Triangles rectangles de Ruben

Questions et problèmes pour aborder un parcours d'étude et de recherche.

Introduction

Lorsque je corrige mes copies de mathématiques et que je trouve une erreur du type « formule erronée » (formule inapplicable dans le cas général), je m'interroge sur la possibilité de l'existence d'un sous-ensemble formé des cas où la formule « fausse » serait valable. C'est le cas de cette « petite histoire de recherche » qui m'a permis de réaliser un PER (Parcours d'étude et de recherche) autour du théorème de Pythagore et de triangles rectangles un peu particuliers.

De tels PER ont pour objectif de travailler les compétences concernant « l'attitude de recherche en mathématiques ». Il est souhaitable que nos élèves réalisent un PER à partir de la question initiale : étudier et rechercher les ensembles où une formule serait fausse dans le cas général, mais valable dans ces ensembles particuliers.

Avertissements :

1. Un PER débute toujours par l'appropriation d'une question posée à un groupe d'élèves. Il faut qu'elle soit suffisamment riche pour permettre à chacun de se construire un parcours au sein des questions associées et ainsi effectuer un parcours d'étude et de recherche personnalisé. Ainsi pour entrer dans le parcours d'un autre élève, il est primordial que le récit du PER soit le plus fidèle possible au cheminement réel des questions et recherches telles qu'elles se sont posées. J'ai essayé ici de vous les donner le plus fidèlement possible, en suivant la diversité de mon parcours qui contient les démarches redondantes le cas échéant, dans différents « univers », donnant mes résultats.

   Cet article remanié pour le format du *Miroir* a neuf courtes parties. Ces parties I à IX décrivent la recherche, faite en juillet 2015 avant la présentation réalisée à la journée de rentrée de notre IREM en septembre. Ce travail et les ajouts ultérieurs de l'auteur font l'objet d'un compte rendu foisonnant de 28 pages que vous pouvez télécharger sur notre site web à l'url http://www.math.unicaen.fr/irem/spip.php?article184 .

2. Dans cet article, j'ai souvent utilisé le terme didactique « univers ». Un « univers » est un ensemble où l'élève se place afin de donner sens aux questions posées. Il s'agit d'un ensemble relativement restreint, où l'un des registres des mathématiques est prépondérant. Par exemple, l'élève peut décider de réfléchir à la question dans « l'univers algébrique des systèmes d'équations du second degré à trois variables ».

I – Algèbre, fonctions, géométrie...

Lors de la correction des copies d'examen du master du professorat des écoles à l'ESPE de Basse-Normandie, j'ai constaté qu'une étudiante avait énoncé le théorème de Pythagore sous la forme erronée : $\frac{a^2}{b^2} = c^2$, au lieu de la bonne forme $a^2 + b^2 = c^2$ pour un triangle ABC rectangle en C.

J'ai fait l'hypothèse d'une cause possible de cette erreur. Il est vraisemblable que cette étudiante ait confondu et mélangé les écritures algébriques des deux théorèmes principaux de son programme, Thalès et Pythagore, en ayant révisé dans le seul « univers des formules » sans faire la correspondance avec « l'univers des configurations et celui des unités de mesure ».

Une question m'est apparue : existe-t-il des triangles rectangles qui vérifient non seulement, évidement, la formule de Pythagore, mais aussi : $\dfrac{a^2}{b^2} = c^2$ (ou la condition équivalente dans les réels strictement positifs $a/b = c$) ?

J'ai commencé ainsi un parcours d'étude et de recherche, en me plaçant tout d'abord dans « l'univers algébrique des équations de second degré à trois inconnues ». Soit le système d'équations à inconnues dans $\mathbb{R}_+^* \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$:

$a^2 + b^2 = c^2$ (équation 1) et $\dfrac{a^2}{b^2} = c^2$ (équation 2).

Il est équivalent dans $\mathbb{R}_+^*$ au système

$a^2 + b^2 = c^2$ (équation 1) et $a^2 = b^2c^2$ (équation 2'),

qui est encore équivalent dans $\mathbb{R}_+^*$ au système

$b^2c^2 + b^2 = c^2$ (équation 1') et $a^2 = b^2c^2$ (équation 2').

On obtient : $b^2 = \dfrac{c^2}{c^2+1}$ et $a^2 = \dfrac{c^4}{c^2+1}$

On peut alors prendre c comme une variable réelle strictement positive et calculer a et b. C'est ainsi que j'ai tout naturellement écrit :

Définition : un triangle rectangle ayant a et b pour mesures des côtés de l'angle droit et c pour hypoténuse est un **R-triangle rectangle** si $\frac{a}{b} = c$.

Voici deux exemples de **R-triangle rectangle**.

1) Pour $c = \sqrt{2}$, on obtient $a = 2\sqrt{3}/3$ et $b = \sqrt{6}/3$. D'une part, il s'agit d'un triangle rectangle, car $a^2 = 12/9$, $b^2 = 6/9$, $a^2 + b^2 = 2$ et $c^2 = 2$, et d'autre part, c'est un « R-triangle rectangle » car $a^2/b^2 = 2$ et $c^2 = 2$ impliquent $\dfrac{a^2}{b^2} = c^2$.

2) Pour $c = 1$, alors $a = \sqrt{2}/2$ et $b = \sqrt{2}/2$. C'est le seul « R-triangle rectangle » isocèle.

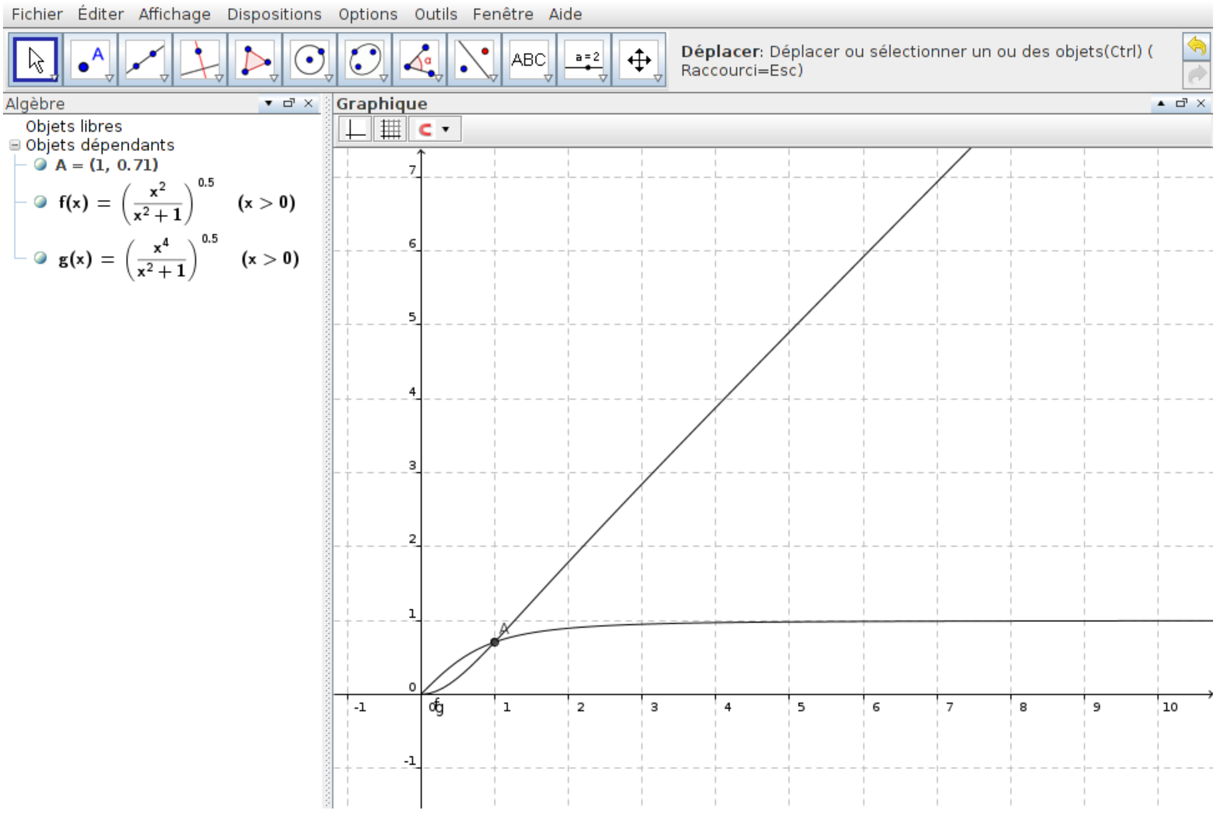
J'ai décidé par la suite de travailler dans l'univers des fonctions et de leurs représentations graphiques. Par exemple, je peux trouver tous les couples (b, c) ou (a, c) possibles en traçant à l'aide du logiciel *GEOGEBRA* les graphes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ comme suit :

$f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}$, correspondant à $b^2 = \frac{c^2}{c^2+1}$;

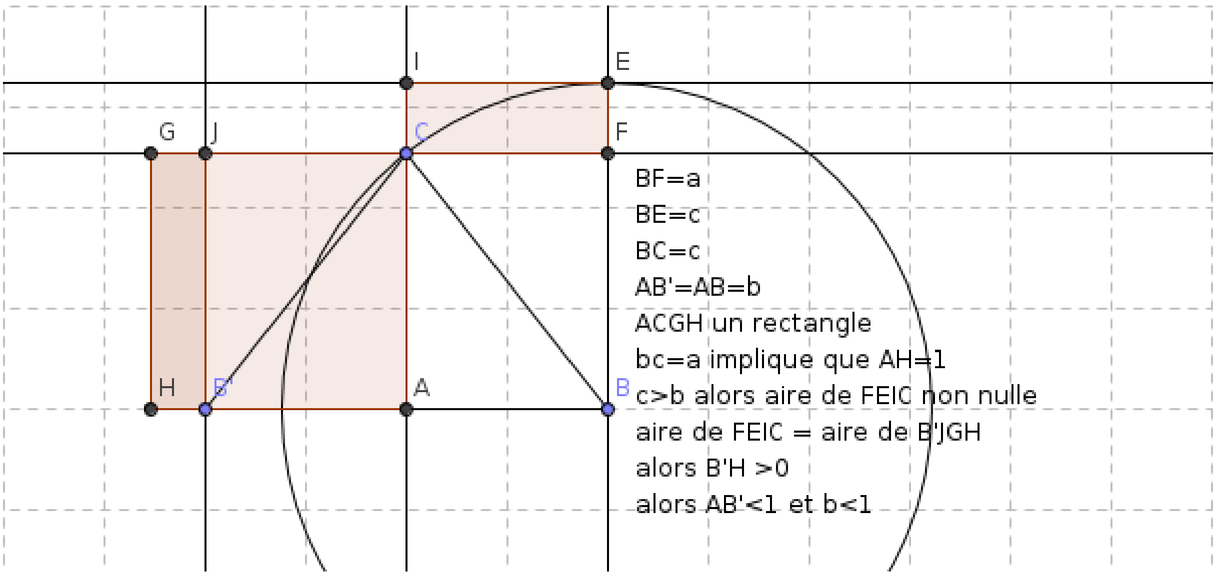
$g(x) = \sqrt{\frac{x^4}{x^2+1}}$, correspondant à $a^2 = \frac{c^4}{c^2+1}$.

J'ai retrouvé graphiquement à l'aide de *GEOGEBRA* que le seul R-triangle rectangle isocèle est celui que j'avais trouvé par le calcul algébrique, ayant pour mesures des côtés $c = 1$, $a = \sqrt{2}/2$ et $b = \sqrt{2}/2$.

La courbe C_f admet une asymptote d'équation $y = 1$ et se situe en dessous, car $f(x) < 1$. Ce graphique indique que b sera toujours compris entre 0 et 1. En $+\infty$, $g(x) = x - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$. La courbe C_g admet une asymptote d'équation $y = x$ et se situe en dessous, car $g(x) < x$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. La limite de $g(x)/x$ est 1, ce qui veut dire que pour des valeurs très grandes de c, la valeur de b sera proche de 1 et celle de a proche de c : par exemple $c = 10000$ nous donne $a = 10000,00005$ et $b = 0,99999$.



Dans « l'univers des aires de rectangles et de triangles » le fait que b sera compris entre 0 et 1 est aussi visible.



D'autres questions se posent, par exemple : « quelle est la valeur de c si $a = 1$? » On part de $a^2 = \dfrac{c^4}{c^2+1}$ et pour $a = 1$ on obtient : $1^2 = \dfrac{c^4}{c^2+1}$ qui conduit à $c^4 - c^2 - 1 = 0$ (équation bicarrée en c). Donc avec $c^2 = X$, voici l'équation $X^2 - X - 1 = 0$ dont la solution positive est $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, c'est-à-dire le nombre d'or noté habituellement par φ. Le nombre c est la racine carrée du nombre d'or et b est la racine carrée de l'inverse du nombre d'or. Rappelons que, dans ce cas nous avions choisi $a = 1$.

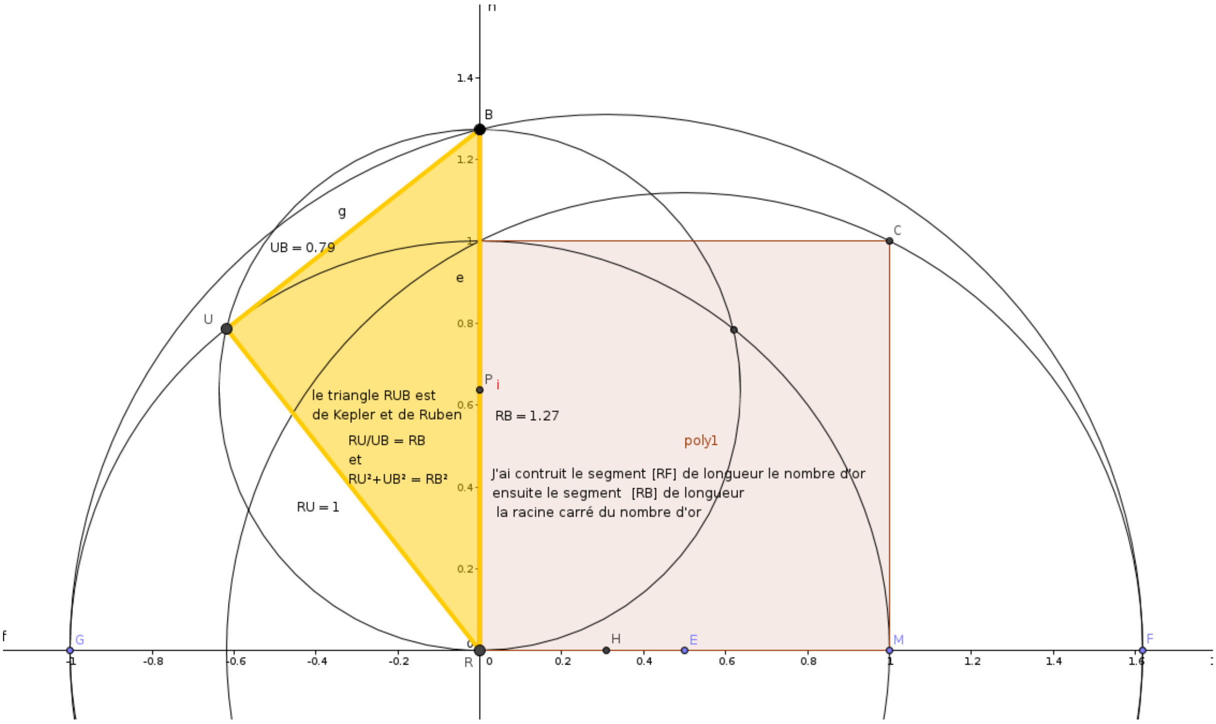
Une autre question encore : existe-t-il un triangle de Kepler qui soit un R-triangle rectangle ?

Un triangle de Kepler est un triangle ayant pour mesures des côtés : $r, r\sqrt{\varphi}$ et $r\varphi$, où r un réel positif et φ le nombre d'or.
Comme $1+\varphi = \varphi^2$, on a l'égalité $r^2+(r\sqrt{\varphi})^2 = (r\varphi)^2$ et donc le triangle est rectangle.

Une condition pour qu'un triangle de Kepler soit un R-triangle rectangle est $\dfrac{r\sqrt{\varphi}}{r} = r\varphi$. D'où $r = \dfrac{1}{\sqrt{\varphi}}$.

J'ai obtenu le triangle ayant pour mesures $\frac{1}{\sqrt{\varphi}}, 1, \sqrt{\varphi}$. C'est le triangle obtenu pour $a = 1$

Voici la construction du triangle de Kepler et R-triangle rectangle à l'aide de *GEOGEBRA* ; je l'ai trouvé harmonieux.



J'ai remarqué que le rapport entre les mesures de l'hypoténuse (apothème) et le plus petit côté est égal au nombre d'or. Ceci m'a fait penser à la grande pyramide de Khéops : les Égyptiens ont choisi son apothème (segment reliant son sommet à une arète de sa base) de pente 14/11, ce qui conduit à un rapport entre l'apothème et la demi-base égal au nombre d'or (à 0,01 près). Donc j'ai constaté que le « R-triangle de Kepler » est semblable au triangle rectangle de la pyramide de Khéops. Il est aussi un triangle semblable au « triangle d'or de Pythagore ». Le lecteur intéressé par ces considérations « dorées » les trouvera détaillées en suivant la page 7 du lien http://www.math.unicaen.fr/irem/spip.php?article184 .

II – L'univers de l'arithmétique

Une autre question : existe-t-il un « R-triangle rectangle pythagorique », c'est-à-dire ayant trois entiers comme mesures des côtés ? Avec c entier naturel strictement positif, une infinité de « R-triangles rectangles » ont comme mesure de l'hypoténuse un nombre entier. Mais peut-on avoir en même temps a, b, c entiers ? Ceci nous conduit à la question :

$\dfrac{c^4}{c^2+1}$ peut-il être égal à un carré parfait p^2, où p est un entier naturel ? Posons $c^2 = X$ on a alors l'égalité $X^2 = (X+1)p^2$ avec $X > 0$. On voit qu'une condition nécessaire est que $X+1$ soit un carré parfait et X le soit aussi. Le seul nombre X tel que X et $X+1$ soient deux carrés parfaits est 0. On le voit dans la suite des carrés 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ...

Plus rapidement (suggéré par Eric Trotoux), $a = bc$ et $a^2 + b^2 = c^2$ impliquent que $b^2(c^2+1) = c^2$; avec $b \in \mathbb{R}_+$, on obtient $0 < b < 1$ et donc $b \notin \mathbb{N}$.

Donc l'ensemble des « R-triangles rectangles pythagoriques » est vide.

III – Un autre choix sur le système d'équations

Nous avions commencé notre recherche par une voie algébrique partant du système d'équations

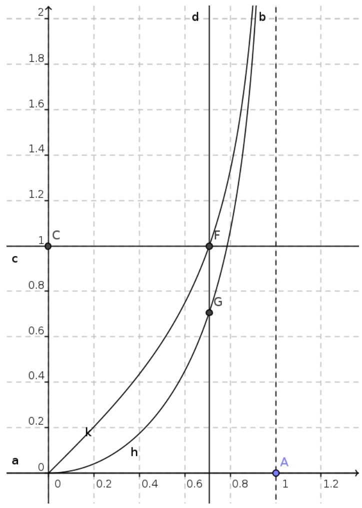
$a^2+b^2=c^2$ (équation 1) et $\dfrac{a^2}{b^2}=c^2$ (équation 2)

pour en déduire un paramétrage en fonction de c. Nous pouvons aussi choisir de paramétrer avec b. Alors $c=\frac{a}{b}$, d'où $a^2+b^2=\frac{a^2}{b^2}$, puis $(1-b^2)a^2=b^4$, ce qui introduit deux fonctions h et k donnant a et c :

$$a=\sqrt{\frac{b^4}{(1-b^2)}}=h(b).$$

$$c=\sqrt{\frac{b^2}{(1-b^2)}}=k(b).$$

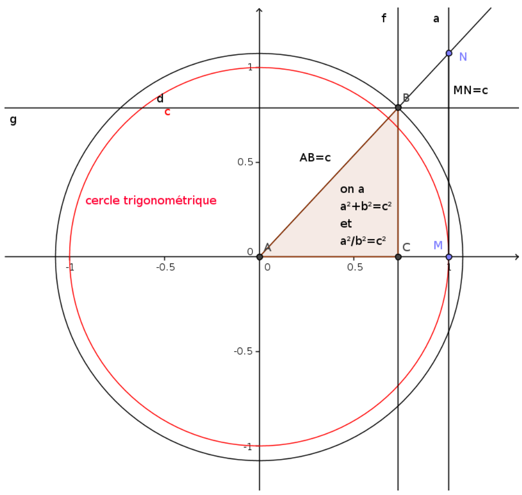
Nous retrouvons la même condition $0<b<1$, puisque a^2 est un nombre positif.
Voici donc une autre résolution graphique en fonction de b à l'aide des fonctions h et k. Ce choix me parait moins lisible que celui de la partie I, mais il est intéressant de retrouver les résultats dans les graphiques réalisés avec d'autres fonctions.



Par exemple on peut vérifier que si $c=1$, alors $a\approx\sqrt{2}/2$ et $b\approx\sqrt{2}/2$. Ici ce sont les points F et G qui nous donnent les valeurs de a et b.

IV – L'univers du cercle trigonométrique

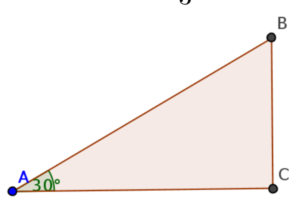
L'équation $a^2+b^2=c^2$ donne $(a/c)^2+(b/c)^2=1$. Ceci peut être vu sous la forme : $\sin^2 A+\cos^2 A=1$. De même a/b est vu comme $\tan A$. La condition $a/b=c$ s'écrit $\tan A=c$. On utilise le cercle trigonométrique pour construire un « R-triangle rectangle ».



La configuration nous donne : $a^2+b^2=c^2$ et $\dfrac{c}{1}=\dfrac{a}{b}$, donc $c^2=\dfrac{a^2}{b^2}$. Nous déterminons A à partir du paramètre c. Puis a,b s'en déduisent. Par exemple si $c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, alors $A=\arctan(\dfrac{\sqrt{3}}{3})$, donc la mesure de A vaut 30°. Ensuite on calcule a et b :

$$a=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin A=\frac{\sqrt{3}}{6} \quad \text{et} \quad b=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos A=\frac{1}{2}.$$

On peut vérifier que $a^2+b^2=\dfrac{3}{36}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3}=c^2$ et que $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{(3/36)}{(1/4)}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}=c^2$. Donc il s'agit bien d'un « R-triangle rectangle ». Ce triangle a une autre particularité : il s'agit d'un demi-triangle équilatéral ayant pour mesure des côtés $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



V – L'univers des triangles semblables

Soit c un réel strictement positif.

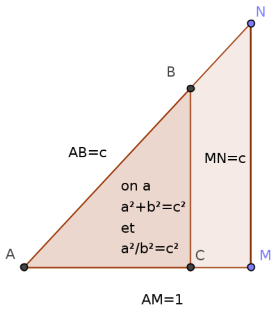
On construit un segment [AM] tel que AM = 1, puis un triangle AMN rectangle en M, tel que MN = c. On place ensuite un point B sur [AN] tel que AB = c.

Enfin, on construit le triangle ABC rectangle en C tel que a = BC et b = AC.

Par les triangles semblables, ou par le théorème de Thalès, on a $\dfrac{c}{1}=\dfrac{a}{b}$, d'où les relations :

$a^2+b^2=c^2$ et $c^2=\dfrac{a^2}{b^2}$.

ABC est un « R-triangle rectangle »



Remarque : dans un PER, je me pose des questions sans fil directeur. Je peux constater qu'il s'agit ici d'une partie équivalente à la précédente, du point de vue formel. Il n'est pas habituel de se répéter dans un article purement mathématique, par contre du point de vue didactique dans un PER il est fréquent de s'engager dans des voies mathématiquement équivalentes mais présentes dans une forme un peu différente selon le « petit univers » où l'on agit.

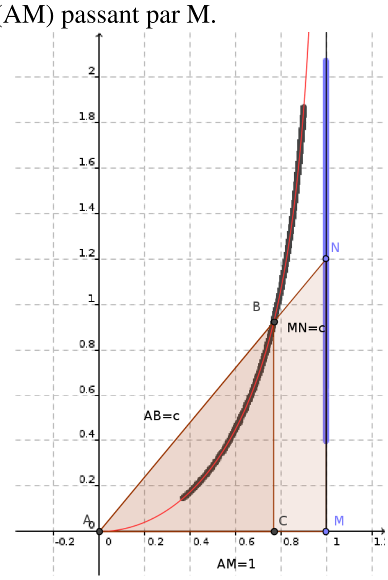
VI – L'univers des lieux géométriques

En nous référant à la figure précédente, que se passe-t-il pour le point B si le point N associé aux valeurs de c se déplace sur la perpendiculaire à (AM) passant par M ? Comme le point B est lié au point N, on constate expérimentalement (*GEOGEBRA*) via sa trace que le point B décrit une courbe non rectiligne. Une question s'impose tout de suite : comment caractériser cette courbe ? On applique les outils de l'univers de la géométrie repérée. Soit un repère orthonormé du plan définie par un triplet (A ;M ;P) avec A comme origine, MAP un angle droit et AM = AP = 1. Soit B$(x;y)$ dans ce repère. On observe avec *GEOGEBRA*.

Le point B$(x;y)$ est soumis aux conditions géométriques : il appartient à la droite (AN) et au cercle de centre A et de rayon MN = c.
Une équation de (AN) est $y = cx$, et pour le cercle $x^2 + y^2 = c^2$.

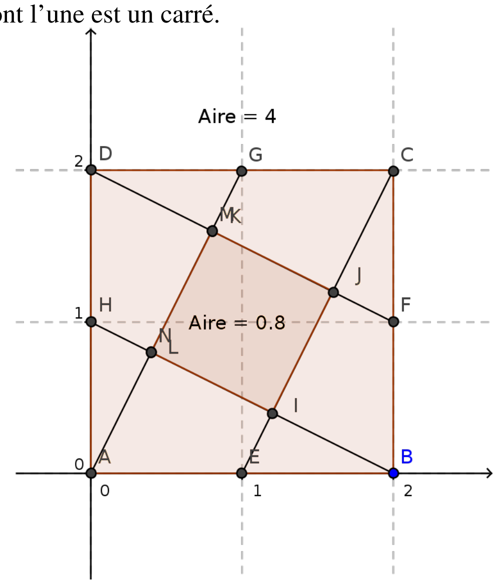
On élimine c entre les deux équations ce qui conduit à : $x^2 + y^2 = \dfrac{x^2}{y^2}$ qui implique $y^2 = \dfrac{x^4}{1-x^2}$ puis $y = \sqrt{\dfrac{x^4}{1-x^2}}$ avec $0 < x < 1$.

Alors on trace cette courbe via *GEOGEBRA* et on vérifie qu'elle coïncide avec la trace du point B quand on avait déplacé le point N sur la droite perpendiculaire à (AM) passant par M.



Nous retrouvons ici les équations de la partie III.

Nous pouvons rechercher encore d'autres « R-triangles rectangles » en imposant une égalité supplémentaire entre a et c ou entre b et c ou entre a et b. Par exemple $c = 2a$ qui conduit à $a^2 + b^2 = 4a^2$ et $\dfrac{a}{b} = 2a$. Ce qui donne $a = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$, $b = \dfrac{1}{2}c = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, déjà obtenu partie IV.
Autre exemple : $a = 2b$. Cela conduit à $5b^2 = c^2$ et $\dfrac{a}{b} = 2 = c$. D'où $b = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ et $a = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. Ce « R-triangle rectangle » possède une autre propriété : son aire est le cinquième de l'aire du carré construit sur son hypoténuse. C'est un triangle qui intervient dans la solution du partage d'un carré en cinq parties de même aire dont l'une est un carré.



Ici le carré ABCD a pour mesure de côté 2 et les points E,F,G,H sont les milieux respectifs aux côtés du carré ABCD. Les triangles IBC, JCD, DKA, ALB et le « petit carré » IJKL ont une aire égale à 1/5 de celle du « grand carré » ABCD.

J'ai orienté la suite de mon travail en utilisant des courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes et polaires (ici cf. partie IV, $r = \tan(\theta)$) avec l'appui graphique du logiciel *GEOGEBRA*. Le lecteur pourra me suivre pages 15 et 16 du texte disponible sur notre site web :
URL http ://www.math.unicaen.fr/irem/spip.php ?article184.
Mon intérêt n'est pas de chercher une nouveauté, mais tout simplement de confirmer classiquement les résul-

tats précédents. D'un point de vue pédagogique, je pense que des élèves motivés peuvent parfois prendre plaisir à confirmer des résultats en changeant d'univers. L'intention de cet article est de montrer que dans un PER, prendre des chemins différents résulte du plaisir de retrouver les mêmes réponses en promenade dans d'autres univers.

VII – L'univers des courbes et surfaces de l'espace de dimension 3

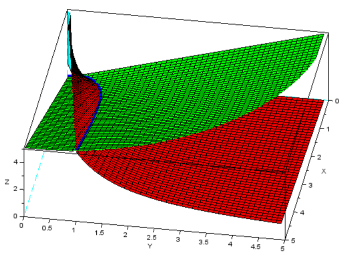
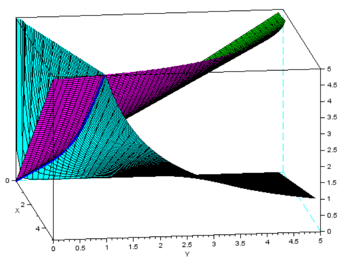
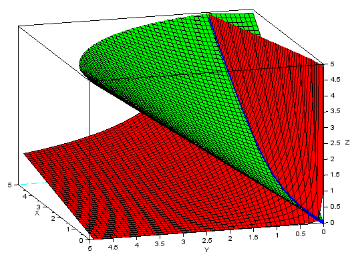
J'ai considéré ensuite les égalités $x^2 + y^2 = z^2$ et $z^2 = \dfrac{x^2}{y^2}$ comme des équations cartésiennes de deux surfaces dans un repère orthonormal (O,i,j,k) . L'étude de quadriques (dont la classification est maintenant hors du programme des classes préparatoires MP) peut paraître byzantine, mais je vous rappelle qu'il s'agit de mon parcours personnel dans ce PER : j'ai choisi de me promener un peu dans cet univers des quadriques.

La première est l'équation d'un cône de révolution noté (C) et d'axe (Oz) et la seconde peut s'écrire pour $x > 0, y > 0$ et $z > 0$ sous la forme $z = \dfrac{y}{x}$ ou $zx = y$. C'est une quadrique (un paraboloïde hyperbolique, dit aussi « selle de cheval »). Une équation cartésienne d'un cône de révolution d'axe (Oz) est :
$x^2 + y^2 - z^2 \tan^2 \alpha = 0$, où α est une mesure de l'angle formé par l'axe du cône et une génératrice. Dans notre cas, on a $x^2 + y^2 = z^2$; il s'agit donc du cône d'angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (pour ma recherche, je m'intéresse à la nappe du cône définie par $x > 0, y > 0$ et $z > 0$).

La seconde équation est $y = xz$ (avec x, y, z strictement positifs). Cette surface est une quadrique, dont le nom « paraboloïde-hyperbolique » est lié aux propriétés suivantes :
L'intersection avec le plan $x = z$ donne $y = x^2$, une parabole (remarquons qu'avec les plans $z = x + h$, on obtient $y = x^2 + hx$, encore une parabole). Avec le plan $y = k$ (constante non nulle), on obtient $k = xz$, une hyperbole équilatére. Pour $k = 0$, on obtient les deux droites $x = 0$ et $z = 0$. L'étude classique de cette surface fait intervenir la matrice Q de la forme quadratique associé à cette quadrique dont les valeurs propres sont : $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ et $\lambda_3 = \frac{1}{2}$. La signature (1 ;1) implique que la quadrique est un paraboloïde hyperbolique ou un cylindre hyperbolique ou la réunion de deux plans. J'ai cherché une base orthonormale de vecteurs propres pour trouver la nouvelle expression de la quadrique et ainsi conclure. Les détails de ces calculs et des prolongements architecturaux sont disponibles sur la version en ligne URL http ://www.math.unicaen.fr/irem/spip.php ?article184.

Ma recherche a continué par l'étude de l'intersection de ces deux quadriques.

Un système d'équations paramétriques de cette quartique intersection de nos quadriques est :
$x(t) = t, y(t) = \sqrt{\dfrac{t^4}{(1-t^2)}}, z(t) = \sqrt{\dfrac{t^2}{(1-t^2)}}$ avec t dans $]0; 1[$. Voici cette courbe vue avec *SCILAB* [1] :

VIII – L'univers de la géométrie avec les nombres complexes

Je me suis posé la question de l'écriture en nombres complexes de l'équation : $x^4 + x^2y^2 - y^2 = 0$ qui équivaut dans $(\mathbb{R}_+)^2$ à l'équation $x^2 + y^2 = \dfrac{y^2}{x^2}$.

Avec $Z = x + iy$, $x^2(x^2 + y^2) = y^2$ devient : $(\mathrm{Re}Z)^2|Z|^2 = (\mathrm{Im}y)^2$ qui conduit à $|Z| = \tan(\mathrm{Arg}Z)$ (équation où Z est un nombre complexe). On retrouve ici un résultat précédent, l'objectif est de le voir sous la forme d'une équation dans les nombres complexes.

1. Le document en ligne précédemment mentionné montre aussi la courbe tracée via *GEOGEBRA-3D*.

IX – L'univers des matrices (1,3), les groupes et le produit matriciel de Hadamard

J'ai cherché dans une autre direction : si l'on considère l'ensemble A des triplets $(x; y; z)$ de nombres réels tel que $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$ et tels que $xz = y$ muni d'une opération binaire interne définie par $(x; y; z) \cdot (x'; y'; z') = (xx'; yy'; zz')$, on obtient un groupe abélien. L'élément neutre est (1 ;1 ;1). La multiplication $(x; y; z) \cdot (x'; y'; z') = (xx'; yy'; zz')$ est le produit matriciel d'Hadamard (ou terme à terme) de deux matrices (1 ;3). Ainsi, une matrice (1 ;3) admet une matrice inverse pour le produit de Hadamard si et seulement si tous ses éléments sont non nuls. Notre paraboloïde hyperbolique pour les triplets de l'ensemble A est ainsi mis en relation avec un groupe commutatif $(A; \cdot)$ et la multiplication matricielle de Hadamard. Essayons d'élargir l'ensemble A à l'ensemble B de triplets $(x; y; z)$ de réels quelconques tels que $xz = y$. On remarque que (0 ;0 ;0) est dans B et qu'il est absorbant pour la multiplication de Hadamard. J'ai étudié une addition $(x; y; z) + (x'; y'; z') = (x + x'; y + y'; z + z')$ dans B et ai cherché une condition pour que la somme soit dans B. La condition est : $(x + x')(z + z') = (y + y')$. On sait que $xz = y$ et $x'z' = y'$ donc : $(x + x')(z + z') = y + xz' + z'x + y'$. Alors il faut et il suffit que $xz' + x'z = 0$. Par exemple : (1 ;2 ;2) et (-1 ;-2 ;2) sont dans B et leur somme (0 ;0 ;4) est dans B. On peut ainsi se donner un élément de $B(x; y; z)$ fixe et définir le sous-ensemble C de B par la condition $xz' + x'z = 0$. Dans cet ensemble C se trouve évidement l'élément (0 ;0 ;0).

Conclusion

Cette petite recherche nous montre que quand on s'interroge sur certaines « erreurs » des élèves qui se produisent en écrivant une égalité fausse sur un certain ensemble, on peut trouver à leur proposer une activité de recherche amusante : découvrir des sous-ensembles où les égalités deviennent vraies. Ce type d'exercice est très formateur pour la pensée scientifique et je vous conseille de les proposer à vos élèves. Quand un élève se trompe, car l'affirmation qu'il propose est fausse sur l'ensemble où l'on travaille, on proposera à la classe de trouver des contre-exemples : ici pour $a^2/b^2 = c^2$, il est facile de trouver un contre-exemple parmi les triangles rectangles, par exemple (3 ;4 ;5). Mais il ne faut pas toujours en rester là, on en profitera pour poser la question : cette affirmation serait-elle vraie sur un sous-ensemble ? Ou bien : serait-elle vraie sur un autre ensemble ?

Les élèves doivent apprendre que les propriétés sont toujours relatives à un ensemble de référence et qu'ils doivent s'habituer à chercher les ensembles où certaines affirmations dites « fausses » (pour un ensemble donné), deviennent « vraies » pour un autre. Dans le développement des compétences pour chercher en mathématiques, vous avez constaté qu'il est important que les élèves apprennent à chercher sur une même question en utilisant les outils de plusieurs univers et faire ainsi des correspondances entre les propriétés trouvées dans un univers et celles trouvées dans un autre. Cette attitude consistant à chercher une dialectique entre les univers est primordiale dans les activités autour des questions de recherche. Apprendre les mathématiques par des parcours d'étude et de recherche, dans lesquels une question en suscite d'autres et qu'ainsi l'élève cherche dans plusieurs univers est un choix didactique du groupe PERMES de l'IFÉ (Institut français de l'éducation) [2]

Ruben Rodriguez

2. Nous renvoyons aux vidéos de la série « Didactique des mathématiques : les fondamentaux », de Ruben Rodriguez Herrera, et notamment au module 1 sur la notion d'univers en didactique des mathématiques et à la fin du module 7 pour ce qui concerne les parcours d'étude et de recherche (voir notamment à 1h10min). Ces vidéos sont disponibles ici, sur le serveur http ://www.canal-u.tv .