Didactique des mathématiques
Processus de création et d'apprentissage
La notion de psychomorphisme

L'apprentissage en cycles 1 à 3

Par Ruben Rodriguez Herrera (*)

Mots clés : actions directement expérimentables, analogie, apprentissage, covariation, modèle, morphisme, psychomorphisme, structure algébrique, système intelligent, univers.

Introduction : état des lieux

Nous nous proposons dans cet article de préciser le contexte et la signification du terme **« Psychomorphisme »** que nous avons introduit dans notre thèse de Didactique des mathématiques : « La pédagogie des mathématiques est-elle moderne ? », puis d'en observer les développements et applications actuels en didactique des mathématiques.

Pour le développement de nos travaux nous nous sommes appuyé sur ceux de Jean Piaget en psychologie cognitive d'une part et ceux de Alexandre Grothendiek en théorie des catégories d'autre part car notre formation de mathématicien nous en avait fait apprécier la profondeur et l'adaptation aux problèmes de l'étude des apprentissages tant humains qu'artificiels.

Au moment de la soutenance de notre thèse, nous avions présenté nos travaux autour des psychomorphismes à Jean Piaget qui les avait qualifiés de « voie intéressante » et nous avait encouragé à les poursuivre.

En effet, au XXème siècle deux questions, entre autres, ont passionné la recherche en « intelligence » :

- Comprendre comment se forment les concepts dans l'intelligence humaine.
- Comment, s'il est possible de le faire, construire des systèmes intelligents artificiels.

Pour notre part, c'est l'éveil de l'intelligence des enfants et la continuation des processus d'apprentissage chez l'adulte qui nous intéressent et ce sont eux que nous développerons grâce à nos outils de formalisation.

(*) Agrégé, Docteur en didactique des mathématiques ; avec la collaboration de Danielle Salles-Legac Maître de conférences HDR Équipes Géométrie et Relations Internationales de l'IREM

Historique de nos travaux en vue de la thèse
Enseignement à Montevideo

Lors de l'introduction de la réforme dite des « Mathématiques Modernes » menée tant en France que dans d'autres pays comme notre pays d'origine l'Uruguay en 1970, nous avons eu l'opportunité de travailler, en tant qu'assistant du Laboratoire de psychiatrie infantile du Professeur Rebollo à Montevideo, sur les raisonnements logiques et mathématiques chez l'enfant en situation d'handicap mental léger.

Nous avons pu pendant quatre années élaborer et expérimenter nos outils théoriques sur l'apprentissage de ces enfants. Nous avons ainsi mis en oeuvre dans notre pays les parcours de Jean Piaget sur la formation des structures de raisonnements à partir des actions où l'enfant se trouve dans la nécessité d'anticiper les résultats.

Pourquoi le terme « psychomorphisme ?

Lorsque l'enfant, après une action, doit anticiper le résultat de l'action suivante, il effectue ce que nous appelons un **psychomorphisme** prenant sa source dans les interactions de chaque individu et ses univers familiers et ayant pour but de construire une connaissance dans son univers mental. Il se sert de l'image mentale qu'il a construite lors de son expérience **pour prévoir l'action qu'il doit effectuer** ensuite pour se rapprocher du but de son action. Il y a donc associé de façon naturelle, à chaque psychomorphisme construisant la connaissance, un psychomorphisme réciproque menant à une action anticipatrice sur le monde sensible perceptif (attention la composition de ces deux morphismes n'est pas l'identité, au contraire elle mène à deux enrichissements : celui du monde perceptif de l'enfant et celui de sa connaissance mentale de ce monde).

Pourquoi le terme « univers » ?

Nous avons donc utilisé le terme « morphisme » à cause du fait qu'il s'agit d'une fonction au sens large définie sur un univers à valeur dans un autre univers, nous l'avons complété par le préfixe « psycho » puisqu'il s'agit d'une démarche à visée psychique et plus précisément cognitive. Si nous avons utilisé largement à l'époque le terme d' « univers » utilisé en mathématiques -plus précisément en **probabilité** c'est qu'il nous paraissait parfaitement adapté à la représentation des modèles utilisés dans l'étude des phénomènes d'apprentissage en général et plus particulièrement en mathématique. Ce terme est maintenant couramment utilisé en didactique (par exemple les « **univers cognitifs** »). Le terme « **morphisme** », au sens algébrique le plus large est bien adapté pour désigner les correspondances ou fonctions entre univers cognitifs où la modélisation par structures du type mathématique est opérationnelle, nous le préférons au terme « flèche » qui serait peut-être mieux adapté mais moins riche de sens.

Nous allons développer dans ce qui suit, de quelle façon les modèles algébriques nous ont inspiré afin de construire une modélisation des phénomènes de l'apprentissage et de la formalisation dans un système intelligent, par exemple celui de l'être humain. Ensuite nous montrerons comment nous avons pu transposer ces modèles relatifs à l'apprentissage en général, à l'apprentissage des mathématiques et nous donnerons quelques exemples de séquences d'enseignement. Nous essaierons ensuite de montrer la valeur didactique de ces parcours dans d'autres domaines de la connaissance.

Pendant les années où nous avons effectué nos recherches, dans le laboratoire de sciences de l'éducation de l'université de Caen, nous avons utilisé le terme « psychomorphisme » comme un néologisme. Plus tard nous avons vu avec un grand intérêt que ce terme avait été utilisé pour modéliser des phénomènes en sociologie par Gabriel Tarde, juriste et sociologue français et qui inspira, par ces idées et découvertes, Jean Piaget !

Citation extraite du site internet de la « Fondation Jean Piaget »

« Gabriel Tarde (1843-1904). Juriste et sociologue français.

Deux noms sont souvent cités comme source de la sociologie française, d'abord, au premier rang, celui de Durkheim, mais ensuite celui de Tarde, qui a pris le contre-pied de la position durkheimienne en s'intéressant aux facteurs individuels dans l'explication des faits sociaux.

Juriste de formation et juge d'instruction, ultérieurement nommé professeur au Collège de France (en 1898), Tarde en est tout naturellement arrivé, par son activité professionnelle, à s'interroger sur les raisons ou les causes des actes criminels. C'est à l'occasion des recherches qu'il entreprend pour répondre à cette question qu'il découvre les deux "forces" qui, selon lui, sont à l'origine des phénomènes sociaux : l'invention et l'imitation. Le point de départ d'une innovation sociale réside toujours dans une invention individuelle. Une fois cette invention faite, elle diffusera chez les autres individus par le biais de l'imitation. Alors que chez Durkheim tout le poids de l'explication repose sur la contrainte que la société est supposée exercer sur des individus sans consistance, chez Tarde au contraire c'est dans chaque individu que se trouve le ressort qui fait naître le lien social. Ce ressort est précisément l'imitation. Les individus ne cessent d'être des sources de suggestions de nouveaux comportements chez autrui, et ces comportements partagés (le langage, les croyances, les coutumes, etc.) créent les groupes sociaux. Le mouvement d'imitation qui entraîne les individus à nouer des contacts les uns avec les autres est par ailleurs contrebalancé par un mouvement d'opposition. Du juste équilibre en imitation et opposition surgira l'adaptation des individus à leur milieu. Ainsi, de l'innovation, de l'imitation et de l'opposition naissent et disparaissent ces mouvements sociaux que Tarde étudie dans plusieurs de ses ouvrages.
Ces quelques considérations suffisent à montrer comment Piaget a pu trouver chez Tarde des analyses et une source d'inspiration qui correspondent, sur le plan des faits sociaux, aux analyses que de son côté le biologiste le Dantec réalisait à peu près dans les mêmes années sur le plan des transformations et des adaptations vitales.

Parmi les ouvrages de Tarde mentionnons "La criminalité comparée" (1886), "Les lois de l'imitation" (1890), "La logique sociale" et "Les transformations du droit" (1893), "L'opposition universelle" (1897) les "Etudes et psychologie sociale" (1898; Tarde fut, avec le sociologue Gustave le Bon, l'un des créateurs de la psychologie sociale), "L'opinion et la foule" (1901) et "La psychologie économique" (1902). »

Notons que Tarde utilise le mot psychomorphisme dans un sens légèrement différent du nôtre puisqu'il parle plus « sociologiquement » « d'avidité (*) » de l'humain (vis-à-vis de l'expérience et du savoir afin de parfaire sa connaissance du monde et d'accroître ainsi son potentiel défensif vis-à-vis des agressions).

(*) Sociétés *status nascendi*. La constitution du social selon Gabriel Tarde par José García Molina. http://www.ub.edu/grecs/membres/jose-garcia-molina/ (en espagnol)

I - Les « Univers » en psychologie cognitive

La psychologie cognitive manipulant en général des objets finis ou dénombrables, nous parlerons souvent d'**ensembles** au sens mathématique. De même nous considérons que nos ensembles sont constitués d'éléments accessibles, c'est-à-dire qu'en général nous saurons décider si un objet donné appartient ou non à un ensemble donné (**axiome du choix**).

Pour envisager les conditions d'une expérience cognitive la définition des **ensembles est trop restrictive**, en effet, en mathématiques un ensemble est souvent constitué d'êtres de même type : un ensemble de groupes commutatifs, par exemple.
Un ensemble est défini soit :

- Par une énumération de ses éléments constitutifs, par exemple l'ensemble des nombres 3, 4, 5 ou bien :
- Par une définition : l'ensemble des élèves de la classe.

Lorsque ces deux descriptions risquent d'être ambiguës ou contradictoires (ensemble de cardinal inaccessible ou même « ensemble de tous les ensembles ») on a recours au concept de « **classe** ». Dans le cadre de la cognition et/ou de l'apprentissage, cette notion de classe ne nous paraît pas opportune car un peu trop usuelle dans la vie courante, de plus, comme nous l'avons signalé plus haut nous manipulons des objets ou des concepts bien définis :

- Soit par une définition d'appartenance : par exemple l'ensemble des élèves d'une classe ;
- Soit par une énumération : par exemple les outils de la géométrie utilisés dans une classe : règle, compas, rapporteur.

S'ils sont peu accessibles sauf à l'aide d'instruments sophistiqués, même les notions (biologiques, physico-chimiques, de localisation dans l'espace), concernant le cerveau et les neurones sont relativement (*) bien définies, on parlera par exemple de l'ensemble des neurones **concernés par une expérience précise d'apprentissage**. Par contre, lorsqu'il est plus difficile de cerner les composants d'une expérience ou d'une étude car elles s'appliquent à un grand nombre de données, on préférera le terme « univers », par exemple, l'univers de l'enseignement, l'univers de la finance, l'univers cognitif du bébé etc.

Nous avons employé ce terme dès le commencement de nos recherches, il est couramment utilisé maintenant en psychologie cognitive.

Chaque univers étudié doit être muni des opérations ensemblistes habituelles : réunion intersection… mais aussi d'opérations plus spécialisées comme l'addition ou la juxtaposition, nous les préciserons dans chacun des exemples qui vont suivre.

(*) Des études récentes montrent que le cerveau mobilise fréquemment, en même temps, plusieurs réseaux de neurones, on pourrait presque dire qu'il fonctionne en « **parallélisme massif** » comme disent les informaticiens spécialistes d'intelligence artificielle, voyez notre développement page 5 et suivantes.

En cycle 1

Exemples d'univers dits familiers

II – a Dans le salon d'une maison, un feu est allumé dans la cheminée.

Un enfant se tient debout à une certaine distance du foyer. Quand il le regarde, il a une image visuelle du foyer allumé. Cette image occupe seulement une partie de son champ visuel, il peut voir d'autres objets dans le salon. Notons V_1 cette image du foyer à l'instant t_1. À ce moment l'enfant entend le crépitement des bûches avec une intensité que nous notons S_1. Au même instant, il perçoit une intensité de chaleur correspondante à une certaine température T_1. Nous noterons de même O_1 l'intensité de l'odeur de la fumée produite par le feu.

Si l'enfant avance vers la cheminée, **à chaque pas les canaux sensoriels d'information lui indiquent des co-variations de ces informations**.

Ainsi, à l'instant t_2, les nouvelles valeurs de V, S, T, O, deviennent V_2, (image du foyer agrandie car plus proche), S_2, (augmentation des décibels mesurant le crépitement du feu, le son se propageant selon le carré de la distance à l'émetteur), T_2 (la température s'élève lorsque l'on approche du feu), O_2 car les molécules odorantes sont plus nombreuses au voisinage du feu).

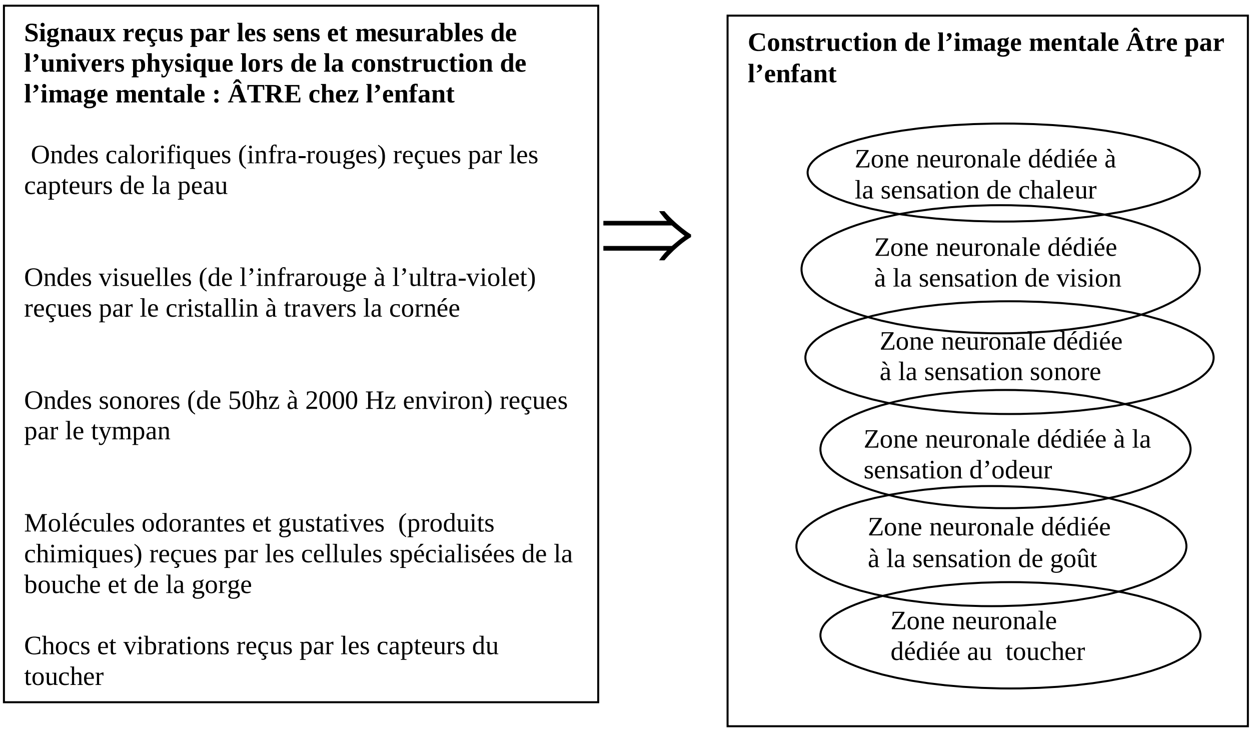
La plupart de ces **variations sont mesurables** par les outils que l'homme a conçus afin justement de pouvoir les appréhender. Nos canaux sensoriels sont capables d'établir une relation d'ordre sur ces différentes paramètres (« il faut plus chaud », « cela sent plus fort » disons-nous par exemple). En première approximation, la croissance de la sensation de chaleur par l'enfant va être « proportionnelle » à l'augmentation des ondes caloriques émises par le feu lorsque l'on s'en approche. Nous mettons le terme proportionnelle entre guillemets, car plusieurs de nos sens fonctionnent de façon logarithmique. Plus familièrement si l'enfant s'approchant du feu reçoit **plus d'ondes calorifiques,** il ressent **plus de chaleur** sur sa peau.

Nous dirons que l'ensemble des informations recueillies par l'un de nos sens forme un univers, muni d'une relation d'ordre habituellement désignée par « plus » ou son contraire « moins ».

Les organismes vivants et en particulier les **humains ont besoin, pour survivre, d'anticiper les évènements qu'ils vont subir**. Pour effectuer ces anticipations notre organisme possède ce que Jean Piaget appelle « une fonction de **coordination générale** ». Dans notre exemple cette coordination générale se traduit par une covariation des informations récoltées par les différents canaux sensoriels. Cette coordination générale et les covariations qui en découlent permettent à l'organisme vivant d'effectuer des anticipations. Ainsi, dans l'univers général, **disons « sensitif-perceptif » regroupant les univers tactiles, auditif, visuel…,** il existe de **« vraies » correspondances (on dit aussi « flèches ») entre les différents univers**.

Ce sont, physiquement, des **échanges électrochimiques entre neurones ou réseaux de neurones**. Pour préciser la grande variabilité des actions des psychomorphismes nous allons donner des exemples de construction mentale volontairement restreints du point de vue sensoriel.

Exemple de structuration de la construction d'une image mentale lors d'une expérience vécue par l'enfant devant l'âtre :



Dans le deuxième tableau, nous avons fait se chevaucher certaines des ellipses représentant des zones d'images mentales pour souligner le fait que les zones neuronales, en l'état actuel de nos connaissances sont des **ensembles ouverts** au sens mathématique, leurs frontières sont « poreuses ». L'IRM (imagerie par résonance magnétique) entre autres techniques de visualisation a montré que le cerveau, lors de la réception d'information d'un certain type peut **mobiliser des neurones ne faisant pas partie a priori de la zone concernée, (phénomène dit de « plasticité du cerveau »)**. Le cas du goût et de l'odorat est assez remarquable : on dit fréquemment d'un fruit : « il a le goût de son odeur » ou d'un fromage : « heureusement, il n'a pas le goût de son odeur ».

Les humains ont construit, grâce à leurs observations de notre monde physique à travers leurs différents sens, des instruments permettant de mesurer les informations reçues et ainsi de les structurer. En effet **l'instrument de mesure naturel le plus important de l'être humain est sa main**, (suivi de près par l'œil) c'est un instrument extrêmement utile et précis mais insuffisant, les éléments du corps ont aussi servi d'instruments de mesure, inexacts sauf si l'on avait soin de construire des étalons. Ainsi on parlait dans l'Egypte ancienne de « coudées », en Europe de « pouces », de « mains », dans le monde maritime de « nœuds » (disposés à égales distances sur un « bout »), encore utilisés de nos jours mais transposés fréquemment en leur équivalence en kilomètres par heure.

C’est ainsi que les instruments, anciens comme l’équerre ou récents comme les récepteurs paraboliques, nous permettent de mieux appréhender l’univers qui nous entoure ou tout au moins, l’**univers perceptible à travers nos sens et nos appareils de mesures.** Ces derniers n’étant, nous l’avons dit, que des prolongements de nos sens. Il y a donc un **aller et retour continuel à travers de nombreux psychomorphismes entre l’univers physique « perceptivo-sensoriel »** que nous appréhendons à travers nos sens et nos instruments **et notre univers mental qui peut produire jusqu'à des « êtres mathématiques ».**

Pour résumer : nous recevons des informations que nous gérons et organisons en formant des **images mentales** qui, réciproquement vont nous aider à construire **des instruments (au sens large**, ce peut être des modèles mathématiques ou des objets physiques) **pour agir sur cet univers et en observer de nouveaux objets** (des lunettes astronomiques par exemple).

Les psychomorphismes sont donc des outils de l’organisation de la connaissance pour l’apprenant

On peut aussi dire, si l’on ne craint pas une confusion avec le terme mathématique : ce sont les « vecteurs » de la connaissance.

À ce propos soulignons que dans l’histoire de la pensée scientifique, l’influence de la logique classique (grecque en particulier) était telle qu’il semblait exclu qu’il en eut une autre ou d’autres « plus riches » ou « plus satisfaisantes » et qu’elle semblait être la seule qui traduise bien le cheminement du raisonnement humain.

On sait aujourd’hui que la « pensée du vivant » peut utiliser d’autres logiques en particulier à cause de la nécéssité pour celui-ci, pour sa survie et les progrès de sa qualité de vie, d’anticiper pour s’adapter à un nouveau contexte.

Citons par exemple les logiques modales, les logiques de description, les logiques floues, paraconsistantes, trivalentes etc.

La logique booléenne du « oui-non » est inadaptée à l’univers quantique par exemple qui ne peut décider à la fois du lieu où se trouve une particule et du moment où l’on effectue la mesure.

La première logique utilisée par l’homme est sa « logique neuronale » : celle des perceptions et des représentations sensorielles. Celle-ci utilise ses premiers psychomorphismes pour organiser les informations reçues par son organisme.

Plus tard, au cours des acquisitions de connaissances successives, les morphismes des différents univers (représentations pariétales par exemple, expressions orales différentes ou signaux gestuels suivant les circonstances) permettent d’élaborer des structures dynamiques, véritables instruments d’acquisition des connaissances à partir de celles des univers antérieurs.

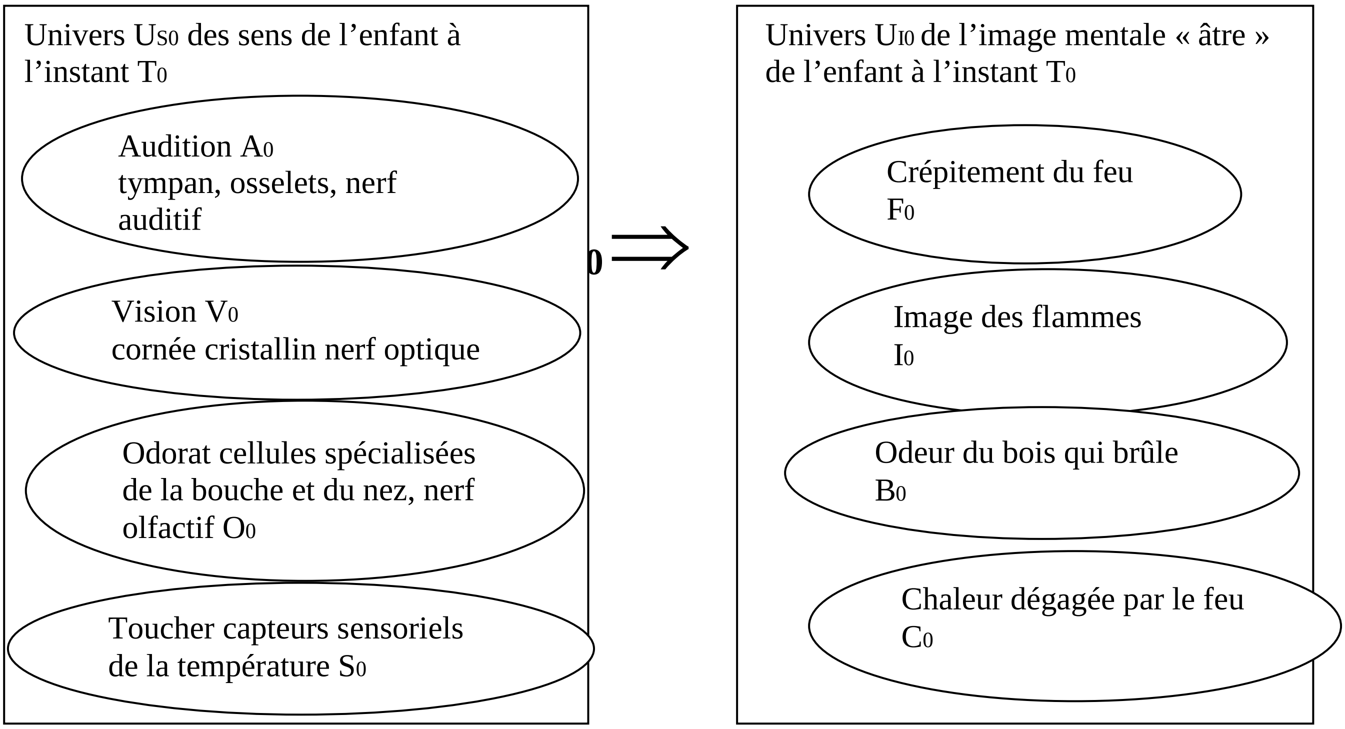
Dans l’enseignement des mathématiques, le professeur rencontre fréquemment des problèmes de logique bimodale du type :

Un élève dessine « un carré » sur une feuille, le professeur demande :

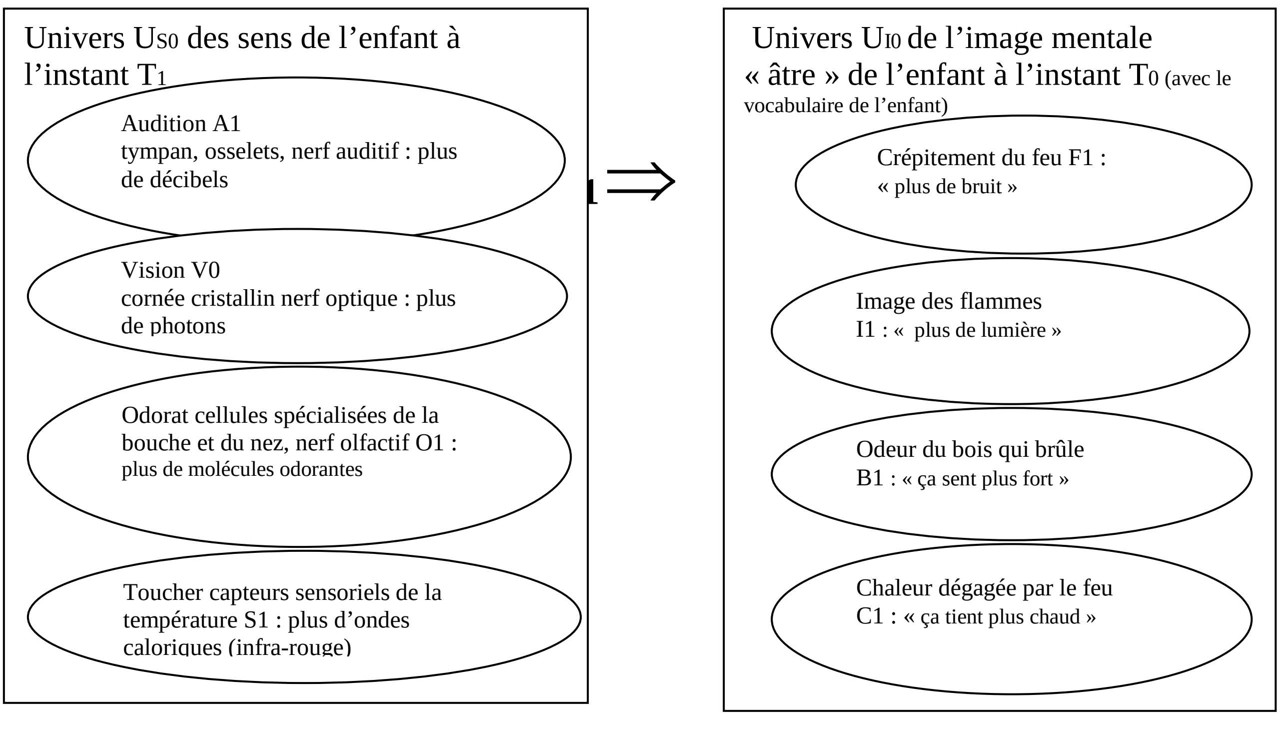
« C’est bien un carré ? »

L’élève : « Oui », le professeur : « Comment le savoir ? »

L’élève prend sa règle graduée et constate que les côtés « ne sont pas tout-à-fait égaux », il demande « si on peut dire que c’est un carré ? ». On est déjà confronté à la nature des choses : épaisseur du trait par exemple. Le professeur doit préciser que « on a le droit de dire que c’est un carré MAIS dans un certain contexte de représentation ». C’est déjà une sorte de logique conditionnelle parfois désignée sous le vocable de « logique floue ».Reprenons plus précisément l’exemple de la construction de l’image mentale « âtre ». Considérons un moment précis noté t_0 où l’enfant, entrant dans la pièce, aperçoit l’âtre. Ses sens reçoivent des informations à travers différents capteurs par exemple :



Supposons maintenant que l’enfant se soit avancé de trois pas dans la pièce où se trouve l’âtre et que le temps ait pris la valeur T_1, que se passe-t-il à l’instant T_1 ?



Les signaux perçus par l'univers des sens de l'enfant changent :
Le crépitement du feu est plus fort, l'image des flammes est plus grande, l'odeur du bois qui brûle est plus intense, la chaleur dégagée par le feu est plus élevée etc.
Nous pouvons dire, puisque ces grandeurs sont mesurables, (avec des instruments construits par les humains) qu'elles pourront être **ordonnées**.
Le psychomorphisme P_1 qui s'établit alors entre l'univers sensoriel de l'enfant et l'univers de son image mentale enrichit cette image, l'enfant **APPREND** que lorsque l'on s'approche d'un feu, son bruit augmente, son image grandit, l'odeur est plus intense ainsi que la chaleur qui s'en dégage. Ce qui est important ici est le fait que lorsque l'image mentale de l'enfant s'enrichit de cette expérience elle le fait en **respectant les ordres induits** par les capteurs biologiques de l'enfant. On dit qu'il y a une **covariation** entre les signaux reçus par les capteurs biologiques de l'enfant et les sens de renforcement de l'image mentale.

Le psychomorphisme P_1 respecte la relation d'ordre naturelle préexistante dans l'univers des capteurs physicochimiques de l'enfant.

Alors l'enfant va pouvoir utiliser ce nouveau savoir et **anticiper une situation** suivante s'il décide de continuer à avancer. C'est cette possibilité d'anticiper les situations où se trouve l'enfant qui fait toute la **valeur de son apprentissage.**
Le lecteur remarquera que notre exemple manque un peu de généralité puisque tous les signaux reçus par les capteurs augmentent et qu'ainsi, par la covariation, l'image mentale augmente en densité (ou en précision).
Donnons donc un **exemple de décroissance de signal** : lorsque l'enfant avance, son champ de vision diminue, par exemple, de la porte de la pièce, il pouvait apercevoir le portrait de son grand père suspendu sur sa gauche, sur le mur. Après trois pas, le portrait se trouve dans son dos et il ne le voit plus. Son champ visuel a diminué, il ne recevra plus de nouvelles données sur ce portrait, il y a une **stagnation de l'information**.
Avec le vocabulaire mathématique :
La fonction qui associe la variation des informations reçues par les capteurs sensoriels de l'enfant à la construction de son image mentale, sens par sens par le psychomorphisme n'est donc **généralement pas strictement croissante**.
Remarquons qu'il est bien connu que certains de nos capteurs sensoriels ne travaillent pas linéairement mais de façon logarithmique, voir par exemple la définition des décibels, unité sonore qui tient compte de ce fonctionnement.
En fait, puisqu'il y a réception de plusieurs canaux d'information, on ne peut parler de fonction au sens mathématique du terme, c'est pourquoi nous parlons plutôt de covariation. Dans le cas du son par exemple, celui-ci est perçu par l'intermédiaire de l'oreille mais aussi, dans le cas de certaines percussions par exemple, par le corps entier à travers les vibrations du sol où de la voiture où se trouve l'auditeur.

L’enfant en gestation dans le corps de sa mère perçoit les battements de son cœur, ce type de bruit peut être associé par la suite, dans sa vie à l’extérieur, à des moments de plénitude et de sentiment de sécurité : il y a **analogie** entre le milieu sécurisé du sein de sa mère et le milieu isolé de la voiture où « bat » un cœur musical.
Le mot « analogie » veut dire proportion en Grec ancien, **ces analogies sont parties intégrantes des psychomorphismes**. L’analogie sert à anticiper, en effet si on dit que « A est à B ce que C est à D » alors si on connaît la relation entre A et B et que l’on connaisse C alors on pourra anticiper D.
Il est important de signaler que les psychomorphismes se distinguent des autres formes d’abstraction anticipatrice, comme la logique classique aristotélicienne par exemple, par son caractère beaucoup moins statique.
En effet la logique aristotélicienne opère des déductions sur des caractères bien fixés qui obèrent le caractère dynamique de la perception de la réalité. Comme le disait Héraclite : « On ne se baigne jamais deux fois dans la même rivière », c’est-à-dire que l’être (en particulier l’être humain) est en perpétuel devenir.
Dans l’analogie en particulier et plus généralement dans le psychomorphisme ce sont les **relations qui comptent.**

II – b Apprentissage de la numération à l’école maternelle
Nous passons ici d’un univers physique non spécialisé où l’enfant va construire des images mentales – qui vont l’aider à régler son comportement dans la vie de tous les jours – à un univers spécialisé : l’univers de l’arithmétique scolaire qui est un sous-univers de l’univers mathématique.
Tout d’abord, l’univers cardinal
Le professeur désirant inculquer à ses élèves la notion de cardinal va disposer des « outils » personnels de l’enfant, nous avons déjà cité l’outil « exact » de comptage qui est constitué des **doigts de l’enfant**. Nous allons donc utiliser l’univers U_1 des doigts de l’enfant, privilégié car l’enfant en fait connaissance dès son jeune âge, en jouant avec, en les suçant, puis en les utilisant pour saisir ses jouets. C’est un univers particulièrement familier qui va nous aider à faire construire à l’enfant, à l’aide d’univers plus « techniques », ses psychomorphismes vers la **notion de nombre**.
L’univers des doigts va être muni d’une opération simple notée O_1 : lever un doigt et de l’opération opposée : baisser un doigt.
Citons ces univers « techniques » construits avec lesquels nous allons travailler et sur lesquels nous allons définir des opérations.

- L’univers U_2 d’un ensemble de jetons posés sur la table que l’élève va pouvoir saisir et déplacer. Cet univers est muni de l’opération O_2 déplacer un jeton et de son opération opposée : remettre le jeton à sa place précédente.
- L’univers U_3 qui contient le précédent augmenté de trois boites, muni de l’opération prendre un ensemble de jetons, le déplacer, soit en le mettant dans une boite, soit en le changeant de boite, soit en le scindant en deux ensembles qui seront mis dans deux boites différentes.

- L'univers U_4 de bandes de papier, toutes de même largeur, composées de carrés juxtaposés identiques. Cet univers est muni d'une opération juxtaposition des bandes et de son opération opposée séparation de deux bandes juxtaposées, cet univers peut être de plus muni de l'opération superposition.
- L'univers U_5 constitué de gobelets (par exemple les gobelets en plastique pour le goûter) avec l'opération réunion au sens ensembliste et son opération complémentaire la disjonction.
- L'univers U_6 des élèves de la classe muni lui aussi de la réunion ensembliste pour former des sous-groupes de plusieurs élèves. Cet univers est muni d'un invariant structurant : le cardinal de l'effectif de la classe.

Nous voyons que les univers utilisables par le professeur pour faire comprendre aux enfants sont multiples et il faut, bien entendu choisir les plus familiers aux enfants : ils doivent pouvoir les manipuler aisément, si possible les connaître au préalable dans un autre contexte que celui du cours, en situation didactique.

Aussi l'univers ordinal

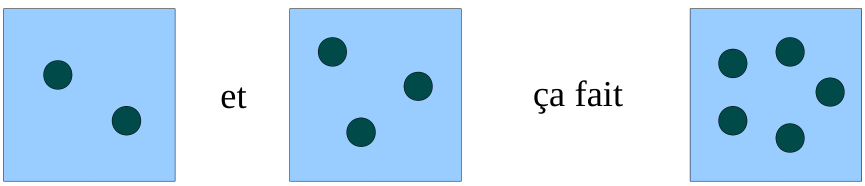
- L'univers U_4 des bandes juxtaposables et/ou superposables peut être muni facilement d'une relation d'ordre : une bande est « plus ou moins courte que l'autre » ou « de même longueur ».
- L'univers U_7 du calendrier, muni des relations ensemblistes : réunion avec inclusion, intersection. Très riche : une semaine peut-être « à cheval » sur deux mois, les congés d'été peuvent être inclus ou non dans un mois. Cet univers est aussi de façon naturelle ordonné, on peut obtenir la notion de **suivant** par la notion « un jour de plus ».

Exemple : Quand on observe les 15 premiers jours du mois, si on ajoute un jour, on obtient « un jour de plus » c'est-à-dire le 16ème jour du mois.

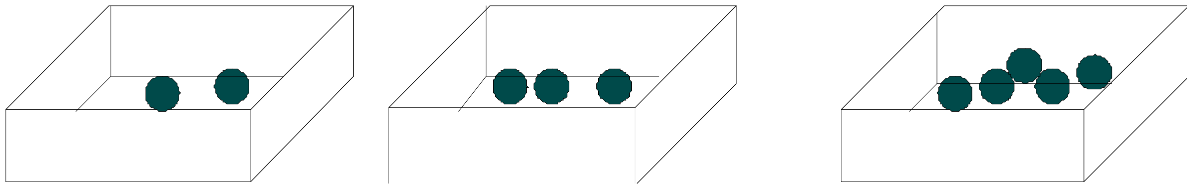
Ces univers physiques vont être complétés par des **univers à vocation formalisante,** c'est-à-dire, en quelque sorte, des univers intermédiaires entre les univers physiques et les univers strictement formels utilisés en mathématique. Bien entendu, les plus attractifs et naturels sont les univers des dessins (voir les dessins pariétaux) ainsi :

L'univers U'_1 des images de mains avec des doigts étendus ou repliés représentées sur des images, muni de l'opération : prendre deux images et chercher l'image correspondante à leur réunion mentale. Exemple :

L'univers U'_2 des images de jetons muni de la même opération. Exemple :

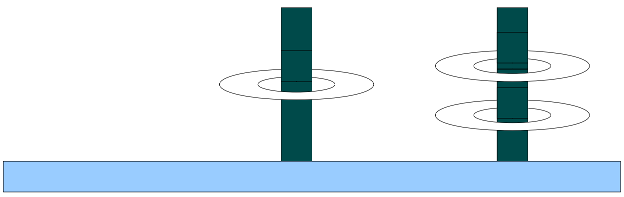


L'univers U'_3 des boites contenant des jetons, muni lui aussi de l'opération réunion. Exemple :



Bien entendu les univers suivants seront incontournables :

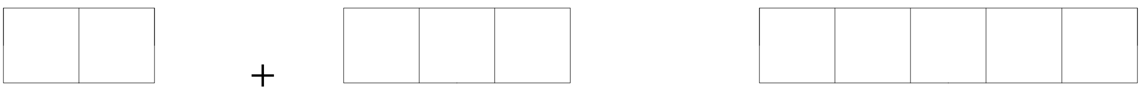
- U_n Univers des « nombres chiffres », inférieurs à 9 en première période, muni de l'opération addition représentée par le signe +.
- U_m Univers des nombres mots (oral et écrit) muni de l'opération addition représentée par le mot « plus ».
- U_B Univers du boulier que nous détaillerons plus loin, utile en particulier en cours primaire pour les nombres supérieurs à 10 :



5 + 7 = 12

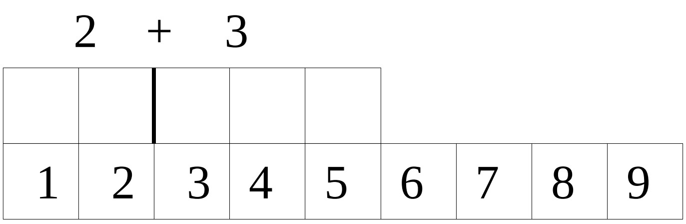
Dizaines : 1 Unités :2

U_b Univers des bandes avec l'opération addition, c'est-à-dire juxtaposition par les extrémités :

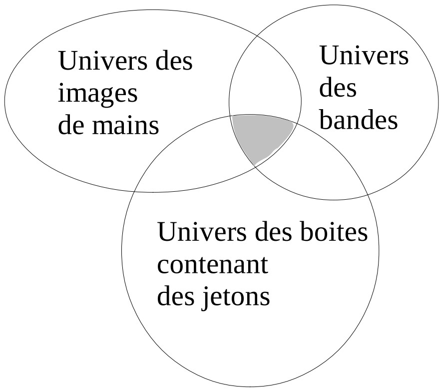


2 + 3 = 5

Ou à l'aide d'une bande numérique :



Donnons une **représentation ensembliste** de l'acquisition des connaissances numériques cardinales à l'aide ces médias :



Bien entendu il est un peu naïf de vouloir représenter des zones neuronales par des « patates » ensemblistes, d’autant que nous avons déjà souligné que, le cerveau travaille « en réseau » (on dit aussi « en parallèle ») c’est à dire avec des interactions neuronales extrêmement nombreuses. L’intersection (grisée) de ces ensembles peut être considérée comme un « noyau dur » ou un « squelette » de connaissances ou encore un « ensemble d’invariants » **qui servira de base à la notion de nombre et facilitera le passage à l’abstraction.**

Cette représentation des zones neuronales impliquées dans l’apprentissage d’une notion – ici, la notion de nombre – est donc plutôt une représentation topologique, les ensembles neuronaux représentés sont **ouverts au sens mathématique** c’est-à-dire en quelque sorte qu’ils n’ont **pas de frontière bien déterm**inée à un moment donné. Malgré ces « à peu près » nous pouvons utiliser cette représentation pour nous construire, à notre tour, une image mentale de l’apprentissage.

En général, puisque le premier outil de l’enfant est sa main (complétée auparavant par le bébé par sa bouche : celui-ci porte l’objet à sa bouche pour « faire connaissance » avec lui), on apprend aux enfants à compter « sur leur doigts ». Ici nous avons utilisé les images de mains autrement dit nous avons déjà avancé dans l’abstraction, il est remarquable que, à part les humains, seuls certains primates peuvent de façon démontrée, franchir ce pas. Cela étant de nombreuses et nouvelles expériences utilisant des techniques originales sont en cours et nous n’avons certainement pas fini de découvrir les ressources d’adaptation et de facultés d’analogie d’autres animaux, comme les oiseaux et en particulier des corbeaux.

Ensuite nous avons utilisé des boites contenant des jetons afin d’opérer un psychomorphisme réciproque du comptage avec les doigts, stocké dans une zone neuronale, vers le comptage tactile des jetons dans le boites.

Il est probable que l’enfant va déplacer les jetons afin de pouvoir les compter « **avec les doigts qu’il a maintenant dans la tête** ». Il y aura échange de données entre des zones neuronales consacrées d’une part au comptage des doigts par la vision, d’autre part au comptage des doigts par le toucher, ce que font par exemple les aveugles de naissance qui sont obligés de se construire un sens de la vision à travers leur toucher.

Au cours des expériences successives, **l’enfant consolide son savoir** qui prend la forme d’une sorte de **nébuleuse intellectuelle** représentée par la **réunion** des différents ensembles neuronaux concernés. L’**intersection** de ces ensembles peut représenter la quintessence, la substantifique moelle, de ce savoir, cette intersection va servir ensuite dans le travail de **formalisation du nombre** qui servira ensuite en quelque sorte de « poste de commande » réagissant à l'univers de l'enfant et activant, si nécessaire, les zones neuronales périphériques.

Nous insistons beaucoup, à tous les niveaux d'apprentissage, sur la nécessité de **multiplier les univers expérimentables pour l'apprentissage,** ceci afin de renforcer la densité du « noyau dur » qui servira à l'élève de poste de commande. Nous avons, dans nos publications pour le collège et la seconde, suggéré aux professeurs d'utiliser, pour l'apprentissage de la **géométrie élémentaire (*)**, des **supports différents** de la feuille de papier, du crayon, de la règle et du compas et surtout des **situations et des contextes inhabituels**.

Ainsi nous avons proposé des activités avec limitation des outils : la géométrie sans compas ; des activités de figures géométriques incomplètes, des activités de pliages ; des activités impliquant des déplacements le long de figures tracées au sol et, bien entendu, des activités en géométrie dynamique sur ordinateur, etc. (Voyez notre bibliographie)

Ces univers sont mis en correspondance par les psychomorphismes des apprenants et les incitent à envisager des formes d'action et de résolution différentes selon l'univers où ils travaillent.

(*) Cette discipline est délaissée à tort à notre avis à cause de sa capacité à faire développer à l'enfant des réseaux de neurones pour appréhender l'univers qui l'entoure puis utiliser ces réseaux pour agir sur cet univers par analogie des phénomènes et anticipation de leurs actions sur ces phénomènes.

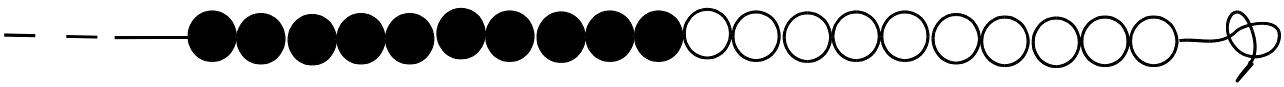
En cycle 2

3 -a Le passage de l’addition à la soustraction

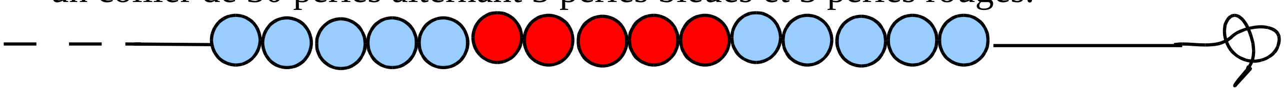
Avant de vous présenter de façon détaillée les techniques d’apprentissage de la soustraction avec retenue au moyen du jeu « de la banque et du boulier », nous allons vous présenter un matériel construit par nos collègues professeurs formateurs didacticiens lors de notre visite à l’Université de Evora au Portugal. Ils créent par ce matériel un univers typiquement expérimentable très attrayant pour les jeunes enfants puisqu’il utilise des perles de couleurs enfilées.

Il s’agit de deux colliers de perles enfilées :

- un collier de 50 perles alternant 10 perles blanches et dix perles noires fermé par un nœud à chaque bout ;



- un collier de 30 perles alternant 5 perles bleues et 5 perles rouges.

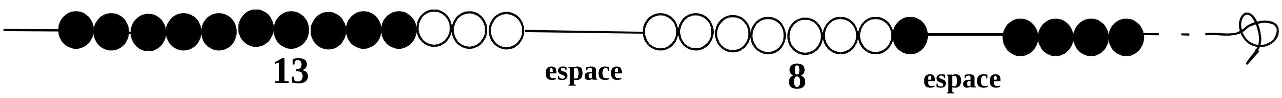


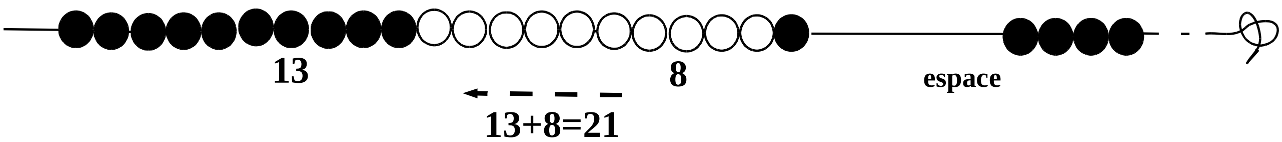
Les élèves peuvent effectuer des calculs d'additions en déplaçant des perles vers la droite et de soustraction en déplaçant des perles vers la gauche.

On a ici encore un psychomorphisme entre « l'univers manipulatoire des colliers de perles » et « l'univers de la file numérique ».

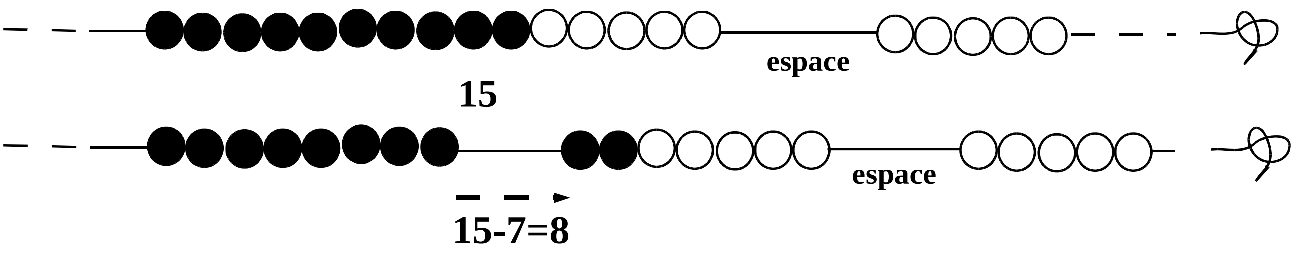
Réalisation de l’activité

Addition 13 + 8





Soustraction 15 – 7



La correspondance psychomorphique associe un déplacement vers la gauche ou bien vers la droite selon l'opération effectuée.

III – b Technique de la soustraction « avec retenue »

Exemple de psychomorphisme entre l'univers de « la banque et du boulier soustractif » et l'univers de l' « écriture décimale des nombres » muni de l'écriture des calculs en colonnes.

Calculer 223 – 84. Nous allons travailler sur un univers familier qui est déjà un peu connu des élèves grâce à leur expérience familiale. Ils savent additionner des billets et des pièces mais pas encore « rendre la monnaie ». Proposons donc aux élèves la situation d'un commerçant qui a fait une recette d'un montant de 223 € mais qui doit 84 € à un de ses fournisseurs. Il veut calculer combien il lui restera après le paiement afin de savoir s'il peut faire une commande de 150 €. Nous avons ici une soustraction « avec retenue » que nous allons gérer grâce à une banque virtuelle avec des billets et des pièces de jeu en matière plastique et carton. Nous créons donc un univers **directement expérimentable** afin que l'élève puisse réfléchir « pour de vrai » sur des avoirs et des dettes comme cela se passe dans l'univers familier des vrais billets et des vraies pièces.

Dans beaucoup de pays, dont la France, **on enseigne deux techniques opératoires pour la soustraction : une technique dite « ancienne » et une autre dite « moderne ».**

Les deux techniques s'appuient sur deux propriétés, qui ne sont évidemment pas démontrées en école primaire.

Pour la technique ancienne la propriété est : dans une soustraction la différence ne change pas si on enlève le même nombre à chaque terme de la différence. En langage symbolique algébrique cela s'écrit $a - b = (a - c) - (b - c)$.

Pour la technique moderne on s'appuie sur la propriété : dans une soustraction la différence ne change pas si on soustrait et on additionne un même nombre au premier terme. En langage symbolique algébrique c'est $a - b = (a - c + c) - b$

Pour la technique ancienne on a besoin de deux banques une bleue et une rouge.

Pour la technique moderne on a besoin d’une seule banque bleue.

Il a été constaté que les élèves ont plus de mal avec la technique ancienne.

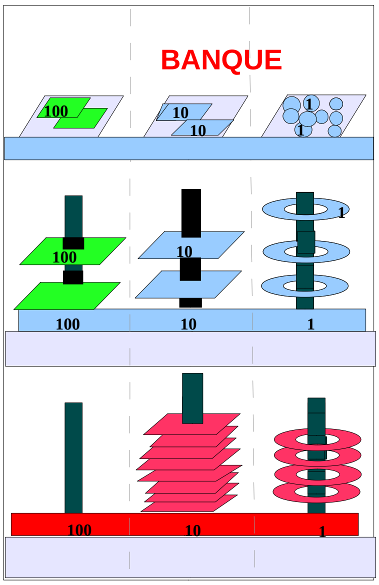
Ceci confirme le point de vue d'une analyse épistémologique comparative des expressions : $a - b = (a - c) - (b - c)$ et $a - b = (a - c + c) - b$.

En effet l’expression $a - b = (a - c) - (b - c)$ résume la propriété de l’ensemble des nombres relatifs Z au collège, (positifs à l'école primaire), qui exprime que les couples :

(a,b) et $(a - c, b - c)$ sont équivalents et correspondent au même nombre de **Z**. D'ailleurs à l'époque des mathématiques dites "modernes" des années 70 on « enseigna » cette propriété systématiquement y compris son écriture symbolique et le passage à l’ensemble quotient par la relation d’équivalence…

Alors que l’expression $a - b = (a - c + c)\ b$ correspond tout simplement à une propriété plus facile à comprendre : on peut enlever une dizaine aux dizaines d'un nombre et en même temps ajouter dix unités aux unités (car une dizaine est égale à dix unités). On reste dans ce cas dans les propriétés d'écriture d'un nombre en base dix.

Nous allons détailler ci-dessous la méthode dite « moderne » sur un exemple.



$$\begin{array}{r} 223 \\ -\quad 84 \\ \hline \end{array}$$

État initial du boulier

Les élèves ont placé des anneaux et des bandes représentant les unités, les dizaines et les centaines sur les tiges du boulier bleu représentant leur « avoir » soit 223 et des anneaux et des bandes sur le boulier rouge représentant leur « dette » soit 84. Une banque bleue est disponible pour « faire de la monnaie » à partir de leur avoir et une banque rouge est disponible pour changer si nécessaire des billets et des anneaux de leur dette.

Figure 1

Les élèves vont maintenant traduire leurs actions par un psychomorphisme formalisant dans l'univers symbolique mathématique.

Ainsi ils enlèvent trois unités bleues du boulier bleu et trois unités rouges , du boulier rouge, ils « doivent trois unités de moins » il reste encore une unité rouge (figure 2). Ils enlèvent un billet de 10 unités qu'ils échangent à la banque bleue contre 10 unités bleues. Ils posent les unités bleues sur la tige des unités, alors ils peuvent enlever une unité bleue et une unité rouge. Il reste alors 9 unités bleues et une seule dizaine (figure 3). (Ils possèdent maintenant 219 unités mais ne doivent plus que 80 unités).

Ils échangent ensuite à la banque bleue un billet de cent vert contre dix billets de dix bleus (figure 4) ils peuvent alors enlever 8 billets bleus et 8 billets rouges, il reste alors un billet vert et 3 billets bleus (figure 5).

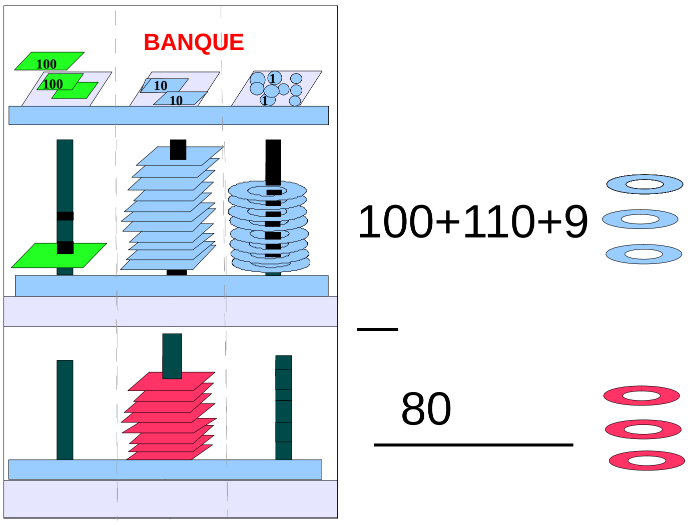


Figure 2

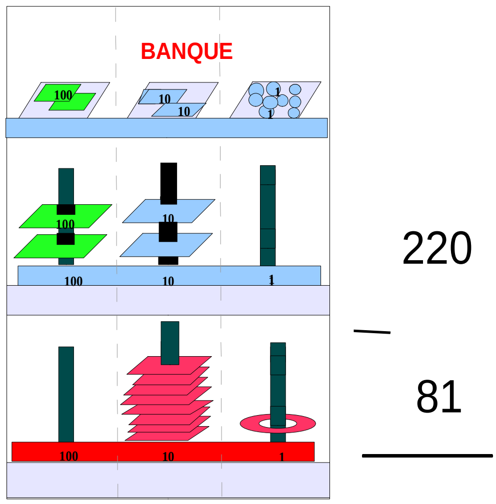


Figure 3

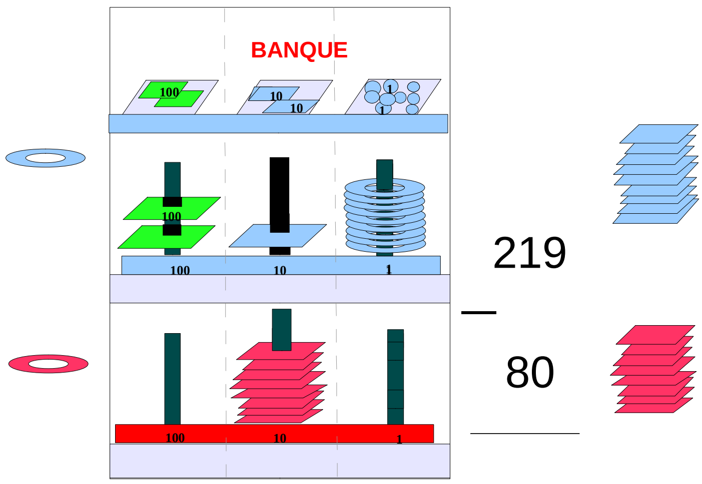


Figure 4

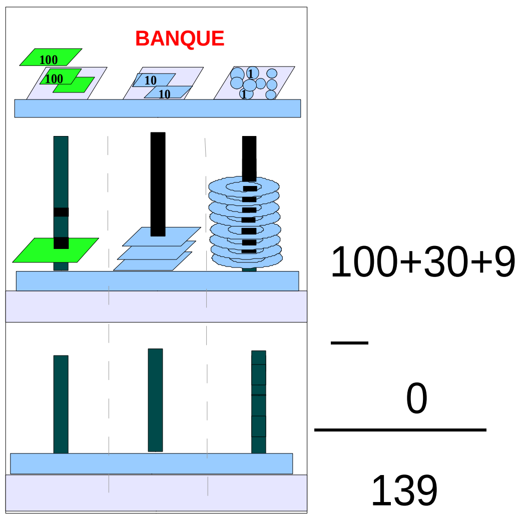


Figure 5

Commentaires Ici encore, le travail simultané sur deux univers, l’un structuré autour de vrais échanges de billets et de pièces, l’autre univers où les opérations sont seulement mentales, permet une **correspondance morphique qui facilite l’apprentissage des techniques de la soustraction.**

En Espagne dans la « Universidad de Extremadura » les collègues formateurs du professorat de l'école primaire ont mis au point un jeu du banquier pour faciliter l'apprentissage de deux techniques de la soustraction enseignées actuellement en primaire.

Lors de nos séjours professionnels fréquents à Cacérès nous avons eu le plaisir de voir à quel point les élèves, grâce aux psychomorphismes entre « l'univers des manipulations du boulier du banquier » et « l'univers des nombres et techniques de soustraction » faisaient de rapides progrès dans les calculs soustractifs.

III – c Un exemple en cycle 3 : l’introduction des fractions à l’aide de l’univers des bandes de couleurs

Pour introduire la notion de fraction nous allons utiliser des actions dans l’univers directement expérimentable, nous partons de bandes blanches rectangulaires de dimensions 12 cm et 2 cm. Nous utiliserons ensuite des bandes superposables aux précédents de couleurs variées.

Nous demandons tout d’abord aux élèves de découper dans le papier bleu deux bandes telles que si on les juxtapose par un de leurs petits côtés, elles recouvrent parfaitement une bande blanche.

Nous leur demandons ensuite de découper quatre bandes rouges qui, successivement juxtaposées par un de leurs petits côtés, recouvrent une bande blanche.

Toutes les bandes ont la même largeur de 2cm

Les élèves et l’enseignant se mettent d’accord pour écrire toujours en haut, (le numérateur), le nombre correspondant aux bandes « blanches » et en bas, (le dénominateur), le nombre correspondant au nombre de bandes de l’autre couleur nécessaires pour recouvrir par juxtaposition la bande blanche (trois bandes jaunes recouvrent une bande blanche donc le dénominateur est 3).

Les élèves, pour construire la bande 1/3, disent que « c’est difficile par pliage » alors ils optent pour la solution consistant à diviser par 3 les 12cm de la bande unité « blanche » et ils disent que chaque bande 1/3 a une longueur de 4cm.

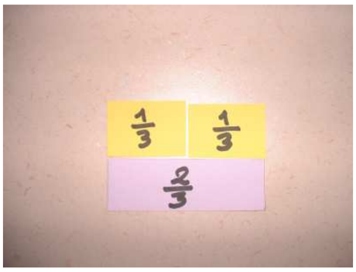
Remarquons qu’ici ils manipulent des concepts qui leur sont familiers : celui de la mesure d’une longueur avec le décimètre et celui des opérations sur les longueurs entières : addition, multiplication, division.

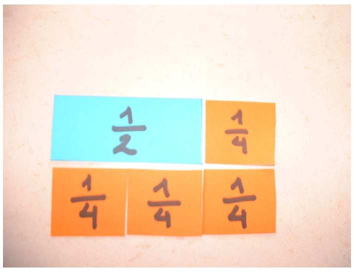
Ils utilisent ici un psychomorfisme entre l'univers physique des bandes et celui des mesures de longueurs qui est un univers abstrait et mathématisé.

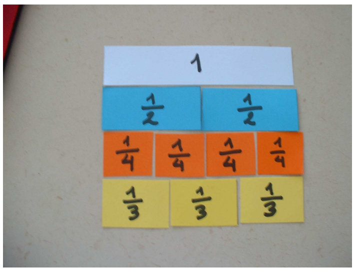
Ceci est très fructueux dans l'apprentissage des fractions, car l'objectif fondamental des fractions est justement de construire une opération de division particulière et l'univers des nombres rationnels.

Nous avons développé in extenso un **parcours de l'enseignement des fractions et des nombres décimaux** (en ligne, téléchargeable sur le site de l'IREM de Basse-Normandie page Relations Internationales) « L'enseignement des fractions basé sur la loi de la correspondance morphique de deux systèmes dans la formation des connaissances ». Nous ne présentons ci-dessous qu'un extrait d'introduction et invitons le lecteur intéressé à lire dans cet article détaillé les pages concernant par exemple l'addition des fractions à dénominateurs premiers entre eux.

Voici des réalisations d'élèves :







Nous nous bornerons donc ici à souligner que les élèves réalisent des correspondances entre ces deux univers et qu'ils peuvent ainsi donner du sens à des propriétés qui correspondent à des problèmes résolus par les manipulations des bandes qui ont, elles aussi, leur correspondant dans l'univers symbolique chiffré.

Par exemple :

$$1/2 + 1/2 = 1$$

$$1/4+1/4+1/4+1/4 = 1$$

$$1/3+1/3+1/3 = 1$$

$$1/2+1/4 = 1/4+1/4+1/4$$

$$\mathbf{1/3 + 1/3 = 2/3}$$

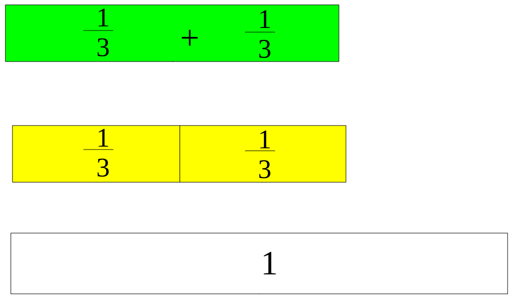
Á propos de cette dernière égalité, soulignons un phénomène important qui nous est apparu lors des observations et expérimentations en classe :

Cas de l'addition : 1/3 + 1/3

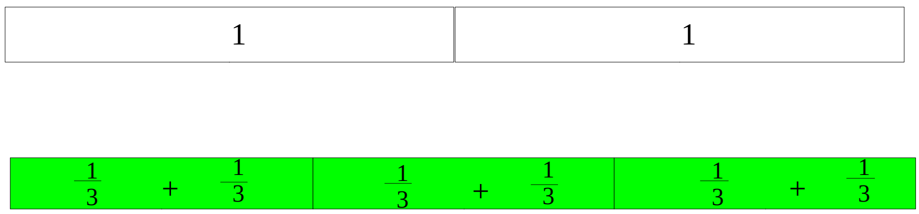
Lorsque l'on juxtapose deux bandes jaunes représentant 1/3, on observe que « ça ne tombe pas juste » : les deux bandes jaunes sont plus longues qu'une bande bleue représentant ½ et elles sont plus courtes qu'une bande blanche valant 1.

Nous leur suggérons alors de construire par juxtaposition une bande, par exemple vert clair valant 1/3 + 1/3.

Les élèves **décident eux-mêmes d’écrire sur une des faces de la bandes verte 1/3+1/3**, ceci est très naturel pour eux, car ils ont travaillé sur l’addition des longueurs depuis le cycle 2 de l’école primaire.



Nous demandons aux élèves de chercher par manipulation des bandes vertes :
Combien faut-il de bandes vertes pour recouvrir un nombre entier de bandes blanches ?
Ils trouvent que deux bandes blanches sont recouvertes par trois bandes vert clair.



Le raisonnement rigoureux est que la bande vert clair 1/3 + 1/3 mesure 4cm + 4cm = 8cm et que la bande blanche mesure 12cm, donc 2 x 12cm = 24cm et 3 x 8cm = 24cm aussi. Ce faisant, ils utilisent déjà un psychomorphisme fondamental de modélisation et de travail sur cette modélisation: celui qui associe à une **mesure** au décimètre : (la bande blanche mesure 12 cm donc deux bandes mesurent 24cm), **de l’univers physique des bandes** (qui peuvent se juxtaposer) à valeur dans un **univers métré muni d’une addition**. Ils ont déjà travaillé avec ces notions et ne sont donc pas surpris par le raisonnement.
Dans ce cas les élèves construisent plusieurs bandes représentant 1/3 + 1/3 par juxtaposition dans la couleur vert clair. Ensuite ils les retournent et cherchent combien des ces bandes correspondent, (par juxtaposition et superposition), à combien des bandes blanches unités. Ils trouvent par manipulation que « 2 blanches c’est pareil que 3 vert clair » et alors tout naturellement les élèves écrivent 2/3
On rappelle que pour le moment la seule signification que les élèves ont du numérateur et du dénominateur est que le numérateur indique le nombre de bandes « blanches » et le dénominateur le nombre de bandes de l’autre couleur (ici vert clair) qui correspondent par juxtaposition à une bande blanche.
C’est ainsi que d’un côté ils ont trouvé 1/3+1/3 et de l’autre 2/3 leur conclusion est $\boxed{1/3 + 1/3 = 2/3}$.

Commentaire À propos de ce travail de « découverte » ou « d'invention » par l'élève d'une règle nouvelle étendant son champ de connaissance soulignons l'importance de l'action de l'élève sur son univers mental par l 'intermédiaire des psychomorphismes entre les univers directement expérimentables (ici les bandes de couleur) et les univers formalisés (ici les fractions). Nous utilisons systématiquement la **maïeutique,** science de l'enseignement utilisée par les grecs (*).
Ce type d'enseignement consiste à faire **découvrir par l'apprenant**, ceci avec ses propres outils, tant physiques (expérimentation avec des bandes) que mentaux (mesures des longueurs au décimètre, addition de celles-ci et multiplication par un nombre entier), ce que **désire lui apprendre l'enseignant.**
Le savoir précédemment acquis est utilisé pour construire un psychomorphisme réciproque, par exemple en décidant d'utiliser la mesure des bandes pour découvrir que 1/3 + 1/3 « c'est la même chose » que 2/3 et que, du même coup**, on ose écrire** - en oubliant la question traditionnelle au professeur « est-ce que j'ai le droit ? » - car on s'est **soi-même convaincu que l'on avait le droit (*).**

*Rappelons enfin quelques principes d'enseignement prônés par **Socrate** :*
Ne pas énoncer soi-même les vérités.
Encourager, faire confiance.
***Guider** : en distinguant le vrai du faux, en orientant les disciples dans la bonne direction. Avancer par étapes, en s'élevant dans la connaissance, d'accord en accord, de consensus en consensus.*
Prendre son temps.

Commentaire :
Ici nous avons un fait important en didactique :
Si on pose directement aux élèves la question à l'oral « combien font un tiers plus un tiers ? » les élèves répondent toujours à l'oral : « ça fait deux tiers » Si l'enseignant va aussitôt au tableau et écrit 1/3 + 1/3 = 2/3 il n'a pas compris vraiment **dans quel univers les élèves ont traité la question.**
Les élèves comprennent ceci au même titre qu'ils ont compris que « une pomme plus une pomme est égal à deux pommes ». On utilise ici le fait que « un objet plus un objet de la même catégorie est égal à deux objets de cette même catégorie » **C'est-à-dire l'univers symbolique chiffré acquis en école primaire qui formalise avec des nombres entiers, les opérations de réunions disjointes des ensembles.**
Mais, si l'enseignant croit qu'il peut écrire ensuite au tableau : 1/3 + 1/3 = 2/3 il fait inconsciemment une *« rupture du contrat didactique »* dans son enseignement des fractions.

En effet si l'on veut donner du sens à chaque symbole fractionnaire de la forme a/b, il faut absolument que 2/3 prenne le sens dans la manipulation avec les bandes, afin de trouver que deux bandes « blanches » (unités), sont superposables avec trois bandes « vert clair ». Tant que les élèves n'ont pas effectué la manipulation on ne peut pas écrire au niveau des symboles que 1/3 + 1/3 = 2/3.
Quand, dans l'enseignement des mathématiques, à propos du sens donné au départ à un symbole nouveau, on fait un raccourci, sans que les élèves puissent le valider par leur expérience on dit qu'il y a un phénomène de « **rupture de contrat didactique** ». Implicitement et inconsciemment l'enseignant installe un autre « contrat didactique », on « apprend » que 1 /3 + 1/3 s'écrit 2/3 seulement par une **règle** apprise formellement sans que ceci corresponde aux **manipulations qui donnaient du sens au symbole fractionnaire**.
Cet exemple montre bien que dans l'enseignement des mathématiques il est primordial que l'enseignant soit parfaitement au courant de **l'univers formalisé où les élèves donnent du sens aux symboles.**
Les univers symboliques mathématiques prennent à chaque étape du parcours d'apprentissage un sens de plus en plus riche et puissant ;
Cet enrichissement des symboles et des représentations mathématisées doit être bien maitrisé par le parcours que propose l'enseignement ;
Sinon, par le phénomène naturel de psychomorphisme les élèves vont construire un univers formalisé erroné ; ce phénomène nous l'avons nommé **« psychomorphime contrarié ».**
Nous développerons ce dernier point et aussi d'autres thématiques liées aux psychomorphismes dans un prochain article.

(*) Voyez par exemple l'article de **Nicolas Wapler** :
http://www.pedagogie-active.fr/lecture_suivie/2-50.html

Bibliographie

Carrega Jean Claude *Théorie des corps* éditions Hermann Collection Formation des enseignants, Paris Aout 2005.

Rodriguez Herrera Ruben, Salles Legac Danielle *Le nombre d'or, Nouveautés mathématiques ludiques* Éditions de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie Caen 2015

Rodriguez Herrera Ruben, Salles Legac Danielle *Nouvelles pratiques de la géométrie* Editions de l'IREM de Basse-Normandie Caen 2008.

Rodriguez Herrera Ruben, Salles Legac Danielle *Du dessin perçu à la figure construite* éditions Ellipses, Paris août 2005.

Rodriguez Herrera Ruben, Salles Legac Danielle *Articles en ligne sur le site de l'IREM de Basse-Normandie, rubriques Équipe de Géométrie et Équipe Relations Internationales :* http://www.math.unicaen.fr/irem/