

## Construire des outils de formalisation de la démonstration au collège

### Introduction

L'apprentissage de la démonstration, dans le cadre géométrique ou numérique, trouve toujours difficilement sa place dans les classes au collège.

Nous vous proposons de passer en revue des activités dont l'objectif principal est de permettre à tous les élèves de s'approprier les multiples compétences nécessaires pour construire cet instrument de pensée propre aux mathématiques. Nos activités s'intègrent à un parcours d'apprentissage et d'enseignement cohérent depuis la Sixième. Nous nous interrogerons sur les obstacles rencontrés et tenterons de regarder ces activités sous l'angle de la coopération (élèves/professeurs, élèves/élèves).

### Une situation de départ

On se place au niveau de la classe de Quatrième, où l'on formalise et institutionnalise la notion de démonstration. On propose aux élèves l'exercice suivant, extrait du manuel Triangle 4e (éditions Hatier) :

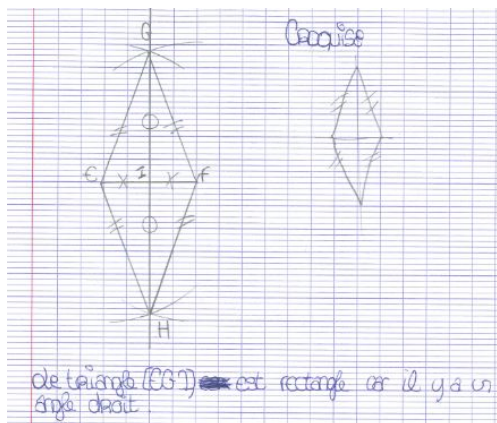
Tracer un losange EFGH tel que  $EF = 3$  cm et  $EG = 5$  cm.

Tracer la droite parallèle à (FH) qui passe par E : elle coupe (GH) en I.

Démontrer que le triangle EGI est rectangle.

Le premier obstacle est la construction de la figure. Elle nécessite d'exécuter diverses étapes, guidées par l'application de propriétés. On est déjà au premier palier de la démonstration. Il est fondamental pour l'apprentissage de la démonstration de donner du sens à « l'exigence » de justifier par un savoir.

Plusieurs élèves ne prennent pas en compte l'ordre dans lequel sont énumérés les sommets du quadrilatère : leur dessin fait apparaître [EF] comme une diagonale et [EG] comme un côté, et non l'inverse.



L'auteur de cette copie a interprété l'énoncé comme un programme de construction linéaire, mais il semble qu'une surcharge cognitive se soit produite, qui l'a conduit à construire un losange prototypique (grande

diagonale verticale) tout en plaçant le premier point (E) à gauche de la feuille, et non en bas.

On remarque que l'élève a codé par un symbole toutes les propriétés qu'il pensait connaître : le codage doit être objet d'enseignement et son utilisation doit être définie dans le contrat didactique passé entre élèves et professeur. Le croquis ne renseigne pas sur la chronologie de la construction et n'est pas en lien suffisant avec l'énoncé, dont les premières données sont manquantes. Enfin, c'est par reconnaissance « à l'œil » de l'angle droit que l'élève conclut que le triangle est rectangle : il est donc au niveau de la géométrie perceptive visuelle des figures dans une reconnaissance globale, telle qu'on la pratique en CM2 ou en début de Sixième. En pensant la démonstration dans le cadre d'un parcours d'apprentissage-enseignement depuis la Sixième, voire le CM2, cette dernière remarque nous a incité à construire des activités où le sens de la vue est pour un moment suspendu, et remplacé par le toucher.

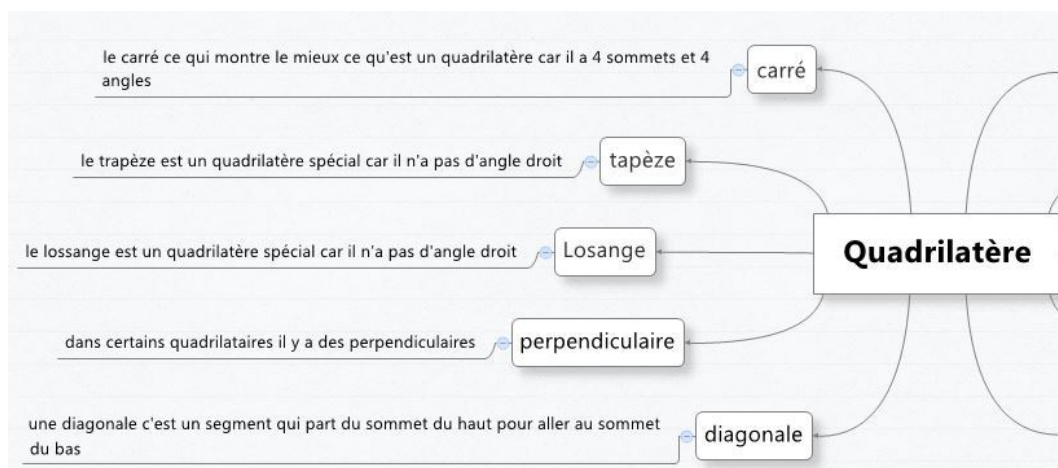
### Des activités haptiques

Les activités haptiques, ou tactiles, consistent à décrire un objet, les yeux bandés, avec verbalisation orale des indices perçus. Un observateur est chargé de noter par écrit cette production orale. Les objets sont des figures géométriques simples, construites en tasseaux de bois de section carrée de 10 mm de côté et collées sur une plaque de carton. Par reconnaissance haptique des figures, les élèves vont passer d'une perception globale (c'est un rectangle, ça se voit) à une géométrie des propriétés.

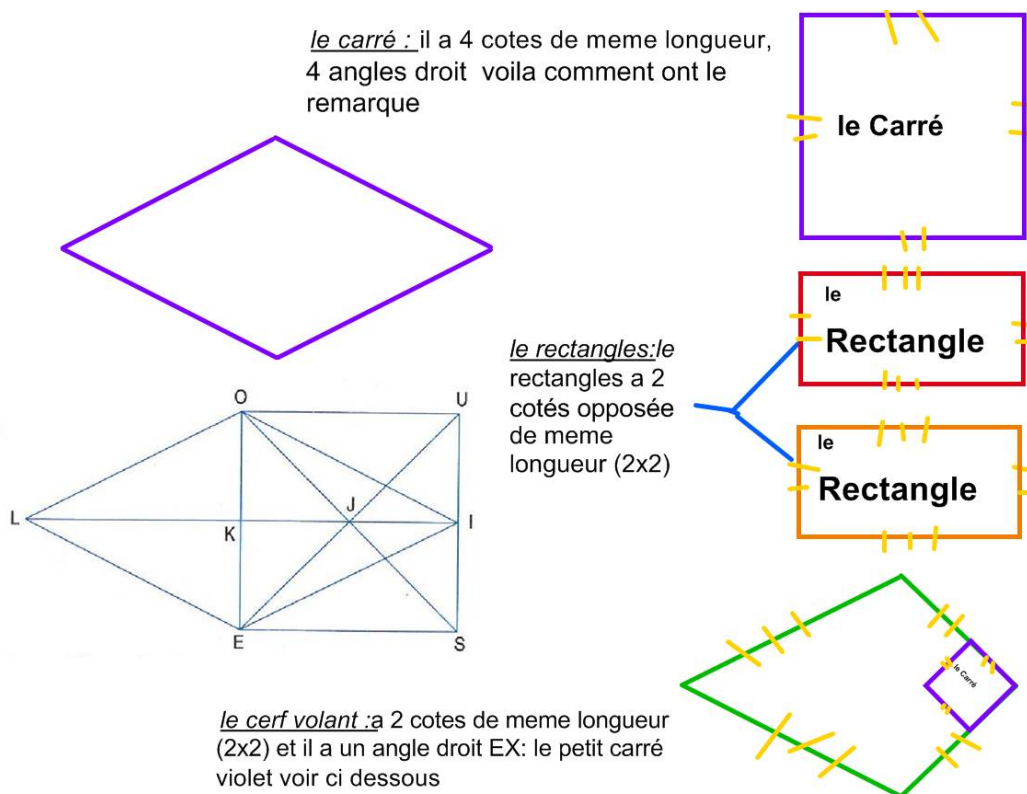


Cet outil peut être utilisé avec de jeunes enfants pour la reconnaissance à l'aveugle des lettres de l'alphabet. Il permet la création de l'image mentale d'une lettre, d'une figure géométrique.

Les notes prises par l'observateur sont réinvesties dans un travail de synthèse et de formalisation des propriétés décrites par le joueur « aveugle ». Un logiciel de carte mentale est utilisé par l'élève pour structurer la phase de formalisation et faire émerger les invariants des figures géométriques (nombre de côtés, de sommets, longueurs égales, perpendicularité, parallélisme...)



Le contrat didactique entre l'élève et le professeur s'est enrichi, l'élève convenant désormais de ceci : « Quand je cherche à identifier des figures géométriques, j'énonce les propriétés que j'ai reconnues ». Ce travail est réinvesti dans une activité qui consiste à extraire des configurations de base d'une figure complexe en justifiant.



Ces premiers écrits vont permettre aux élèves de construire **dans le temps** une formalisation des propriétés caractéristiques des figures de base en vue d'une institutionnalisation.

### Du numérique pour donner du sens au « si ... alors ... »

« Le camping des trois chênes » est un problème numérique qui avait été donné aux évaluations nationales des acquis des élèves de CM2 en 2011 :

#### Camping des trois chênes

Tarif par jour

Adulte : 8 €

Enfant (jusqu'à 10 ans) : 3 €

Emplacement pour une caravane : 6 €

Emplacement pour une toile de tente : 3,50 €

Animaux autorisés : gratuit

Pierre et Catherine, accompagnés de leur fille Léa de sept ans et de leur chien, installent leur caravane dans le camping des trois chênes. Ils souhaitent y rester trois jours. Combien paieront-ils pour une semaine ?

Nous avons transformé ce problème en omettant de préciser l'âge de Léa, qui devient donc un paramètre conditionnant la résolution. Aucune consigne n'est donnée : les élèves en ont l'habitude, car ceci est intégré dans le contrat didactique de la classe. Les productions sont ramassées et analysées. Ces productions, projetées en classe, vont faire naître des échanges collectifs qui permettront à chacun de commencer à construire la notion attendue.

Dans la production ci-dessous, tout se passe comme si l'élève avait implicitement supposé Léa âgée de moins de dix ans. Malgré les apparences, la subordonnée conjonctive « si ils restent trois jours » n'est pas une condition qui déclenche une résolution particulière, mais une simple donnée utile à la résolution numérique du problème. L'élève ne propose d'ailleurs pas d'autre résolution.

#1  $8 \times 2 = 16$   $16 + 9 = 25$  Ils paieront 91€ si ils restent 3 jours.  
 $16 \times 3 = 48$   $25 + 18 = 43$   
 $3 \times 3 = 9$   $43 + 48 = 91$   
 $6 \times 3 = 18$

Au contraire, la production suivante montre que certains élèves produisent naturellement des subordonnées de condition. La clause « si condition ... » y est bien lisible.

#1  
 Calculs  $(8 \times 2) \times 3 + 3 \times 3 + 6 \times 3 = 69$   
 $P = 16 \times 3 + 3 \times 3 + 6 \times 3$   
 $P = 48 + 9 + 12$   
 $P = 69$   
 Si leur fille a moins de 10 ans ils paieront 69 euros sinon ils paieront 84 euros.

C'est dans l'échange avec la classe que la phrase « si condition alors conclusion » est construite en totalité.

Quant au codage « #1 » sur la production de l'élève, il signifie « essai 1 ». Cette numérotation des essais est aussi intégrée dans le contrat didactique de la classe, afin de pouvoir lire toutes les stratégies des élèves, d'éviter les ratures ou les effaçages qui empêchent de lire tous les cheminements.

Et si Léa dormait dans une tente ? Cette nouvelle hypothèse, qui n'apparaît pas dans les productions des élèves, est soulevée par le professeur. Les élèves doivent alors reprendre l'exercice, avec comme consigne complémentaire l'écriture de phrases de la forme « si condition(s) alors conclusion ».

Faire travailler ce type de phrase dans le cadre numérique présente l'avantage de permettre à tous les élèves d'élaborer des réponses. Ils ne sont en aucun cas bloqués par un manque de connaissances de propriétés géométriques. Donnée en début de l'année de Qua-

trième, l'activité permet également de faire le diagnostic de la classe sur le calcul en ligne et la résolution de problèmes numériques.

## Une situation a-didactique

Après le travail sur le « si... alors ... » précédent, qui aura été consolidé avec des activités géométriques, il faut en classe de Quatrième instituer la démonstration à travers la construction du chaînon déductif. Ici aussi, le choix est fait de ne pas travailler dans le cadre géométrique, ni même dans le cadre mathématique au sens scolaire du terme : ceci interroge les élèves, les dérange parfois, mais leur montre aussi que les mathématiques sont présentes là où ils ne l'imaginent pas toujours.

L'activité est intitulée « l'identité nationale » et consiste à donner aux élèves les éléments du code civil relatifs aux conditions pour être ou devenir français. Des cas concrets sont donnés, à partir desquels les élèves doivent produire une réponse justifiée qui montre que le ou les personnages sont français ou peuvent le devenir. Tous les élèves n'ont pas le même cas.

Exemple 1 : John, 13 ans, est né à Cambridge en Angleterre, mais ses parents sont tous les deux français.

Exemple 2 : Clara, 27 ans, est polonaise. Il y a deux ans, elle a épousé Stéphane, qui est français. Ils viennent d'avoir une petite fille, Marianne.

Encore une fois les productions sont ramassées et analysées. Elles sont ensuite projetées devant toute la classe, et s'ensuit le débat collectif.

La production suivante est très significative des actions produites par les choix didactiques faits dans un parcours-enseignement pensé sur l'année entière :

4) Si John, 13 ans, est né en Angleterre et que ses parents sont tous les deux Français alors il est Français.

L'élève a réutilisé le « si condition(s) alors conclusion » travaillé les semaines ou mois précédents. Il montre qu'il a bien compris le rôle des conditions et des conclusions. Il ne sera pas le seul dans la classe. La production suivante permettra à toute la classe de se construire la structure du chaînon déductif comme un texte qui comporte trois parties : les conditions adaptées à la situation, une connaissance en relation avec ces conditions et une conclusion en relation avec la connaissance. Ici les articles du code civil jouent le rôle des connaissances.



1) Clara peut acquies la nationalité Française par déclaration auprès de l'Etat.  
 « L'étranger qui contracte mariage avec un conjoint de nationalité Française, peut après un délai d'un an à compter du mariage, acquies la nationalité Française par déclaration. »  
 Marianne est donc Française.

Les trois éléments du texte sont bien repérés par tous les élèves et un nouveau cas est donné avec pour consigne de produire un texte qui comporte ces trois éléments.

Une activité dans le cadre géométrique est ensuite donnée pour que les élèves transfèrent ce nouvel apprentissage dans le cadre géométrique cette fois.

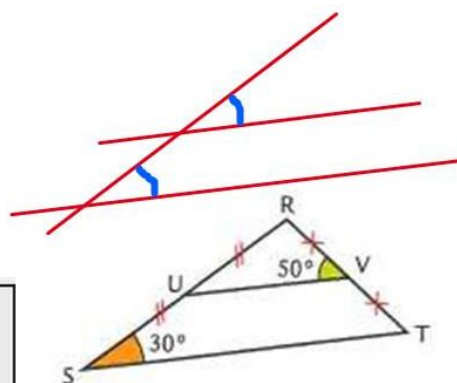
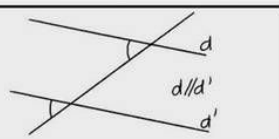
### Le tableau blanc interactif, outil de résolution



Voici une activité simple de calcul d'angle sur le tableau blanc interactif, montrant comment celui-ci peut favoriser l'activité des élèves pour franchir les difficultés et les obstacles à l'apprentissage de la démonstration.

43 À partir des indications portées sur la figure, calculer l'angle  $\widehat{SRT}$ .

Si deux droites sont parallèles et sont coupées par une sécante alors elles forment des angles correspondants de même mesure.



Donc les angles  $\widehat{RUV}$  et  $\widehat{RST}$  sont correspondants et de même mesure,  $\widehat{RUV} = 30^\circ$

Les élèves éprouvent des difficultés à extraire une information dans un univers riche. Ainsi, en mathématiques, il leur est difficile de reconnaître une configuration de base dans une figure complexe.

Grâce à ses différentes fonctionnalités, le tableau blanc interactif devient un outil pédagogique et didactique de résolution de problèmes en géométrie. Son outil « instantané » permet de prendre une photo de la figure complexe à partir d'un fichier ouvert ou d'un logiciel de géométrie dynamique. Ses outils de dessin et d'annotation permettent d'extraire les configurations de bases

associées. Son module « galerie » permet de mettre en corrélation ces figures avec les étiquettes de savoir et d'importer le texte de la propriété concernée. Son outil « texte » permet, par exemple, d'écrire la conclusion. Sa fonction « trieuse de diapositives » permet de travailler la chronologie des pas de démonstration. Sa fonction « affichage des participants » permet d'autoriser ou non individuellement un participant à annoter le tableau blanc interactif. Enfin, sa commande d'archivage permet le stockage et la consultation des fichiers sur le serveur de communication LCS.

## Conclusion

Dans cet article, nous sommes partis d'une situation de démonstration en Quatrième. L'analyse des productions de nos élèves nous a renseignés sur l'état de leurs connaissances et compétences – en cela, on peut intégrer cette situation dans une évaluation diagnostique –, mais aussi sur les obstacles rencontrés dans les apprentissages.

En ciblant les obstacles, nous avons proposé des situations adaptées qui pourront permettre à l'élève de progresser. Ces obstacles peuvent être anticipés, et des situations-obstacles peuvent être intégrées dans des parcours-enseignement. Des obstacles différents se dévoilent dans ces parcours et l'enseignant devra faire preuve d'imagination pour proposer de nouvelles situations.

Les activités haptiques ainsi que l'utilisation du numérique s'intègrent dans les parcours, soit pour construire des images mentales fortes, soit pour formaliser des connaissances en partant de l'univers familier des élèves.

À travers ces différentes activités autour de la démonstration géométrique dans un parcours-enseignement pensé tout au long du collège, voire à partir du cycle 3, nous avons cherché à montrer comment l'idée de coopération et/ou de collaboration entre le professeur et ses élèves, ce que d'autres appellent l'action conjointe, s'intègre et participe à la construction des apprentissages chez nos élèves.

Loïc Coulombel & Jacques Duval

---

## Présentation détaillée de la brochure : *Le nombre d'or, Nouveautés mathématiques ludiques*

Cet ouvrage préfacé par Eric Lehman<sup>1</sup> est un recueil d'activités géométriques et algébriques variées en relation avec l'histoire de l'art et la biologie, pour la plupart originales sur le « Nombre d'Or ». Nous vous présentons les divers domaines tant contemporains qu'anciens où ce nombre très particulier a été employé. Vous trouverez donc dans ces pages :

- La petite histoire du nombre d'or, celle du pentacle ou pentagone régulier, diverses spirales reliées ou non au nombre d'or, vues par les architectes, peintres et/ou mathématiciens.

- Leurs propriétés scientifiques curieuses : la spirale d'or dont l'accroissement recopie presque exactement celle du nautilus, du cœur du tournesol, de certaines nébuleuses, mais pas celle de votre tuyau d'arrosage.

- Des nouveautés, pentagone, croix et spirale cé-

lestes, remarquables à cause de leurs relations étroites avec les vues en perspective.

- L'Univers de ces objets fascinants : des pavages du plan, des considérations astronomiques et/ou de navigation en mer, les secrets des beaux tableaux renaissance et des belles photos numériques.

Dans chaque chapitre, des présentations culturelles et ludiques vous permettront d'entrer par la grande porte et de cheminer à votre goût et votre rythme dans ce « langage mathématique de la beauté » comme le qualifie Cédric Villani dans sa collection « Le monde est mathématique ». N'ayez pas peur de ces derniers mots car vous en ferez des dessins superbes, des pliages, des puzzles, des jeux pour les grands et petits.

Les auteurs conçoivent depuis longtemps des activités pour la formation des professeurs des écoles, des lycées et des universités dans le cadre de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des mathématiques. Format A5, 168 pages prix 7 €.

---

1. Eric Lehman a été le premier directeur de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie en 1974.