Carrés Géomagiques

Introduction

Nous souhaitons étudier les carrés géomagiques inventés par Lee Sallows en 2001 et présentés par Jean-Paul Delahaye dans la revue *Pour la Science* du mois de juin 2013. Cette étude peut être proposée à des élèves-professeurs ou enseignants en formation continue pour renforcer des notions algébriques et calculer dans l'univers des nombres binaires.

Nous présentons en fin de texte une activité pour les élèves.

Il n'est peut-être pas nécessaire de vous présenter les carrés magiques qui sont des tableaux de nombres, tels que le plus ancien connu : le célèbre carré de Lo Shu, IV^e siècle avant J.C. représenté ci-dessous.

Un tableau carré de nombres entiers est un carré magique « normal [1] » d'ordre n si la somme des termes de chacune des lignes, de chacune des colonnes et de chacune des diagonales est toujours la même. Les termes doivent être **des nombres entiers tous différents** entre 1 et n^2. Dans l'exemple ci-dessous la somme est quinze et le carré magique est normal d'ordre trois.

	4	**9**	**2**	Σ=15
	3	**5**	**7**	15
	8	**1**	**6**	15
15	15	15	15	15

Voici une question à propos du carré magique ci-dessus : combien de carrés magiques d'ordre 3 et de sommes toutes égales à 15 est-il possible de construire ?

Autrement dit combien de sommes de trois chiffres de 1 à 9, sans répétition et égales à 15 existe-t-il ?

Puisque notre tableau a neuf cases, nous devons au moins retrouver les huit sommes de notre tableau.
Nous avons les sommes commençant par 1, par ordre croissant :
$1+2+12$ est impossible, $1+3+11$ aussi, $1+4+10$ aussi.
$1+5+9$ est possible, $1+6+8$ aussi, $1+7+7$ est impossible.
Les sommes commençant par deux :
$2+3+10$ impossible, $2+4+9$ est possible, $2+5+8$ aussi, $2+6+7$ aussi.
Les sommes commençant par 3 :
$3+4+8$ est possible, $3+5+7$ aussi, $3+6+6$ est impossible.
Les sommes commençant par 4 : $4+5+6$ est possible.
Les sommes croissantes commençant par 5 sont impossibles. Récapitulons :
$1+5+9$ est possible, $1+6+8$ aussi, $2+4+9$ est possible, $2+5+8$ aussi,
$2+6+7$ aussi , $3+4+8$ est possible, $3+5+7$ aussi, $4+5+6$ est possible.

Nous avons besoin de huit sommes distinctes, puisque nous en avons trouvé exactement huit, il n'y a qu'un seul tel carré magique. Le nombre 5 apparaît quatre fois et c'est le seul, il a donc nécessairement la position centrale. Plaçons le, ainsi que les lignes et colonnes qui le contiennent, les autres lignes et colonnes se complètent naturellement. On peut faire tourner la croix jaune de ¼ de tour, de ½ et ¾ , on peut aussi effectuer des symétries en échangeant la première et la troisième colonne ou en échangeant la première et la troisième ligne :

	6	**7**	2	15
	1	**5**	**9**	15
	8	**3**	4	15
15	15	15	15	15

	6	**7**	6	15
	9	**5**	**1**	15
	4	**3**	8	15
15	15	15	15	15

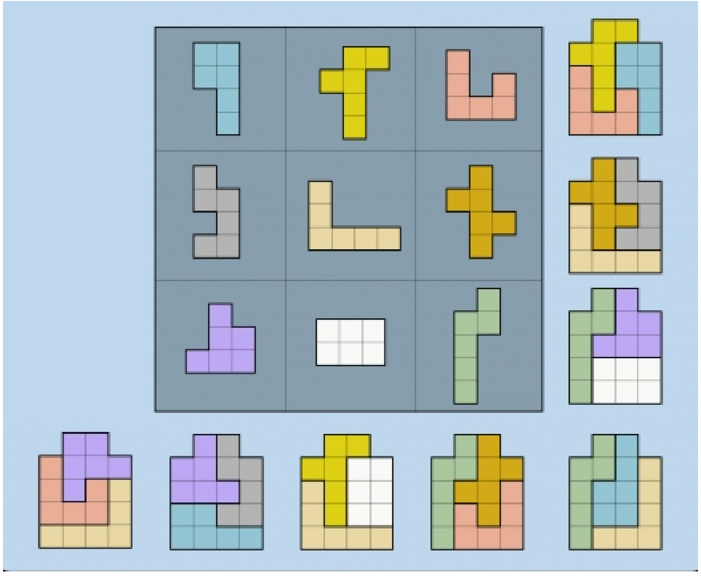
Nous vous présenterons notre travail sous forme de **narration de recherche [2]** car il nous paraît intéressant de faire participer le lecteur à différentes façons d'aborder un problème ; vous verrez que, même si les différentes démarches n'aboutissent pas sur des résultats nouveaux, elles sont source de bons exercices tant pour l'élève que pour le professeur.

Ainsi dans ce qui suit nous allons travailler dans le domaine de la théorie des nombres, celui des nombres binaires et des nombres modulo 15 ainsi que dans celui des espaces vectoriels de dimension 15, ce qui est assez inattendu dans le domaine des carrés géomagiques.

1. Si l'on s'affranchit des bornes 1 et n^2, on définit un simple carré magique.
2. La narration de recherche consiste à conter une démarche de découverte avec ses errements et retours en arrière, elle permet de montrer au lecteur le cheminement du chercheur et peut inciter celui-ci à réfléchir par lui-même sur le sujet.

Qu'est-ce qu'un carré géomagique ?

Un carré géomagique d'ordre n est un ensemble de n^2 figures géométriques toutes différentes, disposées en carré. Elles peuvent s'additionner au sens géométrique c'est-à-dire par juxtaposition sans recouvrement après déplacement, mais éventuellement avec retournement, de telle sorte que leur tableau d'addition ait la propriété caractéristique des carrés magiques à savoir : les sommes des colonnes, des lignes et des diagonales sont égales à une même figure géométrique.



Voici ci-contre un carré géomagique d'ordre 3. Ce carré géomagique est issu du joli site de Lee Sallows qui a consacré beaucoup de ses recherches à ce sujet : http://www.geomagicsquares.com .

Et l'ordre deux ?

Il n'y a pas de carré magique d'ordre deux.
En effet considérons un carré d'ordre 2x2 d'éléments distincts a, b, c, d,

	a	**b**	$a+b$
	d	**c**	$d+c$
$d+b$	$a+d$	$b+c$	$a+c$

Pour qu'il soit magique, c'est-à-dire que les conditions sur les diagonales, les lignes et colonnes soient respectées, il faudrait que :

$a+b=d+c=a+c=b+c=a+d=b+d.$

Cela implique par simplifications [3] successives que $a=b, b=d, b=c$.
Il n'y a donc pas de carré magique d'ordre 2 car dans un carré magique tous les nombres sont différents.

J.P. Delahaye propose dans son article un contre-exemple à ce résultat dans l'univers des **carrés géomagiques qui sont des tableaux contenant non pas des nombres mais des pièces de puzzle** qui s'additionnent par juxtaposition des pièces, sans recouvrement.

J.P. Delahaye nous présente dans son article le (seul pour l'instant ?) carré géomagique d'ordre 2 construit par Frank Tinkellenberg, informaticien hollandais, nous vous le présentons avec ses sommes géométriques :

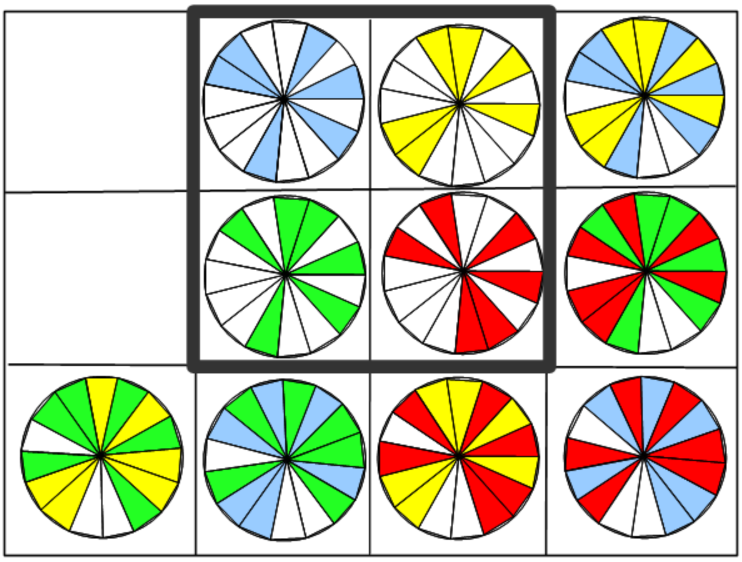


Figure 1.

3. Cette proposition peut se généraliser à des carrés magiques à coefficients dans un « demi-groupe régulier », type de structure où la simplification est possible.

Étude du carré 2x2 de la figure 1

Les pièces sont additionnées par superposition des disques, **sans recouvrement des parties colorées**, elles peuvent subir une rotation et/ou un retournement du disque pour obtenir les six sommes possibles : lignes, colonnes, diagonales.

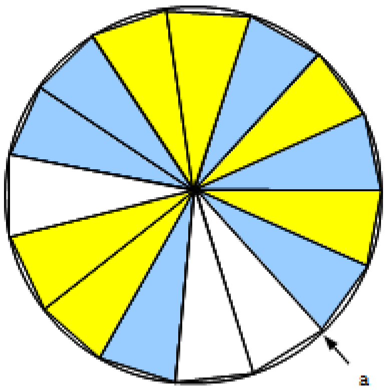
Nous nous proposons **d'étudier ces pièces d'un point de vue algébrique et/ou de la théorie des nombres** en les codant par des 15-uplets binaires. Nous aurions pu aussi les coder par des racines 15-èmes de l'unité.

Ce qui trouble beaucoup les amateurs de carrés géomagiques, c'est qu'il y a, en quelque sorte, des trous dans la figure somme contrairement à celle que nous avons décrite plus haut. Cela ne nous paraît pas crucial car il y a de nombreux carrés géomagiques avec des trous (voyez l'article de « Pour la science »).

Vérifions tout d'abord que c**e carré contient bien quatre éléments distincts en comparant tout d'abord la disposition des parts blanches** :

- Nous remarquons que les disques ont quatre parts blanches voisines sauf le bleu. **Donc le bleu est distinct des trois autres.**
- Les trois disques restants ont quatre parts blanches voisines plus deux parts blanches voisines séparées des précédentes sauf le jaune qui a trois parts voisines. Donc **le jaune est différent des deux autres restants.**
- Les deux disques restants, rouges et verts ont quatre parts blanches voisines et deux parts blanches voisines mais séparées des précédentes par deux nombres différents de parts colorées : les deux derniers disques, **rouges et verts sont bien distincts.**

Les différentes sommes sont égales du point de vue géométrique, elles ressemblent à un éventail avec neuf cases de couleur successives muni d'un pied de trois cases de couleur. Nous allons coder les différentes pièces par rapport à cette forme « d'éventail » en commençant par le point « a » situé en bas à droite de l'éventail et dans le sens trigonométrique.
Le codage du carré géomagique d'ordre 2 nous parait un excellent exercice de manipulation de concepts algébriques et de **calculs binaires.**



Nous avons pensé tout d'abord coder chacun des disques en terminant par le plus de blancs possibles pour avoir des 15-uplets les plus courts possibles. Cela ne s'est pas révélé pratique car, en fait, comme nous l'avons signalé l'addition des pièces se fait éventuellement après une rotation ou une symétrie. Nous avons alors reconstitué les formes de l'article de J. Delahaye et codé chaque pièce dans chacune des sommes qui la contient. Reprenons par exemple la somme du disque bleu et du disque jaune.

Nous allons coder ce disque de la façon suivante :

– Afin d'avoir des zéros en fin de liste nous partons du bas de l'éventail, à droite au point « a ».
– Chaque partie colorée en jaune ou en bleu est notée 1, chaque partie blanche est notée 0. Le codage se fait dans le sens trigonométrique.

D'où le résultat suivant avec calcul de la somme :

Bleu :	[1, 0, 1, 0, 1, 0 , 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
Jaune :	[0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0]
Somme :	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0]

Les expressions sont des 15-uplets de nombres binaires, éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Nous vous encourageons à effectuer le codage pour les autres éléments, voici les résultats :

Bleu :	[1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
Rouge :	[0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0]
Somme :	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0]

Vous remarquez que le codage du bleu est différent du précédent, en effet lors de l'addition du bleu et du rouge, le bleu est retourné, ce qui correspond à une symétrie axiale d'axe passant par le centre du disque et le point a, puis tourné de la façon suivante (où une rotation de « une part » correspond à une rotation de $\frac{2\pi}{15}$ dans le sens trigonométrique, soit 24°) :

Bleu initial :	[1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
Bleu retourné :	[0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1]
Bleu pivoté :	[1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
	(pivoté : rotation de 9 parts)

De même pour le rouge et le vert.

Vert :	[1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
Rouge :	[0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0]
Somme :	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0]

Cette remarque va être précisée lors de la formalisation mathématique de la construction.

Continuons notre codage :

Jaune :	[0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0] (rotation de une part)
Rouge :	[1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0] (rotation de 6 parts)
Somme :	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0,0]
Bleu :	[0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0] (rotation de 4 parts)
Vert :	[1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0] (rotation de 7 parts)
Somme :	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0]
Jaune :	[0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0,1, 1, 0, 0] (retournement)
Vert :	[1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0] (rotation de trois parts)
Somme :	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0]

Formalisation

Nous pouvons considérer ces 15-uplets comme des vecteurs d'un espace vectoriel à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Cet espace vectoriel doit être, comme dans le cas de la géométrie euclidienne, muni d'une relation d'équivalence $\Re$ qui correspond à la notion de figures égales dans le plan :

Deux figures du plan euclidien sont dites **égales si et seulement si elles sont superposables après glissement et/ou retournement, ou encore après translation, rotation et/ou symétrie.**

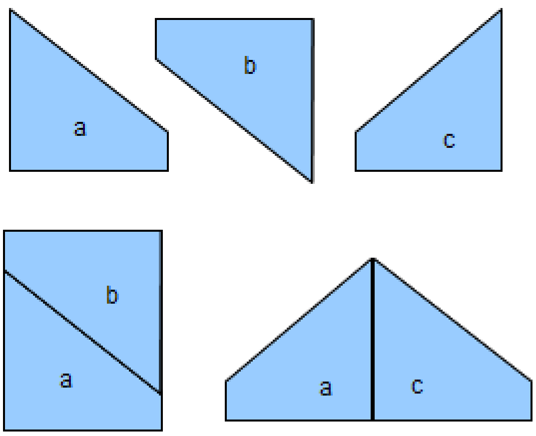
Dans notre cas il n'y a pas de translation, **nos retournements laissent fixe un diamètre du disque.**

Cette relation dite d'égalité des figures géométriques est une **relation d'équivalence**, sur l'ensemble des figures planes, en effet, elle est :

– **Réflexive** : une figure géométrique est égale à elle-même (on dit aussi superposable).

– **Symétrique** : si une figure est superposable à une deuxième figure, cette dernière est superposable à la première.

– **Transitive** : si deux figures sont superposables à une même troisième alors elles sont superposables entre elles.



Pour notre relation d'équivalence, nous remarquons que comme ci-contre, pour celle liée au groupe orthogonal de l'espace euclidien habituel, nous pouvons construire deux "assemblages" connexes non-équivalents en partant de trois figures équivalentes

Voici donc le tableau des quatre 15-uplets avec leurs expressions équivalentes dans les différents cas de sommes des figures. Nous vous invitons à vérifier qu'ils se correspondent bien par rotation et/ou symétrie, puis que leurs sommes, bien choisies, sont toujours égales à : [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0].

Bleu [1, 0, 1, 0, 1, 0 , 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0] = [1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0] = [0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0 , 0, 1, 1, 0, 0]	Jaune [0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0] = [0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0] = [0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0]
Vert [1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0] = [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0] = [1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0]	Rouge [0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0] = [0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0] = [1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0]

Exercices de calcul binaire

Nous pouvons considérer ces 15-uplets comme des nombres binaires, rappelons que, dans ce cas 0 se note aussi 0, 1 se note 1, deux se note 10, trois se note 11, quatre se note 100 et ainsi de suite.

Le 15-uplet $[1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0]$ représente la figure bleue ; écrivons le par exemple, comme un nombre binaire en partant de la droite comme dans les nombres décimaux (nous pourrions tout aussi bien partir de la gauche à cause de l'égalité des figures symétriques). Nous avons donc :

$[1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0]$, de valeur numérique en base 10 égale à :
$0\times1+0\times2+1\times4+0\times8+0\times16+0\times32+1\times64+1\times128+0\times256+0\times512+1\times1024+0\times2048+1\times4096+0\times8192+1\times16384 = \mathbf{21700}$;
qui est égal par symétrie des disques à :
$1+0+4+0+16+0+0+128+256+0+0+0+4096+0+0 = \mathbf{4501}$.

Écrivons de nouveau les 15-uplets convenables pour la figure bleue et la figure jaune afin qu'elles puissent se superposer en formant la somme convenue :

Bleu :	[1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
Jaune :	[0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0]
Somme :	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0]

Puis écrivons les valeurs numériques en base 10 de ces nombres binaires :

Bleu : $4+64+128+1024+4096+16384 = \mathbf{21700}$
Jaune : $8+16+256+512+2048+8192 = \mathbf{11032}$
Somme : $4+8+16+64+128+256+512+1024$
$+2048+4096+8192+16384 = \mathbf{32732}$

Nous vérifions bien que Bleu + Jaune = Somme.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les autres sommes (voir aussi la fin de cet article).

Commentaire didactique

Cet exercice est très formateur de la pensée scientifique de nos jeunes étudiants futurs chercheurs et/ou enseignants, car on vérifie que deux modélisations morphiques d'un même univers (ici l'univers des « carrés géomagiques »), sont aussi morphiques et donc les calculs en base 10 ou en base binaire sont en correspondance dans un morphisme.

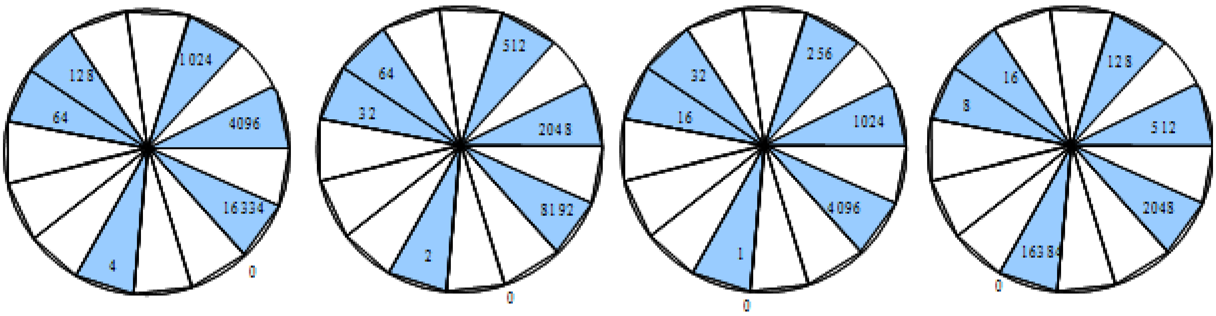
Rappelons que pour le mathématicien un morphisme est une correspondance entre deux catégories qui respecte la structure des objets de ces catégories, le terme « univers », très employé en psychopédagogie est une notion plus tolérante, donc moins structurée que celle de catégorie.

Équivalence de la rotation dans le codage binaire

Lorsque nous effectuons une rotation d'une figure, comment cela opère-t-il sur la valeur du nombre binaire correspondant ?

Reprenons le bleu et effectuons une rotation de «une part» (24°) dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ou, ce qui revient au même en déplaçant l'origine « o » dans le sens des aiguilles d'une montre :

Bleu = $[1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0]$
(1ère figure à gauche)
Bleu pivoté = $[0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0]$
après rotation (2ème figure)

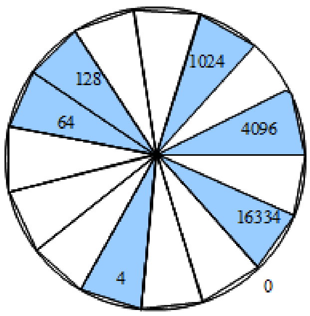
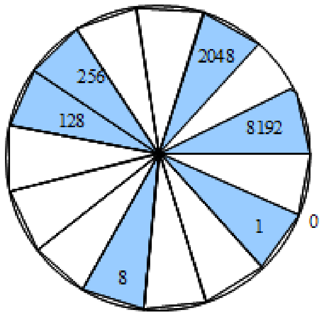


Le bleu a maintenant pour valeur en base 10 : $2+32+64+512+2048+8192$, c'est-à-dire la moitié de sa valeur précédente.

Si nous continuons le processus, nous allons encore diviser par 2, soit : $d = 1+16+32+256+1024+4096$. Observons le résultat d'une itération en plus : nous trouvons : $d' = 8+16+128+512+2048+16384$ que nous relions à d par une "division" par 2, modulo $2^{15}-1$. En effet, $2\times16384 = 2^{15}$ et $2^{15} \equiv 1$ modulo $2^{15}-1$. Donc $d \equiv 2\times d'$ modulo $2^{15}-1$.

Plus généralement lorsque nous effectuons une rotation de « $\frac{2\pi}{15}$ (une part)» d'une figure, nous déplaçons la dernière composante binaire de la fin du 15-uplet vers son début donc nous "divisons" bien, modulo $2^{15}-1$, chaque composante par 2.

Pour terminer nous allons effectuer la rotation maximum à savoir de **14 parts afin de souligner l'existence des inverses pour les 15-uplets**.

		Bleu initial : 4+64+128+1024+4096+16384 = 21700 Calculons, d'après la figure, la valeur en base 10 du bleu après une rotation de 14 parts : 1+8+128+256+2048+8192=10633. Nous remarquons que les composantes après rotation sont le double des composantes initiales sauf 1 qui, modulo $2^{15}-1$ est égal à 32768 qui est bien le double de 16334.

Pouvons-nous justifier ce résultat ?

Lorsque nous effectuons une rotation de 14 parts nous devons, d'après nos calculs précédents, diviser chaque composante binaire par 2^{14}, ou bien les multiplier par deux puisque $2^{14}\times 2 = 2^{15} \equiv 2^0 = 1$ ce qui montre que 2 est l'inverse de 2^{14}.

Ceci termine notre raisonnement. (Nous avons évité le raisonnement par récurrence à cause du nombre fini de cas possibles.)

Nous pouvons donc écrire :

Lorsque l'on effectue une rotation de «une part» dans le sens trigonométrique on divise le nombre représenté par 2.

Lorsque l'on effectue une rotation de n parts on divise le nombre par 2^n.

Si l'on effectue une rotation de sens opposé on le multiplie par la puissance de 2 convenable.

Écrivons ce résultat sous forme algébrique en notant r la rotation élémentaire de une part dans le sens trigonométrique et r^n la rotation de n parts.

Notons les 15-uplets représentant les disques : $d = \sum_{i=0}^{14} a_i 2^i$ où $\forall i, a_i \in \{0,1\}$. Nous avons alors pour $1 \leqslant n \leqslant 15$:

$$r\left(\sum_{i=0}^{14} a_i 2^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{13} a_{i+1}2^i + a_0 2^{14}\right) \text{ et } d = \left(\sum_{i=0}^{13} a_{i+1}2^{i+1} + a_0 2^{15}\right) \text{ modulo } 2^{15}-1$$

$$r^n\left(\sum_{i=0}^{14} a_i 2^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-1-i}2^{14-i} + \sum_{i=n}^{14} a_i 2^{i-n}\right) \text{ et } d = \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-1-i}2^{14+n-i} + \sum_{i=n}^{14} a_i 2^i\right) \text{ modulo } 2^{15}-1$$

Étude du cas de la symétrie

Étudions le cas de la symétrie par exemple sur la figure bleue :
$[1,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,1,0,0]$ qui devient par symétrie :
$[0,0,1,0,0,0,1,1,0,0,1,0,1,0,1]$, nous pouvons de nouveau considérer ces 15-uplets comme des nombres binaires.

Petit exercice de calcul binaire (facultatif)
Nous pouvons additionner ces deux 15-uplets de la façon habituelle, rappelons que deux s'écrit alors 10. La somme s'écrit :
$[1,0,2,0,1,0,1,2,1,0,1,0,2,0,1]$ elle est symétrique mais si nous l'écrivons sous forme binaire, elle perd sa symétrie :
$[1,1,0,0,1,1,0,0,1,0,1,1,0,0,1]$ soit, numériquement en base 10 :
1+0+0+8+16+0+64+0+0+512+1024+0+0+8192+16384
= **26201**

Ce que nous vérifions en développant :
Bleu = [1, 0, 1, 0, 1, 0 , 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0] soit en base 10 :
0+0+4+0+0+0+64+128+0+0+1024+0+4096+0+16384
= **21700**

qui devient par symétrie :
Bleu symétrisé : $[0,0,1,0,0,0,1,1,0,0,1,0,1,0,1]$
soit en base 10 :
$1+0+4+0+16+0+0+128+256+0+0+0+4096+0\times 2^{13}+0\times 2^{14} = \mathbf{4501}$
la somme est : **21700+4501 = 26201**, ce qui convient.

Dans le cas particulier de nos figures ce type d'addition n'existe pas puisqu'il n'y a jamais recouvrement. Que faisons-nous lorsque nous symétrisons la figure ? Nous avons vu que nous inversons l'ordre des 15-uplets, ainsi le coefficient de 2^{14} devient celui de 2^0, celui de 2^{13} devient celui de 2 et ainsi de suite. Or les 15-uplets sont définis modulo 2^{15} donc :
$2^{14} = 2^{-1}$; $2^{13} = 2^{-2}$ etc.

Symétriser la figure revient donc à inverser les composantes des 15-uplets. Est-il possible de matérialiser algébriquement cette inversion ?

Reprenons la symétrisation du bleu :

bleu	$[1,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,1,0,0]$
bleu symétrisé	$[0,0,1,0,0,0,1,1,0,0,1,0,1,0,1]$

Écrivons le bleu puis le bleu symétrisé en puissances de deux :
$[2^{15}, 0, 2^{13}, 0, 2^{11}, 0, 0, 2^8, 2^7, 0, 0, 0, 2^3, 0, 0]$
$[0, 0, 2^{12}, 0, 0, 0, 2^8, 2^7, 0, 0, 2^4, 0, 2^2, 0, 2^0]$

Soit encore en réorganisant les puissances de deux :
bleu
$[2^{15} + 0 + 2^{13} + 0 + 2^{11} + 0 + 0 + 2^8 + 2^7 + 0 + 0 + 0 + 2^3 + 0 + 0]$
bleu symétrisé
$[2^0 + 0 + 2^2 + 0 + 2^4 + 0 + 0 + 2^7 + 2^8 + 0 + 0 + 0 + 2^{12} + 0 + 0]$

Nous remarquons que les exposants des puissances de deux apparaissant dans le symétrisé sont les complémentaires à 15 des puissances de deux d'origine, ceci nous permet d'écrire une expression générale du passage au symétrique.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si} \quad d = \sum_{i=0}^{14} a_i 2^i \text{ où } \forall i, a_i \in \{0, 1\}, \text{ alors} \\ \text{symétrique}(d) = \sum_{i=0}^{14} a_i 2^{14-i}\end{array}}$$

Récapitulation

Nous avons vu que chaque rotation correspond à une division de chaque puissance de 2 par une puissance de 2, il y a donc 15 rotations si nous comptons l'identité représentée par 2^{15}. Il y a une seule symétrie donc, il y a 30 éléments dans chaque classe dont seulement 3 sont utilisés dans le carré géomagique.

Représentations minimales des figures

Nous allons terminer cette étude des représentations binaires par le tableau des nombres représentant les figures en choisissant d'exprimer chaque figure par son représentant le plus petit possible comme on le fait dans l'anneau des nombres $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Une représentation du bleu est :
$[1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0]$. Nous allons effectuer une rotation afin d'avoir le moins possible de puissances élevées de 2 ; pour ce faire nous mettons le plus possible de zéros à gauche du 15-uplet. Ce qui donne, pour le bleu :
$[0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1]$ c'est-à-dire en valeur numérique en base 10 :
1+2+0+0+16+0+64+0+256+0+0+2048 = 2387

De même pour le jaune :
$[0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0]$ qui devient :
$[0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1]$, de valeur numérique en base 10 :
1+2+0+0+0+32+64+0+256+0+1024 = 1379

Le vert :
$[1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$ qui devient :
$[0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1]$, de valeur numérique en base 10 :
1+0+0+8+0+32+0+128+256+0+1024 = 1449

Le rouge :
$[0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0]$ qui devient :
$[0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1]$, de valeur numérique en base 10 :
1+2+0+8+0+32+0+0+256+0+1024 = 1323.

Le tableau des valeurs binaires des représentants des différentes figures peut donc être complété par les valeurs minimales numériques dans chaque classe d'équivalence modulo $2^{15} - 1$.

Bleu $[1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0]$ $= [1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]$ $= [0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0]$ $= 2387$	Jaune $[0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0]$ $= [0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0]$ $= [0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0]$ $= 1379$
Vert $[1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]$ $= [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$ $= [1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$ $= 1449$	Rouge $[0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0]$ $= [0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0]$ $= [1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$ $= 1323$

Si ce système de codage est un bon exercice de calcul binaire, il n'en reste pas moins qu'il est assez compliqué, nous aurions pu, par exemple, essayer de nous contenter d'utiliser les nombres de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

La structure du quotient par la classe d'équivalence des rotations et de la symétrie axiale pourrait alors être additive. Ainsi, par exemple la figure bleue aurait pour valeur minimale : $[0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1] = 1 + 2 + 0 + 0 + 5 + 0 + 7 + 0 + 9 + 0 + 0 + 12 = 36$ et $36 \equiv 6$ modulo 15.

La figure jaune : $[0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1] = 1 + 2 + 0 + 0 + 0 + 6 + 7 + 0 + 9 + 0 + 11 = 36$ et $36 \equiv 6$ modulo 15.

Nous constatons que deux figures différentes ont même codage, ce qui ne convient pas ; nous n'avons pas eu ce problème avec le codage binaire.

Un autre codage possible est le codage complexe avec les racines 15-ièmes de l'unité. Nous laissons le soin de cette modélisation au lecteur en remarquant que, dans son essence, elle est très proche de notre modélisation binaire.

Remarque : Nous espérions pouvoir trouver un système de classes d'équivalence à un seul représentant mais, à cause des manipulations effectuées sur les figures : rotations et symétries, nous n'y sommes pas parvenus. Nous donnons tout de même le détail des nombres utilisés afin que le lecteur puisse contrôler nos résultats ou mieux, faire les calculs, ce qui est un bon exercice de calcul numérique.

Bleu $[1,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,1,0,0]$ $=[1,1,0,0,1,0,1,0,1,0,0,1,0,0,0]$ $=[0,1,0,0,1,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0]$ Sous forme réduite : $[0,0,0,1,1,0,0,1,0,1,0,1,0,0,1]$ $=\overline{\mathbf{2387}}$	Jaune $[0,1,0,1,0,1,1,0,0,0,1,1,0,0,0]$ $=[0,0,1,0,1,0,1,1,0,0,0,1,1,0,0]$ $=[0,1,1,0,1,0,1,0,0,0,0,0,1,1,0,0]$ Sous forme réduite : $[0,0,0,0,1,0,1,0,1,1,0,0,0,1,1]$ $=\overline{\mathbf{1379}}$	Bleu + Jaune $= 21700 + 11032$ $= 32732$ $= \overline{8183}$ (cf. remarques qui suivent)
Vert $[1,0,1,0,1,1,0,1,0,0,0,0,1,0,0]$ $=[1,0,1,1,0,1,0,1,0,0,1,0,0,0,0]$ $=[1,0,0,1,0,1,0,1,1,0,1,0,0,0,0]$ Sous forme réduite : $[0,0,0,0,1,0,0,1,0,1,0,1,1,0,1]$ $=\overline{\mathbf{1449}}$	Rouge $[0,1,0,1,0,0,1,0,1,0,1,1,0,0,0]$ $=[0,0,1,1,0,1,0,1,0,0,1,0,1,0,0]$ $=[1,1,0,1,0,1,0,0,1,0,1,0,0,0,0]$ Sous forme réduite : $[0,0,0,0,1,1,0,1,0,1,0,0,1,0,1]$ $=\overline{\mathbf{1323}}$	Vert+ Rouge $= 22148 + 10584$ $= 32732$
Bleu+Vert$= 9548 + 23184 = 32732$	Jaune+Rouge$= 5516 + 27216 = 32732$	Bleu+Rouge$= 25928 + 6804$ $= 32732$ Jaune+Vert$= 13580 + 19152$ $= 32732$

Remarque 1 : rappelons que la somme bleu + Jaune est $[1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,1,1,1,0,0]$ soit, en valeur numérique minimale avec le plus de zéros dans les puissances élevées de 2 :

$[0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,1,1,1]$
dont la représentation donne la valeur :
$1+2+4+0+16+32+64+128+256+512+1024+2048+4096 = 8183$.

Bien entendu, à cause du non respect par la relation d'équivalence de l'addition des figures que nous avons déjà signalé, les sommes des classes ne sont pas les classes des sommes.

Remarque 2 : Nous travaillons ci-dessous en base 10. Nous remarquons que tous les résultats de sommes non réduites sont paires, nous pouvons donc diviser les représentants des sommes par deux, éventuellement par 4, nous obtenons :

$$\begin{array}{lr}
\text{Bleu+Jaune} = & \overline{21700}+\overline{11032} \equiv \overline{32732} \equiv \overline{5425}+\overline{2758} \equiv \overline{8183} \\
\text{Vert+Rouge} = & \overline{22148}+\overline{10584} \equiv \overline{32732} \equiv \overline{5537}+\overline{2646} \equiv \overline{8183} \\
\text{Bleu+Vert} = & \overline{9548}+\overline{23184} \equiv \overline{32732} \equiv \overline{2387}+\overline{5796} \equiv \overline{8183} \\
\text{Jaune+Rouge} = & \overline{5516}+\overline{27216} \equiv \overline{32732} \equiv \overline{1379}+\overline{6804} \equiv \overline{8183} \\
\text{Bleu+Rouge} = & \overline{25928}+\overline{6804} \equiv \overline{32732} \equiv \overline{6482}+\overline{1701} \equiv \overline{8183} \\
\text{Jaune+Vert} = & \overline{13580}+\overline{19152} \equiv \overline{32732} \equiv \overline{3395}+\overline{4788} \equiv \overline{8183}
\end{array}$$

Les classes ainsi[4] réduites deviennent :

Bleu $5425 \equiv 2387 \equiv 6482$	Jaune $2758 \equiv 1379 \equiv 3395$	Somme des 2 premiers représentants $= 8183$
Vert $5737 \equiv 5796 \equiv 4788$	Rouge $2646 \equiv 6804 \equiv 1701$	Somme des 2 premiers représentants $= 8183$
Somme des 2 seconds représentants $= 8183$	Somme des 2 seconds représentants $= 8183$	Diagonales : Sommes des 2 troisièmes représentants $= 8183$

Nous avons ainsi obtenu une représentation numérique du carré géomagique découvert par Frank Tinkellenberg.

Peut-on coder avec des 13-uplets ?

Écrivons réciproquement ces nombres sous forme binaire. Par exemple le bleu qui vaut 5425.

Reprenons la liste des puissances successives de 2. $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots, 8192, 16384, 32768$

Nous cherchons quelle est la puissance maximale de 2 qui est contenue dans 5425 : $5425 - 4096 = 1329$ auquel nous ôtons la puissance maximale de 2 soit 1024. $1329 - 1024 = 305$, nous continuons ainsi jusqu'au résultat 1 puisque 5425 est impair ; nous obtenons :
5425 = 4096 + 1024 + 256 + 32 + 16 + 1 ce qui s'écrit

4. Rappelons que pour qu'un nombre soit divisible par 4 il suffit que le nombre formé par ses deux derniers chiffres soit un multiple de 4.

sous forme binaire :
$[1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1]$
Écrivons de même le jaune, nous trouvons :
2758 = 2048 + 512 +128 + 64 + 4 + 2
$[0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1]$;
Présentons la somme habituelle 5425+2758 = 8183 par totaux partiels verticaux :

4096 + 0 + 1024 + 0 + 256 + 0 + 0 + 32 + 16 +0 + 0 + 0 + 1
0 + 2048 + 0 + 512 + 0 + 128 + 64 + 0 + 0 +0 + 4 + 2 + 0

4096 + 2048 + 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 16 +0 + 4 + 2 + 1

Nous remarquons que nous n'avons plus que 13 éléments au lieu de 15 précédemment. Il reste une case blanche au niveau du 8. Est-ce à dire que nous pourrions coder différemment nos figures avec deux blancs de moins ?
La même situation apparaît avec 2387 + 5796, somme du bleu et du vert :
2387 = 0 + 2048 + 0 + 0 + 256 + 0 + 64 + 0 + 16 + 0 + 0 + 2 + 1
5796 = 4096 + 0 + 1024 +512 + 0 + 128 + 0 + 32 + 0 + 0 + 4 + 0 + 0
8183 = 4096 + 2048+ 1024 + 512 + 256 +128 + 64 + 32 + 16 + 0 + 4 + 2 +1

Observons les représentations par les 13-uplets :
Bleu $[0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1]$
Jaune $[1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0]$

Le bleu précédent s'écrivait :
$[1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1]$

Nous remarquons que le deuxième bleu n'est pas une transformation géométrique (rotation et/ou symétrie) du premier puisque le premier contient une suite de trois zéro ce qui n'est pas le cas du deuxième. Cependant si nous observons les deux résultats nous remarquons que si nous complétons les 13 uplets par deux zéros dans les puissances supérieures de 2 :

Premier bleu $[0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1]$

Deuxième bleu $[0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1]$

Nous retrouvons bien deux 15-uplets égaux à une rotation près, nos calculs sont donc corrects mais notre conclusion est :

Il est **impossible de réduire les n-uplets de 15 éléments à 13 éléments** par cette méthode et la question de Jean-Paul Delahaye sur la possibilité de trouver des solutions géométriques au carré géomagique d'ordre 2 qui ne contiennent pas de « trous » **reste ouverte**.

Carrés d'entiers 2x2 n-magiques

Nous avons déjà vu qu'il n'y a pas de carré magique 2x2, mais les différentes remarques sur la nécessité d'utiliser des classes d'équivalences pour découvrir un carré géomagique d'ordre 2 nous incitent bien sûr à nous demander si nous ne pourrions pas en « trichant un peu[5] » écrire un carré 15-magique dans $\mathbb{Z}$.

Nous allons simplement utiliser le fait que, dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$, on peut changer de représentant pour les classes.
Voici un « carré 15-magique », vous vérifierez que dans $\mathbb{Z}$, la somme des lignes, colonnes et diagonales est 4 modulo 15.

Ici, les contraintes de sommes sont trivialement satisfaites car les quatre éléments représentent la classe $\overline{2}$.

2	32	$\overline{4}$
17	47	$\overline{4}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$

Substituons la multiplication à l'addition. En remarquant que l'anneau $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ admet des diviseurs de zéro car nous avons $15 = 5 \times 3 \equiv 0$ modulo 15, nous observons qu'il serait intéressant de chercher des carrés n-magiques via un anneau quotient de $\mathbb{Z}$ muni de la multiplication. Au cas où cela ne vous intéresserait pas de chercher, voici un exemple 30-magique tiré de $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$; tous les produits sont égaux à zéro modulo 30.

	15	10	$\overline{150}$
	12	30	$\overline{360}$
$\overline{120}$	$\overline{180}$	$\overline{300}$	$\overline{450}$

En voici un autre moins trivial, encore tiré de $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ muni de la multiplication. Ce résultat n'est encore pas très satisfaisant puisque deux termes : 45 et 15 sont congrus modulo 30. Pour les élèves professeurs il sera intéressant d'observer « pourquoi cela marche » en décomposant chaque terme en facteurs premiers.

3	5	$\overline{15}$
45	15	$675 \equiv 15$ modulo 30
$75 \equiv 15$ modulo 30	$75 \equiv 15$ modulo 30	$45 \equiv 15$ modulo 30

5. Le qualificatif **n-magique** vient de ce que nous utilisons les congruences modulo n. Un carré **0**-magique est un carré magique : pas de tel carré à l'ordre 2 ! Si $n > 0$, les classes des éléments ne sont pas nécessairement deux à deux distinctes. Pour construire une solution n-magique dans $\mathbb{Z}$, il suffit de partir d'un carré seulement "rangées-diagonales" magique de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dans l'article de *Pour la Science* cité en introduction, nous retrouvons, en bas de la page 82, une idée similaire au sujet de la construction de carrés géomagiques 3x3, obtenus par "pertubations" de "presque-solutions".

Représentations isomorphes

Pour les élèves professeurs nous proposons un exercice relatif aux deux représentations isomorphes des pièces du carré géomagique.

Page suivante nous donnons, pour chaque pièce le calcul en base dix des trente composantes de chaque classe modulo $2^{15} - 1$.

Nous souhaitons, connaissant deux expressions numériques d'une couleur, retrouver quelles transformations géométriques ont été effectuées sur la première pour obtenir la seconde. Par exemple, de bleu 19096 à bleu 19089 ?

Reprenons la liste des quinze premières puissances successives de 2. $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768$

Écrivons comme précédemment, 19096 en notation binaire :
$19096 = 16384 + 2048 + 512 + 128 + 16 + 8 = 2^{14} + 2^{11} + 2^9 + 2^77 + 2^4 + 2^3$
Soit encore : $[1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0]$.
De même : $19089 = 2^{14} + 2^{11} + 2^9 + 2^7 + 2^4 + 2^0$
Soit encore : $[1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]$

Le deuxième 15-uplet est-il le transformé du premier par une symétrie et/ou une rotation ?

Symétrisons le premier 15-uplet pour effectuer une symétrie. Nous obtenons :
$[0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1]$

Ensuite, effectuons une rotation en translatant les trois premiers termes à la fin de l'expression, nous obtenons le nouveau 15-uplet en rouge égal à 19089.
$[0, 0, 0, 1, [1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1]0, 0, 0, 1]$.

Nous avons donc obtenu la deuxième expression du bleu à partir de la première en effectuant **une symétrie puis une rotation de quatre parts.**

Vérifions ce résultat d'après les formules trouvées précédemment :
Sym $(2^{14} + 2^{11} + 2^9 + 2^7 + 2^4 + 2^3) =$
$(2^0 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^{10} + 2^{11}) = 3241$

Effectuons les quatre rotations en multipliant par 2 successivement :
$3241, 6482, 12964, 25928, 51856 = 19089$ modulo $2^{15} - 1$. cqfd.

Il pourra être agréable et profitable pour le futur professeur d'effectuer ces transformations à l'aide des barrettes que nous présentons dans les pages suivantes à destination des plus jeunes.

Les trente composantes pour chaque pièce, (base dix mod. $2^{15} - 1$) de chaque classe [6].

BLEU		JAUNE		VERT		ROUGE	
Rotations	Symétries	Rotations	Symétries	Rotations	Symétries	Rotations	Symétries
2387	3241	1379	1589	1197	1449	1323	1701
4774	4501	2758	3178	2394	2898	26646	3402
5425	5411	3115	3395	4788	4277	5509	5173
6293	6482	5516	6356	5537	5796	5292	6804
9548	9002	6230	6790	8491	8554	9569	8617
9765	9317	11032	8589	9576	9261	10584	9485
10633	10521	11361	10339	11074	10507	11018	10346
10850	10822	12460	12712	11529	11592	11305	10563
12586	12964	12677	13580	13349	13601	12453	13608
17577	18004	17073	17178	16982	17108	17045	17234
18530	18634	17941	18081	19152	18522	19138	18970
18096	19089	22064	20678	20629	21014	21168	20692
21266	21042	22722	21553	22148	21637	22036	21126
21700	21644	24920	25424	23058	23184	22610	21665
25172	25928	25354	27160	26698	27202	24906	27216

6. Calculs effectués par Eric Lehman

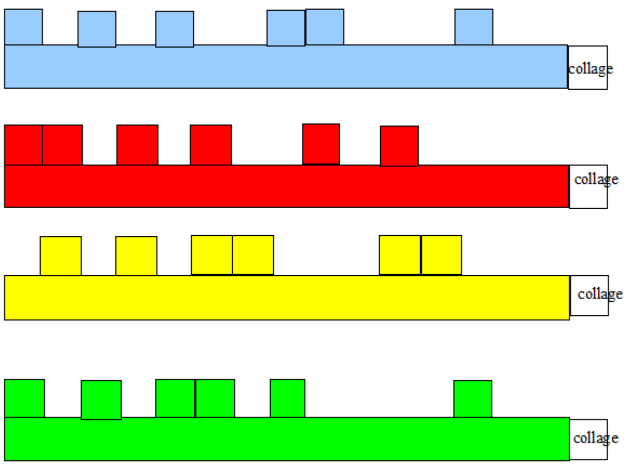
Une variante des carrés magiques géométriques

Cette activité peut être proposée à des plus jeunes à cause de son aspect manipulatoire, elle nécessite cependant beaucoup de soin.

Nous vous proposons ci-dessous une variante des activités précédentes présentée plus concrètement à l'aide de barrettes découpables. Ce type de présentation assortie à des constructions physiques avec découpage nous paraît plus pédagogique que celle des portions de cercle utilisées par Frank Tinkellenberg, conformément à un principe qui nous est cher : le savoir s'acquiert non seulement à la lecture et à la réflexion sur cette lecture mais aussi (sinon surtout !) par d'autres moyens comme la construction de pièces géométriques, le découpage de ces pièces et surtout leur manipulation.

Voici un ensemble de figures constituées de grandes barres bleue, rouge, jaune et vert et de petits carrés disposés sur ces grandes barres à des endroits bien précis car nous voulons réaliser des **sommes de figures**. On appelle **somme de figures** la juxtaposition de figures par exemple le long d'un de leurs côtés **sans recouvrement.**

Dans notre cas l'addition est plus délicate car elle se fait du côté des dents.

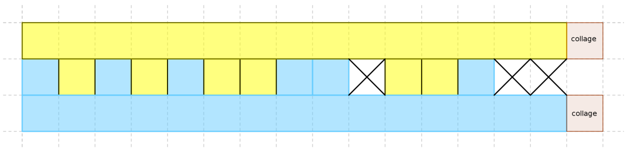


Activité de découpage

Gardez la figure du haut de la page suivante sans la découper, elle vous servira de référence. Dans la figure suivante nous avons représenté les deux faces de chaque barrette, nous vous conseillons d'effectuer un tirage en format A4 sur papier fort afin que vos barrettes, repliées sur elles-mêmes soient plus solides, vous pourrez ensuite découper les dents.

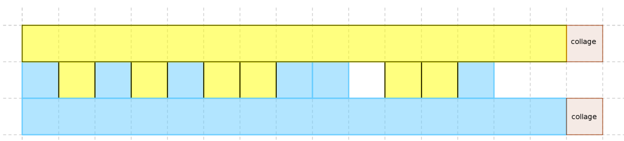
Ensuite vous poserez vos barrettes mobiles sur une page blanche ou sur la page non découpée afin d'effectuer les additions de figures.

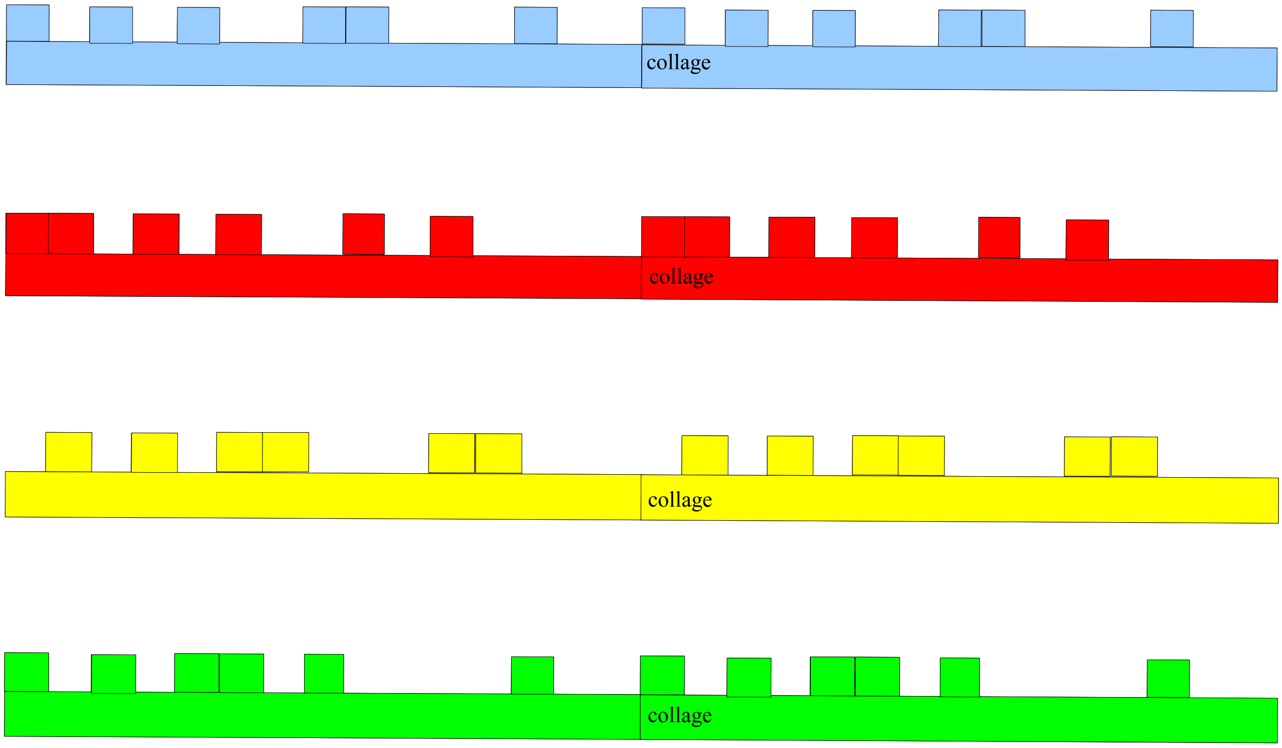
En décalant éventuellement les bandes les unes par rapport aux autres et/ou en les retournant essayez de les additionner du côté des dents, en intercalant les dents de façon à ce qu'elles ne se recouvrent pas, pour respecter les règles de l'addition des figures. Par exemple voici l'addition de la bande bleue avec la bande jaune, nous avons dû la tourner d'un angle de 180° afin qu'elle s'insère bien dans la bleue, vous remarquerez qu'il reste « trois trous dans le dentier » figurés par des X.



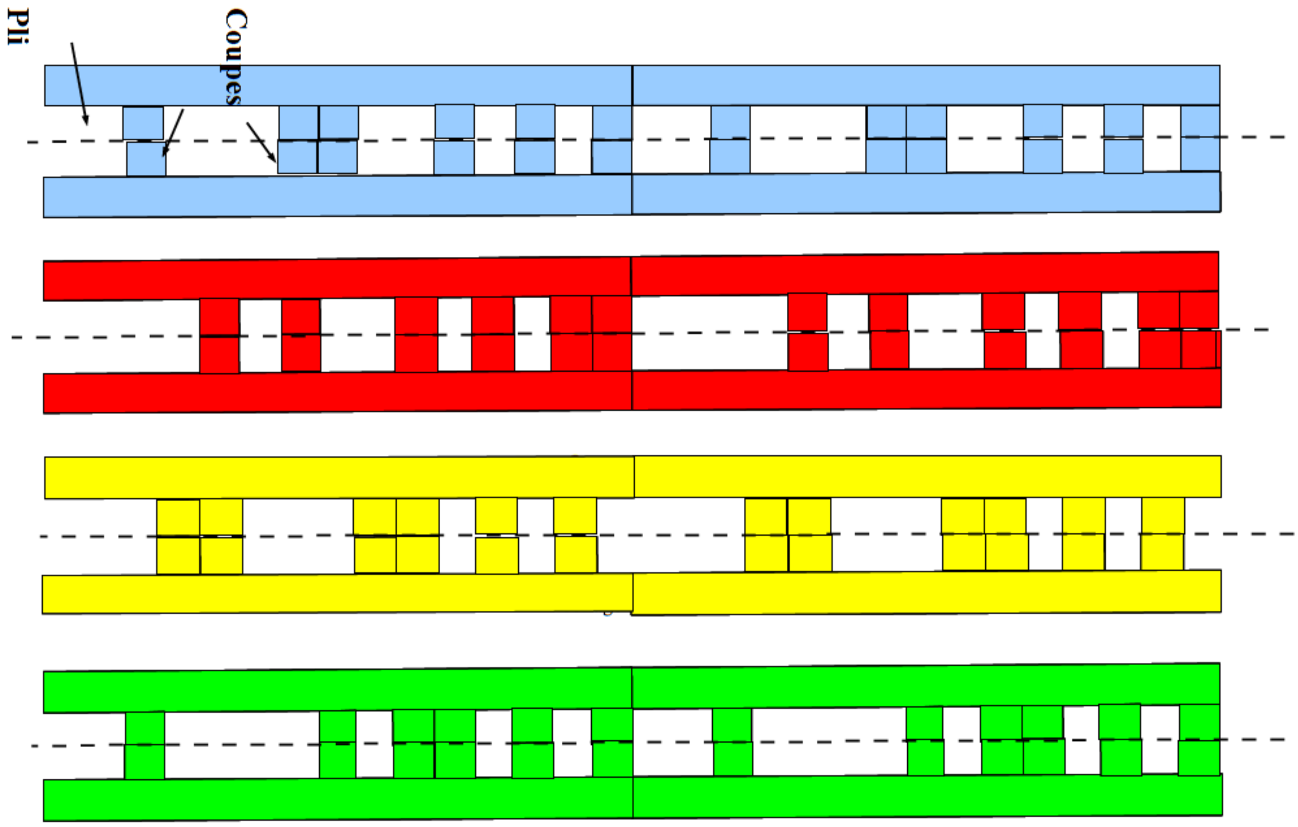
Nous vous proposons de faire de même avec les autres couleurs en essayant de « retrouver le même dentier » c'est-à-dire plein partout, sauf aux trois endroits signalés par une croix.

Dans l'exemple, que nous vous redonnons ci-dessous, nous nous sommes restreints à la partie commune qui nous intéresse et qui nous servira de modèle pour les autres bandes. Si vous ne souhaitez pas faire cette activité « à la main » (en découpant les pièces en double exemplaire) vous pouvez passer directement aux solutions dans les pages suivantes ou effectuer l'activité à l'aide d'un logiciel de géométrie.

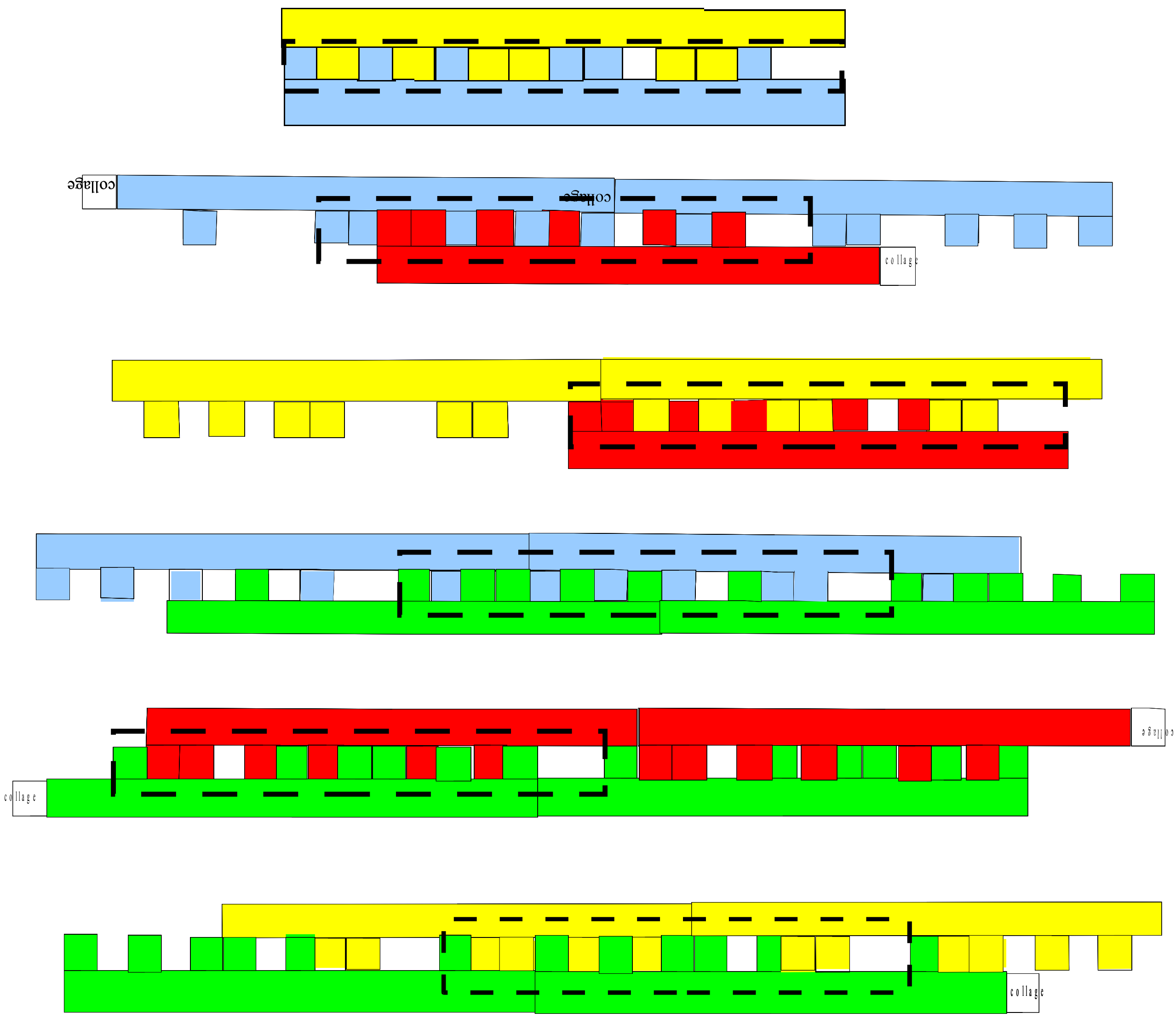




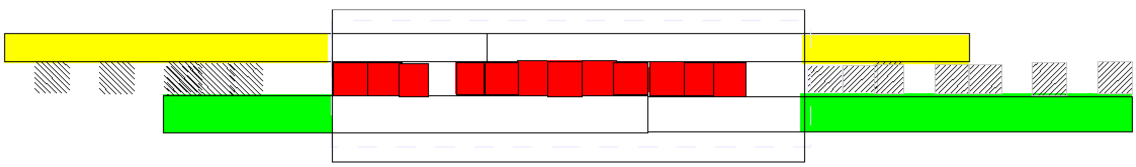
Suggestion pour réaliser des bandes plus rigides en repliant, avant découpage des dents, chaque bande sur elle-même le long du pointillé.



Ensuite nous donnons les cas plus difficiles avec translation et symétrie, nous avons entouré d'un trait pointillé dans les exemples les parties « qui se ressemblent » autrement dit qui sont **égales au sens des figures (elles sont superposables)** :

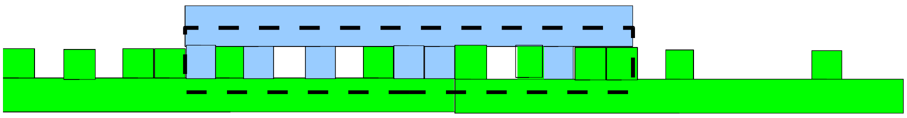


Nous allons considérer les parties entourées d'un pointillé **comme les sommes au sens géométrique des différentes bandes**, nous constatons que ces “sommes” ont toutes la même forme, à savoir la partie que nous avons encadrée et dont les “dents” sont coloriées en rouge :

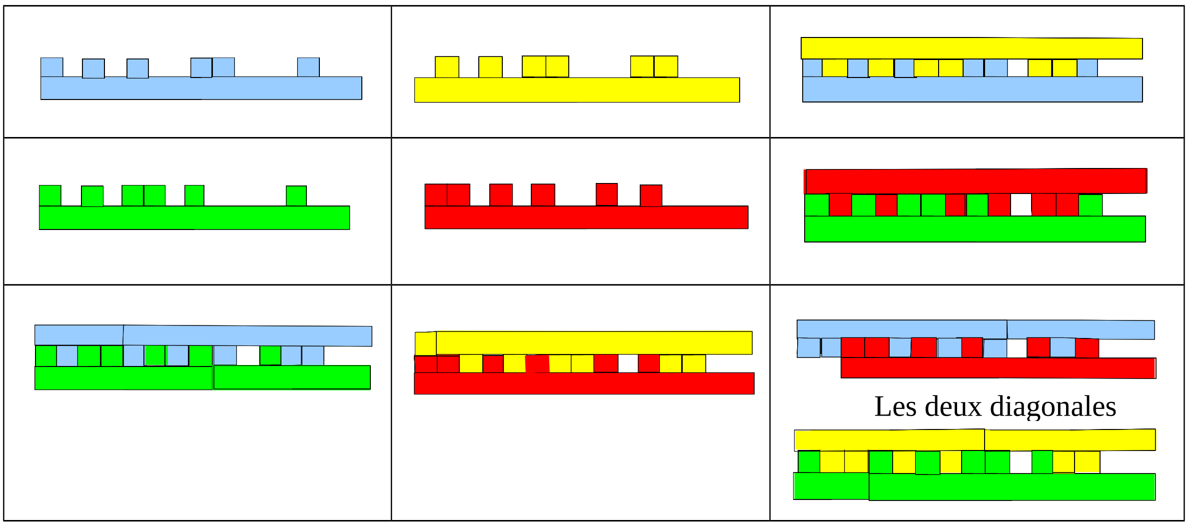


Remarque pour les plus grands : lors de nos manipulations nous avons eu une réponse négative à une question que nous nous étions posée : les barrettes s'additionnent-elles d'une seule façon, autrement dit **l'addition des figures appliquée aux quatre barrettes a-t-elle un résultat unique** ? En effet les barrettes bleue et verte peuvent s'additionner d'une autre façon et le résultat n'est pas le même, il se code par :

[1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1] = [0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1] =
2+4+8+16+32+64+0+256+512+1024+2048+0+8192+0 = 12158.



Nous regroupons ci-dessous les quatre barrettes d'origine et leurs sommes.



Nous avons réalisé un « carré géomagique » d'ordre 2, similaire à celui qui est présenté dans « Pour la science » mais peut-être plus facile à concevoir pour les plus jeunes. Nous attendons avec intérêt commentaires et suggestions de votre part

Bibliographie

DELAHAYE Jean Paul *Carrés géomagiques in* “Pour la science” Juin 2013.

SALLOWS Lee *Geomagics squares* en ligne : www.geomagicsquares.com

RODRIGUEZ HERRERA Ruben et SALLES-LEGAC Danielle *Nombreux articles d'activités géométriques pour les élèves professeurs, l'école primaire, le collège et le lycée en français et en espagnol* en lígne sur le site http://www.math.unicaen.fr/irem/ de l' I.R.E.M. de Basse-Normandíe, Caen.

Membres de l'équipe « Géométrie » de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie à Caen :

Anne-Marie Bock, Eric Lehman, Olivier Longuet, Ruben Rodriguez, Danielle Salles, Michel Soufflet, Silvia Sanchez (Perú).