trazado sucesivamente paralelas a los lados de los pentágonos convexos del pentágono estrellado para trazar pentágonos mas grandes.
Cuando habiamos estudiado el pavimento de Penrose nos parecía que estaba construído de la misma manera, pero ¡No! Porqué en nuestro estudios los rombos externos estaban alineados. Documentándose y observando mas precisamente hemos visto que en el pavimento de Santa María de Mahón habia dos tipos de rombos : uno grande y uno mas pequeño. ¡Estos pavimentos raros son bellos ejemplos de ilusión óptica!

Aunque la iluminación no favorece mucho la observación, vamos a intentar reproducir el motivo principal con un software de geometría. Hemos trazado un círculo rodeando al pentágono y observamos el dibujo. Vemos que no es un pentágono estrellado regular pero como sabemos que es formado por rombos, los ángulos al centro miden 360°/5 = 72° y los otros ángulos de los rombos miden 180 – 72 = 108°. Nos parece que son rombos construidos con **dos triángulos de oro.** Los pequeños rombos que estan en la perifería nos parecen ser los que completan la figura sobre el círculo… ¿Qué les parece a ustedes?



Aquí a la izquierda un pavimento de Penrose que muestra un motivo circular, estos elementos no son puestos “a granel” como en la iglesia Santa Maria de Mahon, pero son los mismos rombos**.**

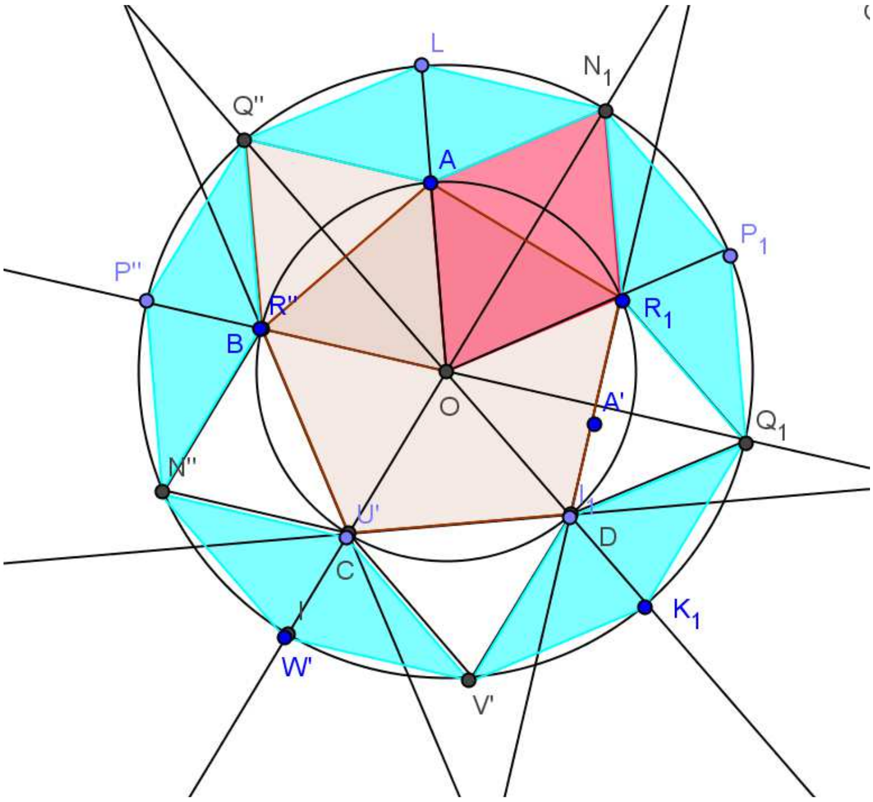
Les proponemos ahora construir la figura central con un software de matemática.



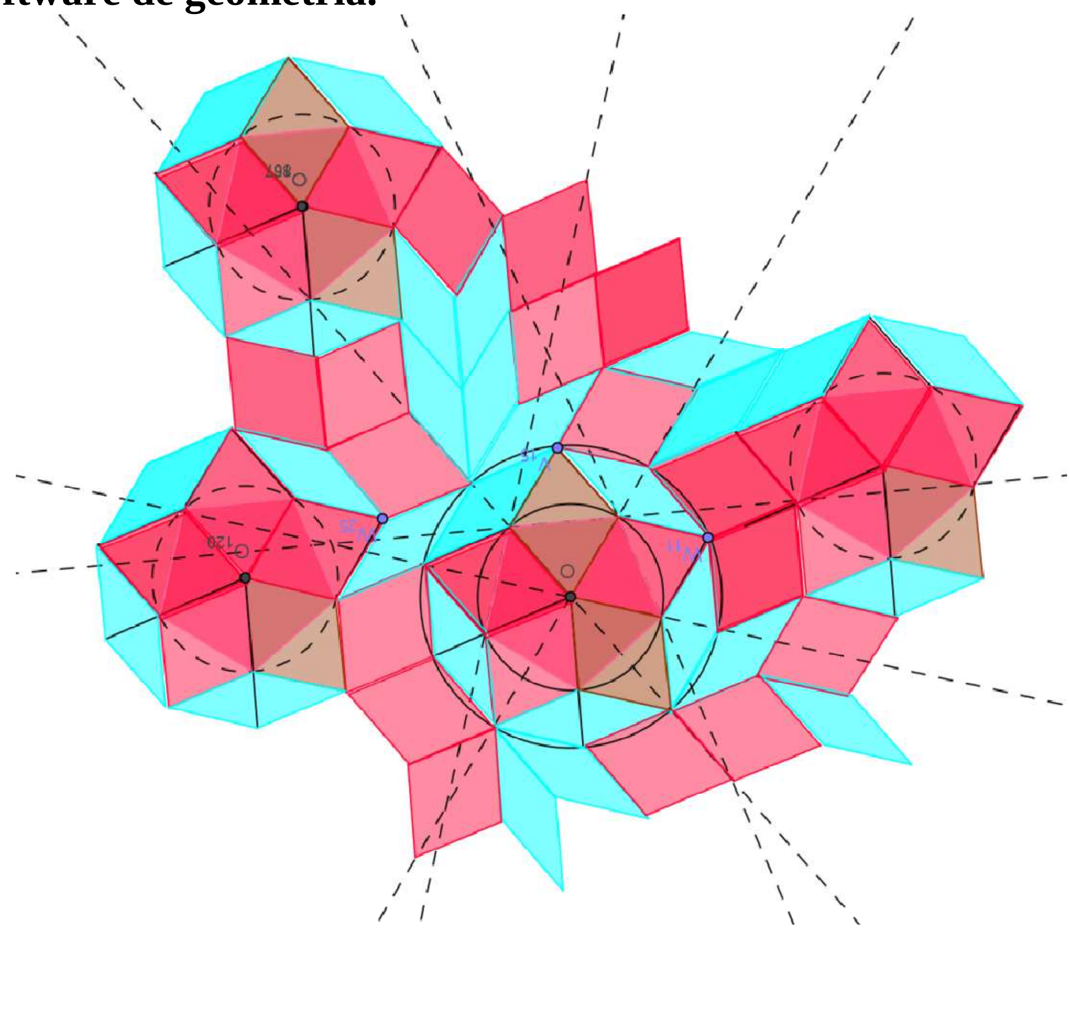
Observamos la figura y nos parece que :
El cuadrilátero SU_1UT es un rombo, como el círculo esta dividido en cinco partes que nos parecen iguales, el ángulo SU_1U mide 360°/5 = 72°. El ángulo PU_1K_1 mide 72°/2 = 36° entonces, en el triángulo PU_1K_1 el ánguloPK_1U_1 mide : (180°-36)/2 = 72°. El ángulo PK_1Z mide 144°. El ángulo PA_1U_1 mide 180°-72 = 108°. El triángulo PA_1U_1 es entonces un gran triángulo de oro y el triángulo PK_1A_1 es un pequeño triángulo de oro. Los rombos que forman el pavimento de Penrose son formados por dos triángulos de oro opuestos por la base. Les incitamos a dibujar estos rombos sobre papel grueso y continuar el pavimento…

Modo de empleo para hacer la figura con el software GEOGEBRA

Trazar un pentágono convexo y su círculo circunscrito.
Construir los cinco triángulos simétricos de los que forman el pentágono convexo para obtener un pentágono estrellado. Cada par de triángulos define un rombo que utilizamos para el pavimento.
Trazar el circulo circunscrito al pentágono estrellado. Este pentágono estrellado seca este gran círculo en cinco arcos iguales, Trazando los ejes de simetría de los pentágonos, encontrar los puntos que secan los arcos en dos partes iguales. Los diez puntos obtenidos sobre el gran círculo definen cinco pequeños rombos que utilizamos para el pavimento.



Aquí abajo un comienzo de pavimento "a granel", usted puede continuar con el software de geometría.



Capítulo III-2

El número de oro en el liceo superior y también para los aficionados advertidos por Michel Soufflet

Introducción
Les proponemos una sucesión "lógica" a los capítulos 1 y 2 destinados a los niveles elementaros. En el curso superior, el saber de los alumnos ha evolucionado, es posible desarrollar más los aspectos algébricos.

A este nivel también, la situación didáctica es notable por el interés que este tema suscita: en efecto: encontrando a antiguos alumnos después de varios años, la primera pregunta es casi siempre: ¿dónde podemos encontrar una documentación sobre el número de oro?

Del punto de vista pedagógico, según las épocas y el tiempo disponible estas actividades pudieron tomar formas variadas que iban de sesiones en la clase a los deberes en la casa.

Esta actividad puede ser leída independientemente de las precedentes para los grandes alumnos y estudiantes profesores.

Divina proporción

En un principio era lo que los pintores del renacimiento italiano llamaban **divina proporción o división dorada**, la cuestión que proponemos es la siguiente:

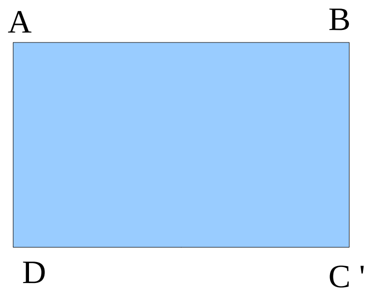
¿Cómo colocar los puntos A, B y C de tal modo que AC / AB = AB / BC?

Es decir que el cociente de la gran longitud sobre la longitud media sea igual al de la media sobre la pequeña.

Este modo de dividir un segmento en dos estuvo considerado como el más armonioso. Es verdad que si, haciendo una foto usted desea privilegiar un objeto para ponerlo en evidencia usted evita ponerlo justo en medio y excesivamente cerca de los bordes.

Si a partir de este segmento construimos un rectángulo de tal modo que la anchura sea igual a AB y que la altura BC' sea igual a BC, se obtiene lo que los pintores llaman un **rectángulo de oro**, formato de la inmensa mayoría de tableros clásicos, a excepción de las marinas o a excepción de los ciertos cuadros.

Este rectángulo también es considerado como el que es el mejor proporcionado. Si nos es pedido construir un rectángulo cualquiera, efectivamente tendemos a hacerlo no demasiado cuadrado y no demasiado alargado.



Calcular esta fracción no es difícil

Ponemos AB = 1 y x = AC / AB , ya que AC = AB + BC, la división dorada corresponde a:

(AB + BC) /AB = AB/ BC sea 1 + (BC / AB) = AB / BC ;

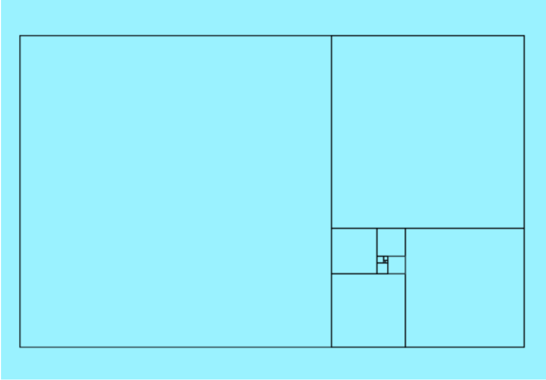
o también $1 + 1/x = x$ entonces, x siendo no nul a: $x^2 - x - 1 = 0$.

Pero $x^2 - x - 1 = x^2 - x + ¼ - 5/4 = (x - 1/2)^2 - 5/4$.

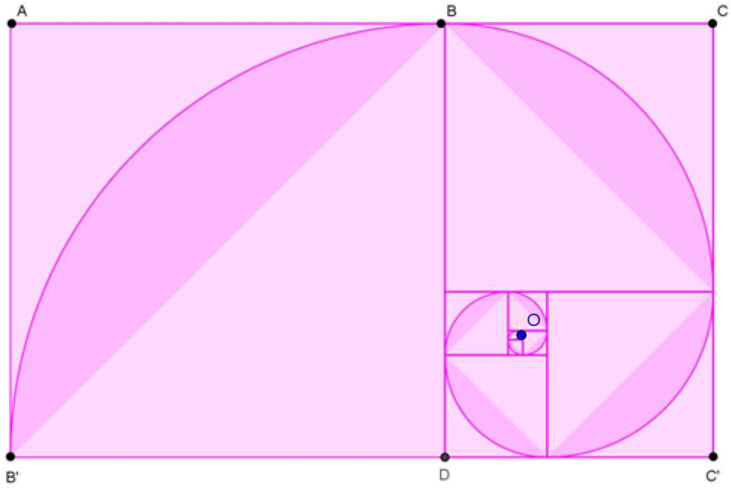
Esta ecuación admite pues una sola solución positiva: $(1 + \sqrt{5})/2$ sea 1,618 a 0,001 de aproximación, es el número que es llamado "número de oro", a menudo **designado por la letra griega φ.**

Podemos observar que, si abordemos el problema con medidas algébricas, obtenemos otra solución que es φ' llamando φ' el conjugado de φ es decir $(1-\sqrt{5})/2$. La Divina proporción: AC / AB = AB / BC engendra una propiedad notable del rectángulo de oro.

En efecto, si se añade un cuadrado sobre la longitud o si se lo suprime sobre la anchura obtenemos un nuevo rectángulo de oro. Reiterando la operación obtenemos una **espiral de rectángulos de oro** unos dentro de otros. (Para el estudio de diferentes espirales, usted puede consultar el capítulo precedente).



Podemos dibujar la espiral tan engendrada con, por ejemplo, el software GEOGEBRA:



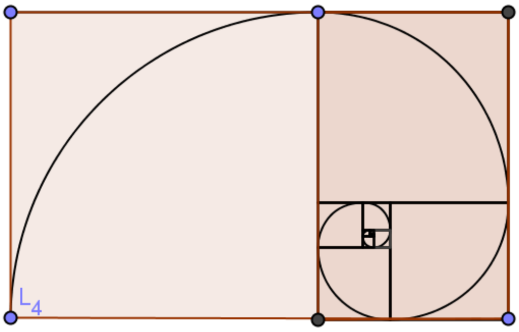
En el gran cuadrado, podemos trazar al compás un cuarto de círculo de centro D y de rayo DB, luego empezar de nuevo en el cuadrado de al lado a partir del punto opuesto a C. Continuando obtenemos lo que se convino llamar la **espiral de oro**. En más oscuro, la espiral cuadrada de las diagonales incluidas en la espiral de oro.

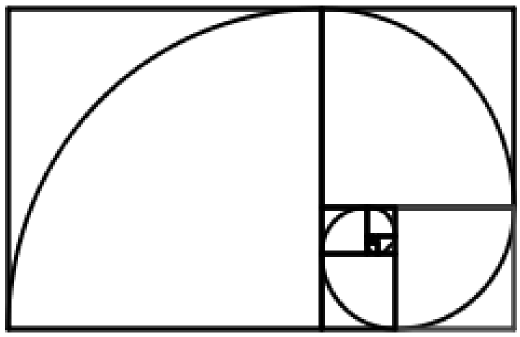
Haciendo variar la dimensión de la ventana, podemos observar una propiedad fundamental de esta espiral: obtenemos, por ejemplo, la misma curva en la ventana 60, 60 en abscisa y -30, 30 de ordenada que en la ventana 600, 600 en abscisa y -300, 300. Ponemos en evidencia así el invariancia de la curva en una similitud de centro O (O es llamada punto asíntótico de la espiral, es el punto hacia el cual tienden los centros de los cuadrados cuando la medida por su parte tiende hacia cero), de proporción $1/\varphi$ y de ángulo $\pi/2$. Encontramos así el aspecto interdisciplinario con el estudio de la forma de la concha de caracol.

Señalamos más arriba cuánto la espiral dorada aproxima de modo satisfactorio en general la espiral logarítmica y detallamos su propiedad notable más abajo.

En efecto esta última tiene una propiedad de crecimiento continuo sin deformación que puede también ser analizado separando rotación y homotecia. Toda rotación de centro O de ángulo “**a**” positivo vuelve a un homotecia de proporción $1/\varphi^{2a/\pi}$.

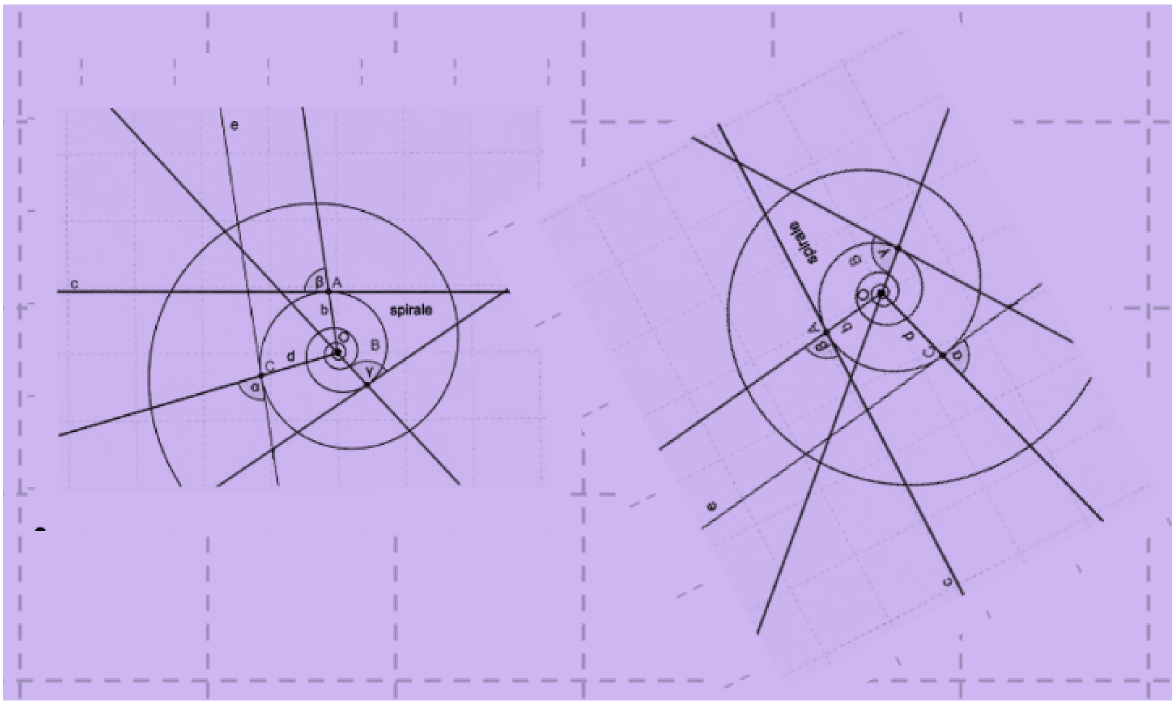
Esta espiral posee también una propiedad interesante: el ángulo tangencial polar es constante. Las propiedades de “auto homotecia” de la espiral dorada son puestas en evidencia en las figuras siguientes ejecutadas sobre GEOGEBRA con una gran escala por nuestro colega del IREM Didier Trotoux:

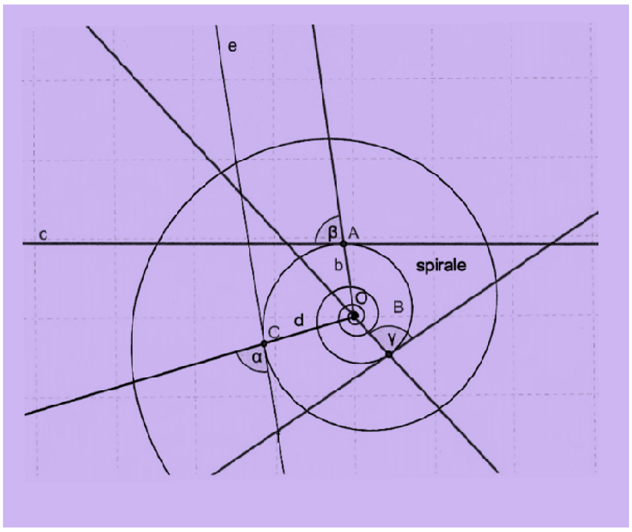




Aumentamos la parte central de la figura de entrada con el fin de obtener la figura de salida, desde luego la precisión no es muy buena sino usted puede verificar con un papel de calco que las figuras se sobreponen. Es una propiedad de la espiral de oro pero también de la espiral logarítmica.

La diferencia (¡de talla!) entre ambas espirales (que muchos confunden) es la siguiente: la espiral dorada, construida con cuartos de círculo, es "auto homotética" a condición de **no efectuar rotación alrededor de su centro**. **La espiral logarítmica es homotética aunque se efectúa una ro**tación, vea las figuras más abajo dónde repetimos la figura del principio de este artículo, luego lo hicimos pivotar alrededor de su centro y luego dilata. Usted puede observar con un papel de calco si ambas figuras se superponen bien.





Sobre la figura al lado pusimos en evidencia los ángulos tangenciales a los puntos A, B y C de la curva. **Una propiedad característica de toda espiral logarítmica es que este ángulo es constante**. Sobre la espiral dorada, este ángulo es tal que su cotangente vale: $2/(\pi\ (\ln\ \varphi))$ lo que corresponde a un ángulo de 73°. Esta propiedad hace de esta curva una **loxodromia**.

En navegación la **loxodromia** es la curva que describe un móvil que se desplaza en cabo constante, lo que se hace automáticamente cuando navega al compás. El cabo que es el ángulo que hace el eje del barco con Norte. Suponiendo que la Tierra es una esfera, la loxodromia es una espiral que acaba sobre uno de los polos como punto asíntótico. La proyección de esta curva sobre un plano perpendicular al eje de los polos es una espiral logarítmica plana.

Sobre la Tierra, la loxodromia es una espiral que se enrolla hacia el polo Sur si el cabo es comprendido en el sentido estricto entre 90° (este) y 270° (oeste), hacia el polo Norte en caso contrario es para los valores 90° y 270°, la trayectoria es, por supuesto, “paralela” a la del polo sur.

Fracción continúa (*)

Una propiedad curiosa del número de oro es que es el límite de una fracción que se escribe de manera reiterada solo con el número 1. (Ve el capítulo II).

Hemos visto que $\varphi= (1+\sqrt{5})/2$ es solución de la ecuación: $1 +1/x = x$

Tenemos entonces:

$\varphi = 1 +1/\varphi$ y, con un razoniamento por recurrencia sobre φ:

$\varphi = 1 +1/\varphi = 1 + 1/(1 +1/\varphi) = 1 + 1/(1 + (1/ 1 +1/\varphi))$.........

Entonces: $\varphi= 1 + 1/(1 +(1/ 1 +1/1 +1/1+...)))$.

Las reducidas que son las partes finitas comenzando con el primer 1 de esta fracción son:

$u_0 = 1$; $u_2 = 1+1 = 2$; $u_3 = 1+1/(1+1) = 3/2 = 1{,}5$;

$u_4 = 1+1/(1+1/(1+1)) = 5/3 = 1{,}67$ al centésimo;

$u_5 = 1+1/(1+1/(1+1/1+1))) = 8/5 = 1{,}6$; etc.

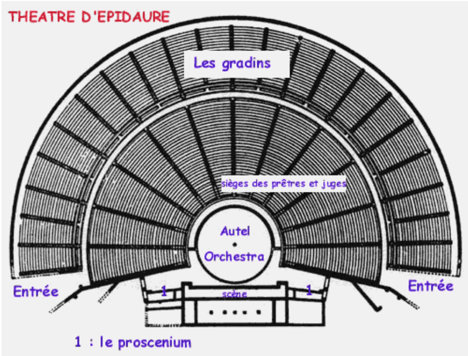
Ellas forman una sucesión de números racionales que converge hacia el número de oro de una manera alternada (encuadrándolo).

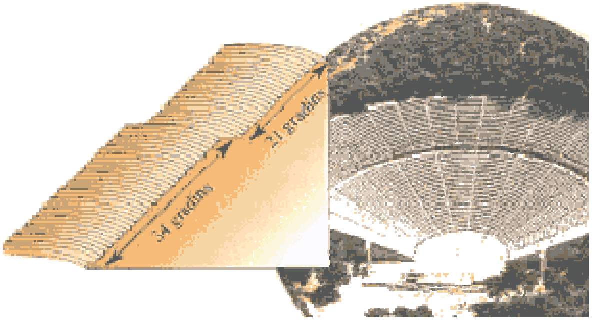
Cada término puede obtenerse como la proporción de dos términos consecutivos de otra sucesión célebre: la **sucesión de Fibonacci**, por fin, más conocida, el de primer y de segundo términos 0 y 1 y de forma recurrente: $u_{no} = u_{no-1} + u_{no-2}$; cada término se obtiene sumando ambos precedentes, lo que da:

$u_2 =1$; $u_3 =2$; $u_4 = 5$; $u_5 = 8$; $u_6 = 13$; $u_7 = 21$; $u_8 = 34$…

Esta sucesión puede ser observada en ciertos monumentos como el teatro de **Apidavros en Grecia** cuyas marchas son repartidas por la mitad idas, 34 debajo del descansillo, 21 encima y, mirándole podemos comprobar la impresión de equilibrio. (Gracias al sitio: www.trucsmaths.fr.st

(*) una fracción continúa C (decimos continuada) es una expresión formada de una parte entera (que puede ser ausente) a_0 aumentada de una fracción con numerador igual a 1 y a denominador formado por una parte entera a_1 aumentada de una fracción de la misma forma. Anotamos a veces: $C = a_0 +1 / (a_1 + 1 / (a_2 + 1 / (\ldots)))$ o, con un modo más explícito, bajo la forma señalada al capítulo II en el caso del número de oro.





El término general de esta sucesión puede escribirse con la ayuda del número de oro φ y lo contrario de su conjugado φ ': $\mathbf{u_o = (1/\sqrt{5})(\varphi^n - \varphi'^n).}$).

Esta fórmula asombra tan un poco: ¡para un valor dado de n, el cálculo de u_o contiene muchos radicales pero da siempre un número entero! Se demuestra fácilmente por recurrencia, φ y φ' siendo ambas soluciones de la ecuación

$x^2 - x - 1 = 0$ tenemos: $\varphi^2 = \varphi + 1$ y entonces $\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$ (lo mismo para φ '). Es más difícil demostrarle si no hubieramos hecho la conjetura de la expresión.

La idea es mostrar que hay solo 2 sucesiones geométricas verificando la relación de recurrencia:

$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ y mostrar que las secuencias de Fibonacci que verifican:

$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ pueden escribirse como una combinación linearía de dos sucesiones geométricas w: $u_n = av_n + bw_n$.

Una sucesión de razón q y de primer término **a** tiene una forma recurrente de $u_n = q\, u_{n-1}$ y término general: $u_n = a\, q_n$ (donde n es un número entero stricto positivo), tenemos entonces:

$u_n = q\, u_{n-1} = q^2\, u_{n-2}$ y $u_{n-1} = q\, u_{n-2}$; entonces: $q^2\, u_{n-2} = q\, u_{n-2} + u_{n-2}$ sea $q^2 = q + 1$. Encontraremos así la ecuación de segundo grado de raíces φ y φ'

Las sucesiones geométricas buscadas necesariamente tienen pués por razón

φ y φ', entonces: $u_n = av_n + bw_n = a\,\varphi^n + b\,(\varphi')^n$.

Si los dos primeros términos de la sucesión de Fibonacci son 0 y 1, a y b verifican: $a + b = 0$ y $a\varphi + b\varphi' = 1$.

Encontramos así: a = $\mathbf{1/\sqrt{5}}$ **y** b = - $(1/\sqrt{5})$; entonces: $u_n = (1/\sqrt{5})(\varphi^n - \varphi'^n)$.

Si los dos primeros términos son 1 y 1, encontramos:

a = (5+$\sqrt{5}$)/10 y b = (5-$\sqrt{5}$)/10.

En el primer caso, sobre la hoja de cálculo de la calculadora o del computador ponemos calcular la sucesión: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21.

En el segundo, es la misma sucesión desplazada de un término hacia la derecha, (comienza pues con 1).

La investigación de a y b da la ocasión de hacer un poco de cálculo algébrico con radicales. La utilización de una hoja de cálculo para la comprobación evita perder demasiado tiempo sobre los cálculos fastidiosos.

Los radicales encajados

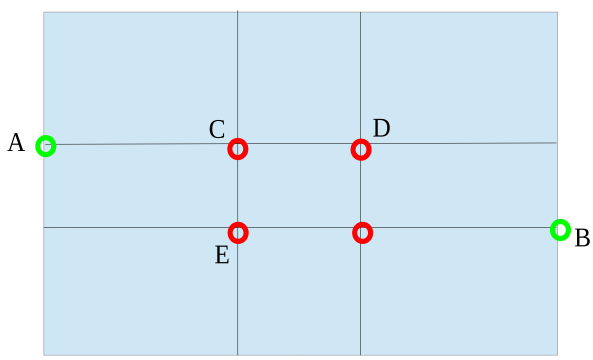
Como vimos para la fracción continúa, el número de oro puede también escribirse sobre la forma de una sucesión infinita de radicales encajados que contiene solo número 1.

De $\varphi^2 = \varphi + 1$ se obtene: $\varphi = \sqrt{(1+\varphi)} = \sqrt{\left(1+\sqrt{(1+\varphi)}\right)} =$

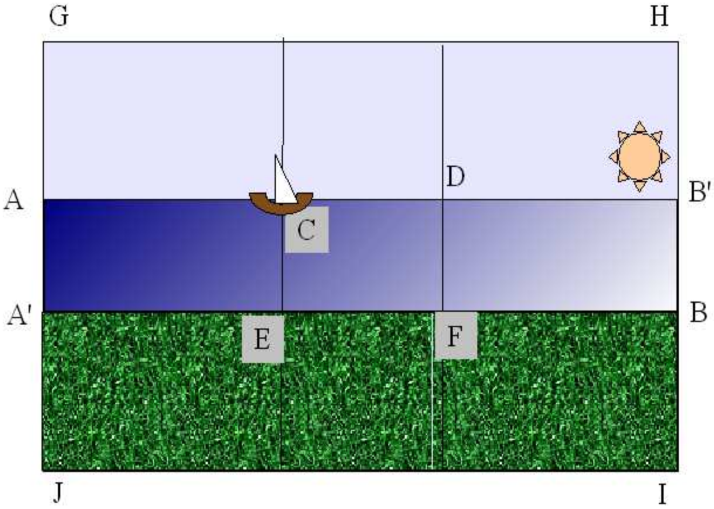
$$\sqrt{(1+\sqrt{(1+\sqrt{(1+\sqrt{(1+\sqrt{\left(1+\sqrt{(1+\varphi)}\right)})})})})}\ .$$

Artes plásticos; Utilización para los dibujantes y fotógrafos

En el momento del enfoque de la fotografía o del tablero, podemos tratar de dar una impresión de equilibro utilizando un rectángulo de oro.



Si, por ejemplo, hay una línea de horizonte, ponerlo de tal modo que haga una división dorada sobre uno de los lados (puntos verdes). Si se desea poner un objeto o una persona en valor, los puntos rojos tienen que ser privilegiados.



Cuando se fotografía o cuando se pinta un sitio o un grupo de personas, puede ser más agradable para el ojo de colocar la línea de horizonte, las personas o los objetos que se quiere valorizar respetando "divina proporción".

Matemáticas La imagen más arriba es rectangular, dorada, verifíquelo con decímetro.

¿La línea de horizonte y el borde del camino herboso dividen el pequeño lado del rectángulo de oro según divina proporción, ¿hay otros rectángulos de oro en el dibujo?

He aquí una foto tomada en el momento de la exposición "Cuarenta años del I.R.E.M. de Basse-Normandie".

Describa la posición de los personajes y de los carteles, observe algunas relaciones de longitud y anchura.

Encuentre el punto de encuentra de las líneas del pavimento.

Los afiches son de formato impresor A0, dé su dimensión.

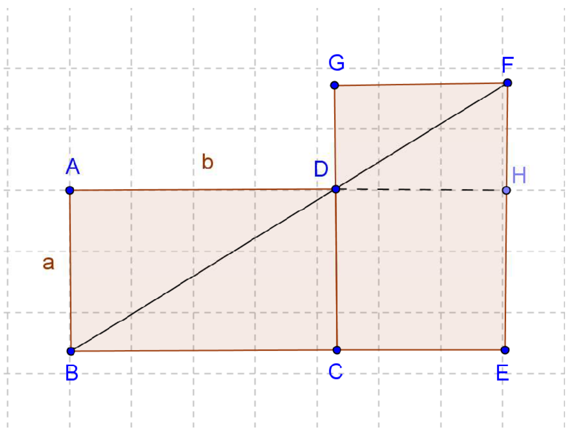
¿Le parece la foto equilibrada?

El número de oro y los pintores contemporáneos

He aquí, página siguiente un tablero de Claude Monet: "Une terrasse a Sainte Adresse" (sitio wikipedia).

Observe y comente la posición de los diferentes planos y de los personajes así como el punto de encuentra de las líneas horizontales. Cite otro tablero contemporáneo estructurado de éste manera.
Si desean documentarse a propósito de la pintura **contemporánea en relación con el número de oro pueden consultar el lindo sitio:**
http://www.artaven.com/peintres-contemporains.phpcon, en particular la pintura con efecto de Bernard Sholl

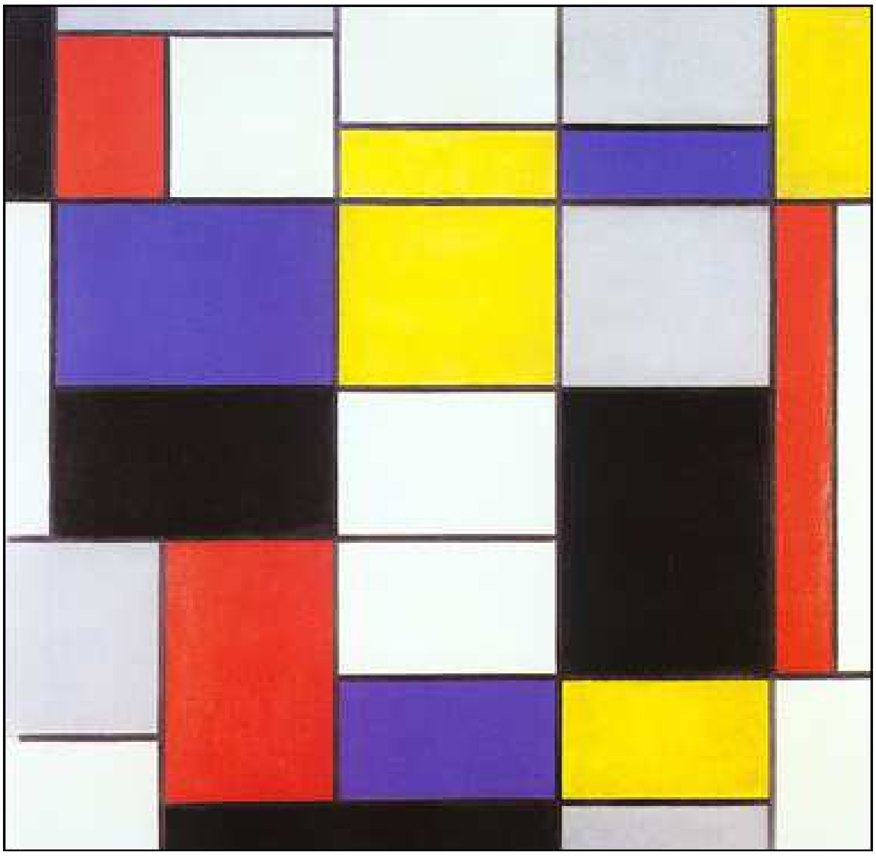
Por fin, citamos un ejemplo de la vida cotidiana (para todos)
Las tarjetas de banco y tarjetas de fidelidad presentan un formato agradable.
Si ponemos dos tarjetas juntas como aquí abajo:



Comprobamos que los tres puntos B, D, F son alineados. Midamos al decímetro los lados de las tarjetas, obtenemos 8,5 cm y 5,4 cm, la relación de estas dos medidas es 1,57 al centésimo. Esto es sólo una aproximación del número de oro, pero podemos mostrar que esta propiedad es una característica de los rectángulos de oro (aproximada a los errores de medida y de construcción cerca.

Detallamos la propiedad directa en el capítulo V-2 donde le propondremos una actividad sobre este tema.
Supongamos que hayamos yuxtapuesto dos rectángulos superponibles como sobre la figura más arriba y que los puntos B, D, F sean alineados. Vamos a demostrar que entonces los rectángulos son de oro.
Tracemos un segmento auxiliar [DH] paralelo al segmento [CE].
El polígono DGEC es un cuadrado del que anotamos "**a**" el lado.

Los rectángulos ABCD y GFHD son semejantes.Anotamos AD = b. Entonces
$\frac{b-a}{a} = \frac{a}{b}$ entonces $(b-a) = a^2$ y también $a^2 - b^2 + ab = 0$
Dividimos los miembros de la ecuación por a^2 (a no es nul), obtenemos :
$\frac{b^2}{a^2} - \frac{b}{a} - 1 = 0$ y $\frac{b}{a} = \varphi$.
Remarcamos que se puede prolongar el estudio mostrándo que la envolvente rectangular de la figura es también un rectángulo de oro, lo haremos en el capítulo V-2. He aquí la "Composition A" de Piet Mondrian (1923), busca cuales son los rectángulos que son de oro.



Capítulo IV

Ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, el caso del número de oro

por Danielle Salles y Ruben Rodriguez,
con la participación de Christian Ballot

Para los alumnos profesores y la secundaria superior

Y también para los aficionados de enigmas chinos

Este artículo está disponible en descarga gratuita sobre nuestro sitio IREM de Basse-Normandie en nuestra revista "Miroir des mathématiques". El número de oro, excepto su interés histórico innegable es una “mina de oro”, (¡excuse del pleonasmo!) para el matemático que encuentra miel en su estudio y puede asi escavar en campos diversos para concebir actividades tanto de descubrimiento como de consolidación de nociones variadas.

Así como lo recuerda Antoine Chambert-Loir en su artículo de la Gaceta de los Matemáticos (enero de 2012) Carl Friedrich Gauss ya se había interesado por la resolución de ecuaciones decidiendo que: todos los múltiplos de un número primo dado son identificados a cero. Para el matemático, se trata desde luego de trabajar en los cuerpos terminados de la forma $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en donde p es un número primo fijo. Recordemos que, como lo subraya más lejos nuestro colega Ruben Rodriguez, estos conjuntos particulares así como sus tablas de operaciones y las propiedades que emanan de eso, han sido enseñadas en colegio en los años 70 en el marco de la acción conocida de enseñanza de las **"Matemáticas modernas".** Si éstas desconcertaron a muchos padres, no era el caso de nuestros alumnos porque los IREM, creados en esta ocasión para formar los profesores, habían creado numerosas actividades divertidas para los niños y los profesores (vea ejemplos más adelante) y éstos no transpiraban sobre estas "nuevas matemáticas" poco conocidas. Es una pena para que estos estudios han sido propuestos a mucho más tarde en los ciclos de enseñanza.

Ellos iniciaban, - particularmente a los jóvenes a los razonamientos lógicos, útiles tanto en matemáticas como en informática. Lo que a menudo les falta hoy día y debe ser ré-estudiado en el liceo y en la universidad.

Para el lector no familiar de estas teorías apasionantes, vamos a proponer un juego inspirado del "Jeu de l'oie" francés y un juego de aire libre. Observaremos el problema chino el que daremos un ejemplo simplificado para interpelar a este lector.

Recordemos en primer lugar algunas nociones sobre los cálculos **"módulo p"** afín de estudiar dos casos particulares: p = 7 y después p = 11 en caso de la resolución de la ecuación característica de φ .

I - Reviciones sobre las congruencias:

I-a) La adición en $\mathbb{Z} / \mathbf{p}\mathbb{Z}$

Recordemos en primer lugar un pequeño enigma chino del siglo V que escribimos aquí tal cual:

"Tenemos un número desconocido de cosas.

Si las contamos de tres en tres, quedan dos; si las contamos de cinco en conco, quedan tres, si las contamos de siete en siete, quedan dos.

Encontrar el número de estas cosas."

Si esto le inspira le invitamos a buscar un método de resolución … Si esto no le inspira usted encuentra algunas indicaciones en anexo. Por nuestra parte vamos a definirle las congruencias y le propondremos un "enigma chino" más simple bajo una forma moderna.

Definiciones: sea **p** un número primo fijado (en nuestro trabajo, p será escogido superior o igual a 3).

I – **Revisiones sobre las congruencias:**

Decimos que un número n es congruente a cero módulo p si es un múltiplo de p (p es su propio múltiplo).

Decimos que dos números son congruentes módulo p si su diferencia es un múltiplo de p.

Ejemplos

Si **p = 7** entonces 14 es congruente a 0 módulo 7, se escribe: $14 \equiv 0 \pmod 7$.

15 es congruente a 1 módulo 7 se escribe: $15 \equiv 1 \pmod 7$.

Si p = 11 entonces 33 es congruente à 0 (módulo 11) y 17 es congruente à 6 (módulo 11).

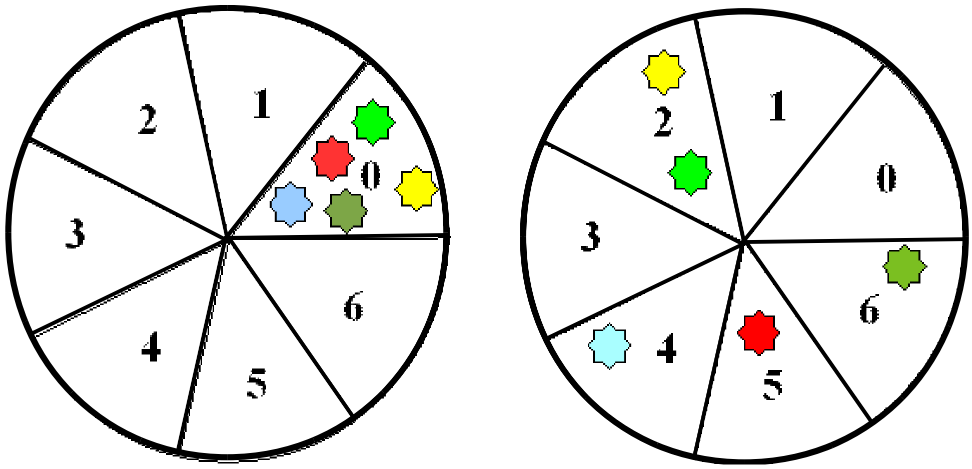
Para desarrollar las ideas más perceptibles podemos imaginar que los números de 1 a p son repartidos sobre una circunferencia y cuando se desplaza sobre esta circunferencia, se llega sobre p, se vuelven a empezar el ciclo. Escribe

Para los alumnos "más jóvenes" (¡de 7 a 77 años!) podemos proponer el pequeño juego siguiente:

Material: una hoja de papel grueso, un compás, un semicírculo), un dado a seis caras, peones de colores diferentes. Formamos grupos de cinco alumnos.

El profesor puede trazar antes el círculo y los sectores numerados antes. Si no pedimos a los alumnos trazar sobre una hoja un círculo y repartir regularmente sobre su circunferencia siete puntos anotados de 0 a 6 (podemos ayudarnos del semicírculo).

Trazar los radíos asociados con estos puntos para obtener sectores. Ponemos los peones de colores diferentes sobre el sector O.

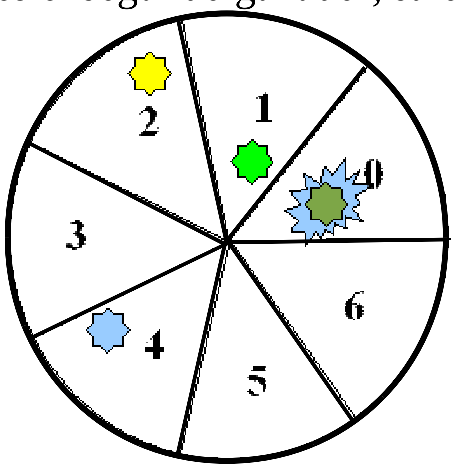


1^er vuelta

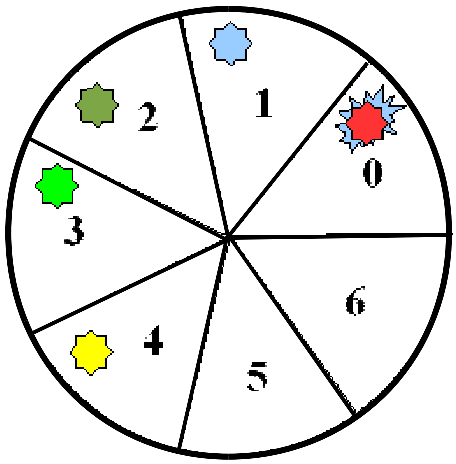
Cada alumno lanza el dado y coloca su peón sobre el número encontrado, anota su resultado sobre un papel. A la segunda vuelta cada uno juega y desplaza su peón según su número de puntos como en el jugo de los "pequeños". Cada uno anota su resultado, podemos sobrepasar el sector de origen que es el 0. El primero que exactamente cae sobre 0 ganó, y se llevanta su peón, otros continúan hasta que caigan sobre 0. Cuando el juego está terminado cada uno anuncia sus puntos sucesivos, tenemos así varios modos de obtener 0 módulo 7. Simulamos abajo un juego: a la primera vuelta el verde claro y el color amarillo sacaron 2, el azul sacó 4, el rojo sacó 5 y el verde oscuro 6. Nadie tiene 0 porque hay sólo 6 caras al dado.

A la segunda vuelta el verde claro sacó 1, cae en 3, el azul 4, sobrepasa el 0 y cae en 1, El color amarillo 2 cae en 4, el rojo 2 y cae sobre el 0 pues gana y abandona el juego, el verde oscuro sacó 3, sobrepasa el 0 y va en 2.

A la tercero vuelta el verde claro sacó 5, sobrepasa el 0 y pasa en 1, el color amarillo sacó 5, sobrepasa también el 0, el azul sacó 3, el verde oscuro sacó 5, cae sobre 0, es el segundo ganador, sale del juego..



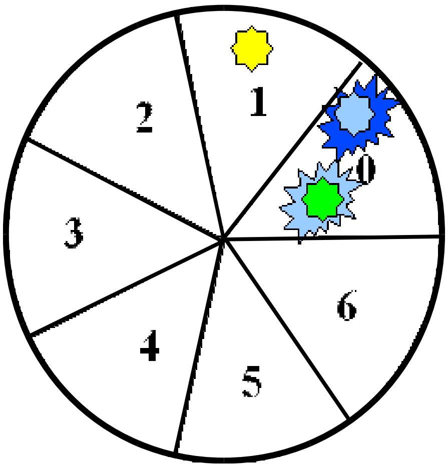
2^ndo vuelta



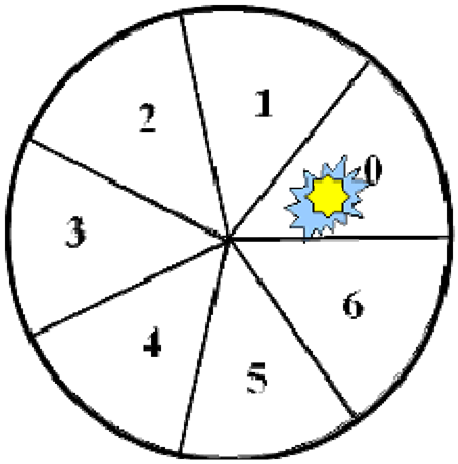
3^ero vuelta

Los otros continúan hasta que caen exactamente sobre el 0.

A la cuarta vuelta el verde claro saco 6, cae sobre 0, sale del juego; el azul saco 3, cae también sobre el 0 y sale del juego. El amarillo saco 6 pasa en 1.



4^{arto} vuelta



5^{inco} vuelta

A la quinta vuelta, el color amarillo saca todavía 6 y cae en 0.

El juego se acaba escribimos al pizarrón los resultados sucesivos de cada color:

¡Verde claro 2 + 1 + 5 + 6 = 14 GANADA!

¡Color amarillo 2 + 2 + 5 + 6 + 6 = 21 GANADA!

¡Azul 4 + 4 + 3 + 3 = 14 GANADA!

¡Rojo 5 + 2 = 7 GANADOS! Clasificado primero en solo dos vueltos

¡Verde oscuro 6 + 3 + 5 = 14 GANADA!

Recapitulamos al pizarrón los resultados:

2 + 1 + 5 + 6 = 14 0 módulo 7

2 + 2 + 5 + 6 + 6 = 21 0 módulo 7

4 + 4 + 3 + 3 = 14 0 módulo 7

5 + 2 = 7 0 módulo 7 Clasificado primero.

6 + 3 + 5 = 14 0 módulo 7

Este pequeño juego hace calcular la suma de diferentes juegos módulo 7.

Los jóvenes qu e no saben calcular módulo 7 pueden contar los compartimientos como con juego de los pequeños caballos pero deben anotar su tanteo cada vez. En esta óptica de presentación de los números enteros módulo p para los más jóvenes le presentamos ahora algunos "recuerdos didácticos" de Ruben Rodriguez que, en los años 1970 introducía en su colegio de Montevideo, estas nociones algébricas a partir de juegos realizados en universos formalizados por los alumnos.

¡Todos los "viejos" qué habían enseñados estas nociones, o que habían ayudado sus niños a aprenderlas, pueden decir que esto los divertía mucho y aterrorizaba solamente a los padres. El profesor Lichnerovitch, participó en la introducción de estas nociones para los más jóvenes así como el grupo «Bourbaki».

Este programa, muy ambicioso al principio habia sido disminuido pocomás tarde, lo que es lamentable, porque iniciaba, como lo dijimos al principio de este capítulo, los jóvenes, a los lenguajes - el de la lógica y el de la teoría de los conjuntos- que son universales en matemática y en informática.

I - B) Algunos recuerdos de las "Matemáticas modernas" con otro juego, realizado con sus alumnos por Ruben

En el curso de mis trabajos de investigación en Uruguay sobre la enseñanza de las matemáticas modernas en los años 70, que aplicaba en mis clases de primer año del colegio, creé una situación de juego con una pelota de handball y cinco alumnos reunidos en círculo en el patio del colegio.

Lo nombré "**Juego del distraído**". (*)

He aquí la descripción de la situación didáctica.

1) En una primera fase los alumnos oían al profesor pronunciar una sola de las vocales e, i, o, u:

El alumno que tenía el balón en sus manos debía pasar la pelota de la manera siguiente:

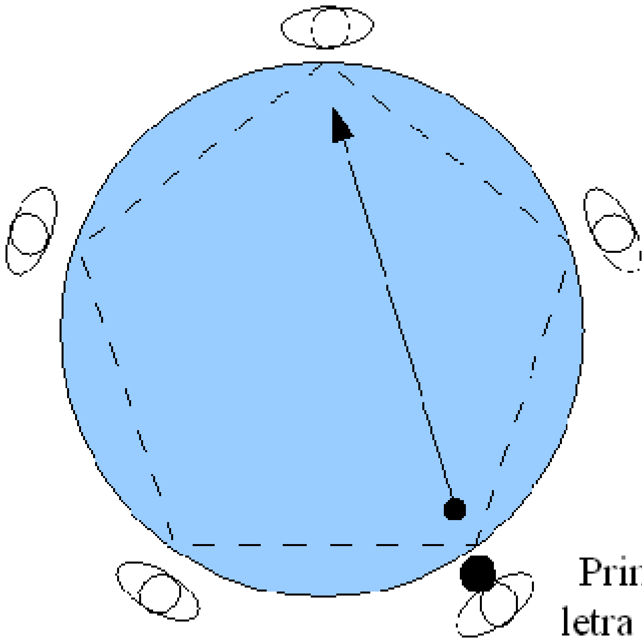
Para la vocal **a** pasa al primer jugador a su izquierda

Para la vocal e al segundo jugador a su izquierda

Para la vocal **i** al tercero, para **o** al cuarto y para **u** debía quedarse con la pelota en sus manos.

Al cabo de un número fijado de antemano de pasajes del balón, el alumno que se había equivocado menos era el ganador.

(*) Este juego fue analizado didácticamente en mi tesis para el doctorado de ciencias de la educación presentada en la Universidad de Caen en 1978 y dirigida por el Profesor Gaston Mialaret : ¿La pedagogía de la matemática moderna es ella moderna?



2) En la segunda fase el profesor pronunciaba dos vocales seguidos y los alumnos debían hacer el cálculo exacto antes de hacer el paso de la pelota. Por ejemplo **aa** daba **e**, **ae** daba **i**, **ai** daba **o**, **ao** daba **u**.
3) En la tercera fase los alumnos volvían en la sala de curso y modeliaban el juego en su segunda fase. Esto conducía a la tabla a doble entrada siguiente:
:

operación	a	e	i	o	u
a	e	i	o	u	a
e	i	o	u	a	e
i	o	u	a	e	i
o	u	a	e	i	o
u	a	e	i	o	u

4) Más tarde, en otra sesión los alumnos trabajaban en congruencias módulo 2, módulo 3, módulo 4, luego ellos habían encontrado solo la congruencia módulo 5. Los alumnos construían tableros de las operaciones binarias internas, en particular el tablero de la adición módulo 5.

Adición Módulo 5	**1**	**2**	**3**	**4**	**0**
1	2	3	4	0	1
2	3	4	0	1	2
3	4	0	1	2	3
4	0	1	2	3	4
0	1	2	3	4	0

1) Trabajamos en aquella época de "matemáticas modernas" con nuestros alumnos en Montevideo la noción de morfismo y de isomorfismo. Así es como los alumnos nos dijeron que había un isomorfismo entra el grupo del "juego del distraído" y el grupo de los números enteros módulo 5 porque es la misma tabla y entonces que ambas operaciones funcionan de modo similar. 2) Hay que decir que estos alumnos que estaban más o menos en medio de la tercera parte de año escolar habían avanzado bien en el vocabulario de las matemáticas modernas que se había trabajado a lo largo del año.

Observación didáctica: descubrimos en aquella época la importancia didáctica del método de trabajo de los alumnos: en primer lugar en un universo experimentable, aquí se trata del universo del juego con la pelota y luego en un universo mórfico que generalizanlo (el universo de la tabla de las operaciones binarias internas). Y también en otros universos como los congruencias módulo 2, 3, 4, 5,…

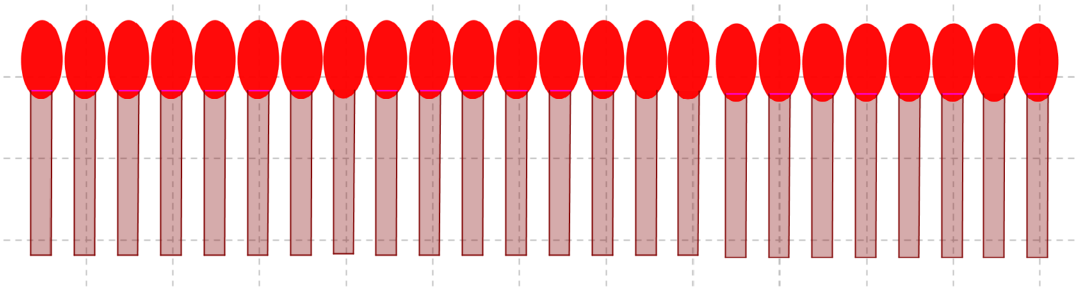
Comentario: los alumnos de Montevideo de estas clases de sexto hicieron a fines del año una exposición con carteles y para explicarles a los adultos las matemáticas modernas aprendidas en el año.

Muchos padres, colegas profesores y hasta, el inspector general de las matemáticas y el ministro de la educación nacional se hicieron explicar por los alumnos, ¡Entre otras cosas el isomorfismo citado más alto! Hay que subrayar que colegas del secundario jamás habían trabajado en los isomorfismos algébricos y todavía menos los padres que jamás habían oïdo hablar de éstos en el curso de su escolaridad.

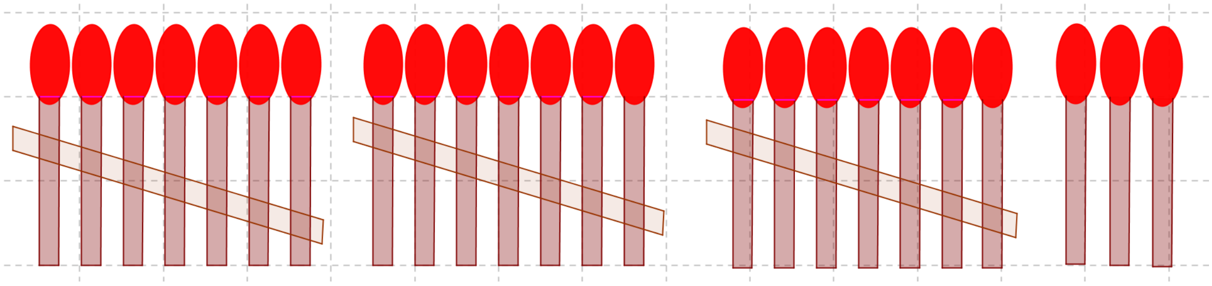
He aquí pues el testimonio de esta época rica en investigaciones sobre la pedagogía de las matemáticas, en Francia con el IREM y también en otros países como el de mis orígenes, Uruguay, dónde había fundado un equipo de investigación en Montevideo con colegas y más tarde con el inspector general Sr. Galli Nari que había deseado participar a título personal en nuestros trabajos.

II - Las multiplicaciones en Z / pZ

Explicamos que se puede hacer también multiplicaciones de los números enteros no nulos decidiendo que: "siete igual cero". Para comenzar dibujamos sobre su cuaderno un número desconocido de pequeñas rayas, esta presentación es a veces designada por "juego de las cerillas" y puede ser realizada con estas últimas:



Les pedimos a los alumnos hacer paquetes de siete rayas, o si se obra con cerillas tienen que ponerlas en paquetes de siete:



En nuestro ejemplo quedan tres. Luego les pedimos contar sus pequeñas rayas, en nuestro ejemplo hay 24.

Escribimos al pizarro: 24 igual 3 módulo 7. Verificamos que 3 es el resto de la división euclidiana de 24 por 7.

Anotamos a la pizarra todos los resultados y verificamos que encontramos bien los restos módulo 7. Vemos pues que cuando el resultado de una multiplicación es más grande que 7 se quitan 7 tantas veces que necesario para encontrar un número más pequeño que 7. Vamos entonces a escribir los cuadros de adición y de multiplicación módulo 7.

+	1	2	3	4	5	6			X	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	0			1	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	0	1			2	2	4	6	1	3	5
3	4	5	6	0	1	2			3	3	6	2	5	1	4
4	5	6	0	1	2	3			4	4	1	5	2	6	3
5	6	0	1	2	3	4			5	5	3	1	6	4	2
6	0	1	2	3	4	5			6	6	5	4	3	2	1

Subrayamos que la acción del cero es la misma que en los números enteros: cero es neutro para la adición, es decir "no cuenta". En cambio "aplasta" todos los otros números en la multiplicación: "cero vez algo hace ninguno". Es por eso que no aparece en la segunda tabla.

Les pedimos a los alumnos de observar estas dos tablas atentamente y de observar cómo estan repartidos los números.
Estas tablas hacen pensar en el juego de Sudoku: los números enteros de 0 a 6 aparecen una vez y una única en cada línea y en cada columna, decimos que tenemos "Cuadrados latinos".

Cuando se define una operación sobre un conjunto, aquí por ejemplo una "adición" sobre los números enteros de 0 a 6 módulo 7, si la tabla que representa los resultados de las adiciones para todo par de números enteros es un cuadrado latino entonces la operación es tal que cada número admite un opuesto, es decir que para todo número p existe un número q tal que $p + q = 0$, decimos que p es lo **opuesto** de q (en nuestro ejemplo módulo 7) y que q es el opuesto de p.
Por otra parte el resultado de la adición de dos números enteros es único, por ejemplo, no podemos tener a la vez:
$2+3 = 5$ y $2+3 = 0$ módulo 7.

Si la operación es una multiplicación, es de uso de hablar de inverso de un número y no de contrario, y decimos que p es el inverso de q si $p \times q = 1$. Así: $2 \times 4 = 1$ módulo 7, decimos que 4 es el inverso de 2 módulo 7 y así como 2 es el inverso de 4 módulo 7.

Más adelante, vamos a estudiar la existencia del número de oro en estos conjuntos de números particulares donde se puede efectuar, siguiendo las reglas que enunciamos, adiciones y multiplicaciones.

Así como lo vimos anteriormente, el número de oro se expresa en el conjunto de los números reales, con un símbolo que se llama una raíz cuadrada. Un número es una raíz cuadrada en un conjunto dado si, cuando se lo multiplica por mismo, se encuentra un número dentro de este conjunto. Estos números son, por ejemplo en el caso de los números módulo 7, los que se encuentran a partir de la la diagonal de la tabla de multiplicación que subrayamos en punteados gordos. Son pues: 1, 2, 4 los cuadrados, por ejemplo2 es es el cuadrado de 3 ya que $3^2 = 2$ y también $4^2 = 2$. Se verifica que 2 tiene dos raíces cuadradas que son opuestas. Es decir que:

3 + 4 = 0 (módulo 7). El número de oro es raíz de una ecuación del segundo grado $x^2 - x - 1 = 0$. Comenzaremos con las ecuaciones del primer grado.

III - Las ecuaciones a coeficientes en Z/pZ

III - a) Comenzamos por resolver una ecuación del primer grado a coeficientes en conjunto de los enteros módulo 7.

Suponemos que este conjunto es proveído de dos operaciones: la adición y la multiplicación en que las tablas son las precedentes.

Resolvamos la ecuación 2 y = 1 módulo 7.

Buscamos en la tabla de multiplicar un número que multiplicado por 2 da 1, observamos que: 2 x 4 = 1 pues y = 4 es solución de la ecuación. Resolvamos la ecuación 3y + 1 = 0 módulo 7 entonces 3 = 0 - 1 =-1 módulo 7.

-1 no aparece en el tablero, pues nosotros debemos procurar cómo escribir -1 con un número de la tabla.

¿Cuál es la particularidad de -1? Es el opuesto de 1 porque: -1 + 1 = 0 módulo 7, pues hay que buscar en la tabla de adición cuál es el número que sumado a 1 da 0. Es 6, pues 6 es el opuesto de 1 y 6 = -1 módulo 7. Nuestra ecuación se hace: 3y = 6 módulo 7. En la tabla de multiplicar verificamos que 3 x 2 = 6, una solución es pues y = 2 y **7 siendo primo, es la única.**

Las ecuaciones del primer grado son bastante simples aresolver.

Trataremos más adelante las ecuaciones del segundo grado.

III - b) otras ecuaciones módulo p son divertidas de resolver porque dan a reflexionar en un dominio que se llama la aritmética de las congruencias, por ejemplo:
Tratemos de resolver la ecuación: 2 = 3 z módulo 7.

Vemos que debemos buscar dos números enteros **y** y **z** en la tabla de multiplicar tales que 2 veces uno vale 3 veces el otro... Vemos que: 2 x 3 = 6 = 3 x 2 pues y = 3 y z = 2 convienen.

¿Hay otras posibilidades? Observamos por ejemplo que: 2 x 5 = 3 = 3 x 1; pues y = 5 y z = 1 convienen.

En hecho si continuamos así vemos que para cada número de nuestro conjunto de los enteros módulo 7 existe un entero z tal como:

2 = 3 z módulo 7.

¿Por qué? Observamos más alto que todo elemento del conjunto admitía un inverso pues podemos transformar nuestra ecuación:

2 = 3 z módulo 7 = 1/2 x 3 z módulo 7.

Debemos buscar el número 1/2, es el que multiplicado por 2 da 1; Es 4, pues la ecuación se hace: y = (1/2) x 3 z = 12 z módulo 7;

O todavía y = 5 z para todo z de 1 a 6, basta con elegir allí como valor z multiplicado por 5.

Los pares de números enteros soluciones de la ecuación son:

(5,1) ; (3,2) ; (1,3) ; (6,4) ; (4,5) ; (2,6).

III - c) Las ecuaciones simples del segundo grado

Por ejemplo la ecuación $y^2 = 4$ - que vuelve a buscar si 4 es un cuadrado tiene dos soluciones evidentes:

y = 2 y y = - 2 = 5 módulo 7.

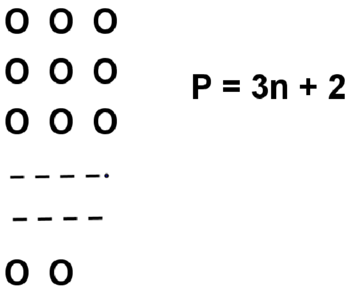
¿Pero tiene la ecuación $y^2 = 3$ una solución? No encontramos número que multiplicado por si mismo da 3.

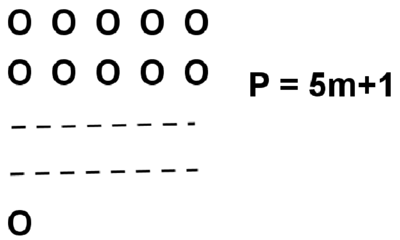
Observemos en la tabla de multiplicación si otros números enteros admiten una raíz cuadrada..

Tenemos 1 x 1 = 1 entonces 1 admite su raíz 1 acostumbrada, pero también: 6 x 6 = 1 pues 6 es también raíz de 1. ¿ Esto es sorprendente? No porque 6 =-1.

IV - Proponemos ahora en entreacto un enigma más simple que el enigma chino:

¿Tengo en mi bolsillo piezas de 1 dólares, si las cuento por tres quedan dos, si las cuento por cinco queda una, ¿Cuánto tengo de piezas?





Sean m y n dos números enteros.
Observemos la primera ecuación que expresa que cuando se divide P por 3, se queda 3 piezas, por 3 quedan 2. Observemos el segundo: cuando se divide P por 5 queda una.
¿Podemos utilizar el segundo para mejorar la primera?
Multipliquemos la primera por 5, obtenemos: 5P = 15n + 10.
Multipliquemos el segundo por 3 obtiene: 3P = 15m + 3.

Sustraigamos ambas expresiones: 2P = 15 (n-m) + 7, lo que se dice también: **2P es congruente a 7 módulo 15.**

Tenemos ahora una congruencia módulo 15.

Tratemos el caso donde m = n entonces 2P = 7 módulo 15.
Escribamos la sucesión de los números módulo 15 y multipliquémoslos por 2:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 0
2 4 6 8 10 12 14 1 3 5 7 9 11 13 0

Vemos que 7 = 2 x 11 módulo 15 pues 11 es solución.
Tengo 11 piezas pues 11€ en mi bolsillo.
Observemos que hay otras soluciones, busque ejemplos...

V -Rencontremos ahora “nuestro amigo” el número de oro
Solución de la ecuación a coeficientes enteros: $y^2 - 1 = 0$.
¿Podemos preguntarnos si el número de oro tiene existencia en Z / 7Z ya que los coeficientes de la ecuación que tiene φ como solución son 1 y 0. Podemos estudiar este problema de dos modos diferentes:

1) El enfoque por ensayos sucesivos.
2) El enfoque algébrico acostumbrado en los números reales.

Comencemos con esta última opción.

Sabemos que en conjunto de los números reales φ se escribe: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$..

Entonces vimos que φ no existas en Z/7Z.

No nos desanimemos, jamás sabemos...

Tratemos los elementos sucesivos de Z/7Z. En la ecuación $\mathbf{y^2 - y - 1 = 0}$.

y = 0 no conviene ; y = 1 no conviene;

y = 2, tenemos $4 - 2 - 1 \neq 0$;

y = 3, tenemos $9 - 3 - 1 = 2 - 3 - 1 = 5 \neq 0$;

y = 4, tenemos $16 - 4 - 1 = 4 \neq 0$

y = 5, tenemos $25 - 5 - 1 = 5 \neq 0$

y = 6, tenemos $36 - 6 - 1 = 1 \neq 0$.

El número de oro pues no existe en Z / 7Z. Remarca 7 tradicionalmente es "un número sagrado" dentro de la numerología.

El caso de los enteros módulo 11

Antoine Chambert-Loir, en su artículo citado más alto, nos propone estudiar la ecuación del número de oro en conjunto de los enteros módulo 11: Z/11Z.

La adición se efectúa, como en los enteros módulo 7 pero hay ahora 11 elementos, numerados de 0 a 10.

La multiplicación presenta las mismas características que la multiplicación módulo 7, en particular todo elemento admite un inverso para la multiplicación lo que es debido a que 7 y 11 son números primos.. Les pedimos a los alumnos construir la tabla de multiplicación sólo con el fin de instalar bien estas técnicas de cálculo y de razonar en un contexto inhabitual.

En primer lugar, tratemos como anteriormente de buscar si la raíz de 5 existe en este conjunto. ¿Es decir existe un número que multiplicado por si mismo da 5? Comprobamos que:

$4^2 = 5$ y $7^2 = 5$ pues: el número 5 módulo 11 admite dos raíces opuestas. Observemos que ambos números enteros 4 y 7, (4 + 7 = 0 módulo 11) son opuestos y que esta propiedad algébrica es general: existen bien dos raíces de 5.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
4	8	1	5	9	2	6	10	3	7
5	10	4	9	3	8	2	7	1	6
6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
7	3	10	6	2	9	5	1	8	4
8	5	2	1	7	4	1	9	6	3
9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Como en el conjunto de los números enteros relativos hay dos raíces, decidimos en éstos escoger la raíz positiva pero en $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ esto no tiene sentido ya que todo número es a la vez positivo y negativo (es un **orden circular**).

$\frac{1+4}{2}$ y $\frac{1+7}{2}$ convienen ; sea $\frac{5}{2}$ y $\frac{8}{2}$..

Pues vamos a verificar si por lo menos una de las soluciones conviene: Busquemos cuál es el número que multiplicado por 2 da 5, es 8.

¿El número de oro en el conjunto de los números enteros módulo 11 es 8?

Debemos buscar si 82 - 8 - 1 = 0 sea 9 - 8 - 1 = 0, lo que es verificado.

El número de oro módulo 11 es 8.

Estudiemos la segunda solución 8/2.

Nuestro primer movimiento nos incita a poner 8/2 = 4.

Efectuemos el cálculo 42 - 4 - 1 = 5 - 4 - 1 = 0 esta solución conviene. **Un segundo número de oro módulo 11 es 4.**

¿Para consolidar los resultados les pedimos a los alumnos hacer los cálculos para todos los números enteros de Z/11Z.

La existencia de dos números de oro en el conjunto de los enteros módulo 11 nos interpela y nos incita a decir cuestiones interesantes... ¿En primer lugar estos resultados tienen un sentido geométricamente?

¿Podemos imaginar que en Z/11Z hubiera una "divina proporción"?

¿ Por ejemplo observamos el par de número (1; 8), el par siguiente librado por uno secuencia"a la Fibonacci" (es decir una sucesión de Fibonacci generalizado) es (8; 9) está en la misma proporción?

¿Tenemos: 8/1 ≡9/8 (módulo 11)?

Probamos anteriormente que si tres números a, b, c verifican: c = a+b y qué b/a = c/b, esto equivale a: b/a = φ.

Efectuemos el cálculo para verificar esta aserción. Observamos en la tabla de multiplicar módulo 11 que 9/8 = 8, lo que conviene. El "segundo" número de oro módulo 11 es 4.

El primer par es pues (1; 4) el segundo (4; 5), ahora 5/4 = 4, lo que conviene.

Podemos tratar de representar, en este "universo módulo 11", que es lo que se llama un universo "discreto" (es decir opuesto a continuo) una construcción de la espiral de los rectángulos sucesivos de oro.

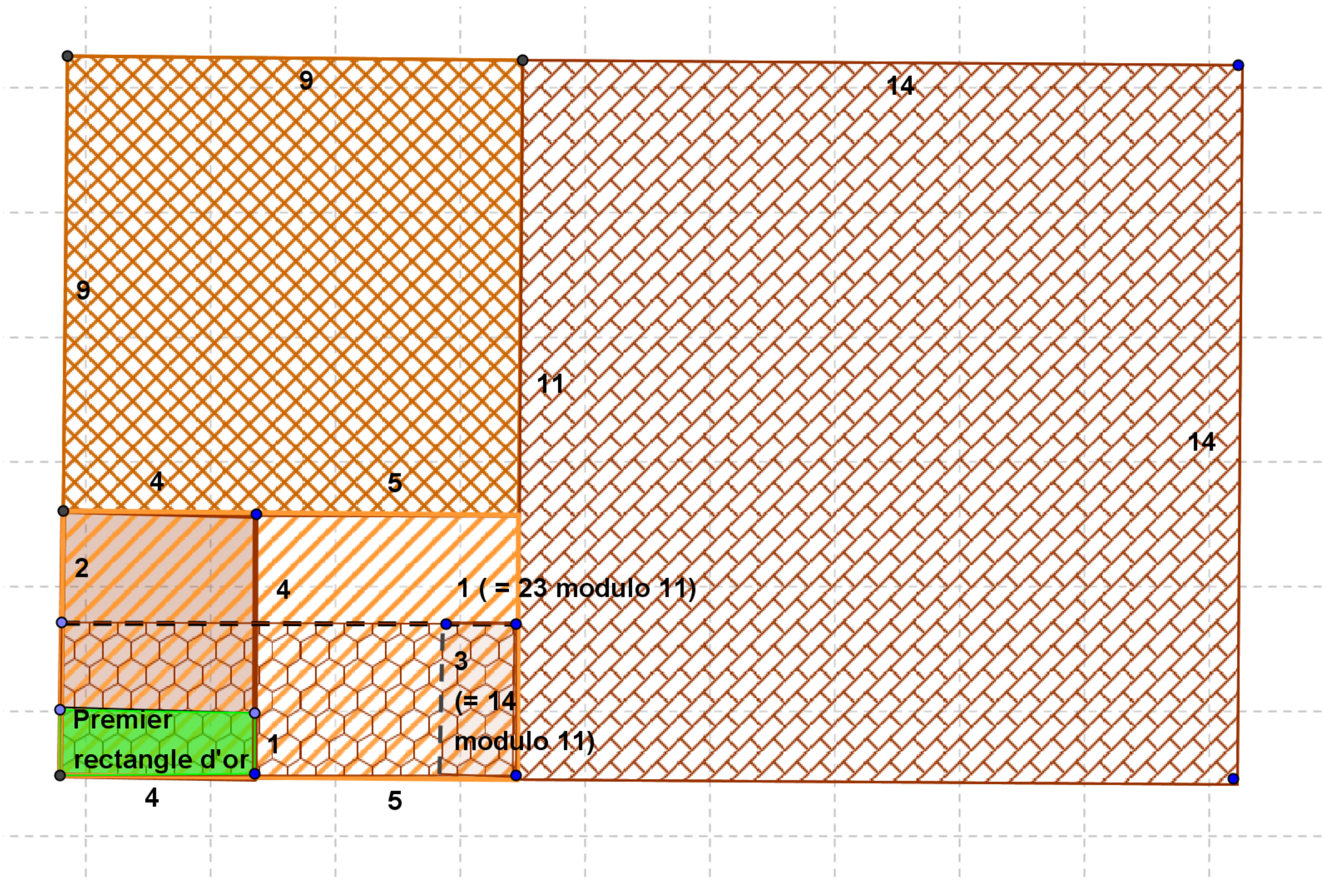
Las "dimensiones" de los rectángulos de oro sucesivos, construidos como en los números reales, como una sucesión de Fibonacci son:

(1 ; 4) ; (4 ; 5) ; (5 ; 9) ; (9 ; 14) igual a (9 ; 3) módulo 11 ; (3 ; 12) sea (3 ; 1) módulo 11 ; (1 ; 4) y encontramos de nuevo el rectángulo de origen

Verificamos que 3/9 ≡ 4 (módulo 11) y que 1/3 ≡ 4 (módulo 11).

Los "rectángulos de oro" tienen sus lados proporcionales al "número de oro módulo 11" sea 4.

Hay pues cinco»rectángulos de oro módulo 11" distintos correspondientes en numero de oro módulo 11 sea 4, son los pares: (1; 4); (4; 5); (5; 9); (9; 3) y (3; 1) recuperamos luego: (1; 4).



Dibujamos en rayas gruesas punteadas los rectángulos de oro módulo 11 "aplastados".
Todos los rectángulos de oro módulo 11 estan inscritos en el rectángulo (5; 9). Observemos ahora el» “número de oro módulo 11": 8.

Los pares de números enteros correspondientes a una sucesión de Fibonacci generalizada son: (1; 8); (8; 9); (9; 6); (6; 4); (4; 10); (10; 3); (3; 2); (2; 5); (5; 7); (7; 1);

Recuperamos luego (1; 8).

VI - Algunas observaciones para los alumnos profesores

No es inocente de haber elegido como nuestros ejemplos de los números enteros módulo un número primo. En efecto mostramos bastante fácilmente que los conjuntos de números enteros módulo p primero se proveen fácilmente de una estructura de cuerpo conmutativo y, de este hecho, se prestan bien a la resolución de las ecuaciones.

¿ De modo general si queremos resolver ecuaciones del segundo grado debemos buscar si un número **a** de Z/pZ es un cuadrado.

Diremos que entonces "**a** es un residuo cuadrático módulo p".

¿Los cuerpos Z/pZ son cíclicos es decir que un elemento por lo menos α εs generador del grupo multiplicativo (Z/pZ^{*}) :

$(Z/pZ^{*}) = \{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, ..., \alpha^{p-2}\}$ et $\alpha^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Tenemos:

Primer teorema

Sea p un número primo impar. Un generador α no es un residuo cuadrático. ¿ En efecto según el pequeño teorema de Fermat tenemos $\alpha^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ pues: $\alpha^{\frac{p-1}{2}} = \pm 1$. pues:. ya que α es un generador, la sola solución posible es: $\alpha^{\frac{p-1}{2}} = -1$.

Suponiendo que α sea un cuadrado entonces existe β tal que $\alpha \equiv \beta^2$ (modulo p) entonces $(\beta^2)^{\frac{p-1}{2}} = \beta^{p-1} \equiv -1 \pmod p$. Pero el pequeño teorema de Fermat dice: $\beta^{p-1} \equiv 1 \pmod p$; Ya que $1 \neq -1$ como $p \neq 2$, entonces α no es un cuadrado modulo p.

Segundo teorema En un cuerpo Z/pZ los solos residuos cuadráticos son las potencias pares de un generador.

¿ En efecto es claro que los números enteros de la forma α^{2k} son cuadrados, por otra parte sí α^{2k+1} era un cuadrado de la forma u^2 tendríamos: $\alpha = u^2 / \alpha 2k$ y α sería un cuadrado lo que no es.

Estudiamos de nuevo lo que hemos estudiado más arriba

¿Vimos que 5 admite dos raíces cuadradas en Z/11Z : 4 y 7 o -4 lo qué parece por lo menos sorprendente porque 5 no parece ser una potencia par de un generador! ¿Observemos en primer lugar que 11 siendo primero Z/11Z es un cuerpo cíclico pues su grupo multiplicativo admite un generador. ¿Por ejemplo 2 es generador? Verificámoslo:

$2^2 = 4$; $2^3 = 8$; $2^4 = 16 = 5 \bmod 11$; $2^5 = 32 = 10 \bmod 11$; $2^6 = 64 = 9 \bmod 11$;
$2^7 = 128 = 7 \bmod 11$; $2^8 = 256 = 3 \bmod 11$; $2^9 = 512 = 6 \bmod 11$;
$2^{10} = 1024 = 1 \bmod 11$.

Todos los números enteros módulo 11 pueden expresarse como una potencia de 2.

Observamos en la tabla de multiplicación que 5 = 2 x 8 = 16 = 24. Lo que nos satisface...

¿Trazamos una raya sobre la tabla de multiplicar de Z/11Z con el fin de materializar la diagonal: los cuadrados se encuentran sobre ésta, son

1, 3, 4, 5, 9.

Tenemos $1 = 1^2 = 10^2$; $3 = 5^2 = 6^2$; $4 = 2^2 = 9^2$; $5 = 4^2 = 7^2$; $9 = 3^2 = 8^2$.

Verificamos que estos cuadrados salvo 1 son potencias pares de 2:

$4 = 2^2$; $3 = 4 \times 9 = 2^2 \times 2^6 = 2^8$; $5 = 2 \times 8 = 2^4$; $9 = 8 \times 8 = 2^6$.

¿**Recíprocamente**, existen unos números enteros en Z/11Z quiénes no son cuadrados perfectos? (Aparte 2 que es generador no puede ser un cuadrado). Son otros números: 2, 6, 7, 8 este último es una potencia impar de 2.

Una observación a propósito de los "rectángulos de oro módulo 11" que calculamos anteriormente, observamos que tenemos solamente 5 rectángulos correspondientes de oro al "número de oro módulo 11": 4 mientras que tenemos 10 rectángulos correspondientes de oro al "número de oro módulo 11": 8. ¿Cómo explicar esta diferencia?

Nuestra intuición nos sopla que esto es debido al hecho de que 4 no es un generador módulo 11 porque es un cuadrado mientras que 8 es generador (verifíquelo).

Observemos ahora el caso donde p es primo diferente de 7 y de 11.

Ya que trabajamos en anillos Z/pZ con p primero, todo elemento no nulo admite un elemento inverso para la multiplicación, ningún elemento divide cero 0 salvo 0, este anillo íntegro, es un cuerpo. La ecuación que define φ tiene pues siempre un sentido porque -1, 0, 1 existen en estos cuerpos. **Repitamos nuestras observaciones precedentes.**

Observamos que 5 no admite raíz cuadrada en Z/7Z mientras que tiene dos en Z/11Z.

Escribamos la diagonal de la tabla de multiplicar módulo 13, con el fin de obtener todos los cuadrados luego verifiquemos el resultado indicado anteriormente:

Los únicos residuos cuadráticos son las potencias pares de un generador. Para simplificar tomemos el generador 2 si existe ya que p> 2.

Escribamos la sucesión de los cuadrados de los números enteros módulo 13.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Cuyo cuadrado es: 1 4 9 3 12 10 10 12 3 9 4 1 (módulo 13).

Tenemos: $4 = 2^2$; $9 = 3^2$ ahora $3 = 16 = 2^4$ módulo 13;

$3 = 4^2$; $12 = 5^2 = 4 \times 3 = 2^2 \times 4^2 = 2^6$; $10 = 7^2 = 2 \times 5 = 2 \times 2^3$ (porque $5^2 = 2^6$),

¿ Los números siguientes de la diagonal son los mismos en orden invertido puede decir por qué?

Respuesta: porque son los inversos de los primeros números de la diagonal, módulo 13.

Resolución del problema chíno

Tenemos un número desconocido de cosas. Si las contamos por tres, quedan dos; si las contamos por cinco quedan tres, si las contamos por siete, quedan dos.

Encontrar el número de estas cosas.

Tenemos pues, si anotamos a el número de las cosas: $a = 2 \bmod 3$; $a = 3 \bmod 5$; $a = 2 \bmod 7$.

Escribemos estas ecuaciones eliminando a la desconocida a tenemos: $2 \bmod 3 = 3 \bmod 5 = 2 \bmod 7$ o todavía: $2 + 3r = 3 + 5s = 2 + 7t$ donde r, t están enteros que podemos escoger positivos.

Deducimos de eso: $3r = 7t$; ya que 3 y 7 son primeros entre ellos deducimos de eso que 3 divide t y 7 divide r; r = 1 y = 1 no convienen, tratemos t = 3 y r = 7

Ahora $3 + 5s = 23$; $s = 4$.

Tenemos $a = 23 = 3 \times 7 + 2 = 4 \times 5 + 3 = 7 \times 3 + 2$.

Tenemos 23 cosas

Les invitamos ahora

En encontrar al Pentáculo Celeste…(*)

- **Es decir pentágonos convexos celestes y pentágonos estrellados celestes.**

Capítulo V-1

Definición y propiedades sucintas de los Pentágonos Celestes

por Jean-Pierre Le Goff, Ruben Rodriguez, Danielle Salles

Introducción

Este artículo corto nos ha sido solicitado por los responsables de la base de datos: PUBLIMATH para su glosario con el fin de servir de introducción a nuestro artículo "Para el encuentro del pentágono celeste" presentando la nueva noción de pentágono celeste, que aparece en el "Miroir des Mathématiques", periódico del I.R.E.M. de Basse-Normandie. Usted encontrará este artículo detallado en el capítulo siguiente.

Nivel: liceo, alumnos profesores, formación continua de profesores y aficionados advertidos.

I - Construcciones, definiciones y propiedades de los Pentágonos y Las cruces Celestes por Ruben Rodriguez y Danielle Salles

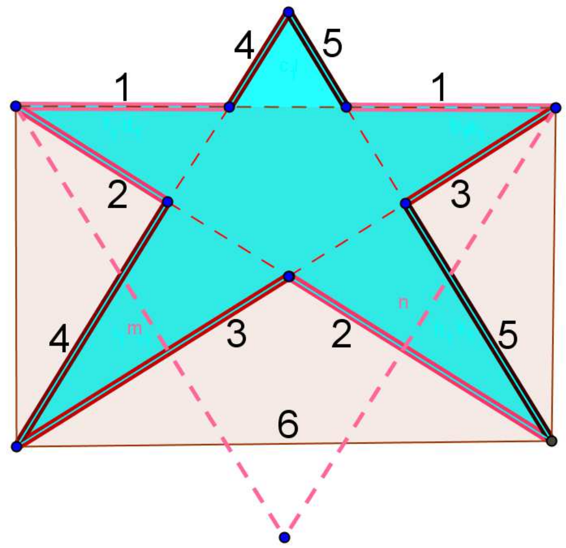
Para definir una figura geométrica tenemos dos posibilidades complementarias:

Por una parte podemos presentar una sucesión de etapas de la construcción de la figura(, (lo que es nombrado "programa de construcción" en la didáctica de la geometría), y por otra parte podemos dar un conjunto de propiedades necesarias y suficientes para que la figura geométrica que las verifica sea el "pentágono celeste" (a una similitud plana cerca), (lo que se nombra en didáctica de la geometría una "descripción" de la figura, más difícil para los alumnos, a causa del carácter "necesario y suficiente").

Elegimos para nuestros lectores un trayecto que nos parece más pedagógico que va de una presentación de ambas construcciones posibles hasta la enumeración de las principales propiedades.

Podemos definir en primer lugar un "Pentágono celeste estrellado" sin nombrar los vértices, de un “modo literario”.

Le aconsejamos jugar - o hacer jugar- a sus alumnos que construyen los pentágonos celestes con esta definición, escondiendo el dibujo, para eventualmente, mejorar ésta.
Tan enunciando la definición debe permitir, para todo rectángulo de oro, construir dos pentágonos estrellados.



Definición que hay que proponer sin los números.
Un pentágono celeste estrellado es un pentágono tal que:

a) Dos lados son llevados por uno de los grandes lados de un rectángulo de oro (n°1).
b) cuatro lados son llevados por las diagonales de este rectángulo de oro (numeros 2 y 3).
c) las cuatro otros lados son llevados por dos rectas ortogonales a cada una de las diagonales (numeros 4 y 5), salidas de ambas vértices del segundo gran lado del rectángulo de oro (n° 6). **(Hay otra solución en punteados rojos).**

a) Primera construcción matemática de los pentágonos celestes: convexo y estrellado
¿ Sea ACEI un rectángulo de oro de lados de longitud a y aφ cuyas diagonales se encuentran sobre B. Llamamos J y D los proyectados ortogonales respectivamente de los puntos A y C sobre estas diagonales. La semi-recta [AJ) encuentra al segmento [IE] sobre H, la semi-recta [CD) encuentra el segmento [IE] en F.

Llamemos G el punto de encuentro de [AJ) y [CD). Entonces decimos que:

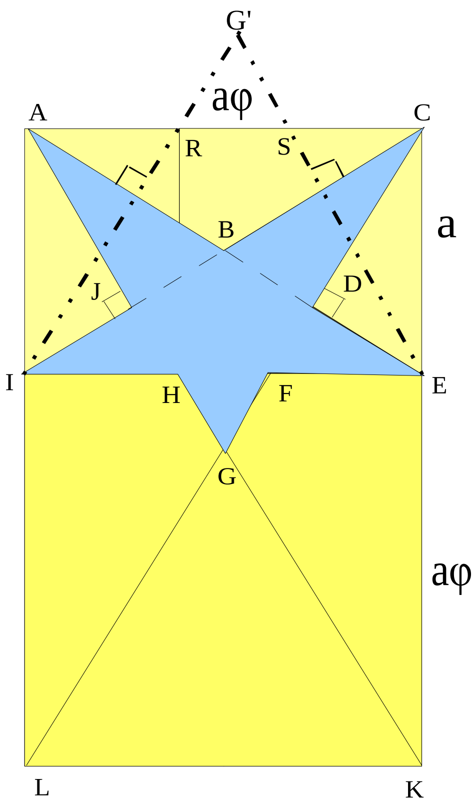
El pentágono ACEGI es un **«Pentágono convexo celeste»** y que

El pentágono ABCDEFGHIJ es un **«Pentágono estrellado celeste».**

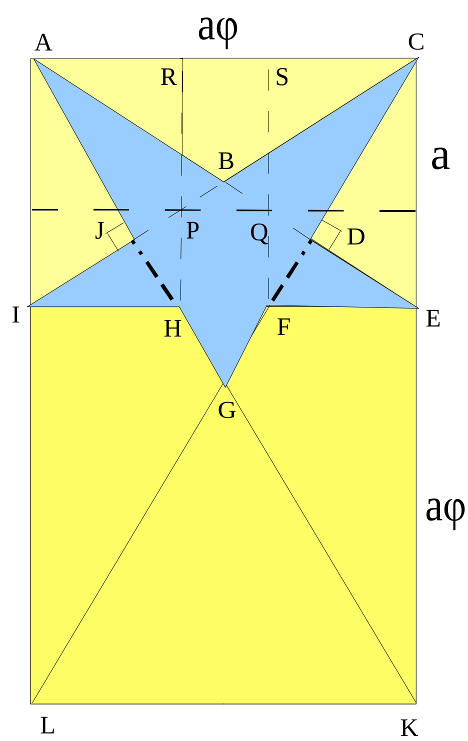
b) Propiedades de esta construcción

Entonces las propiedades siguientes son verificadas:

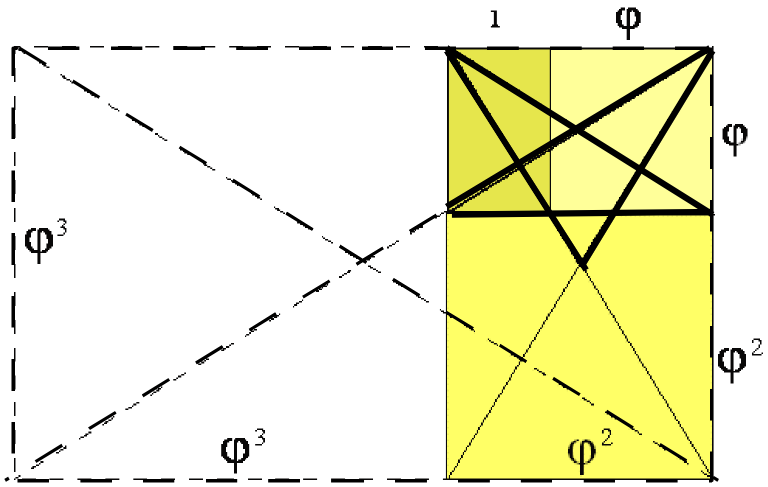
- Los puntos A, I, H son los vértices de un rectángulo de oro de lados de longitud:
a y $a\varphi^{-1}$
- Los puntos C, E, F son los vértices de un rectángulo de oro de lados de longitud:
a et $a\varphi^{-1}$.
- Los puntos I, H, P son los vértices de un rectángulo de oro de lados de longitud:
$a\varphi^{-2}$ et $a\varphi^{-1}$.
- Los puntos E, F, Q son los vértices de un rectángulo de oro de lados de longitud:
$a\varphi^{-2}$ et $a\varphi^{-1}$.
- El rectángulo ACKL de centro G es un rectángulo de oro de lados de medidas $a\varphi$ et $a(\varphi+1) = a\varphi^{2}$.Vea los rectángulos de oro completados en la segunda figura página siguiente)



¿Los puntos AJHPI forman una cruz y las medidas de los lados son los primeros términos de una sucesión de Fibonacci generalizada, la que es una sucesión geométrica de razón φ. Decimos que esta cruz es una **"cruz celeste".**



c) La segunda construcción de los pentágonos celestes
Consideremos el rectángulo de oro elemental de lados de medida 1 y φ (En amarillo obscuro sobre la figura siguiente.
Construyamos, a lo largo de un lado de medida φ un cuadrado (en color amarillo medio).
Entonces la figura formada del primer rectángulo de oro sin el del cuadrado es **un nuevo rectángulo de oro** de medidas φ y $\varphi + 1 = \varphi^2$.
Si se hace de nuevo el proceso precedente, siempre con el cuadrado de lado el ancho del rectángulo, obtenemos lo que generalmente llamamos **la espiral de los rectángulos de oro**.

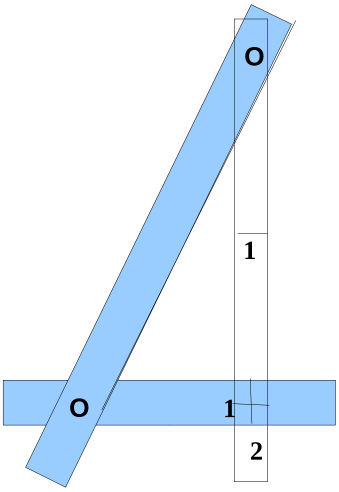


Las diagonales de dos rectángulos sucesivos de oro así como un lado del primero forman entonces **el Pentágono celeste estrellado que trazamos en grueso.**

Indicamos en punteados un bosquejo del pentágono celeste que sigue las etapas de la espiral (es recorrido en el sentido de las agujas de un reloj).

d) Una propiedad notable de esta sucesión de construcciones de rectángulos de oro

Por razones de proporcionalidad de las medidas de los rectángulos sucesivos de oro, ciertas diagonales que pertenecen a rectángulos diferentes son dirijidas por el mismo eje, vea la figura más arriba.



Ambas diagonales del mismo rectángulo de oro forman un ángulo agudo de tangente igual a 2, este ángulo mide 63,4° al décimo de grado lo que permite construir fácilmente los rectángulos de oro de centro dado y pasando por un punto dado, lo que puede ser útil en arquitectura utilizando por ejemplo una escuadra falsa (instrumento de madera o metal, articulado alrededor de un eje, que permite trasladar un ángulo no necesariamente recto, figurado aquí en azul o griseado).

Observación: Las diagonales de los rectángulos sucesivos de oro forman una sucesión creciente geométrica de razón φ, esta propiedad nos permite enunciar una propiedad numérica de los pentágonos estrellados celestes (condiciones necesarias).
Las longitudes de sus diagonales son:

$$a\varphi \;;\; a\sqrt{\varphi^2+1} \;;\; \frac{a}{2}\varphi\sqrt{\varphi^2+1} \quad \text{o} : a\varphi \;;\; a\sqrt{\varphi+2} \;;\; a\frac{\varphi}{2}\sqrt{\varphi+2}.$$

Donde **a** es un parámetro real positivo.
Si multiplicamos a por φ obtenemos las medidas de las diagonales del pentágono celeste que sigue en la espiral de los rectángulos de oro.
Para una exposición detallada de las propiedades de los pentágonos celestes vea el capítulo V-2.
e) Condiciones necesarias y suficientes para que un pentágono sea celeste (ver la primera construcción)
1) Cuatro de sus vértices entre cinco sean los vértices de un rectángulo de oro ACEI.
2) El quinto vértice G se encuentra en la intersección de las semi-rectas ortogonales [AG) a la diagonal [CI] y [CG) a la diagonal [AE]. (Vea también nuestra construcción de introducción.)

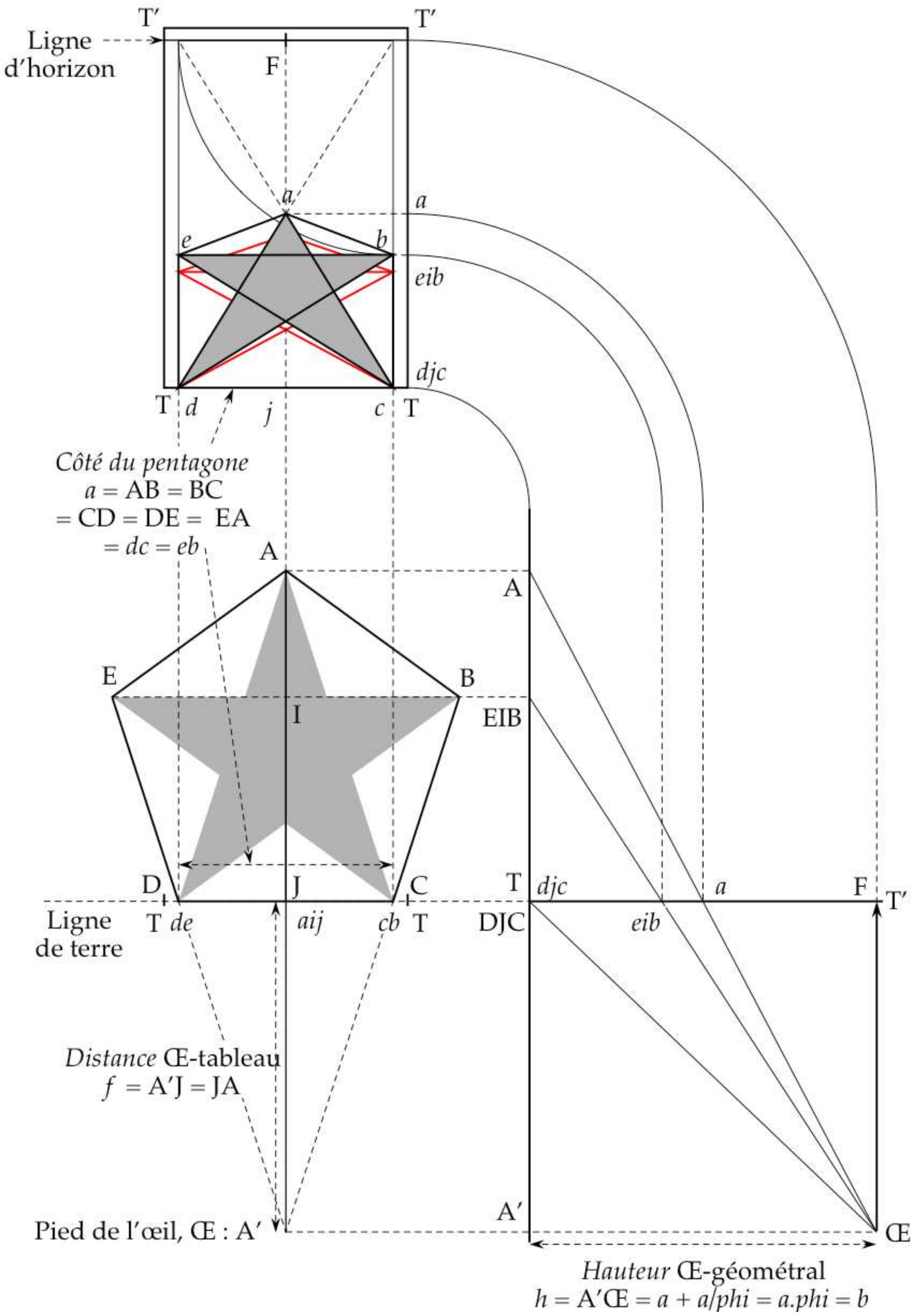
La observación de las propiedades de los pentágonos celestes estrellados que se **parecen a pentágonos regulares "vistos de lejos"** nos incitó a proponerle el estudio a nuestro colega Jean-Pierre Le Goff del equipo "Historia de las ciencias" del I.R.E.M. de Basse-Normandie, de un punto de vista histórico y deobservación en perspectiva. Le entregamos ahora un resumen de sus bellosresultados y comentarios.

II - ¿El pentacle celeste, formado de los pentágonos celestes estrellados y convexos, podría ser la imagen por perspectiva central de un pentáculo regular? Por Jean-Pierre Le Goff

Esta cuestión nos da la ocasión de abordar algunos aspectos históricos y heurísticos de un dominio un poco perdido de vista: la geometría dicha “sobre situación” y propiedades proyectivas de las figuras.
En efecto, el resultado que más sorprende en cuál acaba el estudio de Danielle y Ruben sobre el pentágono celeste estrellado es que el pentáculo celeste (conjugación de los pentágonos celestes convexos y estrellados) es la imagen perspectiva de un pentáculo regular.
Este resultado, podría ser una definición principal de este objeto.
Si es bastante simple concebir que un pentágono (que sea convexo o estrellado) pueda ser la imagen de un pentágono regular (convexo o estrellado, respectivamente), y si la teoría proyectiva permite concebir que se trata, por ejemplo, de una extensión del teorema de Poncelet sobre las perspectivas de cuadriláteros planos y\o de tetraedros, es decir de un caso particular de los teoremas sobre las imágenes perspectivas de figuras poligonales planas o no, queda que la existencia de soluciones no debe enmascarar el hecho de que la construcción y\o la exhibición de un pentágono regular (pues un pentáculo) cuya imagen sea el pentágono celeste convexo (pues del pentáculo celeste estrellado) no son inmediatas y triviales.
Las vías heurísticas de esta construcción dan la ocasión de rencontrar la memoria de algunas propiedades poco conocidas, aunque elementales, de la geometría perspectiva de los polígonos y de las cónicas.
Es pues la vía heurística que será tomada y expuesta: ¡ello permite comprender dónde el geómetra va a buscar las soluciones!

Además, **es una historia del pasaje de la geometría de las configuraciones a la geometría de las transformaciones -** quienes "verdaderamente" transforman, es decir que modifican la forma y el reconocimiento que será esbozado: el lector será invitado a (ré-) enterarse de lo que son la proyección doble vitruviena y la visión arguesiena del círculo que engendra las cónicas.
En cuanto a darse cuenta de este resultado, dos imágenes bastarán (¿posiblemente?): una quemuestra que la construcción de una perspectiva central puede siempre ser conducida a partir del conocimiento de dos proyecciones ortogonales: así es como **Gaspar Monge** enseñaba la perspectiva central a partir de su geometría descriptiva al fin del XVIII y al principio del siglo XIX. Se repetirá así la idea primitiva del arquitecto italiano **Filippo Brunelleschi**,

hacia 1420, que inventó la perspectiva central no empírica coordinando las informaciones abastecidas por el plano y la elevación espacial que reagrupará sobre el mismo geometral (el plano en el suelo) el "sujeto perspectivo" (el ojo puntual Œ del “observador ciclópeo” reparado por encima del suelo y frente al cuadro), el plano DCGH del cuadro erigido a la vertical del suelo y el objeto visto (punteado, figura plana o sólida, aquí pentágono ABCDE en el suelo) situado más allá del cuadro con respecto al ojo observador.
Estas proyecciones ortogonales, el Renacimiento las debe al arquitecto Vitruvio, contemporáneo de César (Ier el siglo a. C.), que define la proyección vertical sobre un plano horizontal - y se lo escribe- proyección ortogonal sobre un plano vertical - en su tratado de arquitectura redescubierto en este período de neoplatonismo, al que **Leon Battista Alberti** dará una versión en 1452 y será impreso numerosas veces después de la invención de Gutenberg al fin de “Quattrociento”.
Los radios visuales proyectivos nacidos de Œ atraviesan el cuadro en puntos *X* que son definidos como las imágenes perspectivas de los puntos X del objeto.
El pentáculo ABCDE se vuelve *abcde* en la figura 1 donde se ve el cuadro colocado comparado con las vistas superiores y comparado con el perfil; y *ABCDE* en la figura 2, donde se ve el cuadro erigido por encima del plano geometral.
Es gracias al levantamiento de las "señas" (no en el sentido de Descartes, pero en el sentido de medidas que se pueden medir al compás) que se puede conocer la posición de un punto imagen en el cuadro. Las desviaciones se leen sobre la línea DC o TT del cuadro con vistas a la parte superior (donde J sirve de origen) y sobre la línea TT', vista por perfil del mismo cuadro (donde T sirve de origen).
En una posición cierta de Œ, determinada por su distancia A'J del cuadro y su altura ŒA ' por encima del suelo, la imagen del pentáculo regular ABCDE "se "hace un pentáculo celeste *ABCDE* construido a partir del rectángulo de oro *CDHG* (con $CD = a$ y $DH = b = a.\ \varphi$).
Las condiciones “ad hoc” serán explicadas en el artículo que aparece gracias a consideraciones que salen de la teoría de las proporciones en el primer caso: la posición de A' es conocida por el hecho de que debe encontrarse en el plano neutro (paralelo al cuadro y pasando por Œ) para que las imágenes de (ED) y (BC) sean paralelas en el cuadro, lo que induce que A ', (pie del observador) se encuentra en la intersección de (ED) y (BC).
En un segundo caso, estas condiciones se obtienen a partir de la teoría de las cónicas: en efecto el círculo circunscrito en el pentágono regular tiene como imagen una elipse circunscrita en el pentágono regular que se encuentra definido totalmente por cinco puntos como es clásico para todas las cónicas del plano..



En el geometral, en matiz gris, el pentágono cruzado ACEBD dentro del pentágono regular ABCDE. En el cuadro TTT'T', en matiz gris, la *imagen acebd* de ABCD, que es bien un pentágono celeste estrellado, ya que: $h = b = a.\ \varphi$. En rojo, uno de los pentágonos-imágenes obtenidos cuando se hace una elección arbitraria de h.

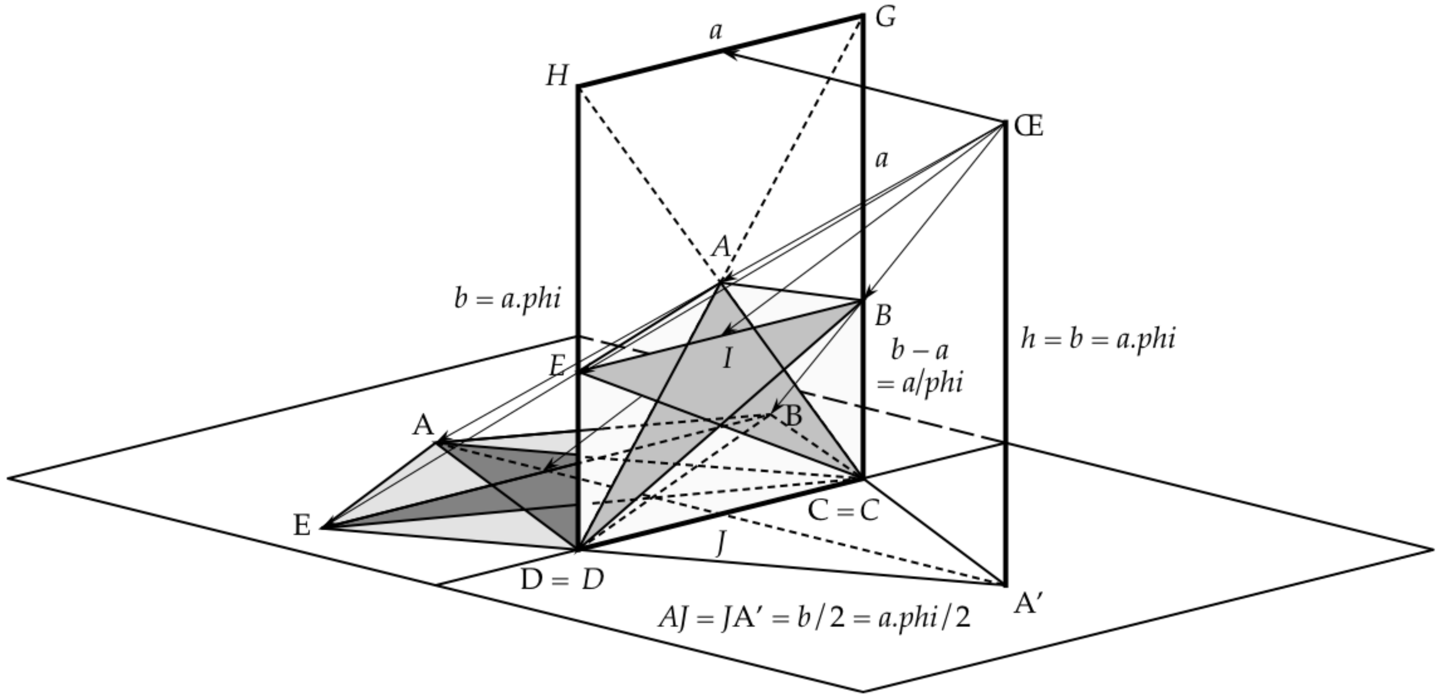
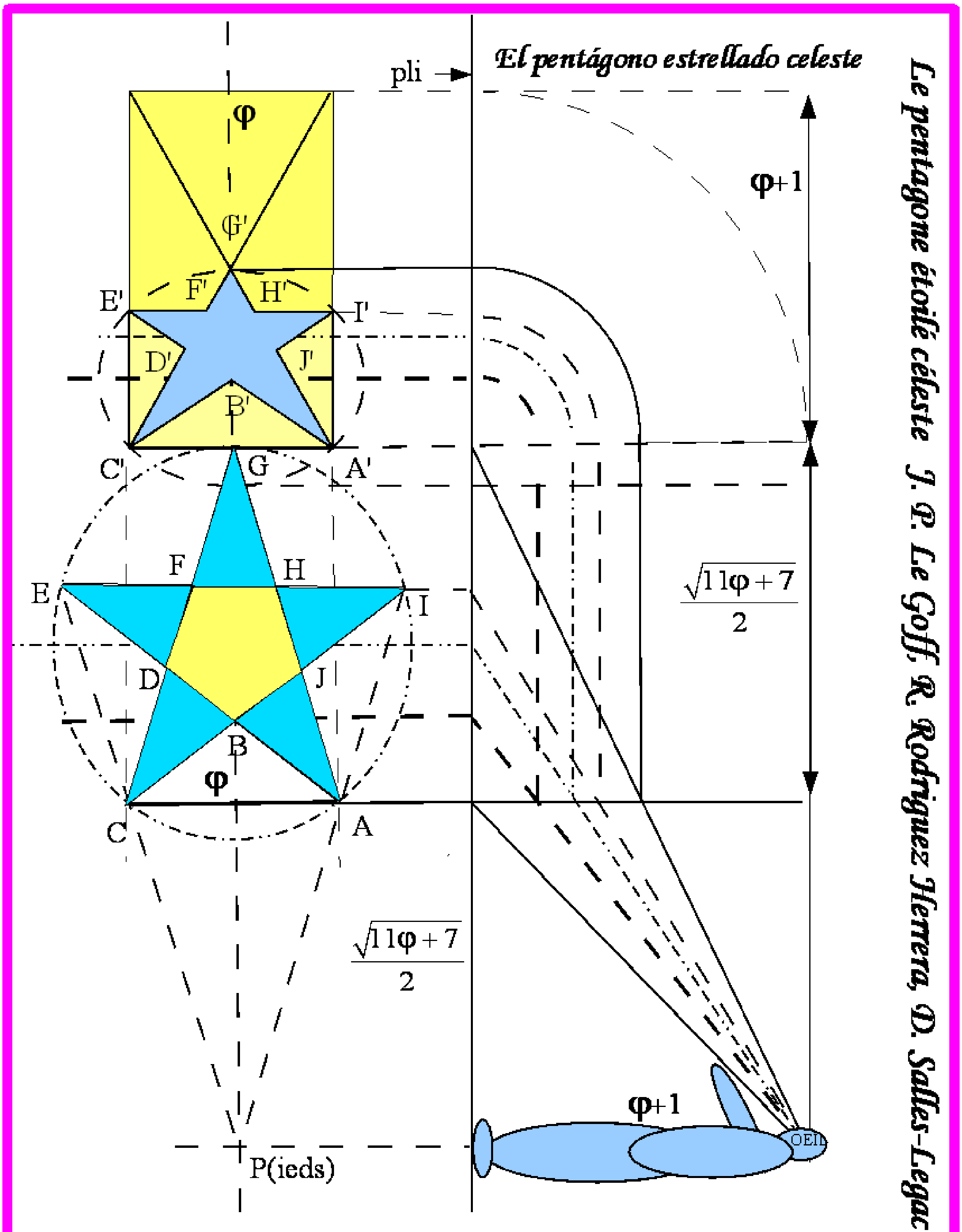


Figura 2

Ruben Rodriguez y Danielle Salles le proponen en las páginas que siguen una reactivación de la figura n°1 de Jean-Pierre Le Goff bajo la forma de un cartel reproducible y plegable a lo largo del eje que pasa por los centros del pentáculo y a lo largo del eje AA ' que permite observar, verticalizando la hoja plegada, los radios visuales del observador.

Este pequeño cartel les ha sido propuesto a los visitantes de nuestra exposición con ocasión de los cuarenta años del I.R.E.M. de Basse-Normandie.



I.R.E.M. de Basse-Normandie Caen France 2013

.

He aquí el texto que pusimos detrás del cartel:

Este cartel puede ser plegado con el fin de mostrarse cómo los pintores de cuadros del XVI siglo construían sus imágenes en perspectiva. Haga un pliegue en exterior (" pliegue montaña ") sobre toda la hoja de arriba a abajo sobre la línea que va a lo largo de los pies del observador azul que se encuentra abajo a la derecha. Repliegue una vez más la hoja en la dirección de su longitud con el fin de traer el primer pliegue sobre la derecha puntillada que pasa por los puntos G ', B ', G, B, P(ies),

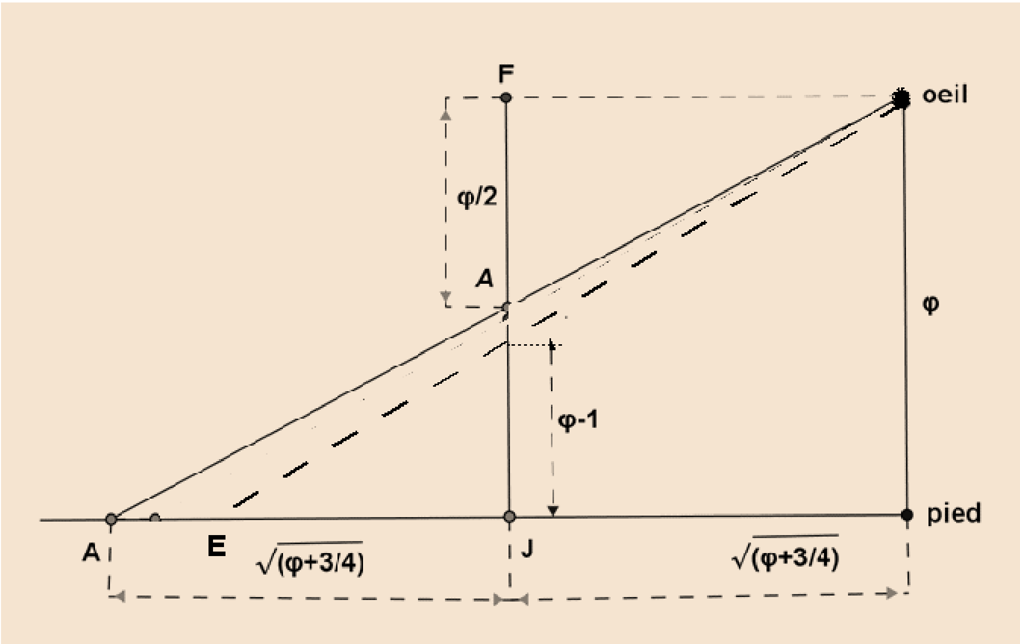
Aplaste el pliegue. Esto hace un pliegue llano o "de modista". Los pies del observador deben encontrarse P(ies). Verticalmente enderece la parte derecha del cartel.

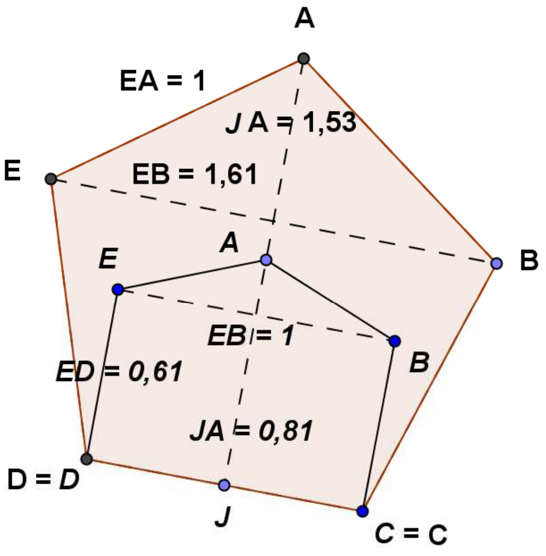
Entonces, por los transportes de las longitudes por los arcos de círculo, usted puede observar cómo hay que dibujar el pentágono turquesa visto en perspectiva, si es representado por ejemplo en decorado del suelo “a la italiana” sobre una pintura.

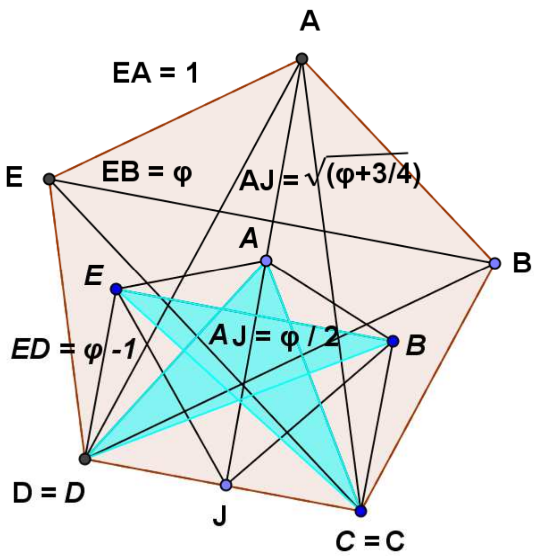
He aquí, por ejemplo una pintura de Rafaël "La escuela de Atenas" acabada en 1512, expuesta en el Vaticano. Usted puede observar el dibujo del pavimento horizontal al primer plano y la sucesión de las bóvedas del edificio.

He aquí ahora una vista de perfil de la situación de la figura n°2 donde supusimos que el lado del pentágono regular convexo tenía como medida a = 1.

Debajo el pentágono regular convexo de origen representado en el plano y el pentágono celeste convexo obtenido por la perspectiva calculada por Jean-Pierre.
A la derecha el pentágono estrellado regular y el pentágono estrellado celeste.
A la derecha el pentágono estrellado regular y el pentágono estrellado celeste.







Estas dos representaciones responden al principio didáctico:
La variación de los universos de representación de un mismo fenómeno ayuda a su comprensión y aprendizaje.

Capitulo V-2

Al encuentro de la cruz y del pentágono celestes

por Ruben Rodriguez Herrera y Danielle Salles-Legac

Actividades de descubrimiento para los alumnos profesores, los alumnos de segundaria superior y los aficionados de matemáticas lúdicas

Este capítulo puede ser leído independientemente del precedente

Abstract: we present here with new results and activities about a very ancient subject: the Golden Number. When constructions of Golden Rectangles are studied, it is natural to observe the succession of their diagonals. The figures show the existence of an exiting pentagon, not regular but really esthetic. We have named it “the **Celestial Pentagon**” in memory of the South Cross visible in the sky of the south hemisphere where Ruben Rodriguez is born. It is well known that many connections between Fibonacci sequences and the succession of the Golden Rectangles exist.
We give the exact algebraical measure of the trigonometric lines of the angles of the celestial pentagon, then we prove that the branches of what we call the “**Celestial Cross**” have many fine properties similar to the Fibonacci sequences ones. These activities are of different levels of difficulty and can be presented to future teachers as well as to seventeen years old students.

Resumen: *les presentamos nuevos resultados y actividades al rededor de un muy antiguo sujeto: el “Numero de Oro”. Cuando estudiamos diferentes construcciones del rectángulo de oro es natural de observar la sucesión de sus diagonales. Las figuras muestran un muy interesante pentágono que no es regular pero realmente estético. Lo hemos llamado el “Pentágono Celeste” recuerdo a la Cruz del Sur que se vé en el cielo del sur-hemisferio donde nació Ruben Rodriguez Herrera.*
Es bien conocido que hay muchas conexiones entre las series de Fibonacci y las sucesiones de los rectángulos de oro.
Calculamos el valor algébricó de las lineas trigonométricas de los ángulos de los pentágonos celestes y de sus lados. Despues probamos que los brazos de lo que llamamos la “Cruz Celeste” tienen muchas propiedades de las series de Fibonacci. Estas diferentes actividades son de variada dificultad, entonces pueden ser propuestas a los estudiantes a partir de diez y siete años, y también a los estudiantes profesores.

Introducción

El número de oro y su espiral geométrica y algébrica: rectángulo de oro, pentágono regular y otros sucesiones de Fibonacci no acabaron de “vaciar los tinteros” como lo muestran por ejemplo los cuatro artículos "Actividades alrededor del número de oro" puesto en línea recientemente por uno de nosotros a petición del rectorado de la academia de Caen. (Vea el capítulo I que es una versión más reciente de estos textos).

En este capítulo le **presentamos temas de actividades alrededor de propiedades descubiertas por Ruben Rodriguez-Herrera** en esta ocasión esperando para que diviertan a los alumnos e inspiren al profesor. Este artículo será seguido por el segundo de Jean-Pierre Le Goff que presentará un aspecto histórico y sobre todo heurístico de este "nuevo objeto geométrico".

¡Le mostramos pues en estos dos artículos cómo aspectos notables de una noción pueden pasar inadvertidos durante más de 2000 años!

El número de oro no acaba de ejercer su fascinación tanto entre los matemáticos como los filósofos o los arquitectos. Nos contentaremos aquí con proponerle algunas observaciones y cálculos a propósito de un **pentágono no regular pero muy particular que llamaremos "pentágono celeste"** que naturalmente aparece cuando se efectúa construcciones de rectángulos de oro. Para justificar esta denominación veremos en primer lugar cómo se traza de modo iterativo rectángulos de oro para construir una espiral rectangular dorada.

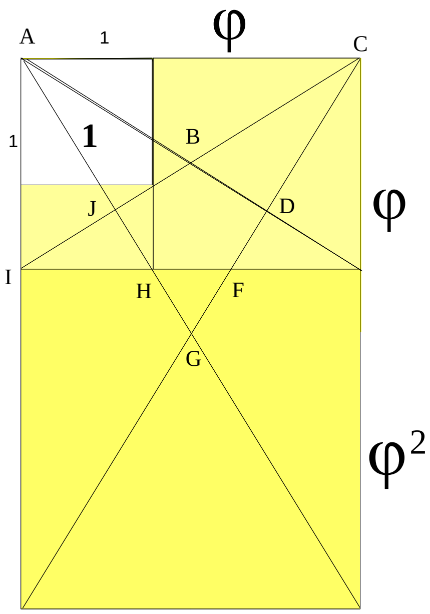
Supongamos que supiéramos construir un rectángulo de oro de lados de medida 1 y φ donde φ es el número de oro: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Los numerosos métodos a la regla y al compás, por pliegues, etc. son bien conocidos, vea por ejemplo los artículos citados precedentemente.

¿ Es fácil construir a partir de un rectángulo de oro de lados de medida 1 y φ el rectángulo de oro "siguiente" de lados de medidas φ et φ^2.

Recordamos la ecuación verificada por φ : $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$

además : $\varphi^{-1} = \varphi - 1.$

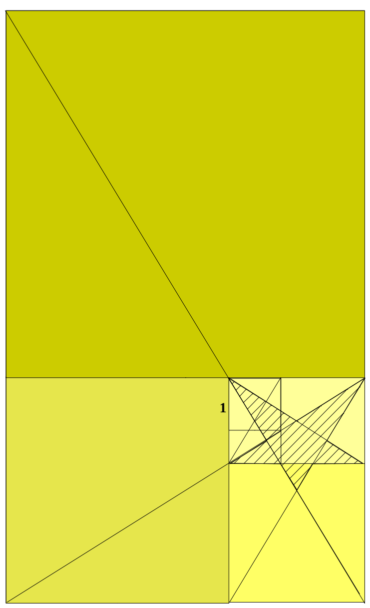


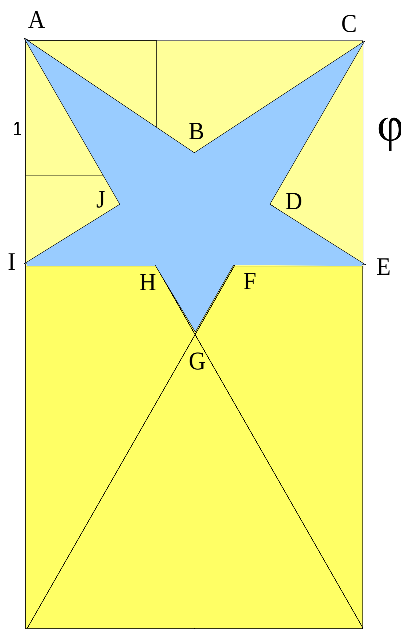
Basta, en primer lugar de añadir al primer rectángulo de oro (en amarillo claro) de lados

1 et φ^{-1} un cuadrado de lado 1.
Se obtiene un rectángulo de oro de lados de medida 1 y φ, porque $\varphi^{-1} = \varphi - 1$,
Luego un rectángulo de lados φ y φ^2 . En efecto, a causa de la ecuación característica de φ tenemos: $\boxed{\varphi^2 = \varphi + 1}$.

Dibujamos así los tres primeros rectángulos de oro con el fin de que aparezca el principio de la espiral rectangular formada por ciertas diagonales de los rectángulos sucesivos. Es interesante observar que estas diagonales respectivamente miden: $\sqrt{2}$; $\varphi\sqrt{2}$; $\varphi^2\sqrt{2}$.

¿Que se deduce de las diagonales de los rectángulos de oro? En la figura siguiente pusimos en evidencia un rectángulo de oro suplementario y en rayado un pentágono no regular formado por las diagonales sucesivas de los rectángulos de oro.
Algunas de éstas son llevadas por la misma recta a causa de la proporcionalidad de los lados sucesivos de los rectángulos de oro (vea los artículos ya citados y el capítulo I).

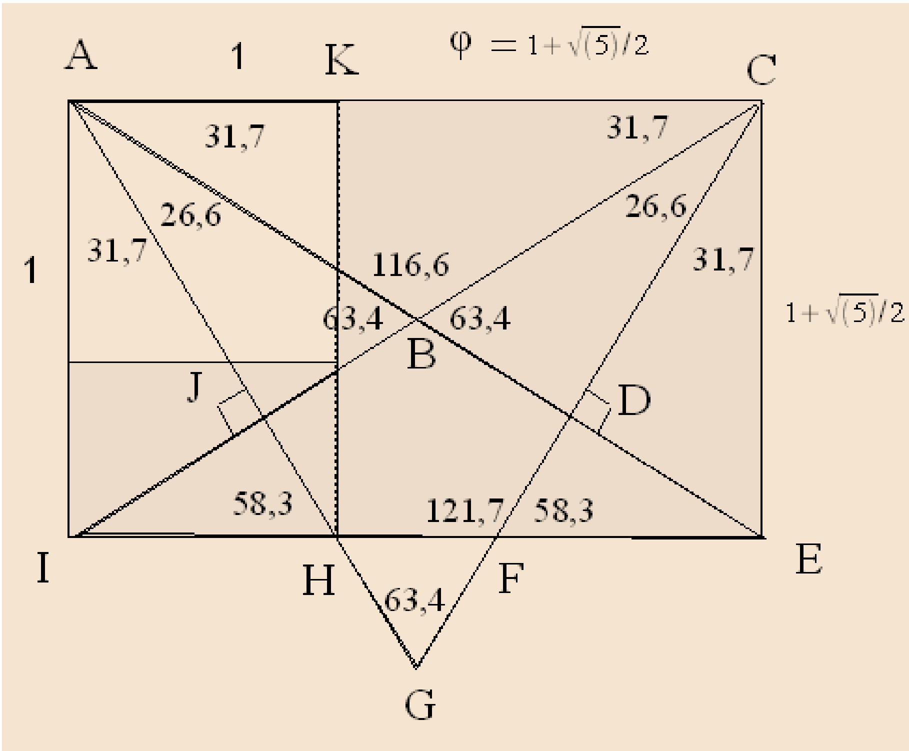




Al mostrar de la figura general las diagonales están llevadas por la misma recta, esta propiedad podrá ser probada en clase con la ayuda del profesor.
El cuadrado 1 considerado es el primer cuadrado, de lado 1, que permite construir el rectángulo de oro de lados: 1 y □̃
Figura aumentada: el pentágono estrellado celeste tiene para vértices A, C, E, G, I y para contorno: ABCDEFGHIJA.

Los numerosos cálculos de niveles variados pueden ser efectuados sobre este pentágono, le proponemos para un nivel "más fácil" el cálculo de sus ángulos, luego otro "más difícil" el cálculo de las líneas trigonométricas de estos ángulos bajo forma algébrica (i.e. con radicales) luego el cálculo de sus lados luego el cálculo de su elipse circunscrita. El profesor podrá así juzgar de esto "hasta dónde los alumnos podrán ir" según su nivel y es aconsejado proponer las actividades en trabajo por subgrupos. Para los más grandes introduciremos la noción de **"Cruz Celeste"** y estudiaremos sus relaciones con la sucesión de Fibonacci.

II – Calculo de las medidas de los ángulos del pentágono estrellado celeste (dificultad media) Aquí algunas propiedades que se pueda observar y calcular



Por definición del número de oro los triángulos que forman los rectángulos sucesivos de oro tienen sus lados proporcionales y ciertas diagonales son llevadas por el mismo eje. Los triángulos iguales (superponibles) AIH, HKA y CEF, pues son semejantes a los triángulos planos IEC, IAC, TENGA y ACE y las diagonales [AG] y [IC] son ortogonales así como [CG] y [AE]. Volveremos en los párrafos siguientes sobre esta propiedad notable.
Deducimos de eso los valores de los ángulos:

- Los ángulos $\widehat{IAH}, \widehat{EAC}, \widehat{ACI}, \widehat{FCE}, \widehat{GAI}, \widehat{GCE}$ son iguales (superponibles) y tienen para medida 31,7 al décimo de grado obtenida por la función (Arco Tan) de la calculadora.

- Los ángulos $\widehat{HAE}$ et $\widehat{FCI}$ son iguales y tienen para medida al décimo: 90 - 2 (31,7) = 26,6;

El ángulo $\widehat{ABC}$ en el triángulo ABC tiene para medida: 180 - 2 (31,7) = 116,6.

- El ángulo $\widehat{GAC}$ tiene para medida 31,7 + 26,6 = 58,3 pues el ángulo $\widehat{AGC}$, en el triángulo AGC tiene como medida: 180 - 2 (58,3) = 63,4.

Podemos pedirles a los alumnos verificar si la calculadora da estos resultados al décimo de grado.

La perpendicularidad de ciertas diagonales de los rectángulos sucesivos de oro nos permite proponer una construcción simple del pentágono estrellado celeste (dificultad media):

- Construir por pliegues o a la regla y compás un rectángulo de oro ACEI;
- Trazar sus dos tipos de diagonal [IC] y [AE] que se encuentran sobre B;
- Llevar por A y C las rectas perpendiculares a estas dos diagonales que se encuentran de sobre G;

Entonces el pentágono estrellado ABCEFGHIJ es celeste, el profesor podrá pedirles a los alumnos describir las propiedades de éste y de anotar a los.

- **III - Cálculo de las líneas trigonométricas exactas de los ángulos del pentágono estrellado celeste para los alumnos del liceo**
-
- Calculemos en primer lugar las longitudes de las diagonales del rectángulo de oro AKHI.

Tenemos: $$AH^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1 = \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) + 1 = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) \cong 1,9.$$

Entonces en el triángulo rectángulo AIH tenemos (**los ángulos notados en grados**):

$$\sin^2 31,7 = \frac{1}{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{2}{5+\sqrt{5}} = \frac{2(5-\sqrt{5})}{20} = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \quad \text{y} \quad \sin 31,7 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

porque el seno de un ángulo agudo posítivo es posítivo.

$$\cos^2 31{,}7=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}=\frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}=\frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}=\frac{(3+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{20}=\frac{10+2\sqrt{5}}{20}=\frac{5+\sqrt{5}}{10} \text{ y}$$

$\cos\ 31{,}7=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ porque el coseno de un ángulo agudo posítivo es posítivo.

$$\tan^2 31{,}7=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\times\sqrt{\frac{10}{5+\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})^2}{20}}=\frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{20}(5-\sqrt{5})}{20}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

y $\tan 31{,}7=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ porque la tangente de un ángulo agudo posítivo es posítivo.

Los ángulos de 31,7° y 58,3° siendo complementarios verifican que el seno de uno respectivamente es el coseno del otro, la tangente de uno es la cotangente del otro.

El ángulo de 63,4° es doble de 31,7°, apliquemos la fórmula de multiplicación de los senos y de los cosenos:

$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a \Rightarrow \sin 63{,}4 = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\times\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}=\frac{2\sqrt{20}}{\sqrt{100}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \quad \Rightarrow \quad \cos 63{,}4 = \frac{5+\sqrt{5}}{10} - \frac{5-\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ y

$\tan\ 63{,}4 = \frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{5}{\sqrt{5}} = 2.$

Observamos que la tangente del ángulo de 63,4° es un número entero, podemos rencontrar este resultado con la ayuda de la tangente de un ángulo doble de un ángulo dado? Tenemos:

$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \quad \Rightarrow \tan 63{,}4 = \frac{2\ \varphi^{-1}}{1 - \varphi^{-2}},$ recordamos que $\varphi^2 = \varphi+1$

entonces $\frac{\varphi}{\varphi^2-1} = 1$. Multiplicamos esta expresion por φ^{-2} :

obtenemos: $\frac{\varphi^{-1}}{1-\ \varphi^{-2}} = 1$, entonces $\tan 63{,}4 = 2.$

El ángulo de 116,6° siendo suplementario del de 63,4° deducimos de eso fácilmente sus líneas trigonométricas.

Observación

La indicación de "medidas exactas" (algébricas) de las líneas trigonométricas de los ángulos puestos en evidencia en el pentágono celeste puede parecer contradictoria. No es así ya que las medidas de estos ángulos en grados son perfectamente calculables, con la precisión deseada ya que no son decimales. Citemos por ejemplo el ángulo de tangente 2, si utilizamos la función (Arco tan) de la calculadora la medida del ángulo es:

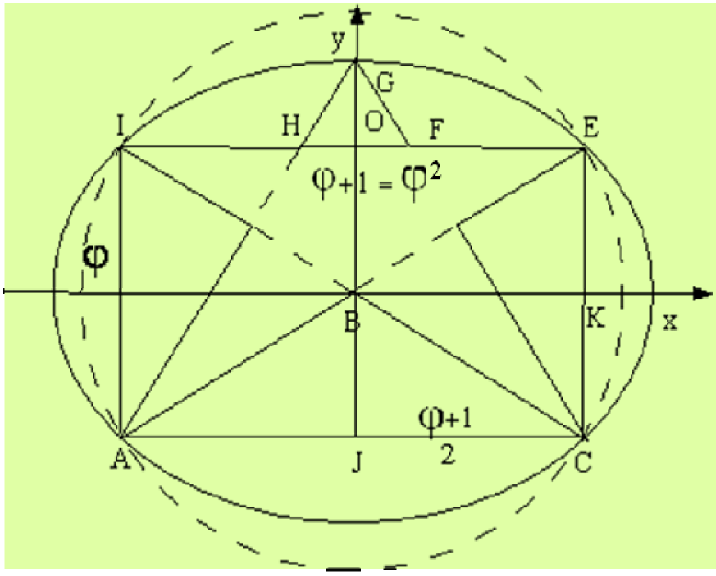
63,43494882 que hasta no deja suponer que esta medida no pueda ser racional porque **no hay periodicidad en la parte no entera hasta ocho decimales.**

Ángulos en grados (al centésimo)	Senos	Cosenos	Tangentes
31,7	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \simeq 0{,}53$	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \simeq 0{,}85$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi^{-1}$
58,3	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$
63,4	$\frac{2\sqrt{5}}{5} \simeq 0{,}89$	$\frac{\sqrt{5}}{5} \simeq 0{,}45$	$\frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5}{\sqrt{5}} = 2$
116,6	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$	- 2

IV - Cálculo de la ecuación de la elipse circunscrita al pentágono celeste

El pentágono estrellado celeste que fue construido a partir del rectángulo ACEI al cual se añadió un triángulo isósceles HFG, admite una elipse circunscrita de ecuación bastante fácil que hay que calcular. Les proponemos pues este cálculo a los alumnos del liceo familiarizados con la noción de elipse.

Intuitivamente el rectángulo ACEI admite un círculo (trazado en punteados) circunscrito, de centro B siendo el punto de concurrencia de las diagonales del rectángulo. Este círculo puede verticalmente "ser aplastado" según el eje [By) con el fin de pasar por el punto G, obtenemos entonces la elipse circunscrita en el pentágono.



Hemos puesto los ejes segun los ejes ortogonales pasando por el centro B del rectángulo de oro de lados φ et φ^2 entonces la ecuación general es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

El semi gran eje es **a** y el semi pequeño eje es b = BG $=\frac{\varphi+1}{2}=\frac{\varphi^2}{2}$. La elipse pasa por E de cordenadas : $x=\frac{\varphi^2}{2}$ y: $y=\frac{\varphi}{2}$ entonces $\frac{\varphi^4}{4a^2}+\frac{4\varphi^2}{4\varphi^4}=1.$

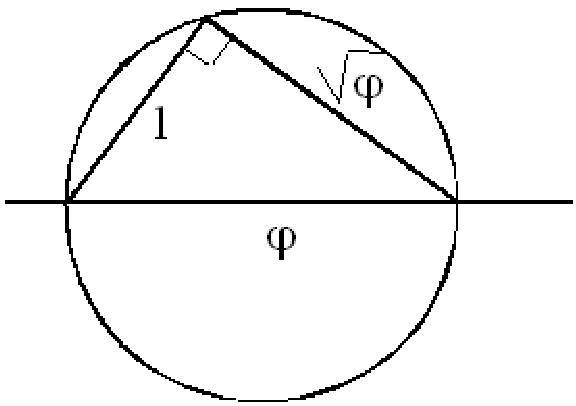
Sea $\frac{\varphi^4}{4a^2}=\frac{\varphi^2-1}{\varphi^2}=\frac{1}{\varphi}$. Tenemos entonces $4a^2 = \varphi^5$ la ecuación de la elipse es:

$\boxed{\frac{4x^2}{\varphi^5}+\frac{4y^2}{\varphi^4}=1}$. Entonces el semi gran eje est $=\frac{\sqrt{\varphi^5}}{2}=b\sqrt{\varphi}.$

El aplanamiento del círculo de centro B y de radío $\frac{\sqrt{\varphi^5}}{2}$ para obtener la elipse es pues: $\sqrt{\varphi}$. Ambos focos de la elipse tienen como abscisas c y - c con

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{\varphi^5}{4}-\frac{\varphi^4}{4}= \frac{\varphi^3}{4}\left(\varphi^2-\varphi\right)= \frac{\varphi^3}{4} \quad \text{y} \quad c=\frac{\varphi\sqrt{\varphi}}{2}.$$

Observación: vemos aparecer aquí la longitud y, por supuesto nosotros preguntamos una pregunta recurrente en nuestras actividades: ¿esta longitud es constructible a la regla y al compás?

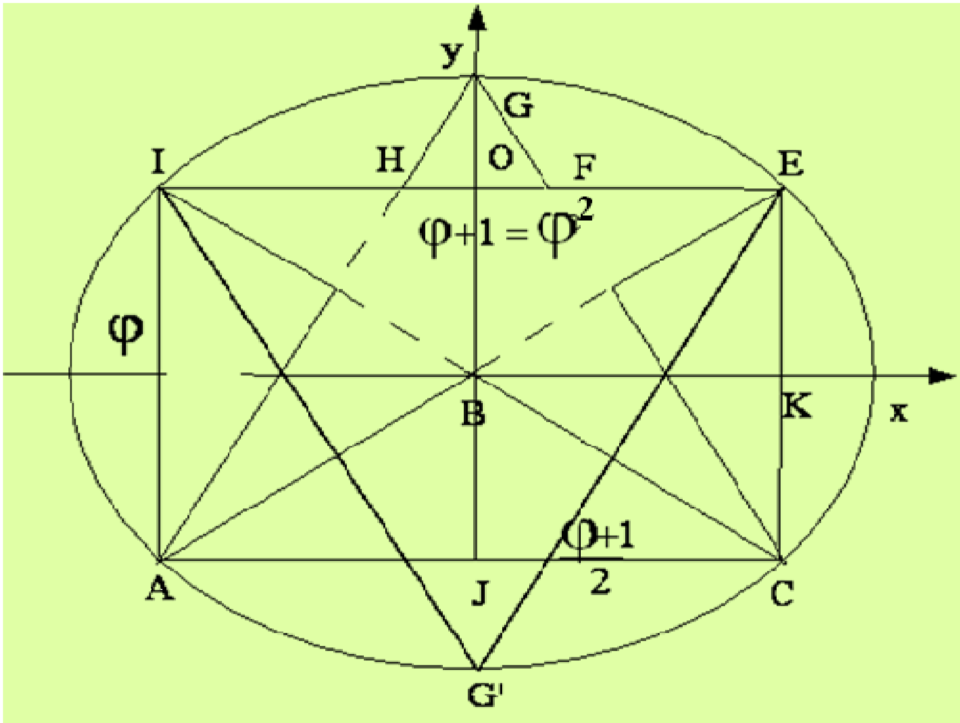


La respuesta es "sí" como lo muestra la figura de al lado, a condición que se defina una **longitud unidad**. Construimos un círculo de diámetro φ, trasladamos a partir de la extremidad de éste una cuerda de longitud 1 entonces el tercer lado del triángulo rectángulo definido tiene por longitud:

$$\sqrt{\varphi^2 - 1} = \sqrt{\varphi}$$

Para los lectores menos familiarizados con la noción de elipse podemos proponer otro enfoque "intuitivo" (ponemos esta palabra entre comillas porque cada uno sabe que la intuición matemática se desarrolla sólo con una práctica larga, deberíamos posiblemente utilizar la palabra "lleno de imágenes") del problema precedente. Propondremos luego un cálculo detallado a partir de la ecuación general de la elipse, siempre para los más grandes. Otro modo de abordar la investigación de la ecuación de la elipse circunscrita puede consistir en construir, como esto es frecuente en geometría un complemento de figura que va a ayudarnos en el razonamiento.
En efecto, cada persona que trabaja en el pentágono celeste observa que su envolvente convexa ACEGI se parece a una casa con un tejado. El pentágono celeste es rodeado del rectángulo ACEI al cual se le añade un triángulo HGF. Este pequeño triángulo quita la simetría del rectángulo, lo que es molesto cuando se busca la ecuación de la elipse.

Proponemos pues completar el pentágono trazando el triángulo IG'E simétrico del triángulo AGC. **Obtenemos ahora un hexágono IGECG'A no regular pero admitiendo dos ejes de simetría [Bx) y [By).** Por un efecto de simetría de la figura la elipse circunscrita al pentágono celeste también será circunscrita al hexágono.



La ecuación general de la elipse es de la forma: ax2+bxy+cy2+dx+ey+f = 0. Observamos en primer lugar que la figura ahora es simétrica con relación a ambos ejes. Entonces es invariable cuando se transforma x en -x y x es invariable cuando se transforma y en -y. Pues b = d = e = 0. G = (0,(φ +1)/2) ; c [(φ +1)/2]^2+ f = 0. Entonces f = - c [(φ +1)/2]^2.

Escribamos que la elipse buscada pasa por el punto G de coordenadas: ((φ +1)/2), φ /2).

Tenemos: $\frac{a}{4}(\varphi+1)^2+\frac{c}{4}\varphi^2=\frac{c}{4}(\varphi+1)^2$ o mas $\frac{a}{4}\varphi^4+\frac{c}{4}\varphi^2=\frac{c}{4}\varphi^4$.

Simplificamos esta expresión por $\frac{\varphi^2}{4}$ tenemos ahora :

$a\varphi^2+c=c\varphi^2$ entonces $a\varphi^2=c(\varphi^2-1)=c\varphi$ y $c=a\varphi$.

La ecuación de la elipse se hace: $ax^2+a\varphi y^2=a\frac{\varphi^5}{4}$ o

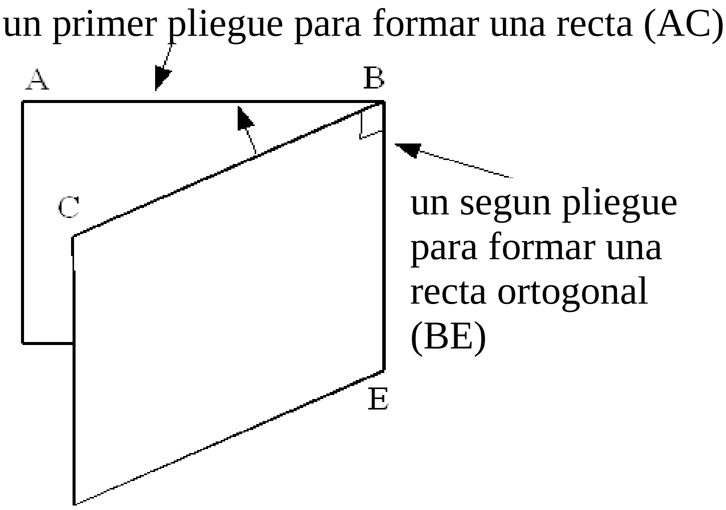
$4x^2+4\varphi y^2=\varphi^5$.

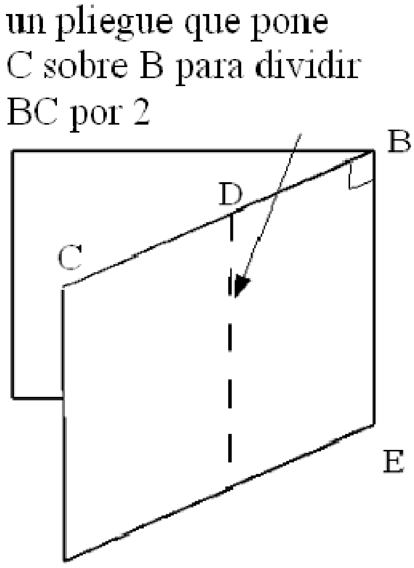
Sea: $\frac{4x^2}{\varphi^5}+\frac{4y^2}{\varphi^4}=1$, lo que hemos calculado antes.

Los cálculos del párrafo III nos permiten de obtener una construcción muy simple por pliegue del ángulo de 63,4° que es el ángulo agudo formado por las diagonales de todos los rectángulos de oro.

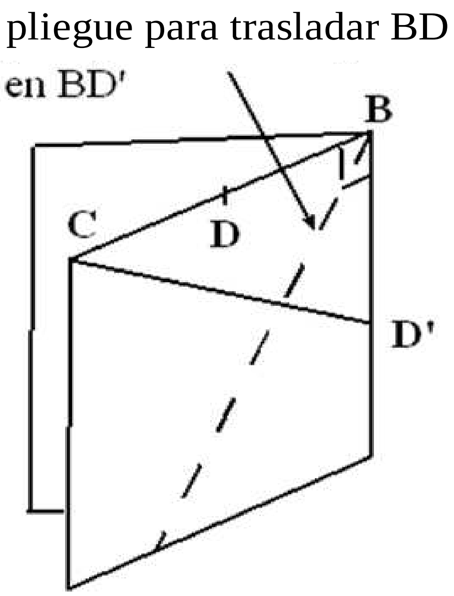
V - Construcción por pliegue de los rectángulos de oro cuya longitud de las diagonales es conocida, a la regla y al compás para la clase del segundo año del ciclo segundario superior

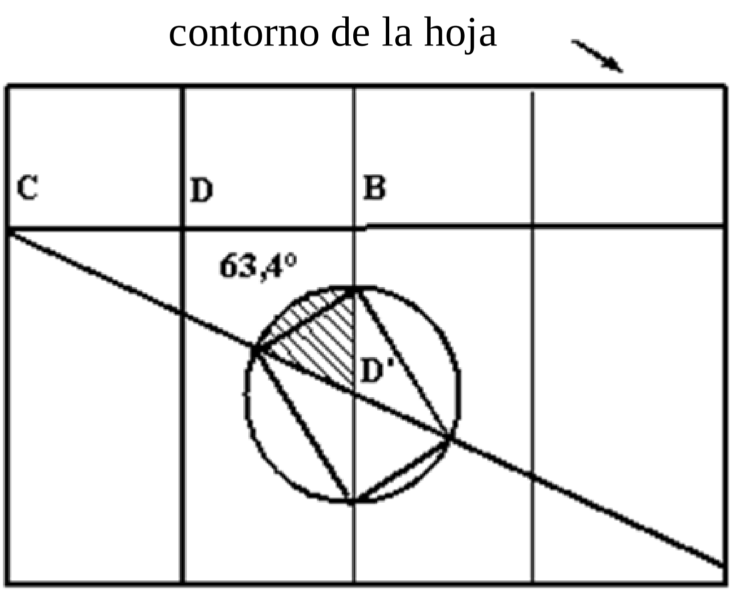
Les proponemos a los alumnos construir por la técnica acostumbrada dos pliegues perpendiculares:





Entonces el ángulo tiene para medida 63,4° a los errores de construcción cerca, les pedimos a los alumnos verificar su construcción con el semicírculo. Luego les pedimos abrir la hoja y marcar la recta (CD') por un pliegue. Les pedimos entonces a los alumnos de mostrar que todo círculo centrado en D' encuentra las rectas (CD') y (D’B) en los vértices de un rectángulo de oro.



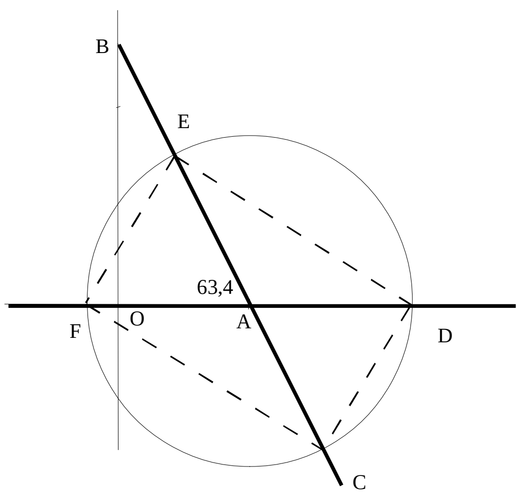


Es posible efectuar esta construcción a la regla y al compás pidiéndoles a los alumnos construir un rectángulo de oro cuyo medidas de las diagonales estan impuestas, he aquí su sugerencia de texto para las clases del segundo, para el cálculo efectivo de la tangente del ángulo 63,4° que expusimos más atrás, lo propondremos a las clases de los dos niveles superiores del secundario.

Ejercicio (dificultad media)

Construir un rectángulo de oro con su construcción preferida: pliegues o a la regla y compás.

Verificar con el semicírculo que el ángulo formado por las diagonales del rectángulo de oro mide 63,4° (al décimo de grado).
Verificar con la calculadora que la tangente del ángulo de 63,4° es 2 (al décimo), deducir de esto una construcción simple de tal ángulo a la regla y a la escuadra.
Suponemos conocida la longitud de las diagonales del rectángulo de oro, por ejemplo 10 cm, construir este rectángulo de oro con la ayuda del compás.



Solución
Construcción del ángulo de 63,4°:
Trazar dos rectas ortogonales que se cruzan sobre O, trasladar a partir de O, sobre uno una longitud por ejemplo 4 cm de extremidad A, sobre el otro la longitud doble sea 8 cm de extremidad B, entonces el ángulo mide 63,4°, verificarlo con el semicírculo.
Trazar el círculo de centro A y de diámetro 10 cm que encuentra a la recta (OA) sobre D y F y la recta (AB) sobre C y E, entonces **el rectángulo CDEF es el rectángulo de oro buscado.**

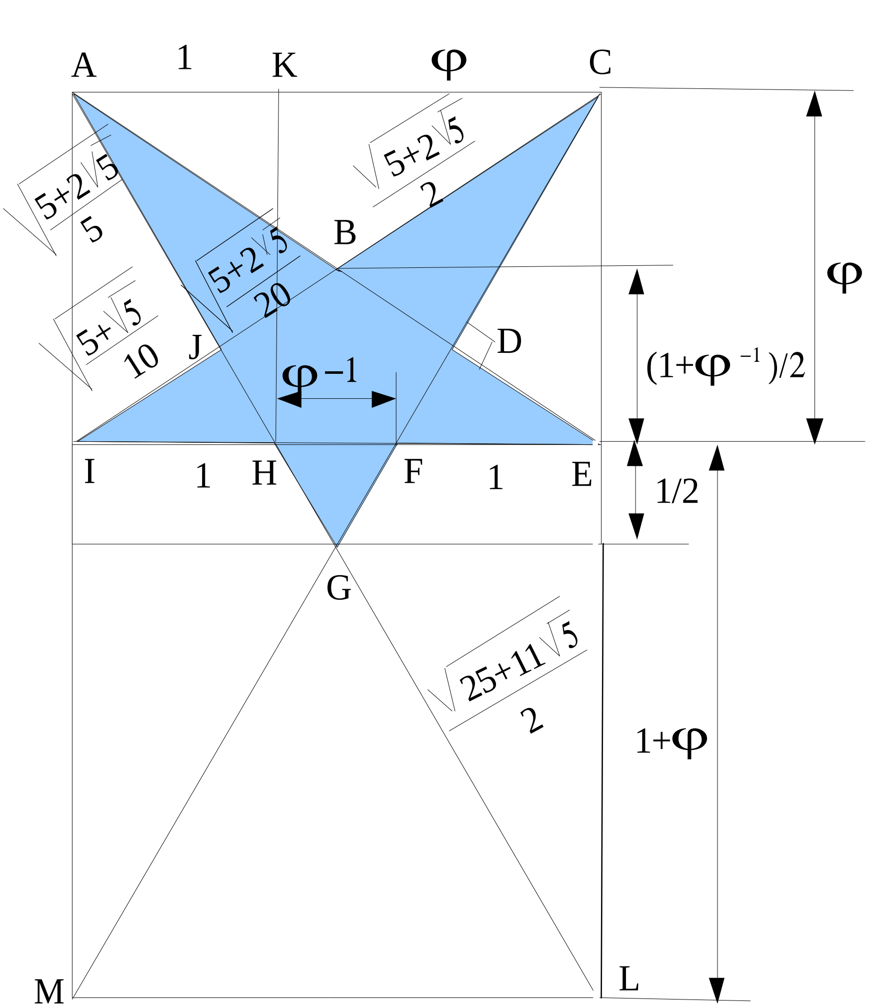
VI – Calculo de las medidas de los lados y alturas del pentágono celeste
¿ Para comenzar el trabajo efectuamos cálculos para obtener las longitudes de los diferentes lados del pentágono celeste con el arreglo de φ
Calculamos en primer lugar la diagonal [IC] del rectángulo de oro ACEI de lados φ y $\varphi+1$. Luego la semi-diagonal [BC].

Indicamos en la figura siguiente los valores algébricos exactos de las diferentes medidas de los lados del pentágono celeste.

He aquí valores con respecto a φ.

$IC^2 = \varphi^2 + (\varphi + 1)^2 = 2\varphi^2 + 2\varphi + 1$ como $\varphi^2 = \varphi + 1$ entonces $IC^2 = 3 + 4\varphi$

y $IC = \sqrt{3 + 4\varphi}$ y $BC = \dfrac{\sqrt{3 + 4\varphi}}{2}$.



Hemos visto que el triángulo AJB, es igual al triángulo CDB que es rectángulo, anotamos a el pequeño lado del ángulo recto, entonces el lado largo del ángulo recto mide 2a (cálculo del parágrafo precedente).

En el triángulo AJB tenemos pues:

$a^2 + (2a)^2 = \dfrac{3+4\varphi}{4}$ entonces

$a^2 = \dfrac{3+4\varphi}{20}$ y $a = \sqrt{\dfrac{3+4\varphi}{20}}$.

Tenemos : $IJ = IB - JB =$

$\dfrac{\sqrt{3+4\varphi}}{2} - \sqrt{\dfrac{3+4\varphi}{20}} =$

$\dfrac{\left(\sqrt{3+4\varphi}\right)(5-\sqrt{5})}{10}$.

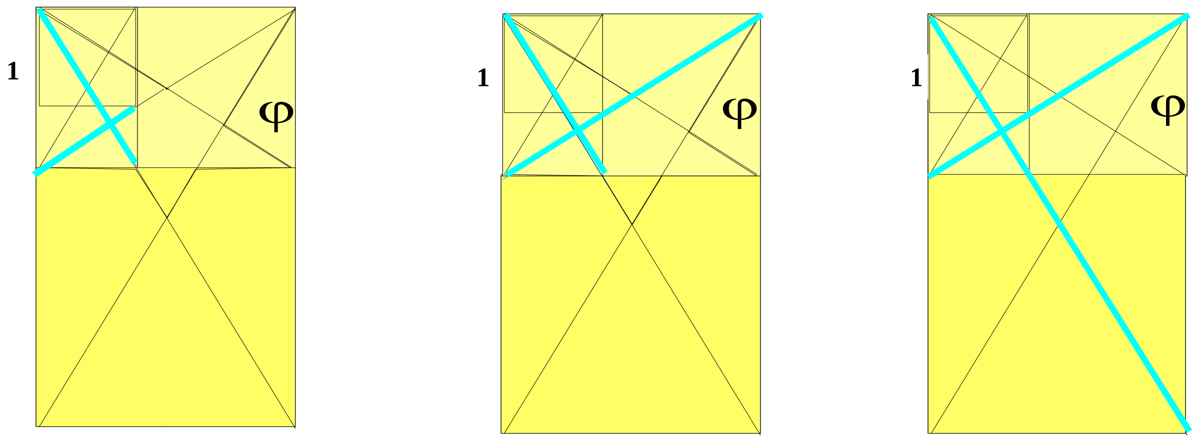
El punto G siendo la intersección de las diagonales del gran rectángulo de oro ACLM de lados $1+\varphi$ y $1 + 2\varphi$, la altura del triángulo isósceles HGF es: $((1+2\varphi)/2\ ) - \varphi =$ ½. La altura del triángulo isósceles HBF es: $½(1+\varphi^{-1}) = \varphi/2$, su base HF mide $1+\varphi-2 = \varphi-1$.

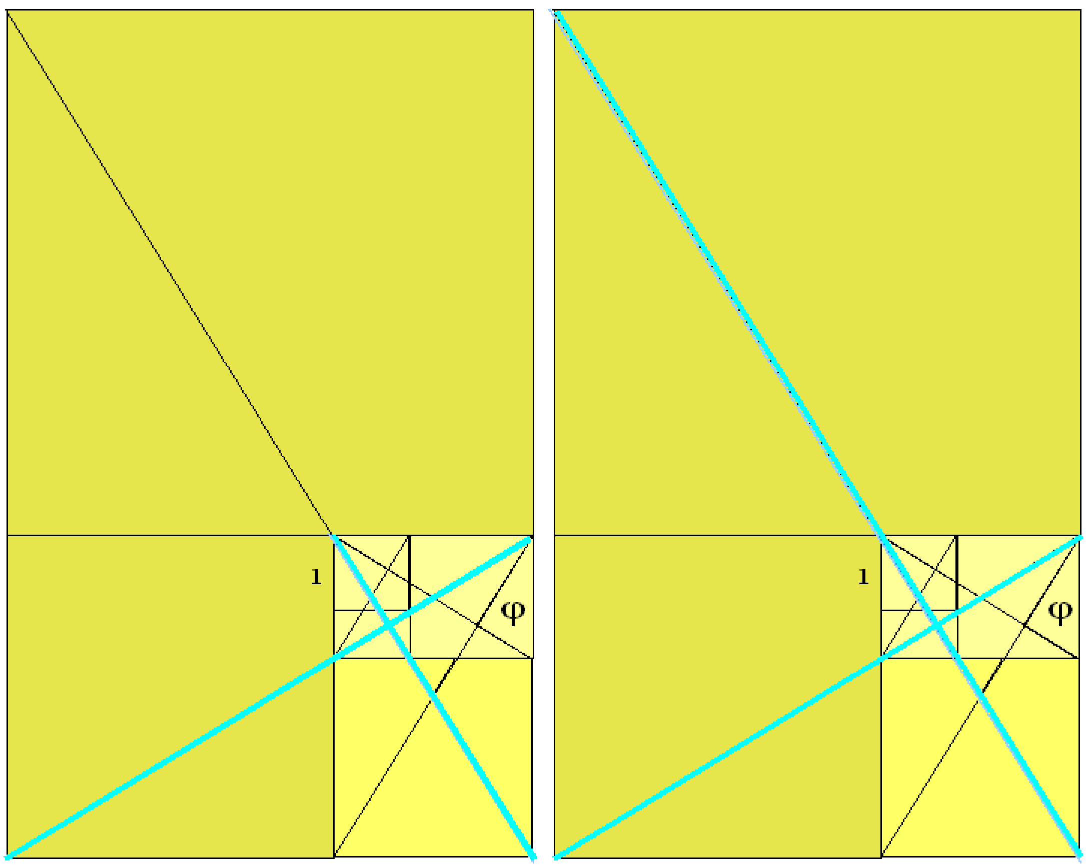
Para acabar le proponemos calcular los valores algébricos que indicamos sobre la figura. Volvamos sobre estos valores por razonamiento geométrico en el parágrafo que sigue a propósito de las propiedades de la cruz celeste.

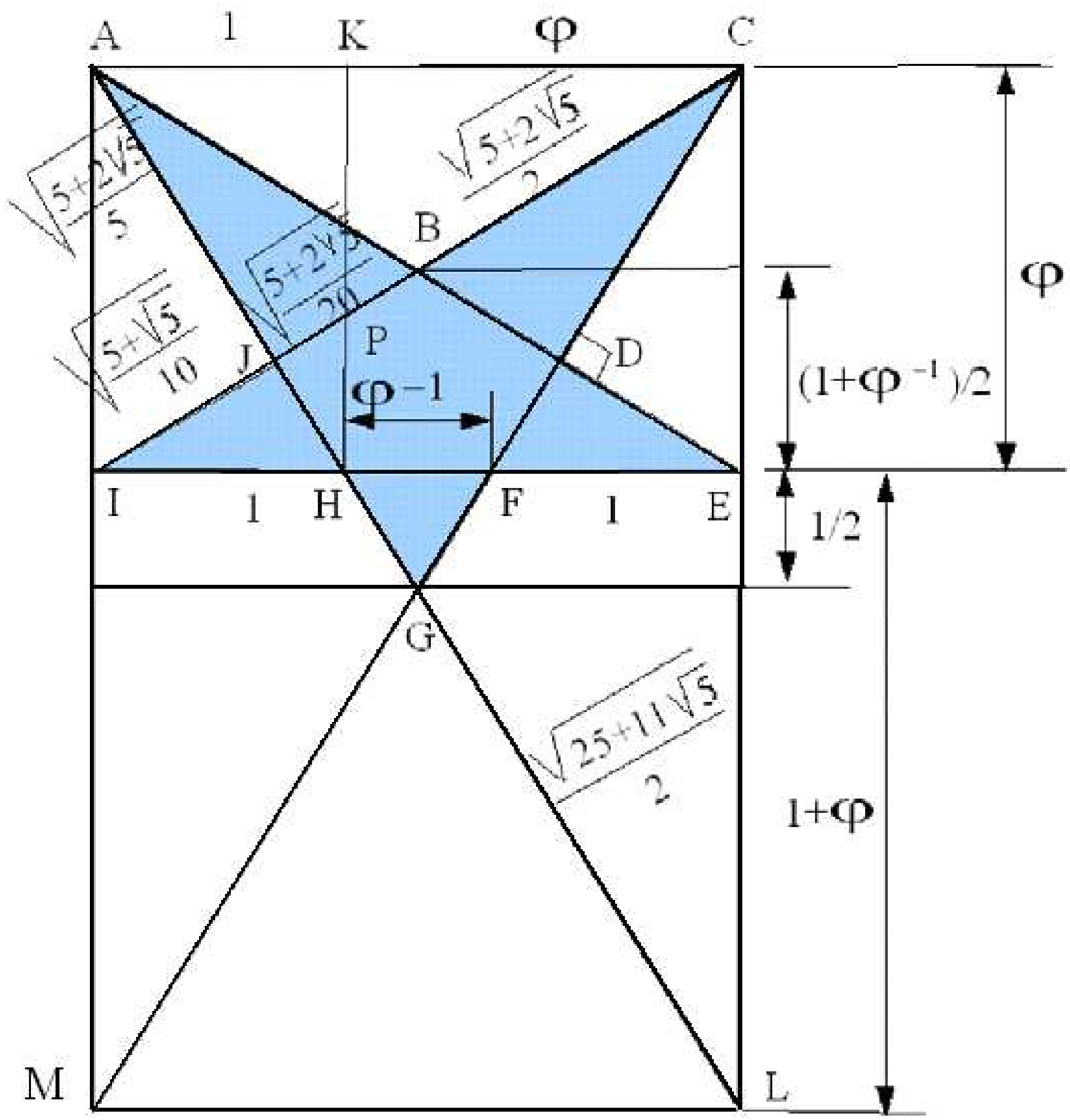
VII-Definición de la cruz celeste y estudio de sus propiedades (descubiertas por uno de nosotros: Ruben Rodriguez Herrera)

Le hicimos ver que el triángulo CDB y AJB son rectángulos, lo mismo ocurre, por supuesto en las construcciones sucesivas de los rectángulos de oro cuyos lados son respectivamente proporcionales.

Ponemos en evidencia en las figuras siguientes **las "cruces celestes" formadas por dos lados ortogonales de dos rectángulos de oro sucesivos** y vamos a calcular sus propiedades.







Estudiamos de nuevo la figura de base del párrafo precedente, aumentada para más visibilidad.
Observemos los brazos de la primera cruz celeste: [JP] ; [JH] ; [JI] ; [JA].
Son los pequeños lados de triángulos rectángulos de hipotenusas, en sucesión creciente: $\varphi^{-1} = \varphi - 1$, 1 , φ , 1+.φ. Son semejantes por la propiedad de los rectángulos de oro, sus ángulos correspondientes pues son iguales, la tangente del ángulo de medida 58,3° al décimo de grado es φ.
Los cálculos del párrafo precedente son bastante complejos también vamos proponerle un razonamiento geométrico que le demostrará una vez más cuánto la geometría euclidiana puede ser elegante y mas rápido.

Llamamos a la medida del lado JP más pequeño del triángulo rectángulo HJP el más pequeño.
El otro lado JH tiene pues para medida aφ.
El triángulo siguiente, de hipotenusa 1 tiene los lados JH y JI de medida aφ^2.

Recapitulemos: JP = a ; JH = aφ. ; JI = aφ^2. JA = aφ^3.

Observamos que JI = JH + JP a causa de la propiedad de φ.
$\varphi^2 = \varphi + 1$ así que: JA = JH + JI. Obtenemos la:

Propiedad - Los cuatro brazos sucesivos de la cruz celeste forman pues los cuatro primeros términos de una sucesión de Fibonacci.

De la demostración que es la misma para las cruces celestes sucesivas podemos deducir que si llamamos a_n el término general de la sucesión de los brazos de las distintas cruces celestes, entonces la secuencia $\mathbf{[(a_n)]_{n \in \mathbb{N}^*}}$ es geométrica de razón φ.
Recíprocamente tenemos la propiedad: Si una sucesión de Fibonacci de término general a_n tal que para un índice dado n_0 se tuviera $a_{n0+1} = \varphi\, a_{n0}$ entonces es geométrica de razón φ**?**
Sea b_n una sucesión de Fibonacci. Verifica pués que:
$b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$. Supongamos que para n_0 dado se tuviera:
$b_{n_0} = \varphi\, b_{n_0-1}$ ¿entonces la sucesión es geométrica de razón φ
Demostración: en efecto, por recurrencia doble sobre n a partir de n_0-1
$b_{n_0} = \varphi\, b_{n_0-1}$; $b_{n_0+1} = b_{n_0} + b_{n_0-1} = \varphi b_{n_0-1} + b_{n_0-1} = \varphi^2\, b_{n_0-1} = \varphi\,(\varphi\, b_{n_0-1}) = b_{n_0}$.
La recurrencia es verdadera en n_0-1, n_0 y n_0+1.
b) Supongamos que la sucesión sea geométrica de razón φ hasta n y n+1, ahora tenemos : $\mathbf{b_{n+2}} = b_{n+1} + b_n = \varphi\, b_n + b_n = \varphi^2\, \mathbf{b_n} = \varphi(b_{n+1})$.
La recurrencia es verdadera para todo n.

Verificamos una de estas propiedades sobre uno de los cálculos algébricos precedentes, hemos calculado:

$IJ = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}$ et $JA = \sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}}$. ¿Tenemos JA = φ JI ?

$$\varphi .\, JI = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} = \sqrt{\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right)\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)} = \sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{20+8\sqrt{5}}{20}\right)} = \sqrt{\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)}$$ lo que estaba para demostrar.

Podemos decir también que:

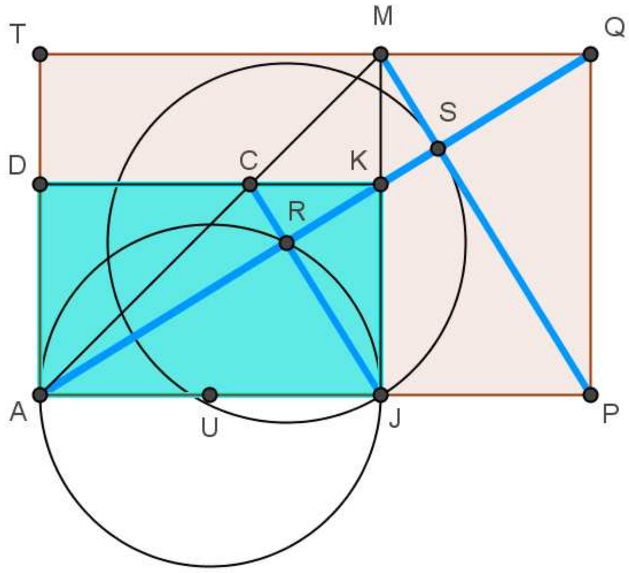
Propiedad - Toda sucesión geométrica de razón r> 0 y de Fibonacci es de razón φ

En efecto, sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión geométrica de razón r y que sea de Fibonacci, entonces: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ y $a_n = r\, a_{n-1} = r^2\, a_{n-2} = r\, a_{n-2} + a_{n-2}$; pues simplificando al a_{n-2} supuesto no nulo tenemos:

$r^2 = r + 1$ lo que provoca, r siendo positivo que $r = \varphi$.

Construcción de la sucesión de las cruces celestes a partir de un rectángulo de oro: el caso de las tarjetas bancarias (nivel alumnos profesores y alumnos de segundaria superior)

Le presentamos, en el capitulo III, la yuxtaposición de las tarjetas bancarias que son, grosso modo rectángulos de oro. Esta yuxtaposición nos permite proponerle una actividad acerca de las cruces celestes.



Construcción de una sucesión de cruces celestes: programa de construcción 1) Supongamos que disponíamos de un rectángulo de oro AJKD y de la cruz celeste AJKC de centro R.

2) Tracemos el arco de círculo de centro R y de radio RJ que intercepata a la recta (AR) en un punto S exterior al rectángulo dado.

3) Trazamos la recta (AC) y la perpendicular (p) a (AS) pasando por S, se interceptan en M.

4) Obtenemos el punto P como intersección de la recta (AJ) y (p). 5) Trazamos por P la perpendicular a (AJ) que intercepta (AS) en Q; obtenemos así la cruz MPQA de centro S que será celeste.

Demostración:
Datos: el rectángulo AJKD es de oro; la cruz AKJC de centro R es celeste el rectángulo JPQM es isométrico a AJKD y yuxtapuesto según la figura.

RJ = RS.

Conclusión: la cruz AQPM de centro S es celeste.

Alineación de oro: propiedades del número de oro y de las figuras de oro 1) Sean dos rectángulos de oro AJKD y JPQM yuxtapuesto como en la figura más arriba entonces las rectas (AK) y (KQ) estan confundidas.

Demostración: si se toma como unidad el segmento [AB] tenemos AB = 1;

ahora $AJ = (1+\sqrt{5})/2 = \varphi$ el número de oro. Calculamos las relaciones siguientes:

$JK/AJ = 1/\varphi$ y $PQ/AP = \varphi/(\varphi+1) = 1/(1+1/\varphi) = 1/(1+\varphi-1) = 1/\varphi$

Pues JK/AJ = PQ/AP y por la recíproca del teorema de Thalés los puntos A, K, Q estan alineados.

2) Recíproca: sean dos rectángulos superponibles AJKD y JPQM yuxtapuestos como sobre la figura precedente. Supongamos que los puntos A, K y Q estan alineados, entonces los rectángulos son rectángulos de oro
Démonstration:

Los rectangulos siendo isométricos tenemos: AJ = PQ y KJ = JP ; porque los puntos A, K, J estan alineados, podemos aplicar el teorema de Tales directo y tenemos: KJ/AJ = PQ/AP ; o KJ/AJ = AJ/(AJ+KJ).

KJ siendo la unitad tenemos KJ = 1 y 1/AJ =AJ/(AJ+1).

Pongamos a AJ = x (con x> 0) entonces tenemos: 1/x = x / (x+1) o bien $x+1 = x^2$ o $x^2 - x - 1 = 0$ y la solución positiva de esta ecuación x es el número de oro φ.

Construcción de la escalera celeste

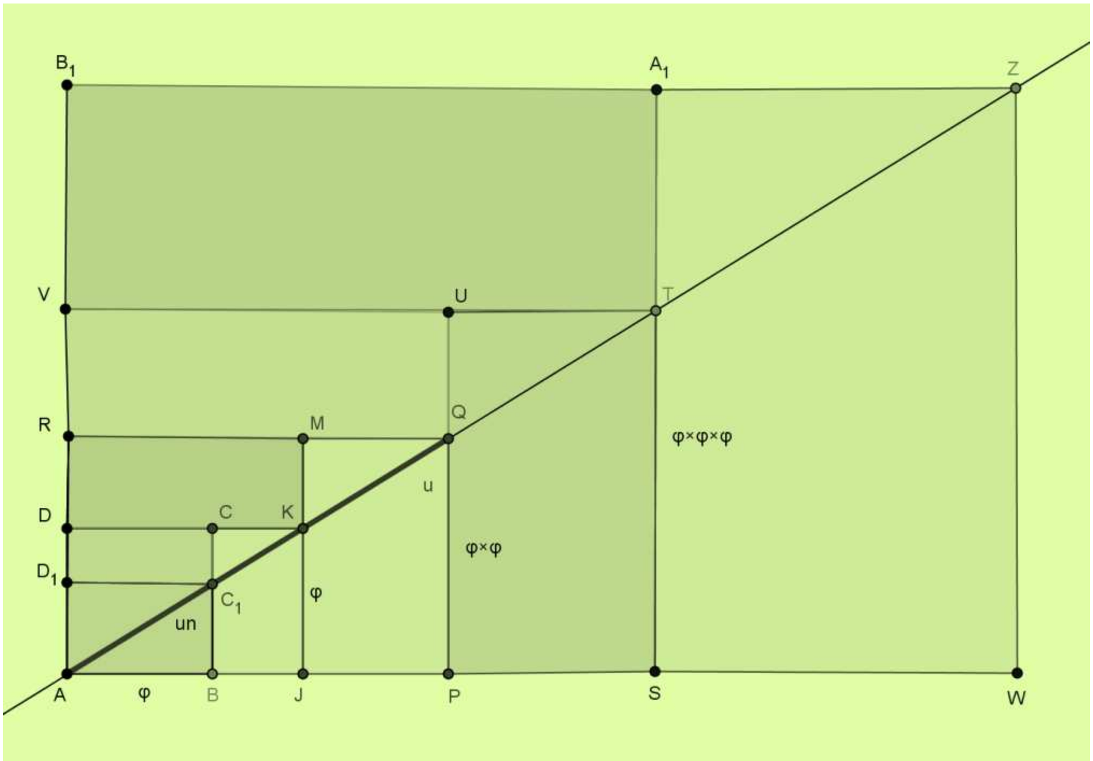
El rectángulo APQR es de oro, le añadimos al rectángulo PSTU de oro. La línea quebrada que separa la parte de la figura en rosa de la parte en verde nos evoca una escalera cuyas marchas tendrían una altura creciente de abajo hacia arriba. ¿Podemos calcular la altura de estas marchas tomando, por ejemplo como unidad de medida AD_1 = BJ = 1?

Asi AB = JK = φ ; pues $CC_1 = \varphi - 1 = \varphi^{-1}$. El rectángulo de oro siguiente JPQM es asi que JK = φ y QP = $\varphi^2 = 1+\varphi$. Entonces MK = 1.

El rectángulo de oro siguiente PSTU es asi que ST = φ^3 y PQ = φ^2 entonces QU = $\varphi^3 - \varphi^2 = \varphi^2(\varphi - 1) = \varphi^2 . \varphi^{-1} = \varphi$.

¿ La iteración del razonamiento es inmediata y concluimos que la altura de los escalones forman una **progresión geométrica de razón φ**.

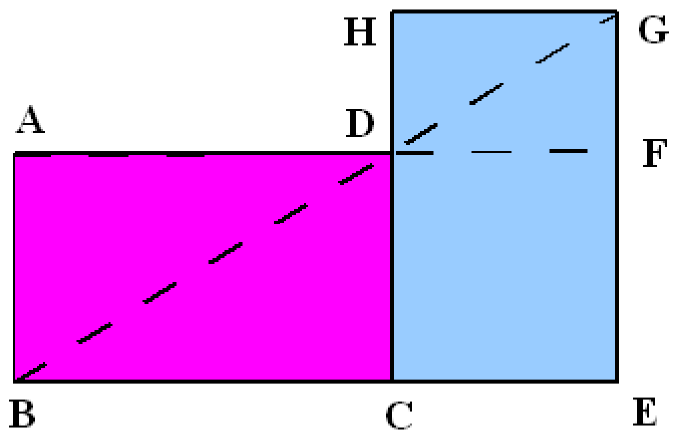
Es por eso que llamaremos esta figura la **escalera celeste**; ¡aquel qué es muy simbólico una vez más porque “los escalones del paraíso” son cada vez más altos cuando se acerca a éste!



Podemos imaginar, de modo más "constructivista" la astucia de arquitectura de escaleras de altura creciente con el fin de que, del bajo de esta escalera, por efecto de perspectiva, las marchas aparezcan a la vista de la mismo altura. Este tipo de procedimiento ha sido utilizado en ciertas construcciones de estadios.
Los mejores en perspectiva podrán señalarnos a cual distancia y a cual altura se debe encontrarse para que las marchas todas aparezcan de alturas iguales …
En conclusión: si dos rectángulos isométricos están colocados por tal modo que el gran lado de uno dos se apoya en el pequeño lado del otro y sea una de los vértices de uno sea confundida con una de los vértices de la otra entonces ambos rectángulos son de oro si y solamente si la diagonal de primero opuesta al punto común encuentra al segundo en una de los vértices opuestos. Más simplemente dos rectángulos fijados AJKD y JPQM por el lado [PQ] son de oro si y solamente si la diagonal (AQ) es confundida con la recta (QT).

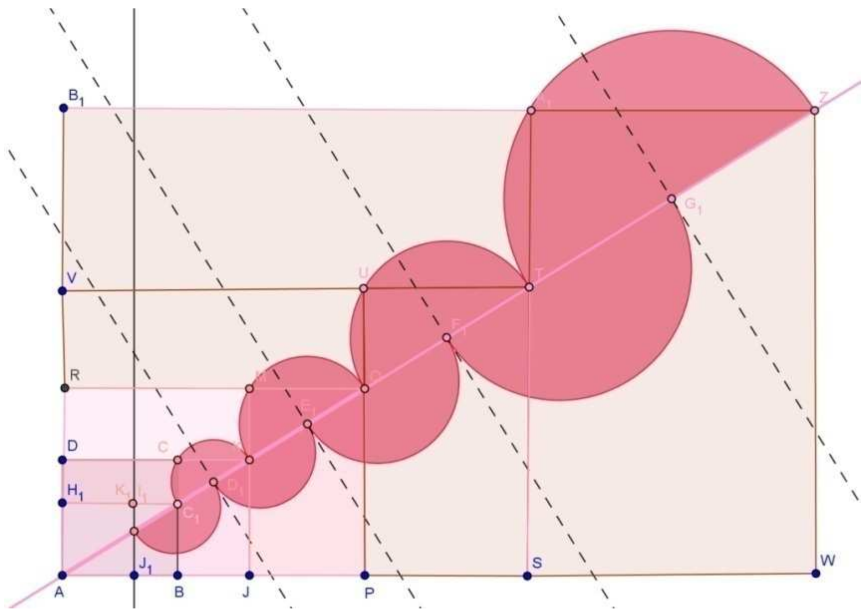
Actividad de construcción a la regla y compás a puntas secas
Recordemos que desarrollamos esta geometría interesante en nuestro libro "Nuevas prácticas de la geometría". Se trata de trazar figuras sin trazar ni arco de círculo ni medida de longitud.

Estudiamos en el capítulo I-3 la construcción de un rectángulo de oro por plegado, la geometría de los pliegues que era bastante próxima de la geometría sin compás ni medidas, le dejamos pensar cómo construir el primer rectángulo de oro. Si esto no le divierte tome pues una tarjeta de crédito … Consideremos pues que tenemos el primer rectángulo de oro ABCD horizontalmente sobre su gran lado. Teniendo en cuenta las propiedades estudiadas más atráz le pedimos construir el segundo a la regla (no graduada) y al compás a puntas secas.



Construcción

Tracemos la diagonal (BD), prolonguemos el lado [BC] y traslademos con compás a puntas secas la longitud DC sobre la recta (BC) a partir de C en [CE]. Lo mismo, traslademos esta longitud sobre la recta (AD) a partir de D en [DF]. La recta (EF) encuentra la diagonal (BD) sobre G. Traslademos sobre la recta (DC) la longitud FG a partir de D. Entonces el rectángulo CEGH es de de oro e isométrico a ABCD. ¿Por fin, le proponemos buscar cómo construímos esta concha ideal del caracol de mar…

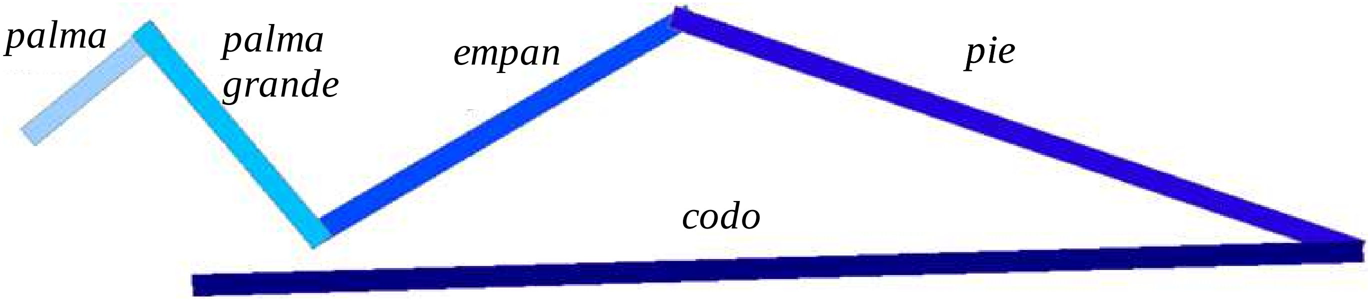


Comentario histórico: en el capítulo II, debido a nuestro colega Abderrahmane Nitaj presentamos una propiedad de las medidas de longitudes utilizadas en la Edad Media europeana que repetimos aquí.

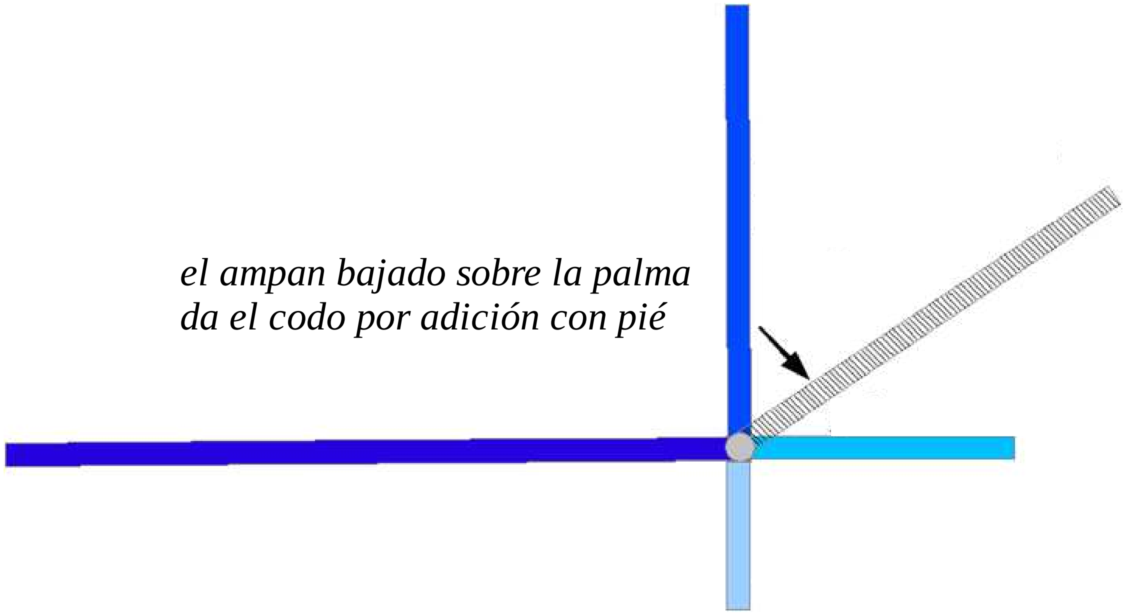
Estas longitudes están en la orden creciente de sus medidas en cm son: La palma 7,64; la palma (grande) 12,63; el empan 20; el pie 32,36; el codo 2,36. Subrayamos que, “grosso-modo”, como para todas las medidas humanas están unidas al número de oro, a veces con una imaginación cierta, estos números constituían una sucesión de Fibonacci. Estas medidas son citadas en el libro de Fernando Corbalan: "el número de oro” en la colección "Le Monde es matemático" dirigida por Cédric Villani (edición RBA, París 2013). He aquí las relaciones) sucesivos de estas medidas:

- La palma 7,64 12,63/7,64 = 1,65 al centésimo
- La palma grande 12,63 20/12,63 = 1,58
- El empan 20 32,36/20 = 1,62
- El pie 32,36 52,36/32,36 = 1,62
- El codo 52,36.

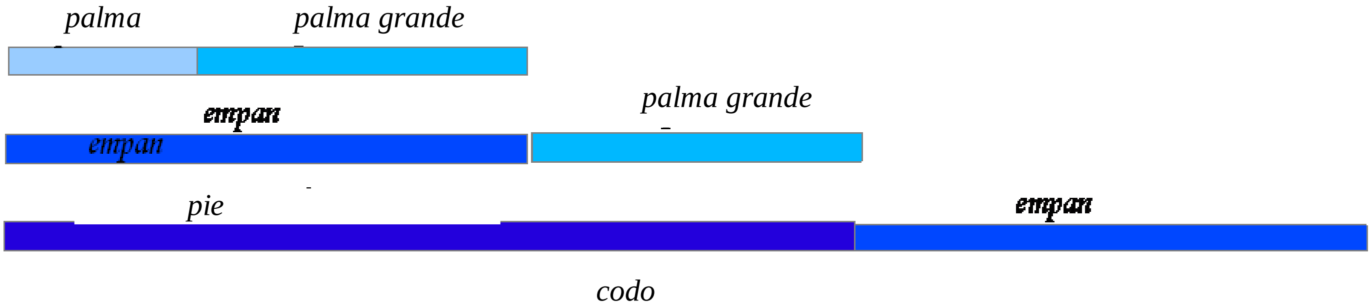
Estas medidas parece que eran utilizadas en forma de un instrumento articulado que le presentamos más abajo, llamado la quine (algunos dicen el quine).

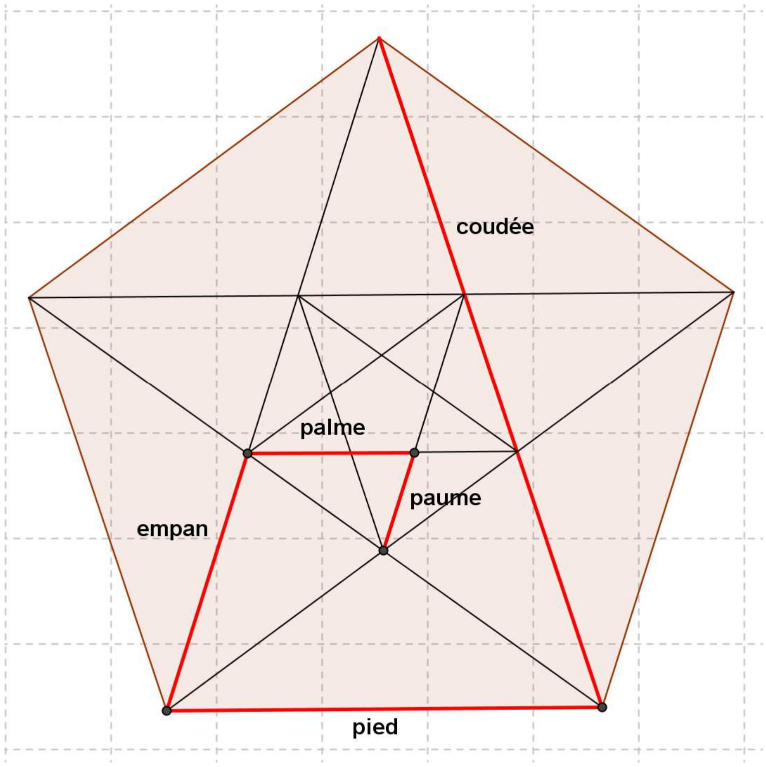


Podriamos también presentarles con la forma de la cruz celeste, articulada en su centro como una escuadra falsa:



Este aparato es fácil construir, de cartón o de madera, los brazos reunidos por un tornillo y una tuerca, lo llamaremos "el quine celeste". Plegado mide un pie a saber, 32,36 cm, lo que no es más apenas embarazoso que la regla tradicional de madera de 30cm. El quine celeste permite trazar fácilmente la espiral celeste con ayuda de una escuadra y, así, verificar las propiedades estudiadas más atrás.





Representamos a la izquierda la relación entre estas medidas y las del pentágono regular, figura tomada del sitio de Thérèse Eveilleau (*): HTTP: // therese.eveilleau.pages.perso-orange.fr y citado también en un artículo muy interesante debido a Xavier san-Martin del CNRS(CENTRO NACIONAL DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA) de Aix. (**) Observemos que, en esta figura las longitudes son ordenadas en forma creciente lo que nos da una idea de actividad recreativa que vamos proponerle más adelante.

La existencia de estas unidades de medida es bastante controvertida, hemos, en particular encontrado en línea un artículo agresivo a este sujeto que no citaremos, esto sería hacerle una publicidad no merecida. Así como en todas las investigaciones históricas de las interpretaciones pueden ser sujeta a ser falsas y deben ser sometidas a la crítica eventual con el fin de obtener un consenso. Nos parece interesante de proponer la utilización de estas unidades, en particular en la arquitectura romana, en su contexto.

(*) http://www.therese.eveilleau.pages.perso-orange.fr

(**) http://www.admiroutes.asso.fr/larevue/2012/126/nombredor.pdf

Los constructores, de edificios religiosos o no, que sean arquitectos, compañeros albañiles, carpinteros o canteros voluntariamente rodeaban a sus técnicas: dibujos, planos, herramientas etc. de misterio **con el fin de preservar sus privilegios y secretos de fabricación.**

¡Para no entrar en discusiones qué nos parecen un poco estériles a falta, aparentemente, de textos fundadores, querríamos subrayar por qué la utilización de estas medidas nos engalan a causa de sus propiedades ligadas al número de oro, aunque éste que ha sido estudiado bajo su nombre más tarde, también él mismo conviene, "no hay que tomar el rábano por las hojas! ".

Subrayemos en primer lugar que la utilización hasta épocas muy tardías de los números romanos era un freno considerable a los cálculos de multiplicación y de división que debían efectuarse con la ayuda de ábacos.

Pensamos que las unidades del quine, basadas en las medidas humanas y eminentemente variables pero probablemente transportadas por los compañeros constructores que efectuaban su "Tour de Francia", satisfacían bien ciertamente a sus usuarios.

Cuando se consultan los artículos de historia de la medida, encontramos las medidas del quine de modo precoz, en los siglos de los constructores de catedrales, pero estas medidas eran bastante poco precisas y han sido normalizadas bajo la forma del "Bastón real".

Parece que el quine fue conservado dentro del "bastón de los arquitectos-compañeros" (en efecto los constructores fueron reclutados entre los compañeros canteros y\o carpinteros, iniciados al "Arte del dibujo"). Sobre este bastón suponemos que fueron grabadas las rayas representando las medidas. A posteriori y después de numerosas consultas bibliogáficas, parece que esta suposición sobre rayas eventuales sobre el bastón que indicaban al compañero las medidas del quine es errónea. En efecto, no hay que olvidar el papel de la "cuerda a trece nudos" que servía en particular para los maestros de obras que trazan el triángulo sagrado de lados de medidas 3,4,5 y que fué utilizado de modo sistemático. Los nudos eran distantes de un codo o 50cm.

No resistimos al placer de presentarle una fotografia de la estela del architecto Hugues Libergier concervada en Reims (Artículo de Jean-Michel Mathonière): http://www.compagnonnage.info/ressources/architecte.htm

La regla, el compás, la escuadra y el modelo reducido de construcción simbolizan la profesión del difunto.
Aprecia la mano su bastón de constructor.
Vea también el artículo de Frédéric Morin del Centro de investigación sobre el Bastón y el Palo:

http://www.crcb.org/la-canne-de-larchitecte/.html

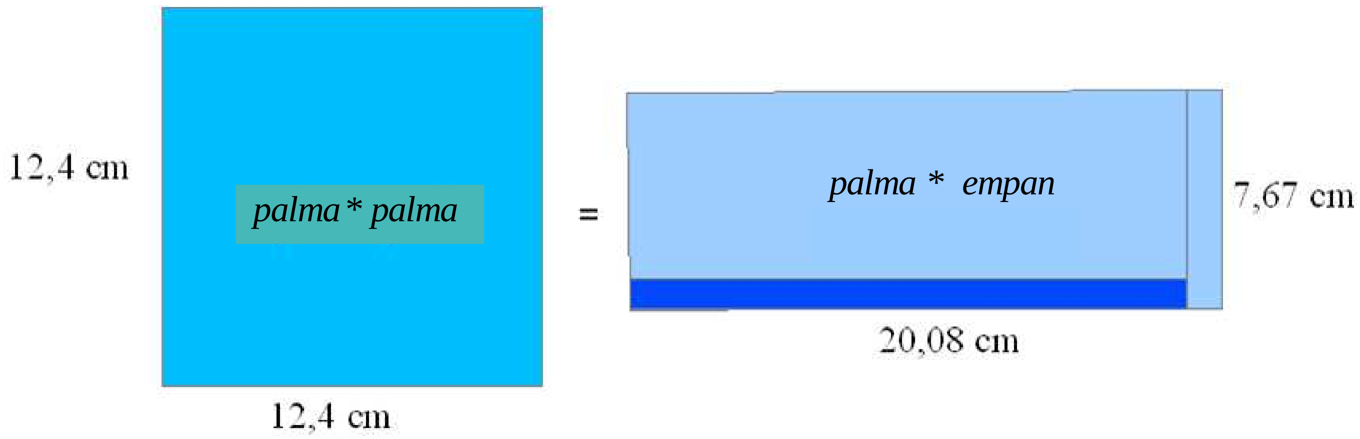
Recordemos que las medidas del quine son proporcionales, como las unidades métricas por supuesto y, además, forman una sucesión que tiene las dos propiedades fundamentales que repetimos:
a) Cada unidad es igual a la suma de ambas precedentes, lo que no es el caso de las unidades métricas;
b) El cuadrado de cada unidad es igual al producto de las unidades que lo encuadran (a la milésima parte);
Podemos imaginar que un pequeño bosquejo del maestro "a la escala", sobre la arena, en unidades "líneas" por ejemplo, lo que era posible gracias a la proporcionalidad de las medidas, le permitía al compañero constructor o carpintero trasladar las medidas "sobre el terreno" en codos por ejemplo. El artículo de X. Santo Martin citado más arriba es muy claro para este sujeto. Vamos a darle una visión de conjunto breve. El autor se explica por qué estas medidas eran ventajosas en particular para los canteros y albañiles los que debían dar instrucciones simples que no necesitaban cálculos y evitaban las pérdidas en la construcción de los paredes a juntas alternadas que contenían aperturas.
En efecto las propiedades del quine y, en particular el hecho de que las cuatro longitudes que la constituyen de la palma, , del pie y del codo expresadas en líneas, que era la pequeña unidad (2,256mm) utilizada en la época, **son cuatro términos sucesivos de la sucesión de Fibonacci**, hacían los cálculos de superficie mucho más cómodos que los ábacos romanas.

He aquí estos números escritos en grueso repuesto en la sucesión de referencia: 1 1 2 3 5 8 13 21 **34** **55** **89** **144** 233 377 610 etc. Esta característica era cómoda en la medida en que, a la milésima, el **cuadrado de una unidad es igual al producto de la precedente por la siguiente** por ejemplo: 55 × 55 = 3025 es poco diferente de 34 × 89 = 3026. Esta característica podía servir para transformar una superficie cuadrada, por ejemplo de una palma de lado, en superficie rectangular de lados una palma y un empan.
En el dibujo a la escala según tengamos **equivalencia entre un cuadrado y un rectángulo y vamos a calcular sus superficies**. Recordemos que el empan mide cerca de 20 cm lo que lo hace una medida bastante práctica para la talla de piedras de construcción.

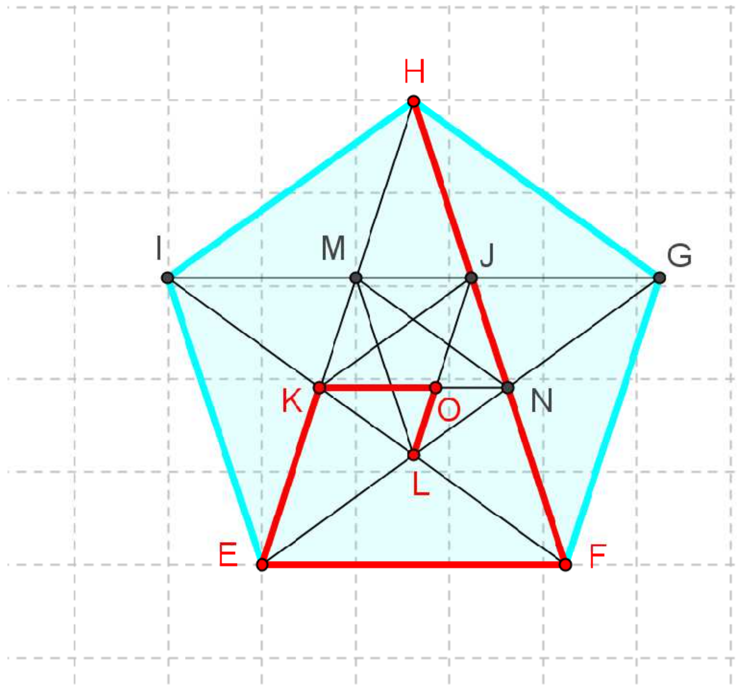
Subrayemos que la inmensa mayoría de los ladrillos en hormigón actualmente utilizados en la construcción tienen para dimensiones: 20cm 25cm 50cm, lo que es, evidentemente muy cómodo en nuestro sistema métrico.
La superficie del cuadrado turquesa es 12,632 = 159,52 cm2 al centésimo cerca. La superficie del rectángulo azul claro es 7,64×20 = 152,8 cm2 al centésimo cerca. La diferencia entre ambas superficies no es despreciable: 6,72 cm2 o cerca del 4 %; lo que parece tolerable en albañilería.

Observemos que este resultado es distintamente menos bueno que el precedente calculado en líneas, lo que muestra que el equivalente en cm propuesto en la obra de F. Corbalán posiblemente no es muy bueno.

Eso podía darnos una advertencia y hacemos de nuevo los cálculos que no parecen justos.
La línea, siempre utilizada en relojería, valiendo 2,256 mm, la palma vale 34 sea 7,67cm y no 7,62! ¡ La palma vale 55 líneas es decir 12,4 cm y no 12,63! ¡Por fin, el empan mide 89 líneas es decir 20,08 cm lo que no es por muy mal! Le dejamos corregir …
Para acabar dejaremos la crítica a los espíritus tristes e invitaremos a cada uno que vagabundee en los textos numerosos que abordan la historia de las medidas con el fin de hacerse una idea personal - por falta de consenso perfecto- así es como avanza la ciencia.



Actividad recreativa sobre el pentágono y el quine (puede ser propuesta en actividad sobre computador)
Así como lo subrayamos más alto, las longitudes de los brazos del quine naturalmente se insertan en el pentágono regular.



Dibuje con la ayuda, por ejemplo del software GEOGEBRA un pentágono EFGHI regular convexo de lado cerca de 3,2 cm. Con la función segmento trace las diagonales del pentágono con el fin de obtener un pentágono estrellado. Éste define un pequeño pentágono regular convexo KMJNL y usted traza sus diagonales. Llamemos O el punto de concurso de la diagonal [KN] y [JL].

Moviendo uno de los puntos del gran pentágono, ajuste el segmento [KE] con el fin de que mida 2 cm al décimo cerca.
Mida entonces las medidas de los segmentos: [OL]; [O.K.]; [KE]; [EF]; [FH].
¡ Usted dibujó un quine a la escala 1/10! (Argumente si posible)

VII - Secuencia de los rectángulos de oro construidos a partir de los brazos de la cruz celeste

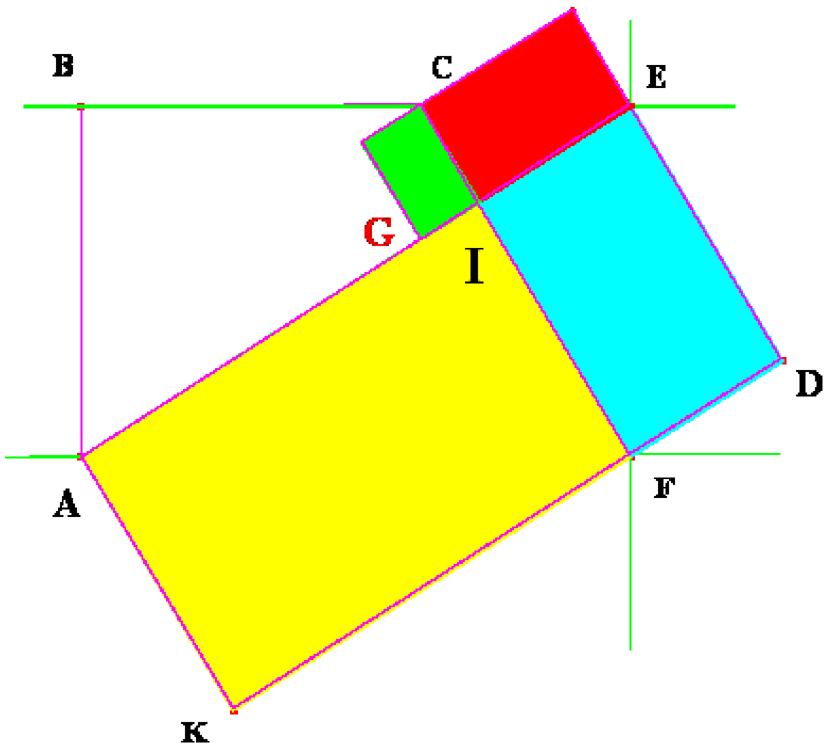
Le proponemos esta sucesión de actividades que pueden parecer ciertamente "elementales" porque sus resultados son un poco "previsibles”. Siendo estas actividades, a priori destinadas a los alumnos de la secundaria superior podrán ser propuestas con beneficio a los alumnos profesores. Le recordamos que, para que los alumnos construyan bien su sicomorfismos(*) alrededor de una noción, es necesario abordar éste según universos diferentes de misma estructura **con el fin de reforzar y precisar su imagen mental**.

Ya que la secuencia de los brazos de las cruces celestes es geométrica de razón φ es interesante observar los rectángulos de oro sucesivos construidos sobre estos brazos.

Observemos que existen dos modos de construir la secuencia de las cruces celestes, ya que, en el pentágono celeste, dos pares de lados interceptan en ángulo recto.

Para simplificar escogemos construir las cruces celestes sucesivas alrededor de un punto fijo I (anotado J en las figuras precedentes).

En la secuencia de cuatro rectángulos de la figura más arriba podemos observar la secuencia formada por los perímetros y por la secuencia formada por las áreas y podemos mirar si son: ¿una secuencia de Fibonacci, una secuencia geométrica o una secuencia aritmética?



(*) Sicomorfismos: es como una analogía pero mas general. Es la correspondencia entre dos universos de conocimientos que tienen la misma estructura. Ver la bibliografía.

Si se prolonga la sucesión de las cruces celestes de modo decreciente o creciente observamos que el punto I es común y que los rectángulos de la sucesión que tienen dos filas de inclinación son homotéticos en una homotecia de centro I y de coeficiente $-\varphi^2$, (si se va en el sentido creciente) $-1/\varphi^2$, (si se va en el sentido decreciente). De hecho esta homotecia a la propiedad de dejar todos los rectángulos de oro de la secuencia celeste, globalmente invariantes. Supongamos la secuencia creciente.

En efecto por ejemplo IA / IE = $\left|-\varphi^2\right|$, esto prueba que el área de un rectángulo es igual a φ^4 veces el área del rectángulo de la secuencia celeste que está colocado dos filas antes. Calculemos el área de un rectángulo con relación al área del precedente:

Por ejemplo, el área de AIFK es igual a:

AI x IF = **φ IF² y el aire de EIFD es: IF x IE =** IF x IF/ φ = IF²(φ-1).

Entonces la relación de la mas pequeña área a la mas grande es:

$(IF^2(\varphi - 1))/(\varphi IF^2) = 1 - 1/\varphi = (\varphi - 1)/\varphi = 1/\varphi^2$.

Pues la relación entre las áreas, en el sentido creciente, es bien φ^2.

Propiedad 5 - La sucesión de las áreas de los rectángulos de la secuencia celeste en el sentido creciente es geométrica de razón φ^2.

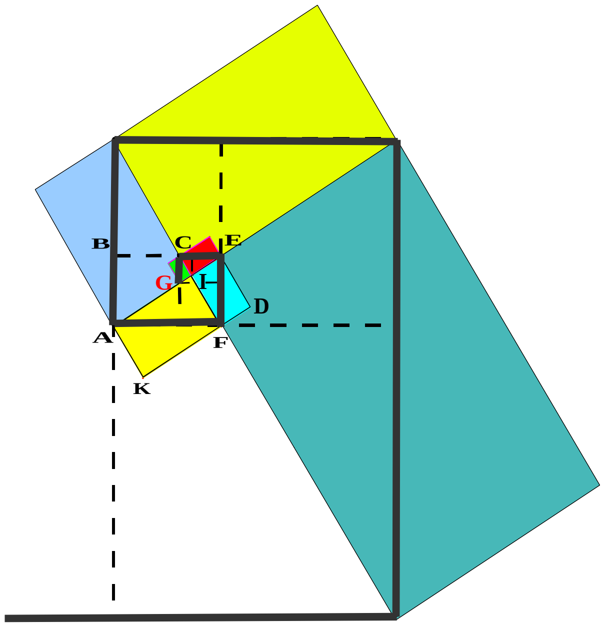
La sucesión de los perímetros de los rectángulos de la sucesión celeste verifica, por ejemplo:

El perímetro de AIFK es $(AI + IF) \times 2 = (\varphi IF + IF) \times 2 = (\varphi + 1) IF \times 2$

El perímetro de EIFL es $(IF + IE) \times 2 = (IF + IF/\varphi) \times 2 = (1 + 1/\varphi) \times 2 IF = \varphi \times 2 IF$. Y la relacion entre los perímetros es:

$((\varphi + 1)IF \times 2)/(\varphi \times 2 IF) = 1 + 1/\varphi = \varphi$. Tenemos entonces la propiedad:

Propiedad 6 - Los perímetros de los rectángulos de la secuencia celeste, siguen una ley de profreción geométrica de razón φ (en el sentido creciente).



Proponemos ahora proseguir la construcción de la secuencia de los rectángulos celestes, lo que consolidará esta noción y sus relaciones con la espiral de los rectángulos de oro que dibujamos en rayas negras sobre la figura al lado.
Pedimos calcular explícitamente lo más simplemente posible los primeros términos de la secesión de los lados de los rectángulos celestes.
Recordemos que, en el párrafo VI calculamos el valor algébrico de la longitud de una de los brazos de la cruz celeste IJ, la siguiente tiene por longitud:

$$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \varphi \ \ ; \text{ la siguiente } \ \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \varphi^2 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times (\varphi+1) \ ;$$

$$\text{la siguiente } \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \varphi^3 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times (\varphi+1)\times\varphi = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ (2\varphi+1) \ \ldots$$

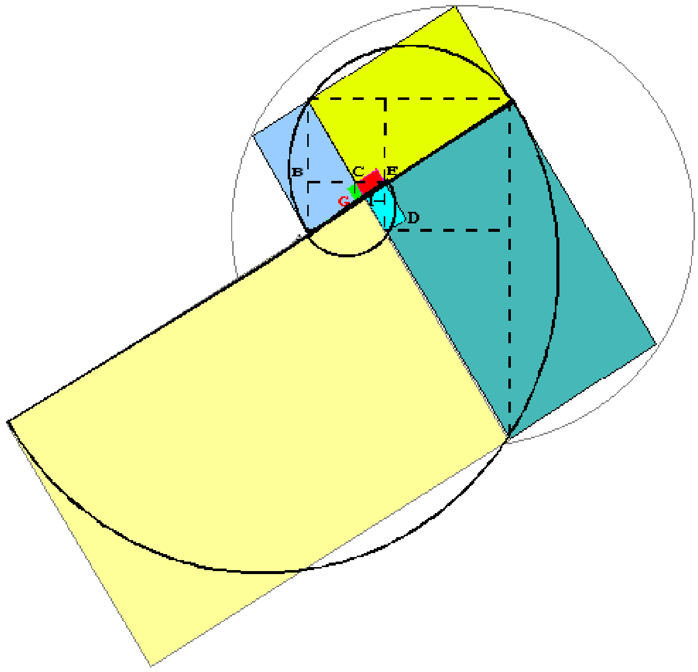
Proseguimos fácilmente utilizando la propiedad demostrada anteriormente: los brazos sucesivos de las cruces celestes forman una sucesión que es geométrica de razón φ y, además, de Fibonacci.
Es pues fácil deducir de eso la secuencia numérica con respeto a φ, de las áreas de los rectángulos de oro de la secuencia celeste:

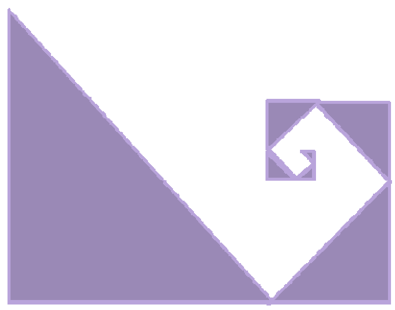
$$\frac{5+\sqrt{5}}{10} \times \varphi \ \ ; \text{ la siguiente } \ \frac{5+\sqrt{5}}{10} \times \varphi^2 \ ; \text{ la siguiente } \ \frac{5+\sqrt{5}}{10} \times \varphi^3$$

y mas generalmente $\dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \times \varphi^n$.

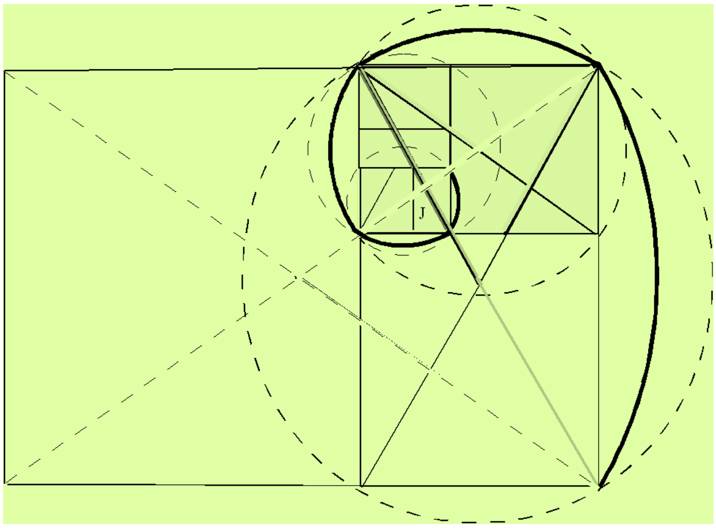
Observamos que contrariamente a la secuencia de los rectángulos de oro que completan a cada etapa un rectángulo perfecto (vea las rayas punteados negros), cuando se añade un rectángulo celeste, se sobrepone a uno de los precedentes pero no completa un gran rectángulo.

La espiral de las diagonales de los rectángulos de oro están construidas (en rayas gruesas sobre la figura) que encuadra la espiral de oro (en gris sobre la figura), lo que puede dar lugar a construcciones hermosas como la de la página siguiente.
Subrayemos que la construcción de los rectángulos celestes de la secuencia pide reflexión y minucia, lo que es muy favorable para el aprendizaje.



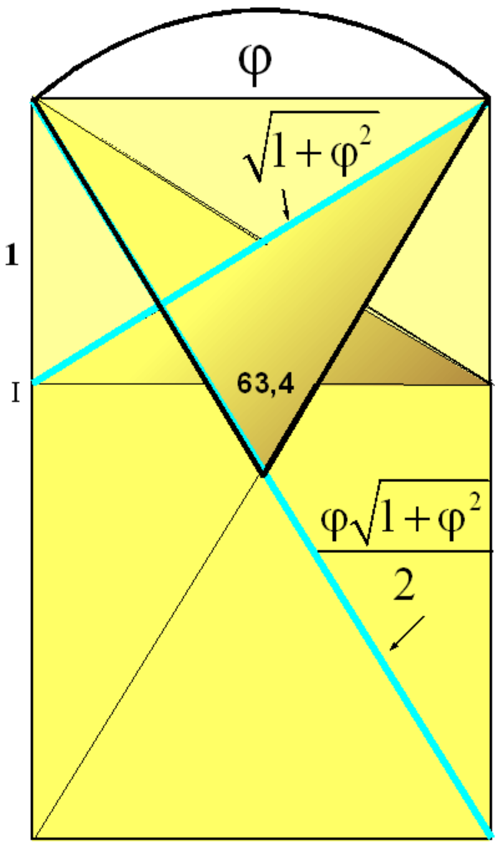


Una nueva investigación para los aficionados: la espiral celeste
Repitamos el trazado de las cruces celestes sucesivas. Nos planteamos una pregunta relativa a la **espiral dorada y construida, de modo natural, con cuartos de círculos sucesivos.** Nos preguntamos si podríamos construir una espiral diferente de ella por lo tanto del punto J común de las cruces sucesivas. Figuramos cinco rectángulos de oro y las cruces que le son asociadas. Les preguntamos entonces a los “alumnos-profesores” sobre la posibilidad de construir esta espiral.



Después de haber contemplado varias posibilidades, observamos que J siempre está colocado sobre la intersección de dos diagonales perpendiculares que no pertenece al mismo rectángulo de oro (esto ha sido estudiado anteriormente).

Vamos pues a trazar los círculos circunscritos a los rectángulos sucesivos de oro y a utilizar cada vez la porción de círculo correspondiente a la longitud del gran lado de cada rectángulo de oro. Trazamos estos arcos de círculo en grueso, obtenemos una espiral bastante curiosa que parece aplastarse. Podemos proponer por ejemplo de calcular la longitud de cada arco ya que ya se conoce el diámetro de los círculos y los ángulos de las diagonales.



Estudiemos por ejemplo el caso particular del lado del rectángulo de oro de lados 1 y φ. El arco de espiral que trazamos es un arco del círculo de centro del rectángulo de oro segundo de lados φ y $1+\varphi$, de diagonal: $\varphi\sqrt{1+\varphi^2}$.

Entonces el círculo tiene por rayo $\dfrac{\varphi\sqrt{1+\varphi^2}}{2}$.

La longitud del arco de círculo de ángulo al centro 63,4° es pues :

$$\pi.\varphi\sqrt{1+\varphi^2}\times\frac{63,4}{360}\simeq 3,14\times 1,62\times\sqrt{1+2,62}\simeq 9,68.$$

El arco de espiral siguiente esta sobre el círculo de diámetro: $\varphi^2\sqrt{1+\varphi^2}$.

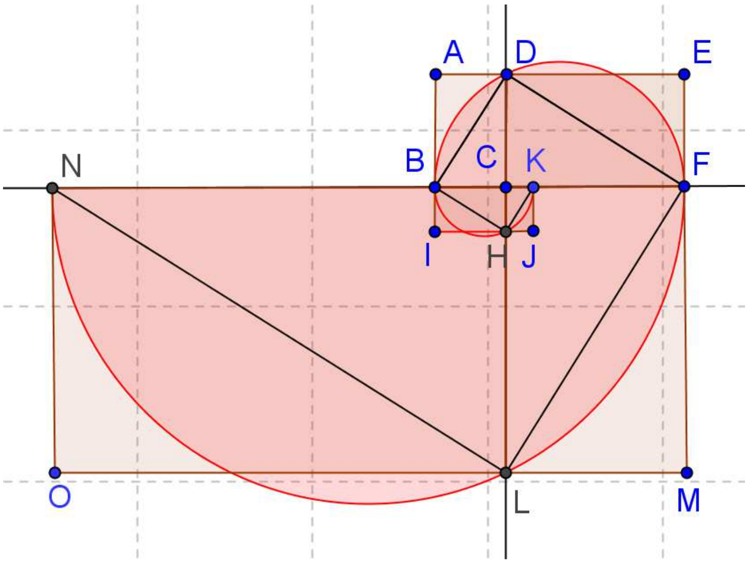
La medida del arco es pues: 9,68 $\times\varphi$ =15,68

al centesimo cerca. Los siguientes se obtenen facilmente: $15,68\times\varphi = 24,40$ etc.

Preguntamos luego si esta **espiral es continua y dérivable**, no es dérivable porque las tangentes a los puntos de conexión de los arcos son perpendiculares a radios de círculos diferentes, ellos de radios diferentes. Pero es continua.

De nuevo una espiral (después de ésta, pasamos a otra cosa)
Ya le hicimos ver que estas espirales doradas y otros rectángulos celestes son una gran fuente de inspiración … La espiral precedente parcialmente nos satisface sólo porque sólo es dérivable por partes (es decir ella "hace puntas") buscamos otra, construida sobre las cruces celestes que sea más hermosa.

Podemos proponer una actividad de consolidación bajo la forma siguiente: construya, a la regla y a la escuadra un rectángulo de oro ABCD hacia arriba, por ejemplo de lados de medida 4cm y 4x1,618 que es poco diferente de 6,5 cm. Observamos anteriormente que cuando se construía la espiral celeste, las diagonales de los rectángulos celestes que tenían un punto común son ortogonales. Preguntamos entonces cómo podemos construir el segundo rectángulo celeste CDEF de pequeño lado de medida 6,5 **sin utilizar cálculo**. Basta con trazar la diagonal [BD] del primero, luego, la perpendicular a [BD] pasando por D que encuentra la recta (BC) en F. Entonces el rectángulo completado DCFE es el rectángulo que sigue en espiral celeste. Utilicemos mientras el hecho de que ambas diagonales [BD]y [DF] son ortogonales para trazar el demi circulo BDF.
Luego prosigamos la construcción con el rectángulo CFML y NCLO y tracemos el semicírculo FLN.
Tenemos, sobre la figura siguiente tracemos también los dos pequeños rectángulos precedentes con el fin de mostrarle el estetismo de la figura. La función asociada con la **espiral obtenida es continua y derivable** en todo punto porque los semicírculos se unen en los puntos B, F, N que tienen tangentes de la misma dirección.

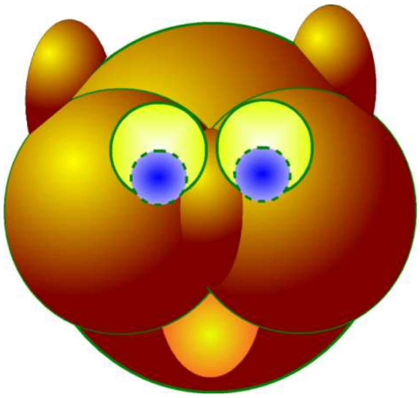


Una pequeña distracción para los días de lluvia (de 7 a 77 años)

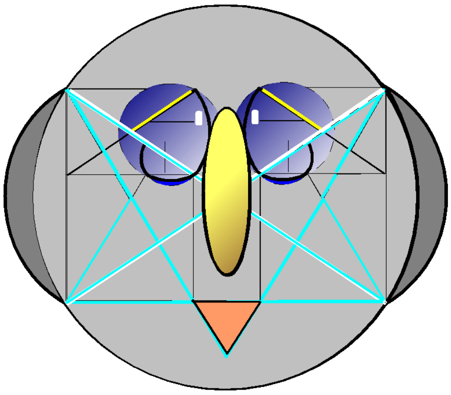
Así como usted lo comprobó, las construcciones alrededor del rectángulo de oro son fuente de entretenimientos matemáticos y se prestan, desde luego, como hemos mostrado a los constructores a muchos hallazgos.

Le proponemos pues elaborar dibujos humorísticos y\o estéticos gracias a las construcciones precedentes; basta hacer una symetrisacion con relación al eje vertical del más gran rectángulo de oro, para obtener, por ejemplo, una interpretación (pobre) del gato de Geluck (a continuación una página de publicidad gratuita). Le añadimos una lengua y orejas que no estan en divina proporción, aunque …

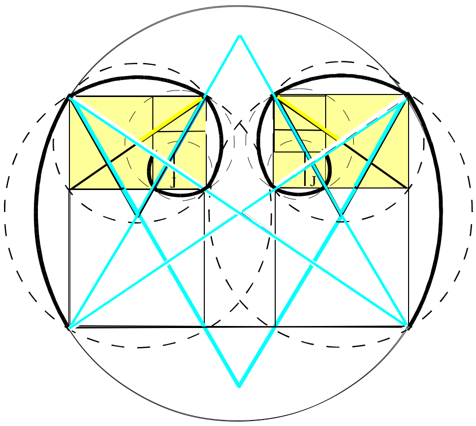
Hay que decirlo bien, el de Geluck está mejor conseguido pero con un buen software de dibujo usted podrá hacer un dibujo lindo, el problema es de bién respetar los sucesivos círculos circunscritos a los triangulos de oro. ¡Entonces tengáis bien atención a los puntos de intersección!
¡Como es un poco rollizo lo llamaremos el "chatbouillotte" o de otro modo si usted prefiere! ¡Usted podrá hacer un concurso entre su amigos, niños o alumnos del “ Más bello Chabouillotte”!
…
Al lado indicamos los círculos circunscritos a los rectángulos de oro y el pentágono celeste subyacente. ¡Como se parece en la luna, le llamamos “Chatquirève” (gato soñador) pero esto puede también a ser Chatcéleste!



«Le Chatbouillotte»
(Gato bolsa de agua caliente)



«Gatosoñador»

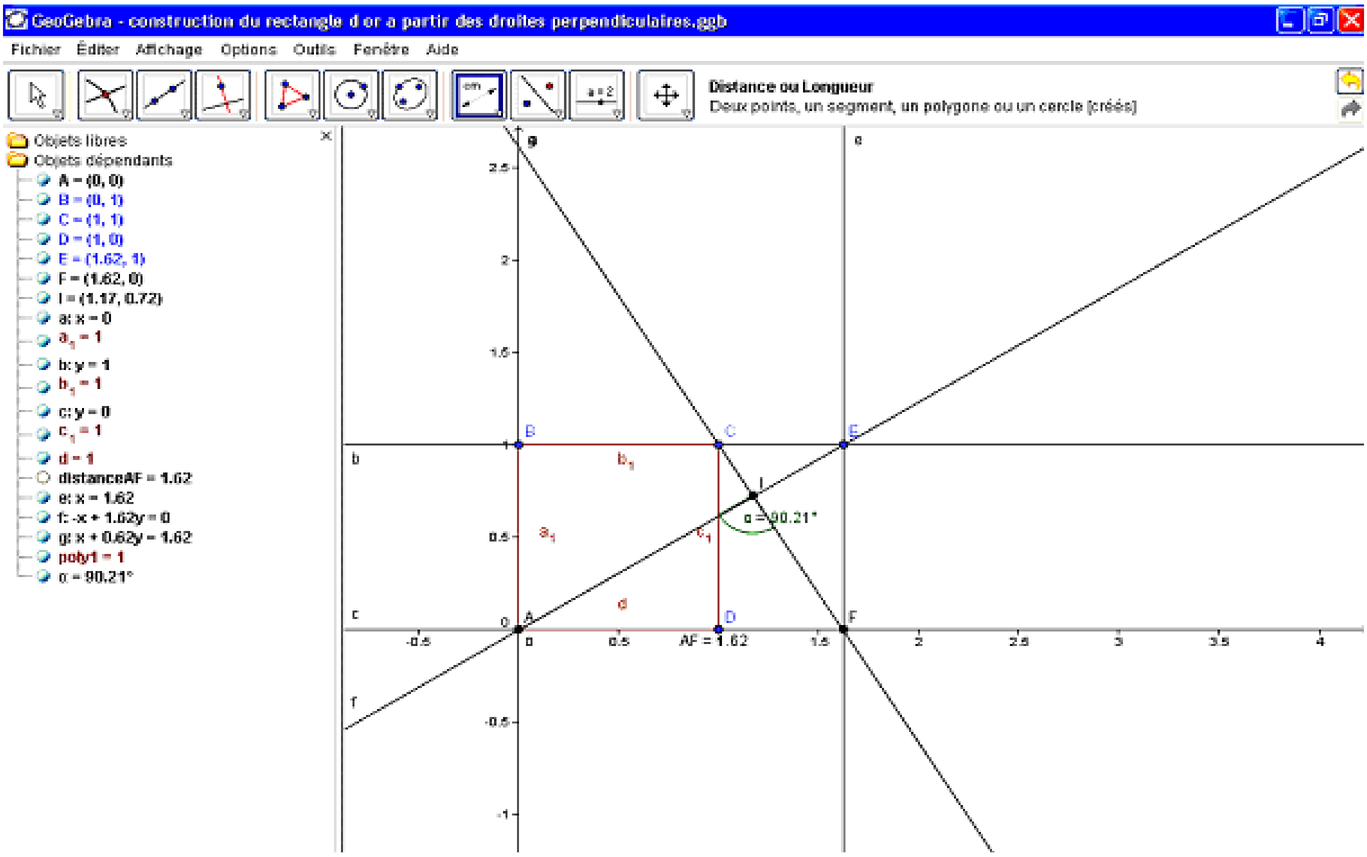


Construcción del Gatosoñador

El gato de Geluck

VIII - Una construcción del rectángulo de oro y de la cruz celeste con la ayuda del software GEOGEBRA

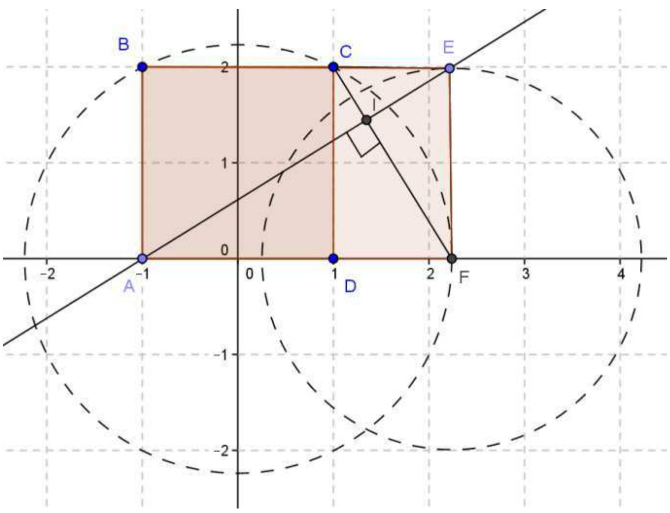
1) Trazamos un cuadrado ABCD de longitud de los lados igual a 1, φ (con la función distancia del software), luego le añadimos un rectángulo exterior CDFE, tal como el punto F sea sobre la recta (AD) y el punto E sobre la recta (BC).
2) Trazamos las rectas (AE) y CF) que se cortan sobre I, luego hacemos medir por el software uno de los ángulos de vértice I.
3) Desplazamos el punto F, (siempre sobre la derecha (AD) y nos paramos cuando el ángulo escogido de vertice I es 90° con la mejor precisión posible).
4) Con la función distancia del software comprueba que la distancia AF es una aproximación del número de oro, es decir 1,62 al centésimo (indicada sobre la impresión de pantalla más abajo).



Justificación de la construcción

Ya que, por construcción, los segmentos [AE] y [CF] son ortogonales, los triángulos AEF y CFE son semejantes así como los rectángulos ABEF y CEFD. Tenemos pues la proporción siguiente: (AD + DF) / AB = CD / DF.

Elijamos la longitud del lado del cuadrado ABCD como unidad de medida: AD = 1; tenemos: (1+DF)/ 1 = 1 / DF.



Elijamos DF = x donde x es un numero real positivo. Tenemos la ecuación en R+*: (1+x) = 1/x, equivalente a:

$x^2 + x - 1 = 0$ cuya la solución es:

$x = (-1 + \sqrt{5})/2 = \varphi^{-1}$.

El rectángulo ABEF es de oro.

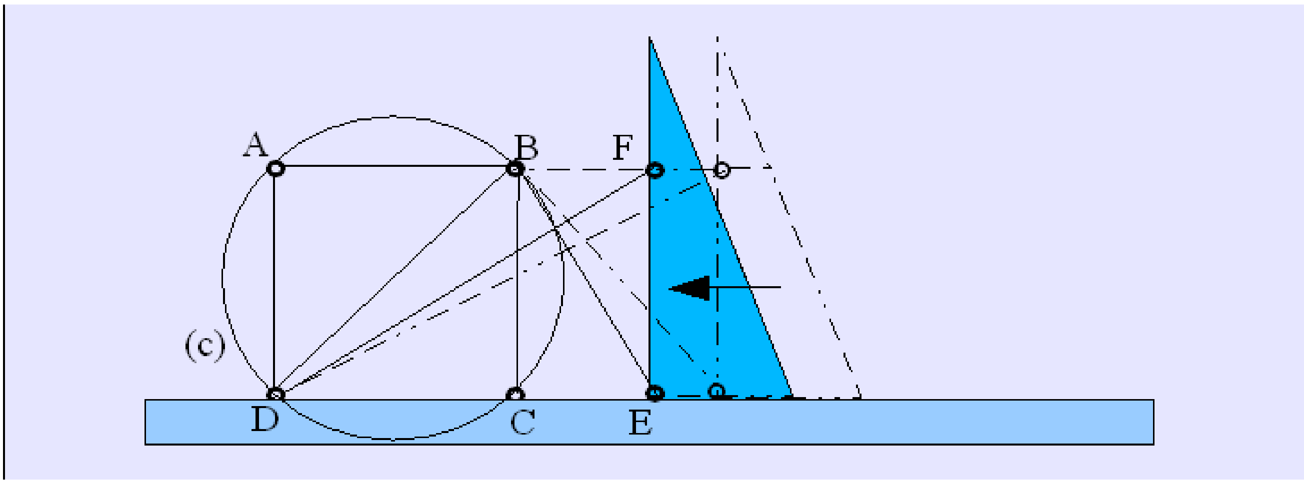
Enunciado de la propiedad con las notaciones de la figura precedente:

Propiedad 7 - Si se prolonga dos lados opuestos de un cuadrado ABCD por un rectángulo CDFE, para que CDFE sea un rectángulo de oro, basta que las diagonales respectivas [AE] y [CF] del rectángulo ABEF y CDFE sean ortogonales.

Realización en forma de artesanado

Una plancha o una hoja de carton fu erte
Un cuadrado ABCD figurado con cuatros puntas de acero
El circulo circonscrito al cuadrado trazado sobre la plancha.

Una regla llana apretada sobre los puntos C y D
Una escuadra desliza sobre la regla llana
Dos puntos E y F sobre la escuadra de distancia igual al lado del cuadrado, E sobre el vertice del angulo recto de la escuadra

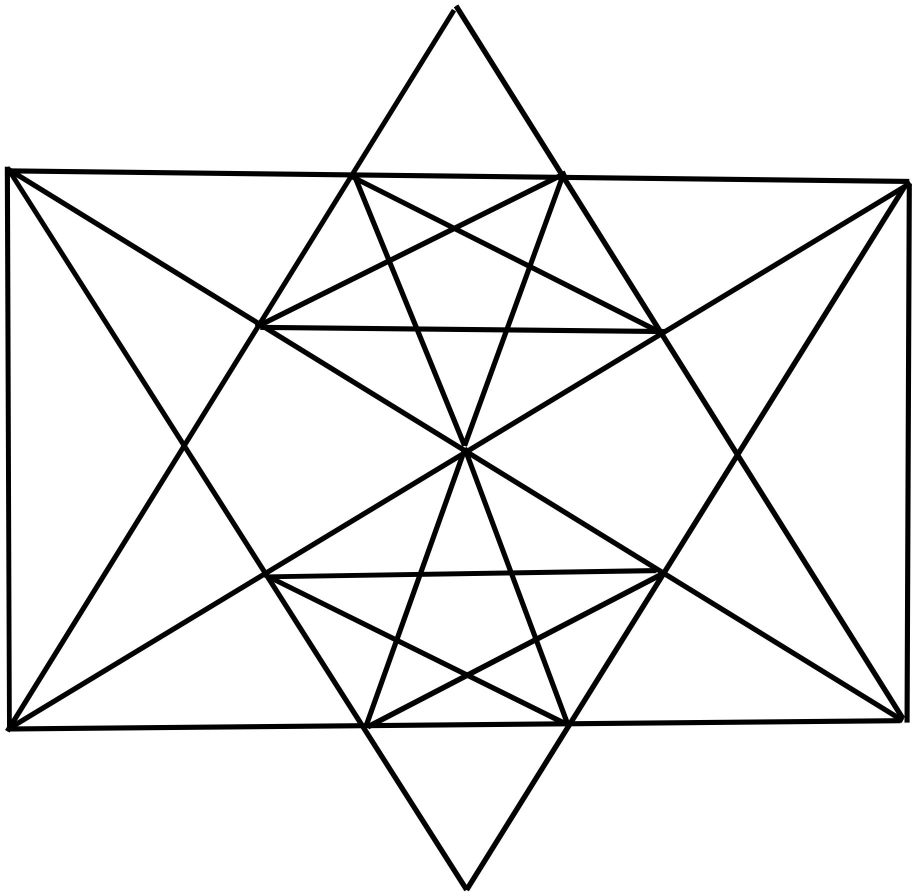


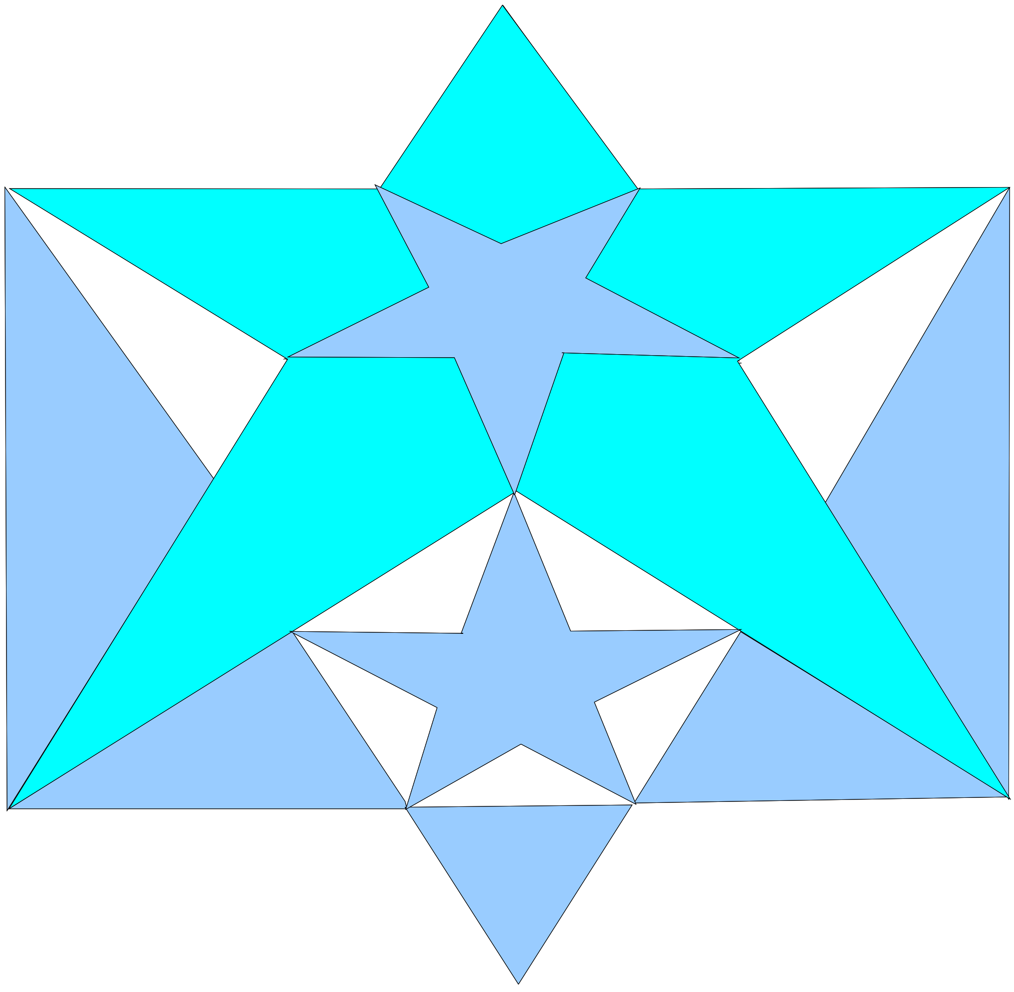
Dos elasticas fijadas a las extremidadesde la diagonal [DB] del cuadrado y a las dos puntas de la escuadra. Ajustamos la escuadra para que las dos elasticos se crucen Sobre el circulo, entonces los rectangulos AFED y BFEC son de oro.

Material: una tabla de contrachapado, algunas puntas, una regla llana, una escuadra, un compás dos elásticos (por grupos por lo menos de tres alumnos).
Es bueno subrayar que una vez más esto no es porque "esto marcha" que somos satisfechos, es posible que nuestro " pequeño rectángulo de oro" no dé una aproximación muy buena de φ (si suponemos el cuadrado de lado unitario) sino se trata de **realizar físicamente una investigación matemática**, hacemos un trabajo de ingeniero, que deberá por ejemplo, refinar sus ajustes para responder a normas de precisión.

Comentario: así como en todas estos experimentos de construcción geométrica, estamos confrontados con el problema de la aproximación: espesor de las rayas, el diámetro de las puntas, el posicionamiento incierto de la regla, la interesa de la posición de la intersección de ambos elásticos sobre el círculo que pueden perturbar al alumno.
Hacemos aquí el trabajo recíproco del precedente donde comprobábamos que GEOGEBRA nos daba una medida de φ aceptable y luego, justificamos la validez de la construcción.
En la vida industrial es más frecuente de reflexionar sobre una técnica, luego de realizarle lo mejor posible pero, en la escuela, no hay que privar al alumno de la adivinanza: "¿ por qué esto marcha?"
Para acabar le proponemos un mosaico construido a partir del hexágono introducido en el cálculo de la elipse circunscrita en el pentágono celeste al párrafo IV. Este mosaico pone de manifiesto dos nuevos pentágonos, que parecen unos pentágonos regulares vistos en una otra perspectiva, también proponemos a su sagacidad el pequeño problema siguiente: ¿existe una transformación simple que parte del pentágono celeste y tiene como imagen este nuevo paqueo pentágono? Le proponemos comenzar por estudiar la disminución de los lados del pequeño pentágono utilizando los cálculos y las propiedades demostradas anteriormente.

El segundo mosaico ha sido construido "por placer" …
Para los apasionados de geometrías divertidas, lo que usted es ciertamente si usted nos acompañó en el transcurso de este libro, le aconsejamos el artículo en francés, en línea, de Richard Choulet que le hará pasar del oro a la plata y al platino..
« *Après le nombre d'or, quels nombres aussi riches inventer ?*» 2007
http://www.apmep.fr/Apres-le-nombre-d-or-quels-nombres





Anexo

Les medidas antiguas; enlaces wikipedia, vea también
http://aviatechno.net/unites/index_unites.php

Unidad	correspondencia	en pie-del-rey	en talla del l'Escritorio *antes 1667*	en talla del Châtelet *después 1668*
un **punto**	1/12 línea	1 / 1 728	0,189 mm	0,188 mm
una **línea**	12 puntos	1 / 144	2,268 mm	2,256 mm
un **pulse**	12 líneas	1 / 12	2,722 cm	2,707 cm
un **pie-del-rey**	12 pulses	**1**	**32,660 cm**	**32,484 cm**
una talla		6	1,959 m	1,949 m
una pértiga-del-rey	3 tallas	18	5,877 m	5,847 m
une pértiga ordinaria	10/9 pértigas-del-rey	20	6,532 m	6,497 m
une **pértiga** de arpendes[3]	11/9 pértigas-del-roí	22	7,185 m	7,146 m
un **arpende**	10 pértigas de arpende	220	71,851 m	71,465 m
une legua antigua[4]	*500 pértigas ordinarias*	10 000	3,266 km	—
*una **legua** de Paris*[5]	*600 pértigas ordinarias*	12 000	—	3,898 km
une legua de las Postes[6]	60 arpendes	13 200	—	4,288 km
une legua tarifaria[7]	*720 pértigas ordinarias*	14 400	—	4,678 km

En 1799 el metro decimal fue determinado a ser igual a 443,296 líneas-del-rey.
Despues el pie-del-rey mide 9 000 / 27 706 metros.

Bibliografía (en Francia)

CARREGA Jean-Claude « *Théorie des corps* » *La règle et le compas*, octobre 2001 Hermann Paris.
CHALAVOUX Rober, HAKENHOLZ Christian, VINCENT Robert *Collection Nombre d'or* Marseille 2001 Éditions Chalagam.
CHOULET Richard, *« Après le nombre d'or, quels nombres aussi riches inventer ? »* 2007 *http://www.apmep.fr/Apres-le-nombre-d-or-quels-nombres*
ÉVEILLEAU Thérèse *« Mathématiques magiques* » en ligne www.therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr
LE GOFF Jean-Pierre *Les cahiers de la perspective* (n° 7) décembre 2002, Caen IREM de Basse-Normandie, (voir aussi les n° 4 et 6 catalogue en ligne de l'IREM).
LE GOFF Jean-Pierre, RODRIGUEZ HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle *« Définition et propriétés succinctes des Pentagones Célestes » Le miroir des mathématiques* (n°13) Avril 2014 IREM Caen.
RODRIGUEZ HERRERA Ruben *Activités variées autour du nombre d'or pour la classe de troisième,* quatre articles en ligne sur le site de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie Caen 2012: http://www.math.unicaen.fr/irem/
RODRIGUEZ HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle « Initiation aux équations algébriques módulo un nombre premier, le cas du nombre d'or » in *Le miroir des mathématiques* (n° 13) Avril 2014 IREM Caen.
RODRIGUEZ HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle « Les symétriseurs » in *Le miroir des mathématiques* (n°6) Décembre 2010.Caen, I.R.E.M. de Basse-Normandie et en ligne: http://www.math.unicaen.fr/irem/
SALLES-LEGAC Danielle et l'équipe de géométrie de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie *Activités variées de constructions géométriques de la parabole, prolongements à l'ellipse* (en espagnol et en français). Caen, I.R.E.M. de Basse-Normandie 2011.
SALLES-LEGAC Danielle et l'équipe de géométrie de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie *Découvrir et démontrer en géométrie avec des pièces de puzzle* (en espagnol et en français). Caen, I.R.E.M. de Basse-Normandie 2011.
SALLES-LEGAC Danielle et l'équipe de géométrie de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie *Symétrique axial d'un point et déplacement d'un segment par pliage Le miroir des mathématiques* (n°10) novembre 2012, Caen, I.R.E.M. de Basse-Normandie et en ligne: http://www.math.unicaen.fr/irem/
SOUFFLET Michel *Cent énigmes mathématiques de tous les jours* Vuibert 2014
SOUFFLET Michel *Les mathématiques de tous les jours* Vuibert 2009
VILLANI Cédric (sous la direction de) *Le nombre d'or, le langage mathématique de la beauté.* Collection Le monde est mathématique. Éditeur RBA France Paris 2014

Membres de l'équipe Géométrie de l'IREM de Basse-Normandie:
Anne-Marie BOCK, Éric LEHMAN, Olivier LONGUET, Ruben RODRIGUEZ, Danielle SALLES, Michel SOUFFLET, relectrice au Pérou: Silvia SANCHEZ.

ruben.rodriguez@unicaen.fr danielle.salles@unicaen.fr

Indexo **paginas**

Actividad de investigación 10, 25
Adición modulo 5 108
Ampliación-reducción 8
Cerillas (paquetes de) 109
Amonita 76
Ángulos (superponibles o iguales) 5
Ángulos complementarios 5 …
Artes plásticas 14, 39
Bibliografía 169
Botticelli Sandro 45
Caracol (concha) 76
Cuadrado latino 109
Tarjeta (bancaria) 99
Cometa 67
Compás a puntas secas 43
Congruencias (módulo p) 102
Consolidación (de saber) 162
Chino (problema) 101
Cuerpo (de números) 116
Codo (medida antigua) 154
Cruz celeste 135
Dali Salvador 44
Descubrir (con las manos) 6
Deltoides 67
Deformación (de pavimento) 69
Diagonal 145
Didáctica 5
Distraído (juego de) 105
Divina proporción 24, 40, 91
Doble espiral 74
Ecuación polar 86
Ecuación (del primer grado) 110
Ecuación (del segundo grado) 92
Ecuación (módulo p) 101
Elipse 140
Empan (medida antigua) 154
Enigma chino 100
Épidavros (teatro de) 96
Epistemología 5
Escalera celeste 153
Espiral 23, 41
Espiral celeste 147
Espiral de Arquímedes 72, 93
Espiral de Teodoro 72
Espiral dorada o de oro 62, 82
Espiral logarítmica 72, 94
Espiral (otras espirales) 63
Euros (juego de) 111
Fibonacci (secuencia de) 23, 48, 97
Fídias (arquitecto) 60
Foto (número de oro en ella) 98
Fracción continúa 57, 95
Gato celeste, gato que sueña 169
Galaxia 76
GEOGEBRA (software de dibujo) 11, 32
Geometría del compás a puntas secas 36, 152
Girasol (flor) 83
Hexágono 137
Historia de las artes y de las matemáticas 13, 39
Hoja de cálculo 11, 48
Homotecia (espiral) 94
Igualdad de los ángulos 8
Identidades notables 3
Juego de dado a 6 caras 103
Leonardo de Vinci 48, 55
Líneas trigonométricas exactas de $\pi/5$ 49
Líneas trigonométricas del pentágono celeste 141

Indexo **paginas**

Louvre (pirámide de)
Loxodromia, navegación 81, 95
La misma forma (triángulos de) 4, 8
Medidas antiguas 16, 155
Media y extrema razón 40
Mitos del número de oro 48
Módulo p (número) 101
Mondrian 99
Monet (Claude) 98
Nautilo (concha) 76
Número de oro (φ) 47, 89
Número de oro módulo 11 113
Palma (medida antigua) 54, 154
Pavimentos regulares 67
Pavimentos no regulares 67
Pavimentos dorados 76
Partenón 14, 56
Pintura (el número de oro en ella) 51
Penrose Roger (pavimento) 66, 83
Pentáculo celeste 121
Pentágono celeste 108, 122
Pentágono celestes (líneas trigonométricas) 139
Pentágono celeste (medidas de los lados) 112
Pentágono regular 15, 47
Pentágono regular a la regla y al semicírculo 43
Perspectiva (del pentágono regular) 127
Phi (Ver número de oro)
Pie (medida antigua) 54, 154
Pliegue (rectángulo de oro por) 29
Pliegue (pentágono por) 34
Psycomorphisme (Sicomorfismo) 6
Pirámide 56
Pirámide del Louvre 57
Pitágoras 5
Problema chino (resolución) 120
Proporción 4
Quine (instrumento) antigua de medida) 54, 154
Raíces cuadradas 29, 58
Radicales encajados 97
Rectángulo de oro (por plegado) 34, 143
Renacimiento (pinturas) 91
Residuo cuadrático 115
Romances (iglesias) 55
Rosetón 70
Sicomorfismo 6
Tangente (de un ángulo) 41, 45
Thoronet (abadía de) 57
Tornado 83
Transportador (compás a puntas secas 45
Triángulo de oro 15
Triángulo sagrado 15, 25
Trigonometría 48
Universo experimentable 6
Vinci 4, 40
Vitruvio (hombre de) 51

Jugar y aprender con el número de oro

Esta obra es una compilación de actividades variadas y con inmensa mayoría de contribuciones personales sobre el "Número de oro".

Les presentamos los dominios diversos tanto contemporáneos como antiguos donde este número muy particular ha sido empleado.

Usted encontrará pués en estas páginas:

- La pequeña historia del número de oro, la del pentáculo o del pentágono regular, diversas espirales relacionadas o no al número de oro, vistas por los arquitectos, los pintores y\o los matemáticos.
- Sus propiedades científicas curiosas: la espiral de oro cuyo crecimiento vuelve a copiar casi exactamente la del nautilo, del corazón del girasol, de ciertas nebulosas, pero no la de su manguera de riego …

- Novedades: pentágono, cruz y espiral que hemos nombrado celestes a causa de sus relaciones estrechas con las vistas en perspectiva.

- El Universo de estos objetos fascinantes: la pavimentación plana, las consideraciones astronómicas y\o de la navegación en mar, los secretos de las bellas pinturas del renacimiento y las bellas fotos numéricas.

En cada capítulo, presentaciones culturales y\o lúdicas le permitirán entrar por la gran puerta y caminar según su gusto y su ritmo en un "Lenguaje matemático de la belleza" como lo cualifica Cédric Villani (Medalla Field de la Matemática) en su colección "El Mundo es matemático".

No tengáis miedo de estas últimas palabras porque usted lo hará en dibujos soberbios, doblados, rompecabezas, juegos para los grandes y pequeños …

Los autores conciben desde hace tiempo actividades para la formación de los Profesores de las escuelas, los liceos y universidades en el marco del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de la Matemática (I.R.E.M. de Normandía, Francia.)

Eric Lehman fue primer Director de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie en 1974.

Ruben Rodriguez Herrera, Danielle Salles-Legac, Jean-Pierre Le Goff,

Abderrahmane Nitaj, Michel Soufflet, Anne-Marie Bock.

Ruben.rodriguez@unicaen.fr Danielle.salles@unicaen.fr

Editor io: I.R.E.M. de Normandia Caen Francia Janvier 2016

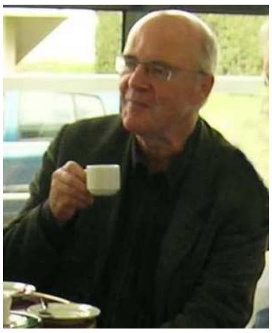
Formato A5	Número de páginas : 175	Precio 7 dolares	ISBN : 978-2-902498-09-33

Autores y contributores

Ruben Rodriguez
Herrera

Danielle Salles-Legac

Anne-Marie Bock



Jean-Pierre Le Goff

Eric Lehman   Michel Soufflet

Abderrahmane Nitaj

Silvia Sánchez D’Arrigo