

Agradecimientos

Deseamos agradecer a las instituciones tanto francesas, como de America Latina que nos han permitido hacer este trabajo, experimentarlo en clase y presentarlo en diferentes Coloquios de Matemática particularmente en Cuba, España, Perú, Portugal, Uruguay.

Trabajamos desde hace mucho años en el I.R.E.M. (Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas) y en el IUFM (Insituto Universitario de Formación de Maestros), de Baja Normandia y apreciamos las oportunidades de intercambios con los colegas que nos dan. Además es también un gran orgullo para nosotros, ver que ahora, existen muchos I.R.E.M. en el mundo, particularmente en America Latina, promoviendo y mejorando la enseñanza de las matemáticas.

Danielle SALLES-LEGAC Ruben RODRIGUEZ HERRERA

Dedicamos este trabajo a nuestros Padres

Sumario

Introducción	p.5
Un ejemplo de actividad basada en una correspondencia mórfica simple (nivel: 9 a 12 años)	p.8
El pasaje de la geometría experimental a la geometría deductiva	p.15
§ 1 Las ilusiones ópticas (nivel: 9 a 12 años)	p.15
§ 2 Construcción de ángulos con dobleces (nivel: 9 a 12 años)	p.18
§ 3 Reproducción de figuras sin utilizar las graduaciones de la regla o de la escuadra: “el cuadrado y los cuatro círculos” (nivel: 9 a 12 años)	p.30
§ 4 Trazado de una parte de una de las diagonales de un cuadrado troncado (nivel: 9 a 12 años)	p.32
§ 5 Del objeto físico, (el dibujo), al objeto ideal, (la figura) (nivel: de 11 a 13 años)	p.34
§ 6 Los rompecabezas engañosos (nivel:13 a 16 años)	p.36
§ 7 Las cuerdas troncadas de dos círculos (nivel:13 a 16 años)	p.38
§ 8 Actividades con construcciones geométricas que conducen a la fabricación por parte de los alumnos de instrumentos de geometría (nivel:13 a 16 años)	p.39
§ 9 Hacer geometría con dobleces (nivel:11 a 13 años)	p.46
§ 10.1 Hacer una trisección con un sistema articulado (nivel:12 a 15 años)	p.61
§ 10.2 Hacer una trisección con dos bisectores (nivel:12 a 15 años)	p.62
§ 11 Clasificar los cuadriláteros con la ayuda de un sistema articulado: “la casa de los cuadriláteros” (nivel:11 a 13 años)	p.63
§ 12.1 Construyendo hexágonos con trozos de puzzle (nivel:12 a 14 años)	p.72
§ 12.2 Empedrar el plano con trozos de puzzle (nivel:12 a 14 años)	p.73
§ 13 Construir una elipse a partir de un círculo (nivel:12 a 14 años)	p.80
§ 14 Hacer geometría sin utilizar el compas ni la escuadra (nivel:12 a 15 años)	p.86
§ 14.1 Trazando la bisectriz de un ángulo	p.86
§ 14.2 Trazando dos rectas paralelas	p.88
§ 14.3 Trazando dos rectas ortogonales	p.89
§ 14.4 Trazando dos rectas ortogonales pasando por dos puntos dados	p.89
§ 14.5 Trazando una recta ortogonal a una recta dada (segundo método)	p.90
§ 14.6 Trazando una recta ortogonal a una recta dada y pasando por un punto dado de la recta	p.90
§ 14.7 Trazando el punto medio de un segmento	p.91
§ 14.8 Dividir un segmento en n partes iguales	p.91
§ 15 Hacer operaciones aritméticas con la geometría sin utilizar el compas ni la escuadra (nivel: 13 a 15 años)	p.91
§ 16 Buscar cuales son los polígonos que pueden ser contruidos sin utilizar el compás ni el transportador (nivel: 13 a 15 años)	p.93
§ 16.1 Construir un pentágono regular con el metro de carpintero	p.94
§ 16.2 Construir un rectángulo de oro sin utilizar el compas (nivel: 13 a 15 años)	p.96
§ 16.3 Mostrar que las diagonales del pentágono regular de lados de longitud 1 son de longitud el número de oro (nivel: 13 a 15 años)	p.97
§ 16.4 Construir un pantágono sin utilizar el compás (nivel: 13 a 15 años)	p.99
§ 16.5 Construir un heptágono con una cinta de papel (nivel: 13 a 16 años)	p.100
Conclusión	p.107
Bibliografía	p.108

INTRODUCCIÓN

LOS PSICOMORFISMOS EN GEOMETRIA ENTRE ACCIONES DIRECTAMENTE EXPERIMENTABLES Y ACCIONES HECHAS EN REFERENCIA A UNA FORMALIZACIÓN

Hemos desarrollado un marco teórico para analizar los fenómenos de aprendizaje en general y en particular sobre el aprendizaje en matemática. Para ello, uno de nosotros, Rubén Rodríguez Herrera creó la noción de psicomorfismo que estuvo en el centro de su trabajo de tesis de doctorado en Ciencias de la Educación en el año 1978 en la Universidad de Caen, Normandia, Francia.

El niño realiza acciones que nosotros llamamos « directamente experimentables » con el objetivo de resolver problemas mórficos (problemas que se resuelven con el mismo tipo de acción). Para poder comunicar estas acciones mórficas se hace necesario elaborar una formalización que utilice vocablos, frases, símbolos, esquemas, etc...

Recíprocamente, el hecho de poseer un universo cada vez más formalizado en torno a esas acciones mórficas, permite realizar un morfismo recíproco entre el universo simbólico y las acciones directamente experimentables.

Un morfismo es en matemática una función f , entre dos conjuntos que poseen cada uno una estructura definida por una relación u operación. Esta función f respeta la estructura de cada conjunto. Por ejemplo, utilizando símbolos, si en el conjunto X está definida una operación, denotada $\#$ y en el conjunto Y tenemos otra operación denotada $\S$, entonces operando dos elementos a, b de X , lo que se escribe $a \# b = c$ y si $f(a) = a'$, $f(b) = b'$, $f(c) = c'$ se verifica que $a' \S b' = c'$

Resumiendo, se dice también que: el resultado de operar las imágenes es la imagen del resultado de operar los antecedentes respectivos.

Con un esquema simbólico (la operación en el conjunto X se escribe $\#$ y la del conjunto Y se escribe $\S$)

a	#	b	=	c
$\downarrow f$	$\downarrow f$	$\downarrow f$	$\downarrow f$	$\downarrow f$
a'	§	b'	=	c'

Estas correspondencias mórficas se producen en todo fenómeno de aprendizaje.

Tomemos el ejemplo de un niño pequeño que simultáneamente ve un objeto que emite sonido y calor. Cuando el niño se desplaza hacia ese objeto la imagen visual se agranda en el campo visual, el sonido se hace más intenso, el calor aumenta. Gracias a que el organismo posee una función biológica de coordinación de estas informaciones, se establecen psicomorfismos que poco a poco van estructurando las informaciones visuales, junto a las auditivas, las cinestésicas, etc. Esto permite anticipaciones: por ejemplo, si el sonido varía y es cada vez más fuerte, entonces la imagen será seguramente más grande en el campo visual. Esto lo podemos simbolizar de la manera siguiente: un sonido α que corresponde a una imagen A y que es más débil que un sonido β que corresponde a una imagen B verifican que si $\alpha < \beta$ entonces se puede anticipar que $A < B$.

El niño puede así anticipar que, si él oye un sonido más fuerte es porque el objeto está más próximo y ocupa un espacio mayor en su campo visual.

Este psicomorfismo que se produce en todo aprendizaje, está presente en todos nuestros análisis didácticos. Es este principio el que nos guía en la construcción de actividades, problemas, situaciones, etc.

Lo importante en los psicomorfismos producidos en el aprendizaje de las matemáticas es que, en la formalización de las acciones directamente experimentables, el alumno recrea la estructuración simbólica. Para ilustrar este fenómeno, les presentaremos un ejemplo del aprendizaje de las fracciones.

Para la introducción de las fracciones pensamos en crear una situación que facilite un psicomorfismo entre las acciones directamente experimentables con bandas de papel cartón y las acciones acompañadas con la formalización simbólica.

Presentaremos aquí una pequeña parte de nuestra publicación sobre las fracciones a modo de ejemplo de psicomorfismo, ya que nuestra intención es presentar principalmente un trabajo sobre geometría.

EJEMPLO DE DIDÁCTICA DE LA NOCIÓN DE FRACCIÓN ELABORADA A PARTIR DEL FENÓMENO DEL APRENDIZAJE LLAMADO “PSICOMORFISMO”

En la adquisición de los conocimientos, el alumno debe siempre apoyarse en las acciones “directamente experimentables” con el fin de construir la nueva estructura de conocimiento a aprender. Esta nueva estructura tomará todo su significado, por un lado cuando el alumno pueda anticipar un resultado difícil de obtener por los métodos antiguos, y por otro lado, cuando la utilice para resolver otros problemas isomórficos.

El trabajo matemático consiste en elaborar sistemas, más o menos simbolizados y formalizados, que permitan obtener resultados que anticipan de modo más económico la búsqueda del mismo resultado por medio de acciones directas mas difíciles y sujetas a una probabilidad más grande de cometer errores.

Un aspecto fundamental de la estructuración de las acciones directamente experimentables de la “realidad” es el hecho que el ser humano posee las “funciones de representación”.

Cuando el niño se enfrenta por primera vez a la resolución de un problema, estructura la información con el fin de encontrar una solución. Si tiene éxito, la próxima vez que afronte un problema percibido como isomórfico, los objetos del primer problema actuarán como significantes portadores de una analogía, que le guiará hacia operaciones necesarias y suficientes a la resolución del segundo problema.

Es así que, resolviendo problemas isomórficos, la formación de un sistema general que los represente aparece como algo necesario y natural. Cuando el individuo integra en sus conocimientos el sistema representativo de los problemas isomórficos, él es capaz de trabajar dentro de este sistema y, más aún, es capaz más adelante de ver el sistema como un nuevo objeto de estudio.

En la formación de los conocimientos hay un imperativo ineludible: el individuo tiene necesidad de establecer progresiones en los grados de significación de una noción. No se puede encontrar la verdadera significación de un sistema de representación de problemas isomórficos, si estos no han sido vividos antes y si la necesidad de construir ese sistema no ha sido percibida.

En la enseñanza de la matemática es importante tener en cuenta estos principios si se quiere que los alumnos se apropien verdaderamente de los problemas y construyan ellos mismos, con ayuda del docente, sus conocimientos. Para ello se debe procurar proponer actividades que partan de “acciones directamente experimentables” (se trata de acciones automatizadas que no requieren una nueva reflexión), referentes a problemas aptos a suscitar una nueva estructuración.

Más adelante se propondrán otros problemas isomórficos que se presten menos a una modelización inmediata, pero que serán asimilados con mayor facilidad si los alumnos han asimilado correctamente la etapa precedente.

La introducción de la noción de fracción en Francia ocurre en el tercer ciclo de la escuela primaria, es decir el último, antes de pasar al secundario básico.

Un ejemplo de actividad basada en una correspondencia mórfica simple

Material: bandas de papel cartón recortadas a partir de hojas acartonadas, formato A4, de diferentes colores: blanco, rojo, azul, amarillo, verde..., y de ancho 2,5cm.

Primer curso (nivel: 9 a 12 años)**a) Primera fase**

Se les entrega a los alumnos las distintas bandas de distintos colores y se les indica recortar y formar una docena de bandas de cada color, todas de 12cm de longitud.

Para ello, los alumnos aprovechan sus conocimientos geométricos. Por ejemplo, miden 12cm en cada borde, luego trazan un segmento y finalmente verifican con la escuadra que este segmento es perpendicular a los bordes de la banda. Es importante que los alumnos verifiquen que todas las bandas obtenidas son superponibles entre ellas.

b) Segunda fase

Se les solicita a los alumnos fabricar bandas de color azul que sean superponibles entre ellas y tales que dos bandas azules yuxtapuestas en su longitud sean de la misma longitud que la de una banda blanca. Es importante poner en evidencia en el grupo-clase a partir del trabajo de los alumnos dos estrategias posibles que en general aparecen de manera natural en nuestras clases.

La primera consiste en recortar una banda azul superponible a una banda blanca y enseguida plegar la azul en dos partes de igual longitud, recortar de nuevo y obtener dos bandas azules superponibles entre ellas (que yuxtapuestas nos den la misma longitud que la de una blanca). La otra consiste en medir 6cm a partir de la izquierda (como en el procedimiento de la fabricación de la primera fase), y obtener bandas azules que respondan al objetivo solicitado.

Es importante hacer verbalizar a los alumnos para que expliquen sus construcciones, con el objetivo que realicen un morfismo entre las acciones realizadas y las expresiones utilizadas para describirlas. Por ejemplo, si un alumno dice que ha recortado en dos partes, se le hace reflexionar sobre el hecho que recortó dos partes de la misma longitud y superponibles. El docente hace entonces un esquema en el pizarrón que representa el resultado obtenido.

Los alumnos dicen que hay 1 banda blanca y 2 bandas azules:

1	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Es en ese momento que se introduce un sistema simbólico que resume las acciones realizadas.

Como dos bandas azules yuxtapuestas tienen la misma longitud que una blanca, se escribe sobre las bandas azules $\frac{1}{2}$ y sobre las blancas 1.

Se dirá también que una banda azul tiene la mitad de la longitud de una banda blanca. Cuando un alumno diga “dos azules son lo mismo que una blanca” se le hará aclarar la idea para que explice bien el sentido de su frase. El objetivo es hacerle trabajar el isomorfismo entre la operación realizada directamente con la manipulación de las bandas y la operación respectiva verbalizada en nuestro idioma.

c) Tercera fase

Se pide a una parte de los alumnos que fabrique bandas de color rojo superponibles entre ellas y tales que cuatro de ellas yuxtapuestas sean la longitud de una blanca. Al otro grupo de alumnos se le pide que fabrique bandas de color rojo, superponibles entre ellas y tales que dos de ellas yuxtapuestas tengan la longitud de una azul.

La actividad hace retomar los procedimientos precedentes: los alumnos que trabajan con las azules y las rojas: un plegamiento o una división por 2, y los otros alumnos: dos plegamientos sucesivos o dos divisiones sucesivas de divisor 2, ($12 : 2 = 6$ seguida de $6 : 2 = 3$)

Se constata que los dos grupos de alumnos llegan a construir un conjunto de bandas rojas superponibles entre ellas. Se pide a los alumnos que escriban sobre las bandas rojas el símbolo que indica que cuatro bandas rojas yuxtapuestas dan la misma longitud que una banda blanca. Es decir, el símbolo $\frac{1}{4}$.

Se dirá también que cada roja tiene una longitud de “un cuarto” de la longitud de una blanca. El hecho que los alumnos utilicen el símbolo $\frac{1}{4}$ para mostrar la relación entre las longitudes de las bandas blancas y rojas nos muestra que el sistema simbólico comienza a ser un sistema de significantes, que muestra de manera isomórfica la estructura fraccionaria de las bandas. En este momento se aprovecha para acordar que el 1 de $\frac{1}{4}$ se escriba siempre arriba del símbolo /, (lo que nos indica cuántas bandas blancas hay), y el 4 de $\frac{1}{4}$ se escriba abajo del símbolo /, (lo que nos indica cuántas bandas rojas hay).

Se aprovecha también para hacer verbalizar a los alumnos algunas propiedades, con el fin de obtener afirmaciones verbales isomórficas a la estructura simbólica que comienza a ponerse en evidencia.



blanca



azul



roja

Por ejemplo:

“la roja tiene la mitad de la longitud de la azul”;

“la roja tiene un cuarto de la longitud de la blanca”;

“la azul tiene la mitad de la longitud de la blanca”

y también una afirmación que se produce al mismo nivel de abstracción que el del sistema simbólico:

“la mitad de una mitad es igual a un cuarto”

Segundo curso

Comentario: elegimos bandas de 12cm de longitud porque 12 es un número que tiene más divisores que 10, por ejemplo.

a) Primera fase

Con bandas de color amarillo se les propone realizar bandas sobre las cuales se pueda escribir $\frac{1}{3}$ con respecto a la blanca.

Estamos aquí en la actividad recíproca de aquella de la primera fase del primer curso. Es así que les pedimos a los alumnos que nos expliquen esta tarea con el fin de asegurarnos que el sistema simbólico funciona bien como un sistema significativo. Los alumnos explican que se trata de obtener bandas amarillas que tengan la misma longitud entre ellas y tales que tres “amarillas” yuxtapuestas tengan la longitud de una “blanca”. Se analiza con los alumnos la dificultad de realizar esta tarea por medio de plegamientos y se concluye que lo más conveniente es realizar la división $12 : 3$, ya que tenemos que dividir 12cm en tres partes iguales. Es así que los alumnos fabrican bandas de 4cm de longitud. Se escribe $\frac{1}{3}$ sobre cada una de ellas. Hemos aquí, una vez más, anticipado los resultados de las acciones directamente experimentables (los plegamientos) con un cálculo dentro del sistema simbólico. Este sistema se vuelve cada vez más “concreto”, es decir cada vez más como funcionamiento autónomo, como un objeto en sí mismo. A su vez, se amplía el significado de la noción de fracción, ya que la hemos relacionado con la operación de división.

b) Segunda fase

Nos orientamos aquí hacia preguntas formuladas en el sistema simbólico, y resueltas gracias al isomorfismo con el sistema de las acciones directamente experimentables.

Nos interesamos en la relación de orden entre $1/2$; $1/4$; $1/3$

Para responder, utilizamos el morfismo con las bandas “azules”, “rojas”, “amarillas”.

Los alumnos constatan que la banda de $1/2$ es la de longitud más grande, luego está la de $1/3$ y por último la de $1/4$.

Se hace verbalizar antes de pasar al sistema simbólico.

El objetivo es trabajar sobre explicaciones mórficas. Por ejemplo: si dos “azules” tienen la misma longitud que una “blanca”, y tres “rojas” tienen la misma longitud que una “blanca”, entonces una “azul” es más larga que una “roja”.

Otro ejemplo: si se divide una “blanca” en tres partes iguales, obtenemos una parte de longitud más pequeña que si se divide la “blanca” en dos partes iguales. Escribimos entonces:

$$1/3 < 1/2$$

$$1/4 < 1/3$$

$$1/4 < 1/2.$$

Continuamos trabajando sobre el morfismo entre el sistema simbólico y el de las acciones con las bandas, con el fin de obtener igualdades donde intervenga la operación de sumar dos fracciones:

$$1/2 + 1/2 = 1$$

$$1/3 + 1/3 + 1/3 = 1$$

$$1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 = 1$$

también:

$$1/4 + 1/4 = 1/2.$$

Todas esas igualdades son verificadas de manera muy “natural” con las bandas y el isomorfismo.

Se aprovecha en ese momento del aprendizaje, del enriquecimiento del sistema simbólico (el cual aparece cada vez más autónomo), para estudiar por ejemplo la fracción $1/5$, sin que sea necesario construir las bandas respectivas. Esta etapa es importante en la medida que los alumnos dan explicaciones sin necesidad de efectuar acciones directamente experimentables con las bandas.

Les preguntamos: ¿Es que la fracción $1/5$ es más pequeña que $1/4$, que $1/3$, que $1/2$?

También preguntamos: ¿Cuántas bandas de $1/5$ tendrán la misma longitud que una banda de 1 ?

Comentario: no les pedimos que fabriquen bandas de $1/5$ para evitar la división $12 : 5$ ya que los números decimales no enteros serán estudiados posteriormente. Se aprovecha para decirles que para estudiar los números decimales se utiliza el morfismo fundamental entre los decimales y las fracciones, lo que no desarrollamos aquí, ya que el espacio del cual disponemos no nos permite abordar todos estos aspectos.

Continuamos la actividad estudiando las mismas preguntas con $1/6$, $1/7$, $1/8$, $1/9$, $1/10$.

Ese trabajo sirve también como medio de evaluación del aprendizaje para constatar que los alumnos explican cada vez más utilizando el sistema simbólico.

Por ejemplo: les pedimos utilizar el símbolo $<$ para escribir la relación entre $1/10$ y $1/20$.

También les proponemos ejercicios del tipo: completar $1/10 < 1/(.)$, escribiendo un número en el denominador respetando el símbolo $<$. En este último ejemplo es importante poner en evidencia las distintas soluciones de los alumnos, para mostrar que se puede encontrar muchas soluciones posibles (se las podrá ordenar de la más chica a la más grande).

Este pequeño extracto de nuestro trabajo es dado como ejemplo de **porqué elegimos las acciones con las bandas** para introducir las fracciones y **no como es habitual con discos y sectores de disco**.

La razón principal es que cuando se resuelven preguntas con bandas, siempre se obtienen bandas del mismo ancho y de la misma forma rectangular. Es así que, por ejemplo, $5/4$ corresponde a una banda rectangular.

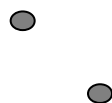
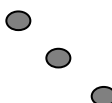
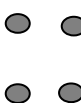
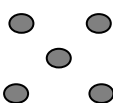
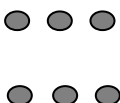
En cambio los discos de $5/4$ corresponden a un sector de disco, sino a dos partes desconectadas: un disco entero y un cuarto. Esto hace que sea **más difícil establecer un psicomorfismo con los discos que con las bandas**.

EN GEOMETRÍA

En geometría, los ejemplos de psicomorfismos en el aprendizaje son de naturaleza distinta a los que encontramos en aritmética.

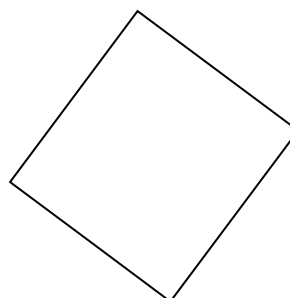
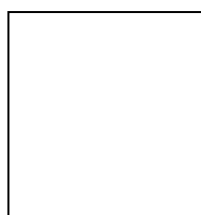
Para poner en evidencia esta afirmación, es interesante referirse a algunos ejemplos. En el jardín de niños hay una diferencia entre el aprendizaje del cardinal y el de las formas geométricas.

Cuando el niño realiza acciones de biyección directamente experimentables entre diferentes conjuntos de igual cardinal y después las formaliza sobre una banda numérica, acompañada de constelaciones como las de un dado, el niño utiliza una escritura cifrada cuyo logotipo simbólico en cifras arábicas nada tiene que ver con las biyecciones. En cambio, las constelaciones le indican visualmente el cardinal de los puntos dibujados. Eso le rememora la posibilidad de hacer una correspondencia biyectiva con acciones directamente experimentables. Las cifras constituyen un universo puramente simbólico que se aleja perceptivamente (visualmente) de las acciones directamente experimentables.

Constelación						
Cifras	1	2	3	4	5	6

En cambio, cuando el niño realiza acciones con formas geométricas planas en material plástico (por ejemplo un cuadrado), y que luego formaliza con un dibujo sobre la hoja de su cuaderno, el grado de formalización puramente simbólico es mucho menor. Esto es porque la realidad perceptiva visual de los objetos, y aquella constituida por la formalización con un dibujo, son muy próximas.

Esta proximidad de la realidad geométrica y sus formalizaciones produce fenómenos conocidos, que constituyen obstáculos para el aprendizaje de las figuras. Por ejemplo, los niños reconocen un cuadrado en su posición prototípica (horizontal-vertical), pero no lo reconocen como tal en una posición oblicua.



Es entonces que un largo camino rico en actividades, debe ser recorrido por el alumno desde el jardín hasta el fin del secundario básico, para que se produzca el paso del dibujo percibido (que se sitúa en un universo puramente perceptivo y experimental), a la figura construida, formalizada por sus propiedades (que se sitúa en un universo experimentable).

El alumno en un « universo experimental » se somete pasivamente a las « leyes de la experiencia »; en cambio en un « universo experimentable » el alumno anticipa gracias a su conocimiento de las propiedades.

Cuando el niño es muy pequeño, por ejemplo en Francia en la clase « petite section » del jardín de infantes (tres años de edad), es dentro de un **universo experimental** en el que ese niño va a realizar sus acciones. La experiencia va a conformar las primeras propiedades geométricas. Por ejemplo, cuando aprende la igualdad de longitud de los cuatro lados de un cuadrado.

Para ello se deberá realizar un gran número de actividades en donde se pueda experimentar esta igualdad de longitud.

Más adelante el alumno se sitúa en un **universo cada vez más experimentable**. Ello ocurre cuando el alumno ha acumulado suficiente experiencia como para poder anticipar el resultado de una acción a efectuar. Es entonces que una formalización se hace necesaria y natural.

En el ejemplo de las longitudes de los lados del cuadrado, que se manifestaban para el alumno del jardín, por acciones de superposición, la formalización será hecha más adelante, cuando ese alumno se encuentre en clases elementales de primaria. Esa formalización conducirá a la noción de longitud de un segmento. **El instrumento geométrico que permite establecer un psicomorfismo entre los objetos y la longitud es la regla.** Al principio no es necesario una regla graduada, basta con trazar dos pequeñas marcas, respectivas a los extremos del segmento.

Más adelante, cuando los alumnos conozcan las unidades métricas de longitud, por ejemplo el centímetro y el milímetro, ellos avanzarán en el nivel de formalización de la noción de longitud.

El hecho que los alumnos avancen en la formalización no quiere decir que olviden todo lo anterior.

Al contrario, cuando a los once años ellos digan que un cuadrado tiene cuatro lados « iguales » esta afirmación incluirá potencialmente todas las acciones realizadas desde el jardín hasta el final de la primaria, que permitieron constatar esta propiedad.

En este libro, queremos mostrarles algunas de nuestras actividades que fueron y son actualmente realizadas con alumnos del final de la primaria y sobre todo en el colegio básico. Se trata de un periodo crucial en el que los alumnos deberán pasar de una geometría constituida solamente con la percepción de dibujos a una geometría de figuras construidas a partir de sus propiedades.

El pasó de la geometría experimental a la geometría deductiva

Al final de la escuela primaria y al inicio de la secundaria básica el universo geométrico de los alumnos es construido solamente en base a las experiencias perceptivas. Es el **universo de los dibujos**.

El objetivo de la enseñanza de la geometría en el secundario es que el alumno aprenda a validar las conjeturas percibidas a través de demostraciones. El alumno pasa así del universo de los dibujos al **universo de las figuras**.

Este paso requiere una serie de rupturas en donde el alumno deberá aprender que no todo lo que se ve es verdadero y que **una figura es una representación de los objetos geométricos “perfectos” o “ideales”**.

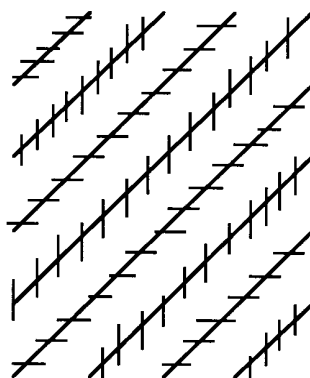
Para lograr hacer avanzar a nuestros alumnos en esta dirección, les propongo algunas actividades que forman parte de una progresión y que se les puede catalogar como **“situaciones de referencia”**.

Estas actividades han sido pensadas a partir del concepto de la psicología del aprendizaje que hemos denominado **“psicomorfismo entre acciones directamente experimentables y acciones acompañadas de una formalización”**.

§ 1 Las ilusiones ópticas (nivel: 9 a 12 años)

Como he dicho, los alumnos de once o doce años deberán, al final de la primaria y al principio de la secundaria, **aprender a desconfiar de un dibujo** y al mismo tiempo deberán **aprender, de acuerdo al programa de estudios, las propiedades de las figuras usuales**, como por ejemplo, las de perpendicularidad y paralelismo en geometría plana. Es entonces que les presentaré una situación de aprendizaje de referencia que permite trabajar estos dos puntos.

El hecho de ponerle el título “ilusiones ópticas”, va de acuerdo con su característica de “situación de referencia”.



Primer curso, 1ra fase

La actividad comienza con el pedido siguiente: dibujen **sin instrumentos**, « a mano », lo que ven sin dibujar el fondo de las rayitas. ¿Serán paralelos los segmentos? ¿Cómo hacer para responder a esta pregunta?

Comentario: los alumnos afirman que, aunque los segmentos parecen no paralelos, si los miramos mejor es seguro que lo son. Ellos dicen que la “distancia” entre dos segmentos es la misma y proponen medir esta constancia de la distancia solamente con la regla.

Luego de algunos ensayos de medida se dan cuenta de la falta de precisión. Es así que ellos proponen naturalmente utilizar la escuadra, deslizándola a lo largo de uno de los segmentos y así verificar la invariancia de la “distancia” de las dos rectas entre ellas. Mejor aún, proponen utilizar una recta perpendicular a uno de los segmentos y verificar que ésta es también perpendicular a los otros segmentos. Se escribe entonces la siguiente propiedad:

Dos rectas son paralelas si toda perpendicular a una es perpendicular a la otra.

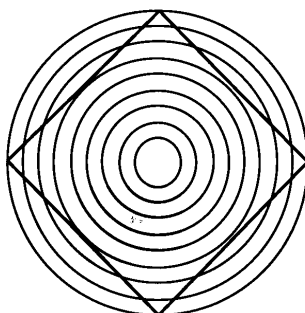
Esta es una de las **propiedades de la geometría plana** a estudiar en el principio del primer año escolar secundario.

Comentario didáctico: aquí, cuando los alumnos miran el dibujo, ellos están situados en un universo perceptivo visual, cuando utilizan los instrumentos se sitúan en un universo experimentable (dado que ellos anticipan y proponen medir la “distancia” entre los dos segmentos), y cuando proponen la propiedad de las perpendiculares comunes empiezan a situarse en el universo formalizado de las propiedades.

2da fase

Se aprovecha para ver que los **dibujos no son perfectos**, que ellos por sí solos no nos dan la certeza, que **con los instrumentos de geometría estamos más seguros** pero que se deberá precisar explícitamente que se trata de un **dibujo que representa lo mejor posible a segmentos paralelos**.

Segundo curso, 1ra fase



Se parte de la observación visual de cada alumno de una fotocopia de un dibujo formado por un cuadrado sobre un fondo de círculos concéntricos.

Se les pide dibujar “a mano” solamente lo que ven fuera de los círculos. La actividad se inicia en un universo perceptivo. Los dibujos “a mano” que hacen los alumnos son todos formados por **líneas curvas**. Como los alumnos dudan de lo que ven, se les pide utilizar los instrumentos de geometría. Es así que los alumnos dicen que **debe ser un cuadrado**. Se les pide explicitar todas las verificaciones que deben efectuarse para saber si es verdaderamente un cuadrado. Es en esta explicitación que los alumnos entran en el **universo de las acciones experimentables**.

2da fase

Los alumnos exponen una serie de propiedades y de instrumentos necesarios. Se las discute en el grupo y se las ordena. Es ahora que los alumnos están construyendo **un psicomorfismo entre lo experimentable** (las acciones que proponen con los instrumentos adecuados) y **el universo formalizado de las propiedades geométricas**.

La primera verificación es con la regla, para ver si los **lados son o no segmentos**. La segunda con la escuadra, para ver si los **cuatro ángulos son o no rectos**. La tercera con el compás, para ver si los **cuatro lados son o no de igual longitud**.

También hay una cuarta verificación propuesta: si las **diagonales son o no de la misma longitud**.

Se hace entonces un resumen: si el dibujo tiene cuatro lados, cuatro ángulos rectos, cuatro lados de igual longitud y dos diagonales de la misma longitud entonces es un cuadrado.

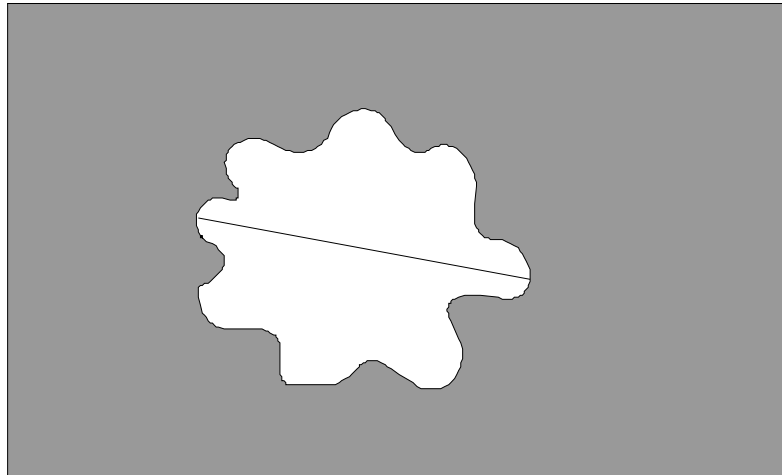
También se aprovecha para ver que el dibujo no es un cuadrado “perfecto” porque hay unas “pequeñísimas” diferencias en las medidas de los lados o de los ángulos rectos. Ustedes habrán observado que los alumnos se sirvieron de **un conjunto de condiciones más que suficiente**, pero no nos olvidemos que son alumnos del primer año del secundario y será recién en el cuarto año que aprenderán a buscar condiciones **necesarias y suficientes para que una figura sea un cuadrado**. Esta búsqueda la harán en el “universo de las propiedades geométricas” y no solamente en el “universo de los dibujos”.

§ 2 Construir ángulos con dobleces (nivel: de 9 a 12 años de edad)

Primera fase

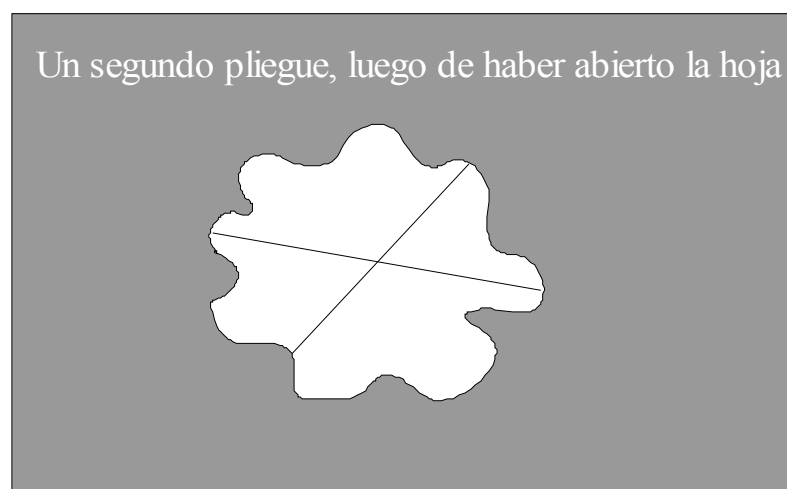
En esta primera fase se desea iniciar a todos los alumnos en la noción de ángulo, de ángulos superponibles, de vértice, de lados de un ángulo.

Para ello se les pide que realicen un primer pliegue. El pliegue representa una recta, que trazan por encima con ayuda de la regla.



Luego se les pide reabrir la hoja y realizar un segundo pliegue completamente independiente del primero, pero que lo cruce.

Al repasar el segundo pliegue con un trazado aparecen visualmente cuatro ángulos que tienen un vértice común. Visualmente los alumnos dicen que hay dos superponibles o iguales y otros dos también superponibles. Se les solicita recortar los cuatro ángulos.

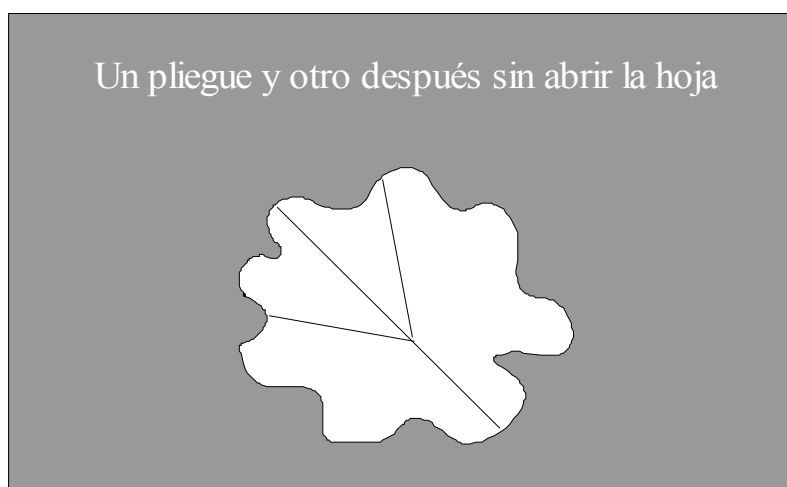




Ahora se solicita la participación de los alumnos para que ellos verbalicen sus acciones directamente experimentables. Es así que ellos toman conciencia que lo primero es hacer coincidir los vértices, luego dos lados y por último se mira para comprobar que los otros dos lados restantes se han superpuesto automáticamente. Un tema importante aquí es, que para que dos ángulos sean iguales o superponibles lo que importa verificar es la coincidencia de los vértices y los lados. En cambio, el “límite” irregular del borde interior de la hoja no es tomado en cuenta, ya que un ángulo no tiene “límite”.

2da fase

Aquí los alumnos ya se han apropiado de la actividad de plegar una hoja; se les propone realizar dos plegamientos consecutivos, es decir un segundo pliegue sin abrir la hoja, luego de haber realizado un primer pliegue. El resultado conduce a dos pares de ángulos superponibles, en otra configuración.



También aquí deben recortar para comprobar con una acción experimentable y experimentada, que obtienen dos pares de ángulos superponibles.

También se aprovecha para que comparen y comprueben que hay un tipo de ángulo más grande que el otro.

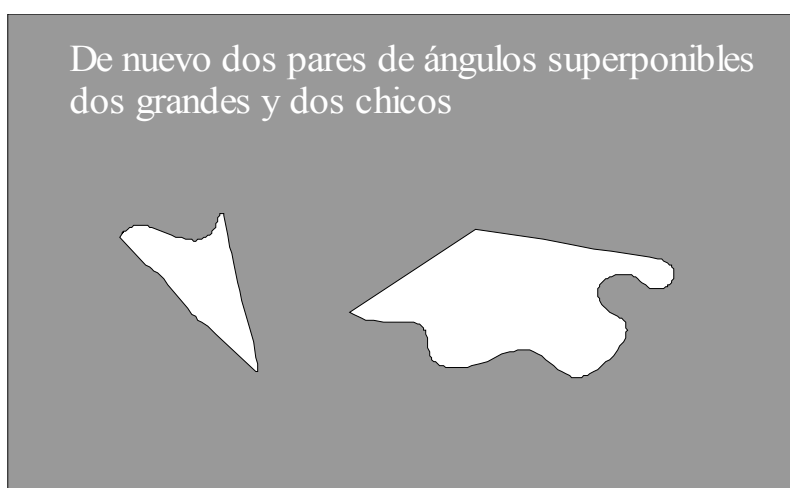
3ra fase

Se llega aquí a un momento importante de la actividad: se les plantea a los alumnos un problema:

Realizar dos pliegues para obtener cuatro ángulos superponibles.

Este es un verdadero problema ya que el alumno debe prepararse y ajustar su acción para que los cuatro ángulos sean “iguales”.

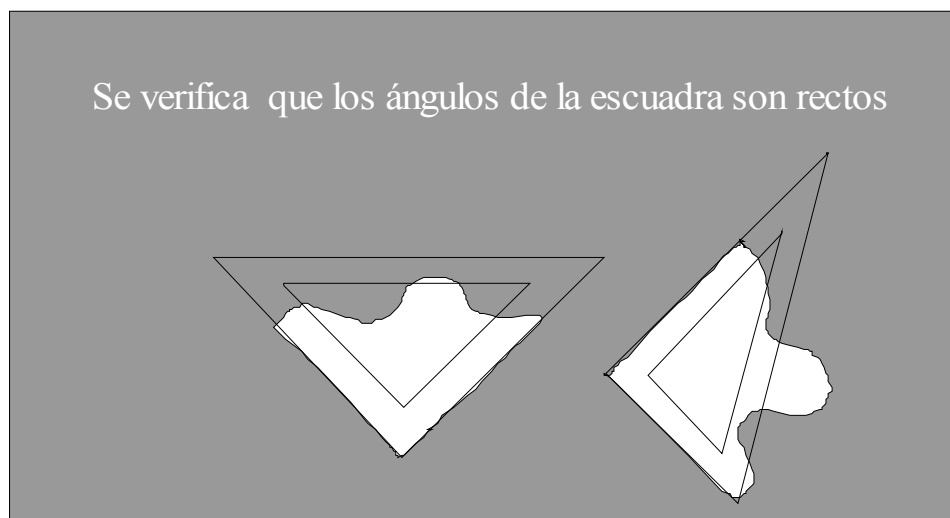
Los alumnos explican cómo lo hicieron, y se concluye que para obtener la igualdad se debe disminuir el tamaño del ángulo grande y al mismo tiempo agrandar el ángulo más chico. La solución consiste en hacer un primer pliegue y luego, sin desplegar la hoja, hacer un segundo pliegue justo por encima, de manera que los bordes del primer y segundo pliegue coincidan.



Comentario didáctico: esta solución es bastante conocida por los docentes. Lo importante es desarrollar una actitud positiva en cada alumno, y que al resolver problemas, ellos lleguen a la solución mediante su propia reflexión, luego de haber realizado las dos primeras fases. Un “contrato didáctico” que incita a los alumnos a resolver problemas para obtener métodos matemáticos, los lleva a establecer una actitud de confianza y a actuar con naturalidad con respecto a la matemática. Por el contrario, si se les “muestra cómo hacer” para obtener ángulos rectos, simplemente por imitación del gesto del docente, sin que ello sea precedido por una actividad de búsqueda, se desarrolla una actitud de pérdida de confianza en sí mismo y de dependencia.



En esta etapa aparece por vez primera la escuadra. Se les pide a los alumnos que verifiquen bien, con la ayuda de un ángulo recto recortado, que la escuadra posee efectivamente un ángulo recto.



Comentario didáctico: el hecho de haber situado primero al alumno en el universo de las acciones directamente experimentables de los pliegues y recién después introducir la escuadra, prepara a este alumno a tomar conciencia de que el universo de las figuras geométricas realizadas con los instrumentos específicamente fabricados es el que formaliza las acciones. Esta es la finalidad epistemológica e histórica del uso de las figuras y los instrumentos en geometría.

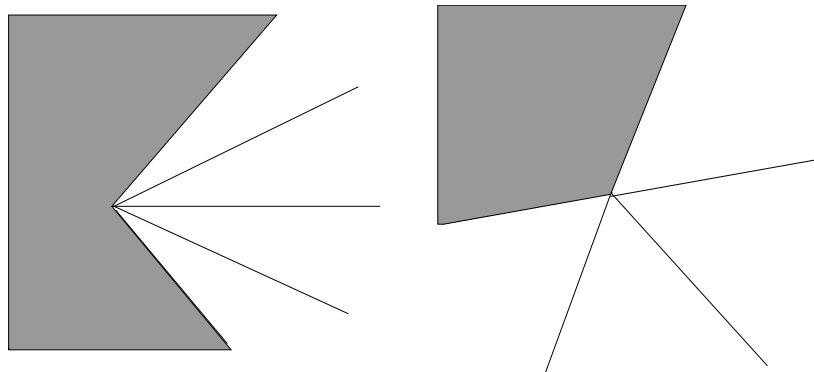
Esto nos parece sumamente importante: el alumno debe tener bien claro que el universo de las figuras ha sido creado para representar geoméricamente otros universos de acciones experimentables y así poder reflexionar y anticipar.

4ta fase

Se les invita a comparar los ángulos rectos con los que se han construido en las otras fases. El objetivo es comprobar que hay ángulos más pequeños, a los que se les llama “agudos” y otros más grandes, a los que se les llama “obtusos”.

Se les pide que construyan (sirviéndose de un ángulo agudo como modelo), dos ángulos con el fin de obtener cuatro ángulos agudos superponibles o “iguales”. Luego se les pregunta si poniendo estos cuatro agudos iguales con el vértice coincidente y cada lado junto a un lado del ángulo consecutivo se logra llenar el espacio completo de la hoja. La respuesta es no, ya que no alcanza, queda un espacio sin llenar.

Se realizan varias figuras con cuatro ángulos agudos iguales, siempre quedando un espacio vacío, representado aquí en color gris.

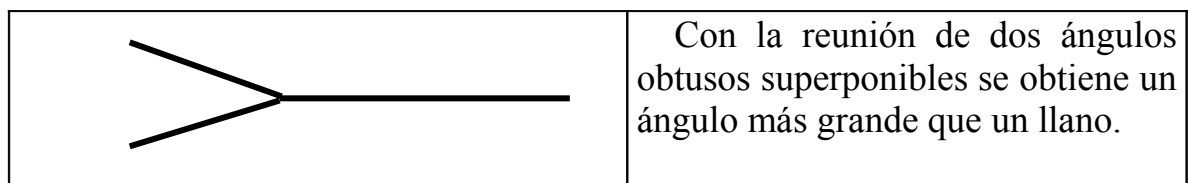
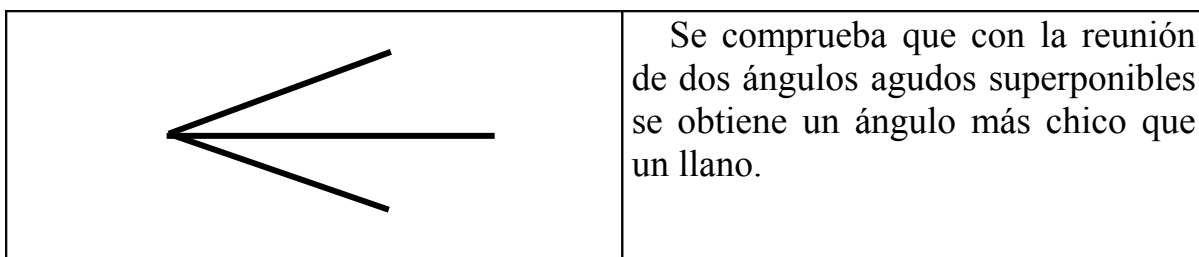
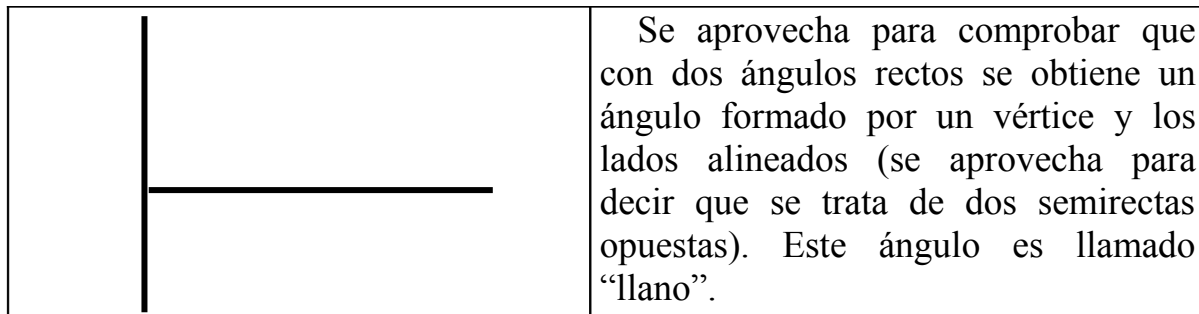


	Se comprueba luego que con cuatro ángulos rectos obtenemos un espacio lleno sin vacío alguno. Se aprovecha para denominar esta reunión de cuatro ángulos rectos un ángulo “completo”.
--	---

Se comprueba que con cuatro ángulos obtusos superponibles se sobrepasa el ángulo completo.

Comentario: más adelante en otro curso se pueden comprobar estas propiedades con una computadora y en geometría dinámica. Nosotros tenemos bien claro que, para aprender geometría, primero tenemos que realizar bastantes acciones directamente experimentables acompañadas de las construcciones con regla, compás y escuadra. Recién después de haber integrado bien las propiedades se las podrá reunir con la geometría dinámica, lo que en este caso certifica que, cuando se

llega, moviendo una de las semirectas, a cuatro ángulos rectos, se obtiene exactamente un ángulo completo.



Segundo curso

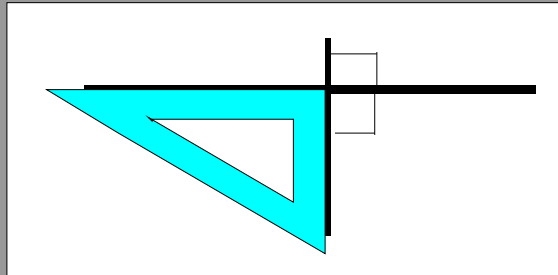
El objetivo principal de este segundo curso es trabajar en el universo formalizado de las figuras geométricas construidas con los instrumentos adecuados. Aquí son la regla y la escuadra los dos instrumentos que van a realizar el psicomorfismo (correspondencia estructurante del aprendizaje), entre las figuras y las acciones del primer curso.

1ra fase

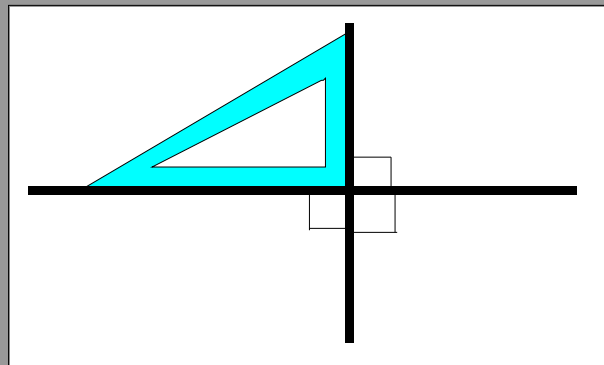
Se les pide utilizar solamente la escuadra para obtener una figura constituida por cuatro ángulos rectos, como las que obtuvimos por plegamientos.

Aquí, los alumnos construyen un primer ángulo recto, luego un segundo, luego un tercero y comprueban que el cuarto ángulo restante es obligatoriamente recto. Es así que van marcando un “cuadrado” para informar que el ángulo es recto. Se les hace contar los trazados y ellos dicen que realizaron cuatro.

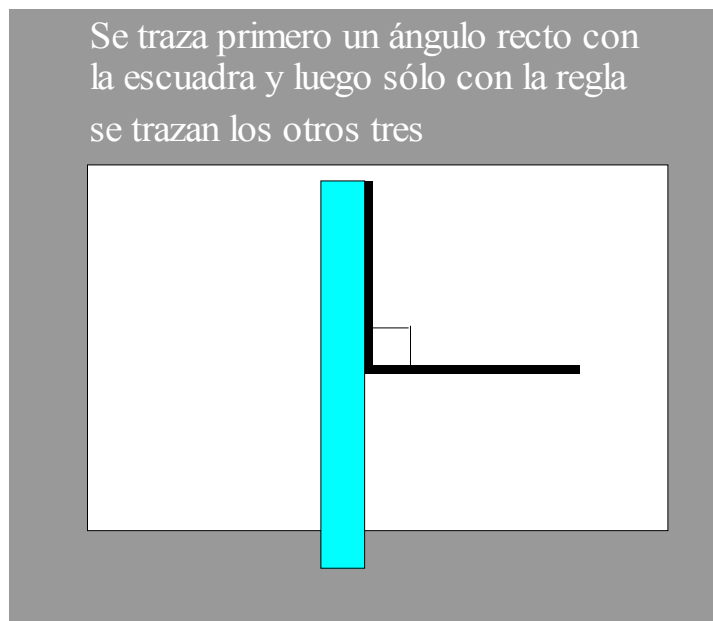
Se trazan los cuatro ángulos rectos sólo
con la escuadra



Cuando se trazan tres, el cuarto es también
un ángulo recto



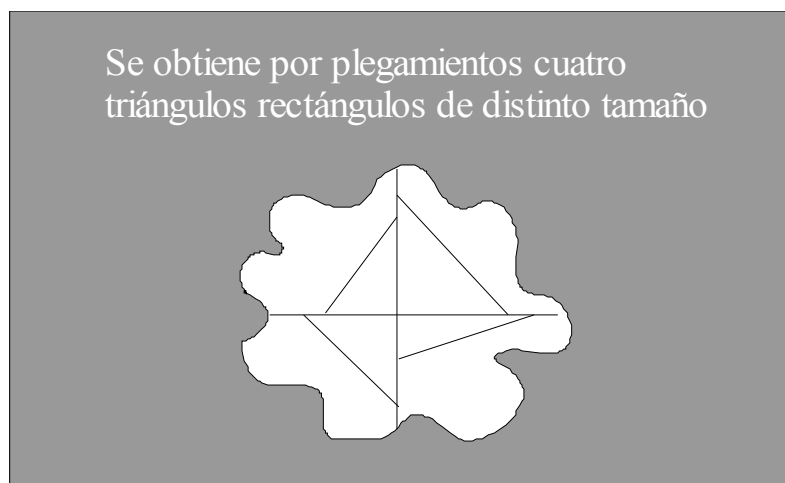
Se les solicita trazar un primer ángulo recto con la escuadra y luego dejar la escuadra y trazar los otros tres sólo con la regla. Se cuentan los trazados, que son también cuatro. El objetivo es llegar al trazado óptimo (la menor cantidad de trazados posible) de la figura que representa dos rectas perpendiculares.



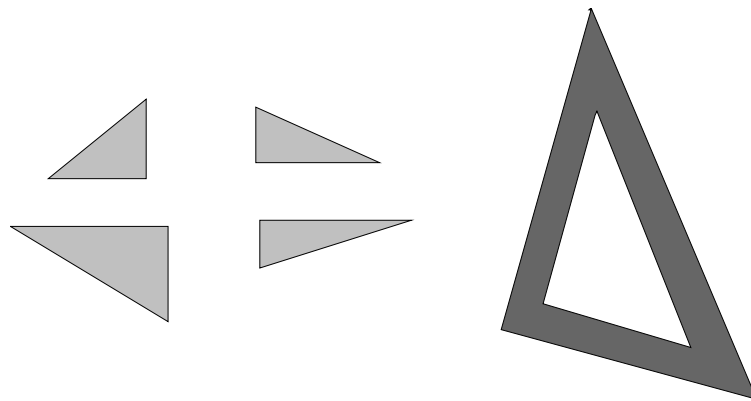
Aquí se les solicita utilizar la escuadra y la regla y obtener la figura formada por dos rectas perpendiculares, solamente con tres trazados. Los alumnos llegan a la solución, que consiste en trazar con la regla una recta, luego con la escuadra un ángulo recto, y finalmente con la regla, por prolongación, la otra semirecta que forma con la anterior las dos perpendiculares. El número total de trazados es tres.

2da fase

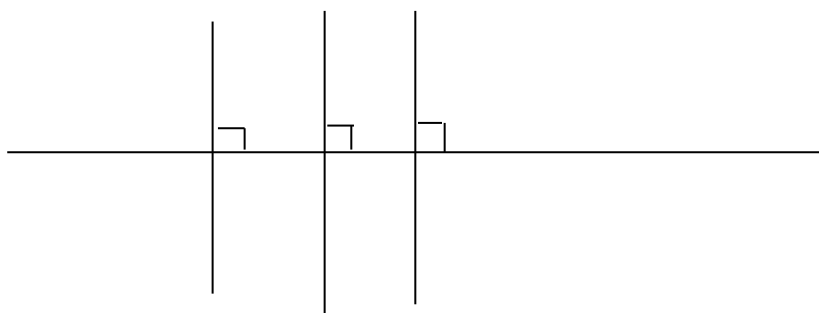
Aquí se trabaja por medio de acciones de plegamiento la realización de cuatro triángulos rectángulos no superponibles.



Se miden los lados de cada ángulo y se comprueba que el lado opuesto al ángulo recto es siempre más grande que los otros dos

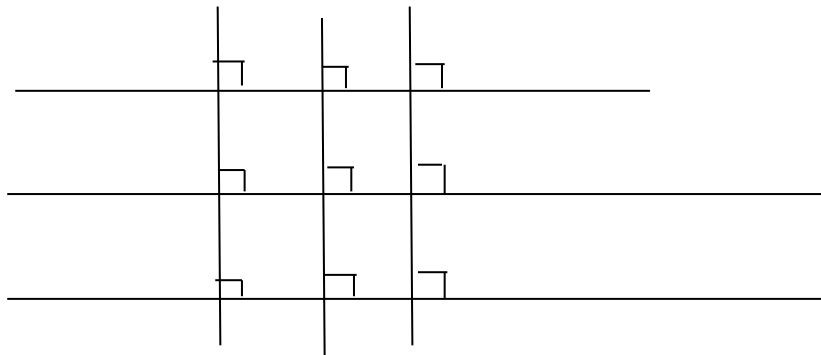


Con la escuadra se trazan tres perpendiculares a la misma recta:

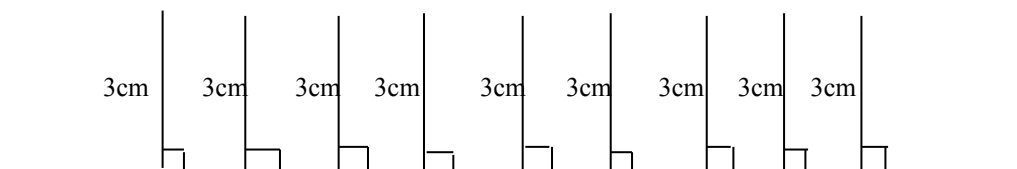




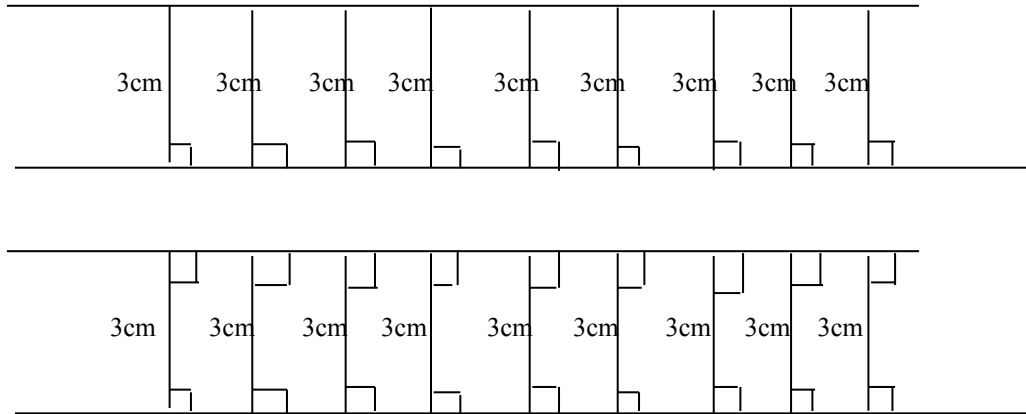
Con la escuadra se trazan tres perpendiculares a la misma recta y luego dos rectas perpendiculares a esas tres.



Se trazan varios puntos a 3 cm de la recta dada, cada uno sobre una perpendicular.

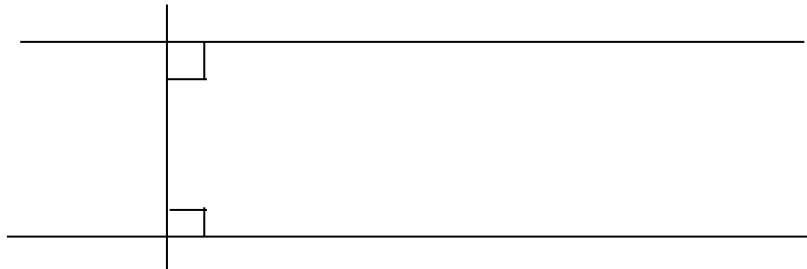


Se comprueba con la regla que todos esos puntos pertenecen a la misma recta.
Se nombra a las dos rectas: **rectas paralelas**.

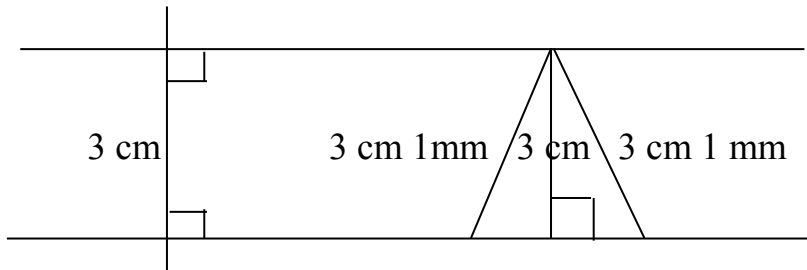


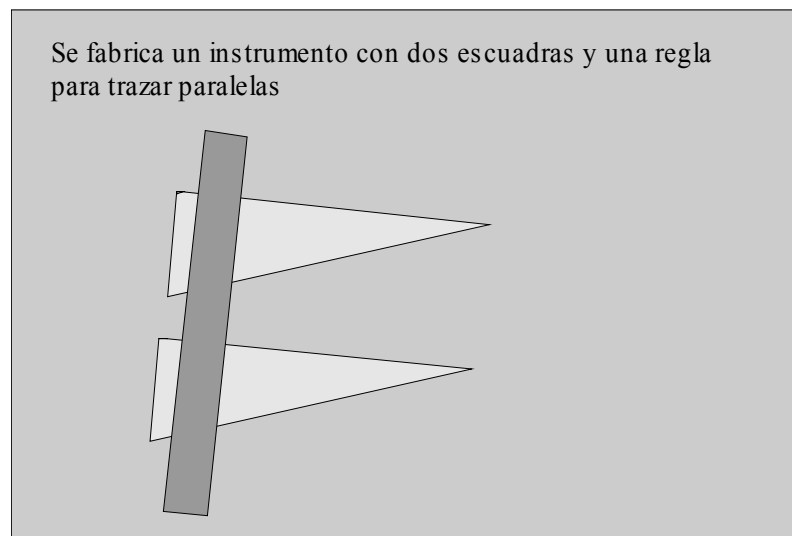
Se verifica que todas la perpendiculares a la primera recta son también perpendiculares a la paralela.

Se traza con la regla y la escuadra dos perpendiculares a una misma recta para obtener dos paralelas.

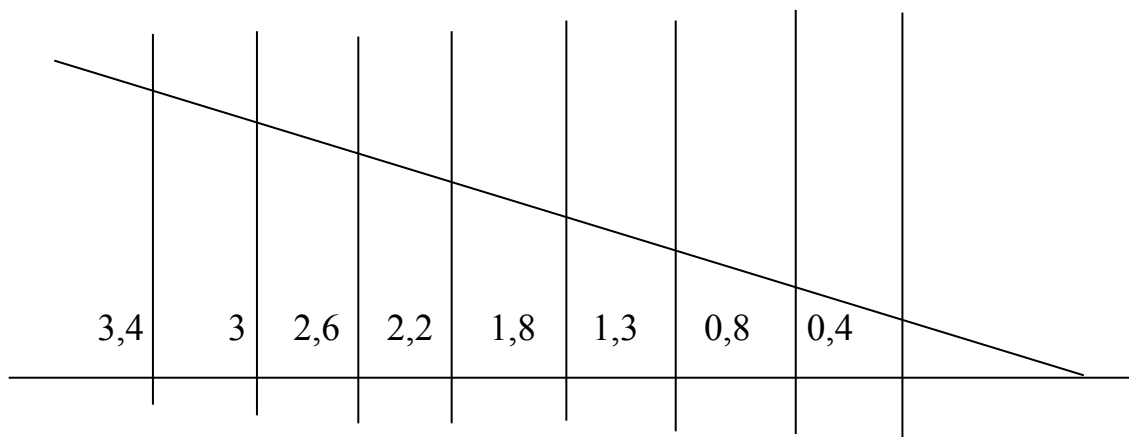


Se elije un punto sobre unas de las rectas y se comprueba que la distancia mínima a la otra recta se obtiene cuando se la mide sobre la perpendicular.





Se trazan dos rectas secantes y se miden algunas distancias sobre perpendiculares a una de ellas:



Comentario: como se ve, luego de haber realizado varias acciones por plegamiento, se trabaja cada vez más dentro del universo formalizado de las figuras geométricas construidas con los instrumentos apropiados. Este universo, cuya función es representar, poco a poco se constituye en un nuevo universo de acciones experimentables de un grado superior, con la ayuda de los instrumentos geométricos para estructurar las propiedades.

Es importante entonces proponer problemas que se puedan realizar dentro de cada universo. Por ejemplo, trazar con la regla y la escuadra dos rectas paralelas a 4cm de distancia.

Luego construir otras dos rectas paralelas a 4cm de distancia, sólo con plegamientos y utilizando solamente la graduación de la regla para medir los 4cm.

Conclusión

Les hemos presentado aquí un ejemplo de trabajo con perpendiculares y paralelas que parte de acciones directamente experimentables con los pliegues y que realiza un psicomorfismo estructurante en el universo de las figuras geométricas. Este principio de psicomorfismos estructurantes que hemos encontrado en nuestras primeras investigaciones en aprendizaje, es bastante general, y nos ha servido siempre de base para concebir secuencias de aprendizaje en distintos temas de la matemática, tanto en geometría como en aritmética.

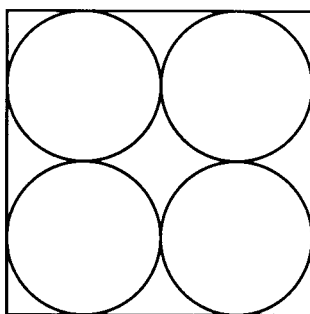
§ 3 Reproducción de figuras sin utilizar las graduaciones de la regla o de la escuadra: “el cuadrado y los cuatro círculos” (nivel: de 9 a 12 años de edad)

Aquí trabajamos, con nuestros alumnos que empiezan el secundario, el siguiente aspecto importante de las construcciones en geometría:

Toda construcción se hace por etapas, y toda etapa debe ser necesaria, desde el punto de vista de las propiedades geométricas, para las etapas posteriores.

Esto es fundamental ya que, años más adelante, estos alumnos deberán efectuar demostraciones por escrito. El hecho que intuitivamente en su primer año, sientan la necesidad de **justificar una construcción** por sus etapas necesarias, prepara el terreno para comprender la utilización de implicaciones geométricas de propiedades, en las demostraciones de los últimos años del secundario básico.

Se trata de reproducir una figura formada por un cuadrado y cuatro círculos de mismo radio tangentes entre si y tangentes al cuadrado.



Es interesante destacar que hubo **dos soluciones** presentadas por los alumnos:

Una de ellas es **la que parte del cuadrado**,

- trazando las diagonales para obtener el punto central;
- luego los otros dos ejes de simetría para obtener los cuatro cuadraditos;
- después las pequeñas diagonales de cada cuadradito para obtener los centros de cada círculo;

- luego dos segmentos de extremos en los centros de cada círculo para obtener un punto de cada círculo por intersección con los ejes de simetría del cuadrado inicial;

- finalmente los cuatro círculos.

La otra solución fue **la que parte de un ángulo recto**;

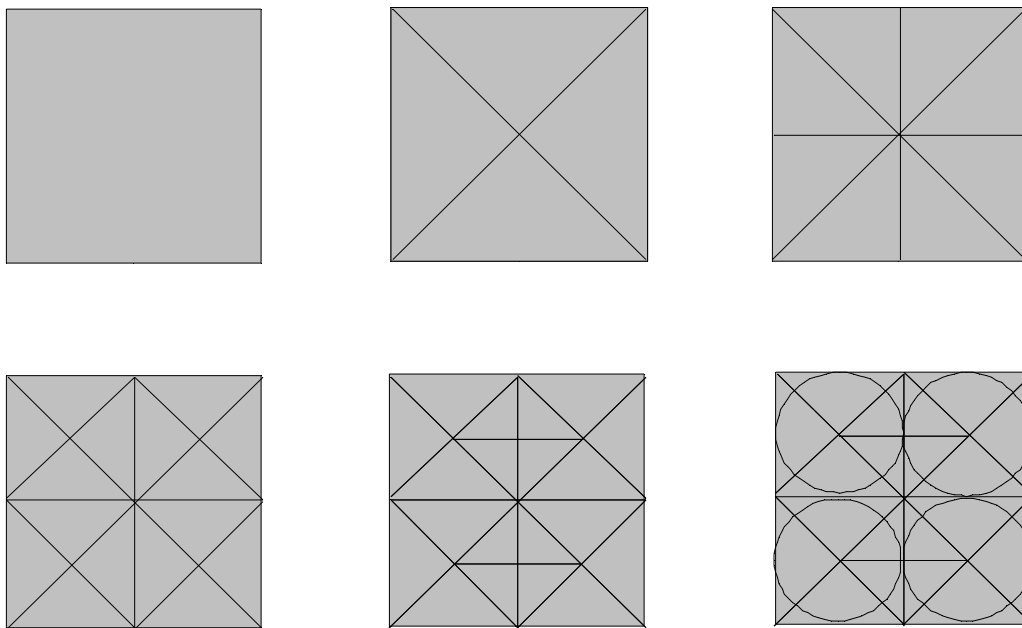
- trazando tres círculos de mismo radio y de centro uno en el vértice y los otros en cada lado del ángulo recto tangentes dos a dos;

- luego un cuadrado pequeño que tiene por vértices los tres centros de los tres círculos construidos antes;

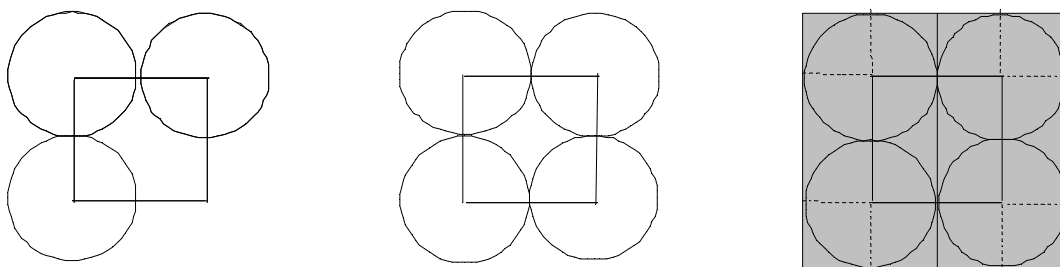
- después un cuarto círculo tangente;

- y por último la prolongación de los lados del cuadrado pequeño para obtener dos puntos de cada lado del cuadrado que circunscribe la figura.

Primera solución



Segunda solución



El hecho de que se estudie la validez de estas dos soluciones es muy positivo para la formación geométrica del alumno. Esto es muy bueno para el aprendizaje de la geometría, porque más adelante, cuando los estudiantes trabajen en el cuarto año, con demostraciones, verán que se puede partir de la conclusión y remontar hasta la hipótesis, o partir de la hipótesis y llegar a la conclusión. Otra cosa importante aquí, es trabajar con lo que llamamos el “film” de la construcción. Este **“film” les es de gran ayuda para las primeras redacciones de una construcción geométrica**, ya que cada etapa está dibujada.

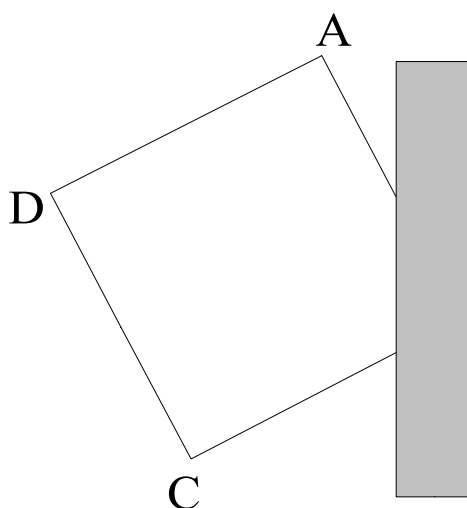
Comentario didáctico:

Una de las estructuraciones importantes es aquella de necesidad geométrica de las **etapas de una construcción**. Es un ejemplo magnífico de **la interacción psicomórfica entre las acciones directamente experimentables** (el trazado con los instrumentos) y **el universo formalizado de las propiedades geométricas**. Cada trazado está previsto en el universo formalizado en la mente del alumno, y luego de trazarlo experimentalmente el alumno lo utiliza para desarrollar en el universo de lo experimentable una **nueva pista de construcción**.

§ 4 Trazado de una parte de una de las diagonales de un cuadrado truncado (nivel: de 9 a 12 años de edad)

Esta es una actividad para los alumnos que están en el primer año del secundario. El objetivo es servirse de las propiedades geométricas para anticipar un resultado de la construcción de una de las diagonales de un cuadrado, aunque no se tenga acceso a uno de sus extremos. Aquí la geometría está jugando su rol fundamental:

Las propiedades permiten anticipar un resultado geométrico sin tener necesidad de realizarlo directamente.



Comentario didáctico: Aquí hemos situado expresamente los alumnos en el universo formalizado de las propiedades geométricas. Esto es debido a que no pueden trazar la diagonal $[BD]$ a partir de los puntos B y D. En cambio, después que resuelven este problema pueden verificar experimentalmente que las prolongaciones de los elementos incompletos se encuentran en el mismo punto B.

Esto es muy importante desde el punto de vista del aprendizaje de la geometría, porque aunque exista una pequeña imperfección en los trazados los alumnos saben que $[AB]$, $[DB]$ y $[CB]$ se encuentran en el punto B.

1ra fase

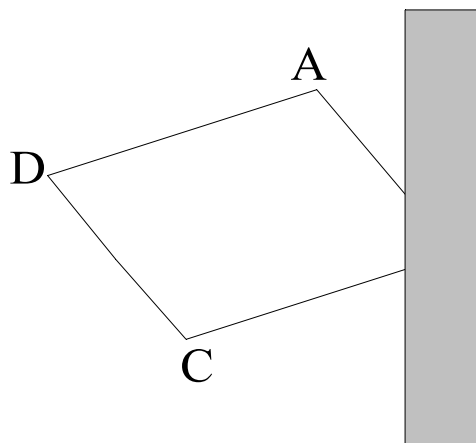
Partimos del pedido siguiente: trazar una parte de la segunda diagonal $[BD]$ del cuadrado ABCD del cual sólo conocemos tres vértices A, C, D. El vértice B se encuentra del otro lado de un “muro” que está imaginado por un segmento de trazado grueso. Una vez que los alumnos proponen una solución y la trazan, se les dice que entonces se pueden prolongar los trazados para verificar que la diagonal pasa efectivamente por el vértice B.

Los alumnos proponen varias soluciones posibles; algunas a partir de la diagonal y el centro del cuadrado, otras a partir de la perpendicularidad de las diagonales, otras a partir de la bisectriz del ángulo recto en D.

Esto nos muestra que la situación didáctica es muy rica y permite que los alumnos utilicen buena parte de las propiedades del cuadrado.

2da fase

Se les propone un problema análogo, pero con un paralelogramo en lugar de un cuadrado. Esto es interesante ya que solamente se utiliza aquí la propiedad del centro del paralelogramo.



Comentario: Aquí tenemos una **variable didáctica importante**: la posición relativa de la figura a la hoja. Una infinidad de posiciones son teóricamente posibles. Esto hace que la “**posición relativa**” sea una **variable**. Esta variable es didáctica porque según **los valores que ella tome, el comportamiento de los alumnos cambiará**. Es así que la “**variable didáctica**” de posición de la figura con respecto al “muro” **hace que el problema sea más fácil o más difícil**.

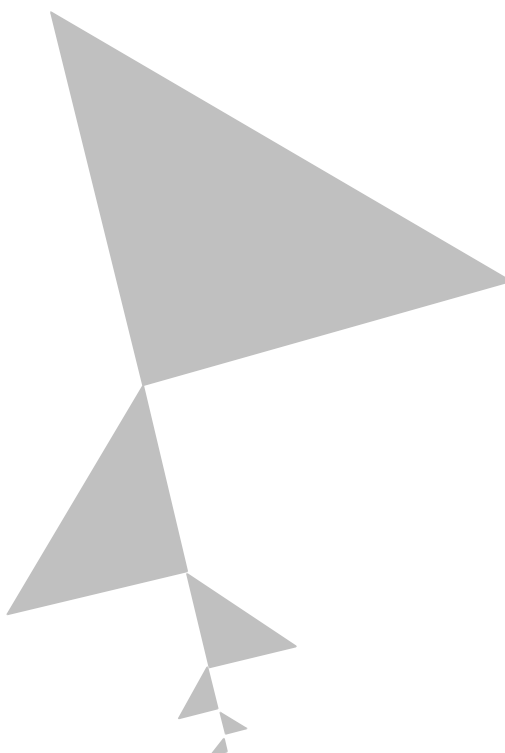
Por ejemplo, en el caso del cuadrado se podrían ocultar a la vez el centro y los puntos B y C; en ese caso solamente la solución que utiliza la bisectriz es la más adecuada. Este último problema es más difícil y puede ser propuesto en un nivel más avanzado del secundario.

§ 5 Del objeto físico (el dibujo) al objeto ideal (la figura) (nivel: de 11 a 13 años de edad)

Esta experiencia se realiza en la clase del segundo año del secundario básico. El objetivo principal es que los alumnos se den cuenta de que no se puede probar o demostrar nada a partir de un dibujo si no se da la información geométrica necesaria por otro medio de información (verbal, simbólico, o ambos a la vez).

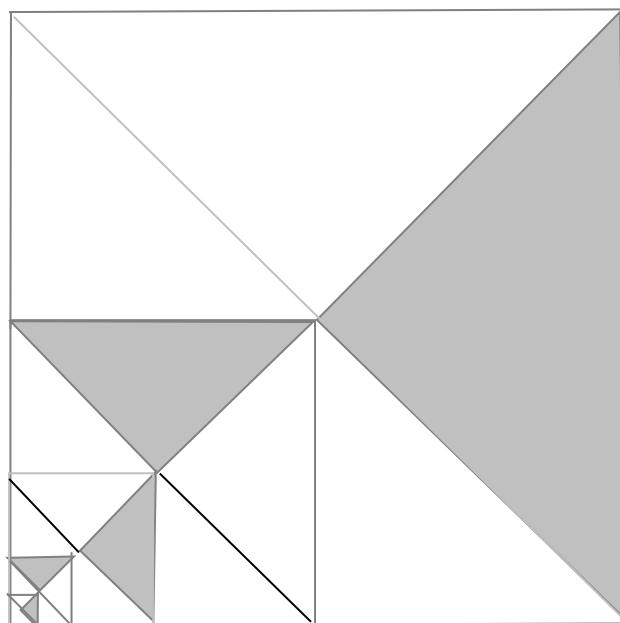
1ra fase

Se les pide establecer una lista de “propiedades” constatadas a partir de los instrumentos de geometría. Los alumnos llegan a establecer una buena docena de propiedades, que encuentran con facilidad en el segundo año del secundario.



2da fase

Luego de ver que es imposible probar estas propiedades sin apoyarse en una información certera, se les dice a los alumnos como fue construida esta figura a partir de un cuadrado inicial y de un proceso reiterado de trazados. Es entonces que se les da una fotocopia de la figura que se utilizó, diciéndoles que se trata de un cuadrado en el que se trazaron las diagonales, luego un cuadrado más pequeño a partir de los puntos medios del cuadrado inicial, y en ese cuadrado se reitera el procedimiento. Finalmente se colorean los triángulos de manera alternada.



Aquí los alumnos pueden realizar demostraciones, ya que pueden utilizar las propiedades del cuadrado y también otras propiedades de geometría del segundo año del secundario.

Por ejemplo:

- Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares, se intersectan en su punto medio y son perpendiculares.
- El ángulo entre un lado y una diagonal mide 45° .
- Si los ángulos alternos de una secante a dos rectas son de la misma medida entonces esas dos rectas son paralelas.
- Una diagonal en un cuadrado define dos triángulos rectángulos isósceles.

Comentario didáctico: los alumnos, en esta actividad, consolidan el hecho de que en geometría **no podemos probar con verificaciones experimentales**. En cambio, el trabajo en un universo de lo experimentable es muy útil para descubrir y conjeturar propiedades geométricas.

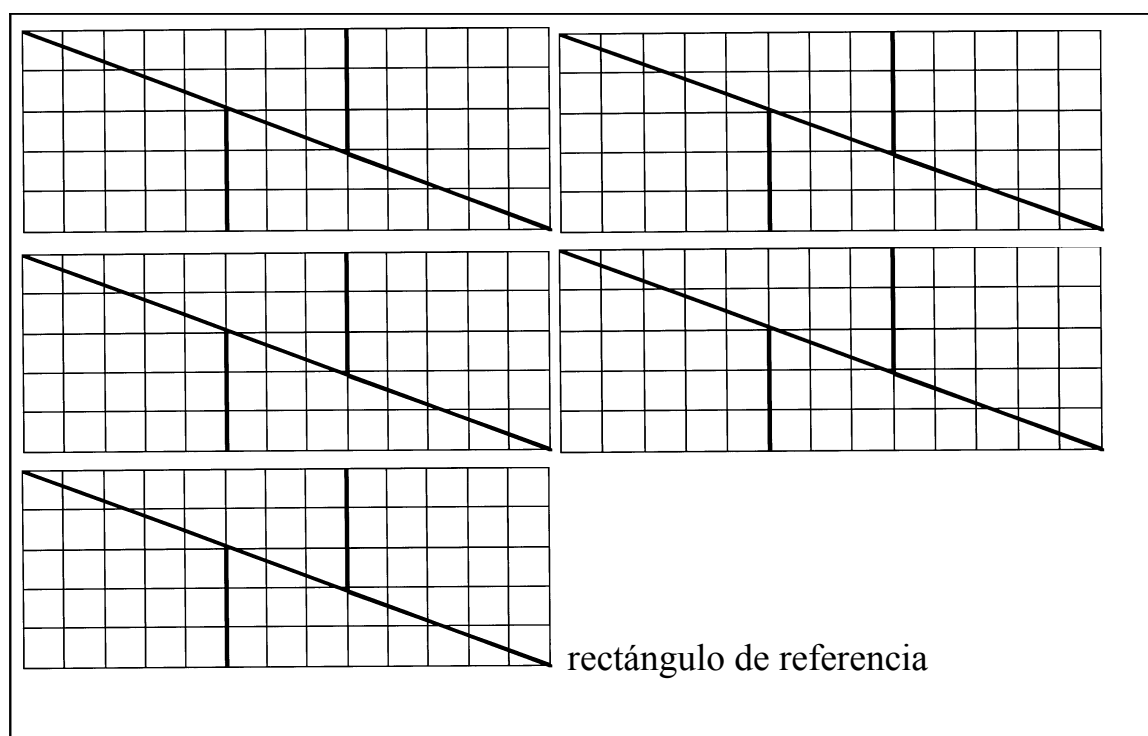
§ 6 Los rompecabezas engañosos (nivel:13 a 16 años de edad)

Esta actividad es muy buena para el cuarto y último año del secundario.

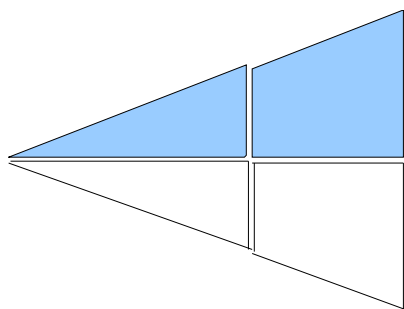
Se trata de que los alumnos pongan en duda una vez más lo que ven, incluso si lo que ven parece evidente y sin fallas aparentes. Nos apoyamos en esta situación en la figura conocida en la que intervienen los números 5, 8, y 13 de la sucesión de Fibonacci.

1ra fase

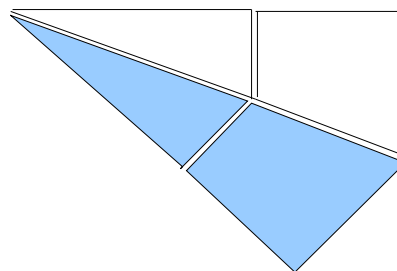
Se le entrega a cada alumno una hoja con cinco rectángulos idénticos, cada uno de ellos con cuatro partes. Se les dice: “Uno de los cinco rectángulos del que ustedes disponen quedará como testigo, con cada uno de los otros cuatro ustedes recortaran en cada uno las cuatro partes y con ellas tratarán de formar una figura conocida de la geometría”. **Autorizamos dar vuelta a los pedazos.**



Los alumnos obtienen por ejemplo, un “cuadrado”, un “rombo no cuadrado”, dos “triángulos isósceles” (uno obtuso y uno agudo), un “trapecio isósceles”, una “cometa”, un “hexágono”, un “cuadrilátero cóncavo”, un “paralelogramo”.

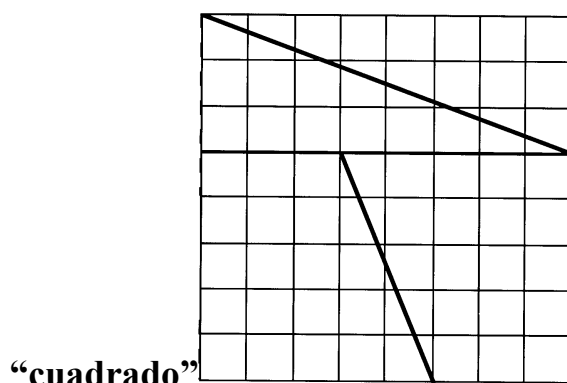


triángulo isósceles



cometa

Se elige el “cuadrado” para que los alumnos realicen una demostración. Esta es efectuada tomando como hipótesis todas las propiedades de la figura inicial que están visibles en el rectángulo con los trazados utilizados, para recordar que se ha guardado expresamente. Los alumnos, junto con el docente, demuestran distintas propiedades: los ángulos son rectos, los lados miden cada uno 8 unidades, es así que los alumnos dicen que la figura obtenida es un “cuadrado”.



2da fase

Les pedimos que calculen el área del rectángulo inicial y la del “cuadrado” usando como unidad de área el cuadradito común a las dos figuras. La sorpresa es que **el área del rectángulo es de 65 cuadraditos y la del “cuadrado” es de 64 cuadraditos.**

Los alumnos dicen que esto no puede ocurrir, ya que el “cuadrado” se obtuvo a partir del rectángulo con sus cuatro partes.

Es aquí que con la ayuda del docente se utiliza ya sea el teorema de Tales de la paralelas o el de Pitágoras. En los dos casos se calcula y se ve que aquella longitud que se creía de 3 unidades es en realidad un “poquito” distinta: 3,07. ¡Es por esto que esta pequeña diferencia es inobservable a la vista!

Los alumnos comprueban una vez más la **potencia de un razonamiento matemático** y que **la percepción visual puede inducirnos en error.**

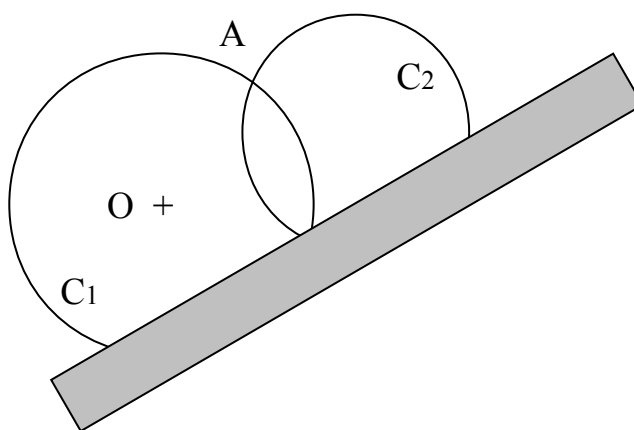
§ 7 Cuerdas truncadas de dos círculos (nivel:13 a 16 años de edad)

En el último año del secundario básico se puede proponer la situación en la que se debe trazar una parte de la cuerda común a dos círculos secantes, pero sólo se tiene acceso a uno de los puntos de intersección.

1ra fase

Se les da a los alumnos una fotocopia y se les dice que se trata de dos círculos secantes.

Se les pide que tracen la parte de la cuerda común, pero no se podrá utilizar la parte de la hoja del otro lado de un “muro”, representado por un trazado gris.



2da fase

Se comparan las soluciones presentadas por los diversos alumnos y ellos deberán demostrar su validez.

En esta parte los alumnos utilizan distintas propiedades conocidas de la geometría, fundamentalmente que la recta que pasa por los centros es perpendicular a la cuerda común de los círculos secantes.

Aquí los estudiantes deben pensar en **obtener en primer lugar los dos centros** (con ayuda de dos cuerdas distintas de cada círculo y sus mediatrices respectivas), y luego **la perpendicular a la recta definida por los dos centros que pasa por el punto accesible** de intersección de los dos círculos.

Comentario didáctico: como han visto en esta actividad, ubicamos al alumno en el universo formalizado de las propiedades ya que no pueden trazar la cuerda común a los dos círculos a partir de sus dos puntos extremos. **Los alumnos deben anticipar el trazado en su pensamiento, guiados por la propiedad formalizada:** “la cuerda común a dos círculos secantes es perpendicular a la recta que definen los centros”.

§ 8 Actividades con construcciones geométricas que conducen a los alumnos a la fabricación de instrumentos geométricos. (nivel:13 a 16 años de edad)

Si nos interesamos en este tipo de actividades, es porque estamos convencidos de que el saber se obtiene no solamente con los ojos sino, además, por las manos y por todos los canales de recepción de información.

Cuando hacemos una reflexión con respecto a un problema de geometría, no observamos sólo la figura sino realizamos, además, determinadas acciones importantes:

- dibujamos, con nuestros instrumentos, la figura en nuestro cuaderno, o
- explicamos a un amigo que no ve la figura, cómo hacer para dibujarla (esta actividad muy pedagógica es llamada por los alumnos el “juego del teléfono”). Con estas instrucciones, si son correctamente enunciadas y correctamente comprendidas, el amigo podrá dibujar la figura en su cuaderno.

Decimos que **“el saber entra también por las manos, por las acciones directamente experimentables”**.

Además, si el alumno puede construir sus **instrumentos personales de geometría y conservarlos**, no será sólo un buen recuerdo de su paso por el colegio, sino que habrá vivido en sus manos la “realidad” de su reflexión geométrica. **La construcción de un instrumento que permite resolver un problema de trazado es una acción posible de formalización de las acciones directamente experimentables.**

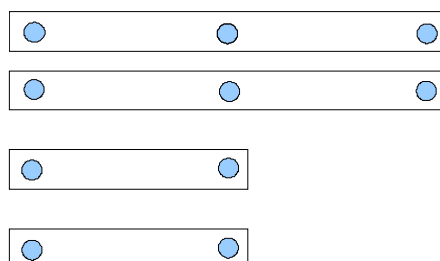
Entonces, proponemos al profesor hacer construir a los alumnos algunos instrumentos de geometría con cartulina o madera.

Primera actividad: el bisector

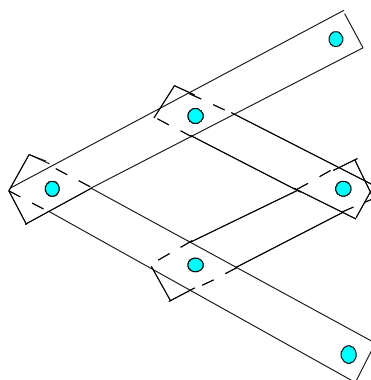
El problema es el siguiente: construir un instrumento que permita, conociendo un ángulo dibujado en una hoja, trazar su bisectriz.

Solicitamos a los alumnos cortar dos bandas de cartulina de 22 cm de longitud y dos de 12 cm de longitud, las cuatro de 2 cm de ancho.

Después, hacer agujeros como en el dibujo para poder poner roblones.



Luego les pedimos construir, con estas bandas y roblones, un instrumento, al que llamaremos bisector, según la figura:



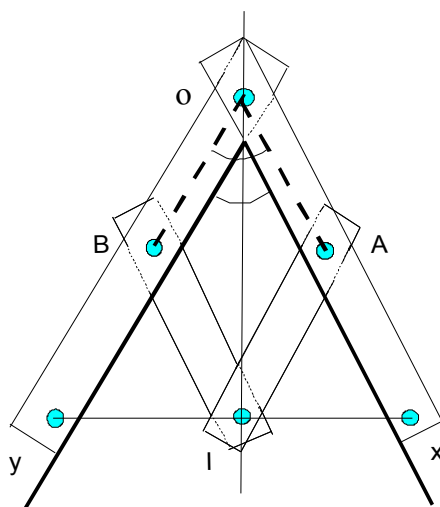
Ahora damos a los alumnos una hoja con un ángulo trazado $\widehat{xOy}$ con la instrucción de trazar, con el bisector, la bisectriz de este ángulo. Los alumnos tienen la dificultad de ubicar el bisector en el ángulo porque dicen que “no se ve a través de la cartulina”. Es una situación curiosa, porque el alumno está confrontado con un elemento físico: el uso del bisector, una acción directamente experimentable, y dos elementos matemáticos: el ángulo y su bisectriz, que son objetos “ideéles” (según la terminología de R. Rodríguez Herrera) de esas acciones formalizadas a través de sus propiedades.

Les pedimos reflexionar sobre la posibilidad de utilizar el borde de las bandas que forman el bisector ¿Son ellas paralelas al ángulo formado por el punto O y las semirectas [OA) y [OB)? Responden que sí y que pueden utilizar la propiedad de que **si dos ángulos tienen sus lados paralelos, entonces son superponibles** (preferimos “superponibles” a “iguales” que es menos experimentable).

Pregunta para los alumnos: ¿Cómo se puede trazar la bisectriz del ángulo?

Primero les preguntamos ¿Que figura es AOBI? Responden que es un rombo porque es un cuadrilátero con cuatro lados de la misma longitud.

Después, dicen que se puede utilizar el rombo interior al bisector, por la misma razón que antes: sus ángulos son superponibles a los del rombo AOBI. Entonces la bisectriz del ángulo $\widehat{xOy}$ es la misma que la de los ángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{AIB}$ porque los ángulos opuestos de un rombo son superponibles.

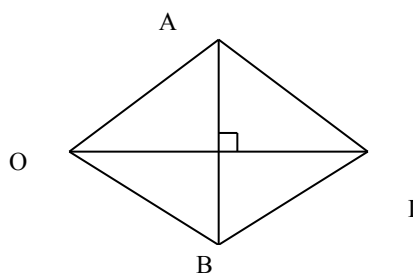


Ahora preguntamos: ¿Es posible construir, con el bisector, **un ángulo recto**?

Dicen que sí, porque es la mitad de un ángulo llano. Cuando tratan de hacerlo, ven que el rombo es aplanado y que no hay ninguna precisión. Les decimos que es un principio muy importante para hacer matemáticas y, de manera más general, trabajo científico, el tener los instrumentos correctamente adaptados a la tarea.

Les pedimos a continuación tratar de construir el ángulo recto de otra manera con el bisector. Nos dicen que se puede hacer utilizando la siguiente propiedad de los rombos:

Las diagonales de un rombo forman un ángulo recto.

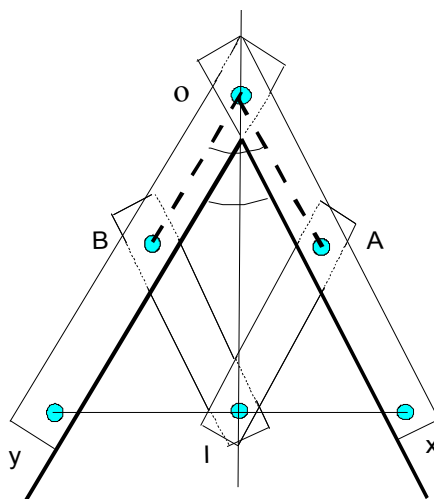


Entonces las rectas (OI) y (AB) son perpendiculares.

Ahora decimos a los alumnos que este instrumento muy simple se puede utilizar para otras actividades interesantes, como la siguiente.

Segunda actividad: la simetría axial.

Solicitamos a los alumnos trazar, en una hoja de cartulina, una recta paralela al borde largo de la hoja, y después fijar, con un roblón, el punto O del bisector en la recta y poner, sin roblón, el punto I sobre la misma recta:



Les preguntamos ahora: ¿Qué ocurre cuando ponemos el punto I en diferentes lugares de la recta (OI)? ¿Cuál es la figura OAIB? ¿Cómo son entre ellas las rectas (BA) y (OI)? ¿Cuál es el punto H?

Responden que la figura es también un rombo, que las rectas (BA) y (OI) son perpendiculares, que el punto H es el punto medio de [BA] y de [OI].

Con los mayores estudiantes hablamos ahora de simetría axial y preguntamos: ¿Cuál es la importante propiedad conservada por los puntos A y B cuando colocamos el punto I en distintos lugares de la recta (OI)?

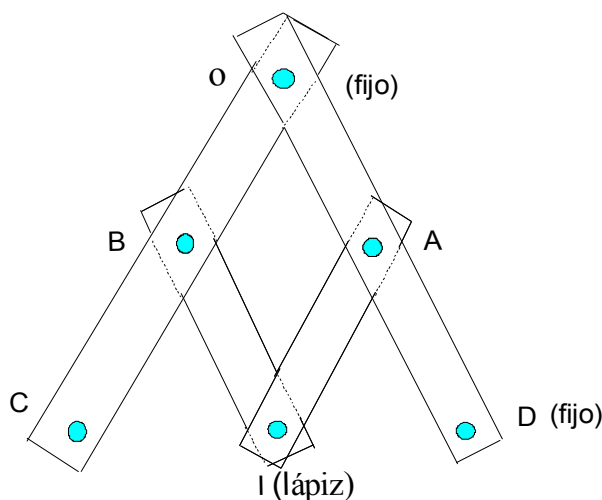
Los alumnos responden que los puntos permanecen simétricos con respecto al eje (OI) y que, además, toda figura representante del bisector posee ese eje de simetría.

Conclusión: el bisector es, también, un simetrizador.

Tercera actividad: el pantógrafo

Esta actividad puede hacerse con alumnos de entre once a catorce años de edad. Si conocen el teorema de Tales lo citaremos, de otro modo, hablaremos solamente de proporción.

Les pedimos a los alumnos fijar con dos roblones los puntos O y D del bisector en otra hoja de cartulina y un lápiz en el punto I.



Primero situamos a los alumnos en acciones directamente experimentables. Por ejemplo, les pedimos trazar, moviendo el pantógrafo con el lápiz en el punto I, un “cuadrado” lo mas perfecto posible “a mano limpia”, sin instrumentos y con un trazado continuo, sin levantar el lápiz de la hoja. Al mismo tiempo deberán sostener otro lápiz en el agujero C.

Los alumnos observan que el segundo lápiz produce un trazado semejante al del primero.

Luego les proponemos trazar un triángulo con un lápiz en el agujero-punto I y que luego tracen anticipando, sin que haya un segundo lápiz en C, el dibujo que se formará cuando pongamos otro lápiz en C.

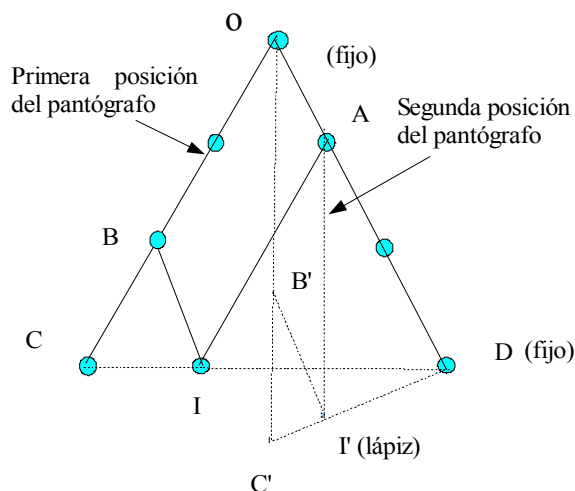
Aquí los alumnos deberán anticipar. Luego les pedimos colocar un segundo lápiz para ver si su anticipación fue o no buena.

Les proponemos luego el mismo tipo de problema con un círculo.

¡Trate de anticipar, con un dibujo, lo que va ocurrir con el segundo lápiz!

Aquí tenemos un **objetivo muy importante: deseamos que los alumnos, reflexionando sobre una figura, anticipen lo que va ocurrir.** Es un paso necesario para que el alumno aprenda cómo hacer una demostración, porque el alumno debe formalizar sus acciones experimentables y entonces utilizar propiedades geométricas.

Es también la fuerza de la ciencia: ¡Antes de enviar, por ejemplo, un cohete a la estratósfera hay que anticipar científicamente lo que va a ocurrir con su trayectoria!



Les preguntamos: ¿Cuál es la proporción entre la longitud de $[CC']$ y la de $[II']$?

Responden que II' es el punto medio de CC' porque I está en el punto medio de $[CD]$ y además I' está en el medio de $[C'D]$. Solicitamos a los alumnos que conocen el teorema de los triángulos proporcionales, conocido como teorema de Tales probar que $II' = 1/2 CC'$. Dicen que, en el triángulo CDC' , la recta (II') se llama “recta de los puntos medios” de los lados $[CD]$ y $[C'D]$, entonces, la recta (II') es paralela a la recta (CC') y la longitud del segmento $[II']$ es la mitad que la del segmento $[CC']$.

Es sumamente importante que se les solicite probar que I está siempre en el punto medio, siempre que B esté en el punto medio de $[OC]$ y A en el punto medio de $[OD]$; así los alumnos escriben que:

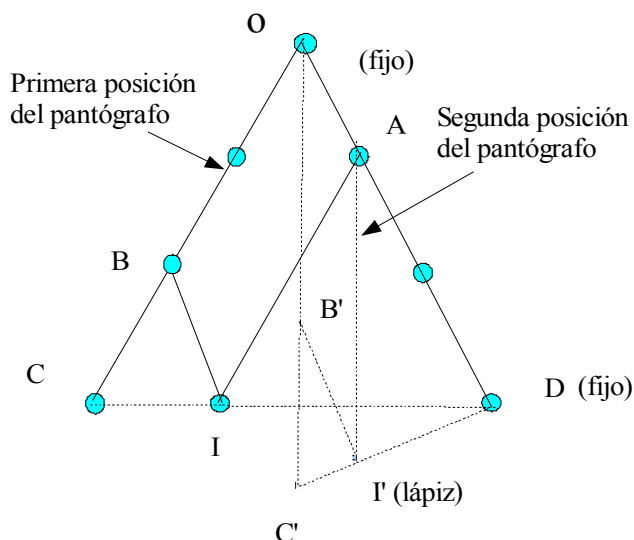
si $OB = 1/2 OC$ y $OA = 1/2 OD$, entonces I es el punto medio de $[DC]$.

Ahora les preguntamos ¿Qué debemos hacer para cambiar la proporción entre la longitud de $[CC']$ y de $[II']$, por ejemplo para obtener una proporción de tres a uno?

Responden los alumnos que debemos cambiar las posiciones de B y de A y ubicarlos en la tercera parte de $[OC]$ y $[OD]$.

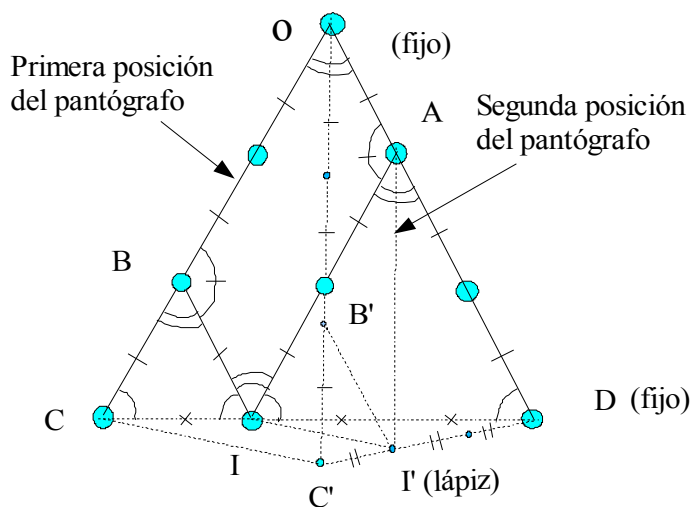
Decimos que **debemos reflexionar en un dibujo antes de hacerlo**.

Hacen varias figuras y la siguiente les satisface.



Dicen que, aplicando al teorema de Tales al triángulo CDC', se puede decir que, siendo [CI] la tercera parte de [CD], [C'I'] es la tercera parte de [C'D].

Finalmente les solicitamos indicar en el dibujo todos los segmentos de igual longitud y ángulos superponibles y después escribir en sus cuadernos la demostración.



Ahora trazamos un círculo en la figura y les preguntamos:

¿Podemos hacer la reducción de un círculo con este pantógrafo y dos lápices fijados en I y en C?

Tratan de hacerlo y no pueden, a lo que dicen:

¡Hay un problema, porque los dos puntos O y D están fijos!

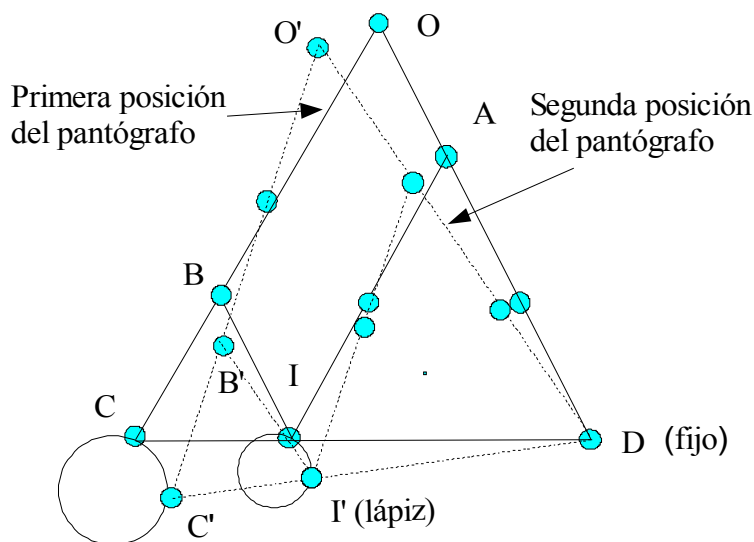
Les preguntamos ¿Como deberán moverse los puntos C e I?

Me responden: se moverán en un círculo de centro O y otro de centro A que está también fijo.

¡Muy bien! ¿Qué hay que hacer?

¡No debemos fijar el punto O!

Tratan de dibujar el círculo y ¡está bien!



§ 9 Hacer geometría con dobleces (nivel: 11 a 13 años de edad)

La geometría con dobleces es muy interesante porque es muy particular: en efecto, podemos hacer con ella construcciones geométricas que no pueden hacerse con la regla y el compás. Por ejemplo podemos, con dobleces, dividir un ángulo en tres partes superponibles (la trisección del ángulo). Tenemos de nuevo la posibilidad de utilizar el trabajo manual para comprender a nivel de las acciones directamente experimentables y recordar las propiedades de algunas figuras geométricas. Como lo dijimos antes, el saber entra en geometría por las manos. La geometría debe ser manipulada, es decir construida con las manos.

Las siguientes actividades pueden hacerse con alumnos en edades de entre ocho y trece, con los más jóvenes haremos sólo la actividad manual y con los mayores además las demostraciones.

Materiales: hojas de cartulina, tijera, regla, lápiz.

Primera actividad (hecha con ambos grupos):

Solicitamos a los alumnos observar la figura trazada en la pizarra:

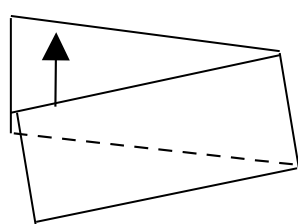
Y la siguiente:

Los alumnos responden que la primera es una línea recta y la segunda un ángulo de medida 180 grados. Ya están acostumbrados a interpretar formalizando las figuras geométricas.

Observamos que, para los alumnos, una recta dibujada en una hoja no es un ángulo, pero una recta con un punto es un ángulo llano.

El profesor debe proponer además actividades originales para completar la visión de las figuras geométricas de manera distinta a la acostumbrada.

Después, solicitamos a los alumnos hacer, con la cartulina, cintas de medidas: 4 cm x 29 cm y doblarlas como se muestra en la figura, el borde de la cinta sobre sí mismo:

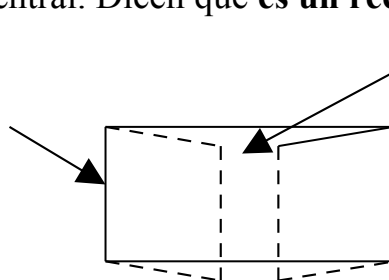


pliegue

Preguntamos: ¿Cuál es la medida del ángulo formado por el pliegue y el borde de la cinta? Responden ¡Es un ángulo recto!

Les solicitamos hacer un segundo doblez, como se muestra en la figura de abajo y decir cuál es la figura central. Dicen que **es un rectángulo**:

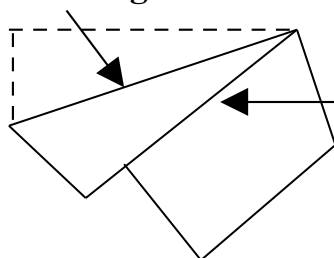
pliegue del
segundo doblez



pliegue del
primer doblez

Les preguntamos: ¿Porqué? Nos dicen que hemos hecho con los pliegues dos ángulos rectos ¡Todos los niños saben que si hacemos dos dobleces en una cinta de esta manera, obtenemos un rectángulo! Pero, ahora vamos a observar otros casos que no son tan evidentes. Les pedimos hacer su pliegue de tal manera que el primer ángulo no sea recto. Y, después, hacer el segundo pliegue en el borde superior de la cinta de tal manera que los dos bordes superiores de la cinta coincidan:

pliegue del **segundo doblez**



bordes
superiores **coincidentes**

Preguntamos ahora ¿Cuál es la medida del ángulo formado por los dos pliegues?
Responden ¡Es un ángulo recto!

Segunda actividad (para alumnos de 11 a 13 años)

Continuando la anterior actividad con estos alumnos, les solicitamos demostrar porqué el ángulo encontrado es un ángulo recto. Les pedimos trazar una línea recta pronunciadamente oblicua entre los *dos bordes superiores coincidentes* de la cinta para, después, abrirla y observar lo que ocurre.

recta (OF): pliegue del **primer doblez**

línea recta pronunciadamente oblicua trazada entre los dos bordes superiores coincidentes de la cinta

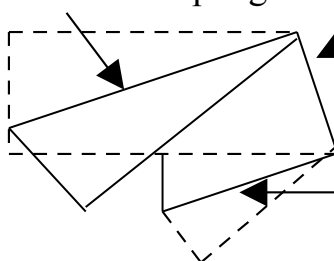
recta (OH): pliegue del **segundo doblez**

Los alumnos reflexionan y dicen que los ángulos X_1 y X_2 son superponibles también Y_1 y Y_2 y que, además, el ángulo $X_2 + Y_1$ mide 90 grados.

Les pedimos ahora hacer un tercer doblez con el borde inferior de la cinta, como en la siguiente figura.

pliegue del **segundo doblez**

pliegue del **primer doblez**



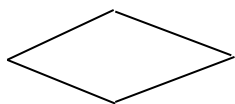
pliegue del **tercer doblez**

Les preguntamos lo que pasa, a lo que responden que hay un nuevo ángulo recto y que si construimos así un cuarto pliegue con un nuevo doblez obtenemos un rectángulo.

Solicitamos a los alumnos, después de hacer el rectángulo, abrir la cinta y anotar todas las rectas sucesivas, lo que será útil durante la siguiente actividad.

Hacer geometría con una cinta imperfecta

Mostramos a los alumnos la figura siguiente, y les preguntamos:



¿Que figura es esta?

¿Están ustedes seguros? Hay que verificarlo.

Ahora decimos que es una **cometa**.

Invitamos a los alumnos a escribir todas las propiedades de la cometa que se puedan observar en la figura:

- Una cometa isósceles tiene dos pares de lados sucesivos de misma longitud dos a dos.
- Las diagonales de una cometa isósceles son ortogonales.
- Una cometa isósceles tiene un eje de simetría ortogonal.
- Una cometa isósceles está constituida de dos triángulos superponibles que poseen un lado común: el eje de simetría de la figura.
- Una cometa isósceles está constituida de dos triángulos isósceles adyacentes por la diagonal ortogonal a su eje de simetría.

Precisamos: una cometa no isósceles es un cuadrilátero que tiene la siguiente propiedad:

Una de sus dos diagonales encuentra la otra por el medio.

Invitamos ahora los alumnos a escribir las diferencias entre un cuadrado, un rombo y una cometa isósceles:

El cuadrado	El rombo	La cometa isósceles
-Cuatro lados de igual longitud	-Cuatro lados de igual longitud	-Dos pares de lados sucesivos de igual longitud dos a dos
-Dos triángulos rectángulos isósceles opuestos	-Dos triángulos isósceles opuestos superponibles	-Dos triángulos isósceles opuestos
-Diagonales ortogonales de igual longitud	-Diagonales ortogonales	-Diagonales ortogonales
-Cada diagonal mediatriz de la otra	-Cada diagonal mediatriz de la otra	-Una diagonal mediatriz de la otra
-Cuatro ejes de simetría	-Dos ejes de simetría	-Un eje de simetría

Constatamos que el número de ejes de simetría permite saber si un cuadrilátero es un cuadrado o un rombo o una cometa isósceles.

Actividad sobre la cinta imperfecta

Ahora preguntamos a los alumnos:

¿Qué ocurre si **los bordes de la cinta no son paralelos**?

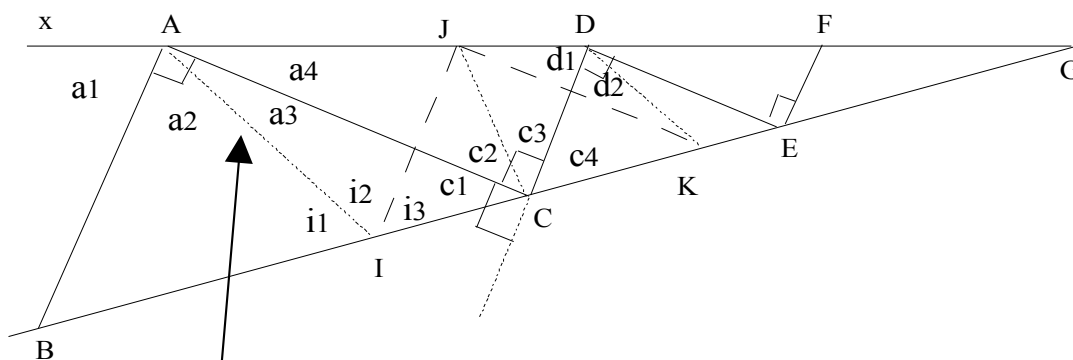
Les invitamos a reflexionar sin utilizar cinta para anticipar lo que va a ocurrir.

Nos dicen: no es posible porque cuando haremos el segundo pliegue el ángulo no será recto.

Les invitamos a cortar una banda de papel con dos lados bien regulares pero no paralelos y, después, hacer dos pliegues como en la actividad anterior en el borde superior de la banda. Obtienen un ángulo recto.

Continuando con el otro lado, ven que el segundo ángulo es recto también.

De la misma manera les invitamos a continuar para obtener cuatro triángulos rectángulos BAC, ACD, CDE y DEF.



recta de los bordes superiores coincidentes de la cinta

por R. Rodríguez Herrera y D. Salles-Legac

Les preguntamos ahora ¿cómo son los segmentos $[AB]$, $[DC]$ y $[FE]$?

Responden: ¡son paralelos!

Preguntamos ¿porqué?

Porque, a causa de los pliegues, los siguientes ángulos son superponibles:

$a_1 = a_2$; $a_3 = a_4$; $c_1 = c_2$; $c_3 = c_4$. Entonces $a_2 + a_3 = a_1 + a_4$ y el ángulo $\widehat{BAC}$ mide la mitad del ángulo $\widehat{xAD}$, es decir 90 grados; es decir el ángulo $\widehat{BAC}$ es recto. De la misma manera podemos decir que el ángulo $\widehat{ACD}$ es recto. Los segmentos $[AB]$ y $[CD]$ son perpendiculares al mismo segmento $[AC]$, de modo que son paralelos.

Solicitamos a los alumnos trazar con una línea punteada, los segmentos formados por los bordes de la cinta cuando hacemos los pliegues: $[AI]$, $[CJ]$, $[DK]$. Después, observar si se encuentran otras rectas paralelas.

Proponemos estudiar $[AI]$ y $[DK]$ que “parecen” paralelos sobre la figura.

Podemos recordar la propiedad de las rectas paralelas:

Dos rectas (AI) y (DK) son paralelas si y sólo si una recta (BG) que les encuentra sobre los puntos I y K forma con ellas dos ángulos $\widehat{GKD}$ y $\widehat{GIA}$ superponibles.

Observamos que los ángulos a_3 y a_4 son superponibles y también c_1 y c_2 , de modo que los ángulos $\widehat{GIA}$ y $\widehat{CJA}$ son superponibles. Además los triángulos AIC y AJC que tienen dos lados de misma longitud y dos ángulos superponibles dos a dos, son superponibles.

Preguntamos ¿cuál es la naturaleza del cuadrilátero $AICJ$?

¿Es un rombo? ¡No! Porque “se ve bien que los lados $[AI]$ y $[JC]$ no son de misma longitud”

Ahora, ¿Cómo se llama este tipo de cuadrilátero?

¡Es una cometa! (ver la actividad preliminar)

Ahora ¿cómo son los segmentos $[AC]$ y $[IJ]$? Son perpendiculares.

¿Y los segmentos $[JI]$ y $[JK]$? Son perpendiculares también.

Ahora vamos a calcular la medida de los ángulos $\widehat{GIA}$ y $\widehat{GKD}$

En el triángulo AIC , tenemos:

$a_3 + c_1 + i_2 + i_3 = 180$ grados, es decir que el ángulo $\widehat{GIA}$ mide:

$180 - (a_3 + c_1)$.

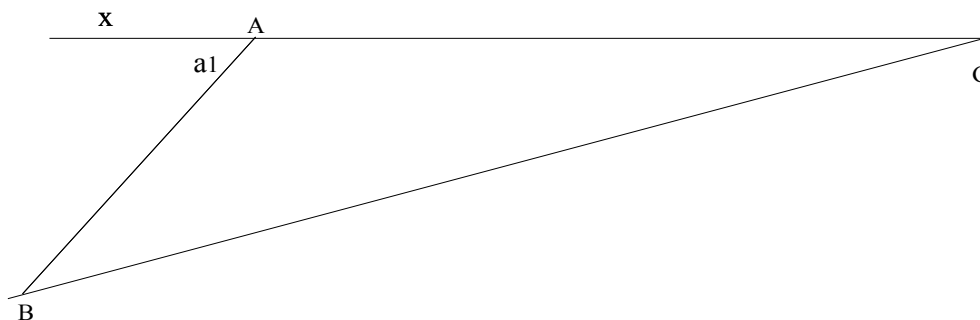
El ángulo $\widehat{CJA}$ mide $180 - (a_4 + c_2) = 180 - (a_3 + c_1)$, es decir lo mismo que el ángulo $\widehat{GIA}$.

El ángulo $\widehat{CJD}$ mide $180 - (180 - (a_3 + c_1)) = a_3 + c_1$.

En la cometa $JDKC$, el ángulo $\widehat{DKC}$ es igual al ángulo, $\widehat{CJD}$ es decir $a_3 + c_1$.

El ángulo $\widehat{GKD}$ mide: $180 - (a_3 + c_1)$, igual al ángulo $\widehat{GIA}$. Entonces los segmentos $[AI]$ y $[DK]$ son paralelos.

Ahora, proponemos a los alumnos anticipar, sobre una figura, **sin utilizar la banda física**, la posición de las rectas sucesivas conociendo la posición de la primera, utilizando el transportador y la escuadra.

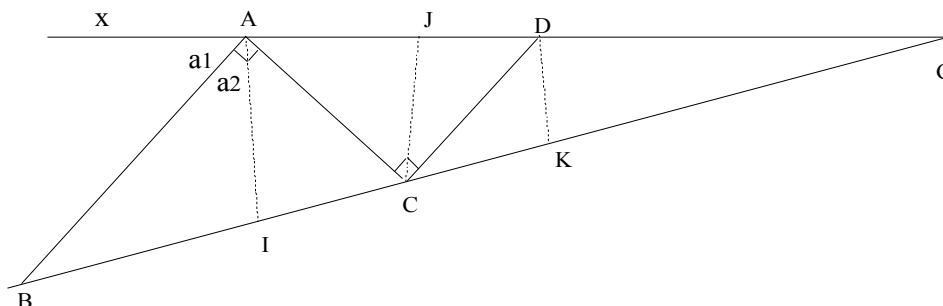


Les damos esta figura, con el primer pliegue [AB] dibujado y les dejamos pensar (este trabajo puede también darse para la casa). Hemos cambiado la medida del ángulo a_1 .

Después les solicitamos darnos un modo de empleo para construir las paralelas (AI) y (DK).

Aquí damos uno de los modos de empleo:

- 1) Trazamos la recta (AC) ortogonal a [AB] con la escuadra.
- 2) Reproducimos, con el transportador, el ángulo $\widehat{xAB}$ de medida a_1 del otro lado de (AB), obteniendo el punto I y el ángulo $\widehat{BAI}$ de medida $a_2 (= a_1)$.
- 3) Después trazamos, entre los puntos A y G, sobre la recta (AG), el segmento [AJ] de la misma longitud que [AI].
- 4) Trazamos la recta (CD) ortogonal a [AC].
- 5) Reproducimos entre B y G sobre la recta (BG) un segmento [CK] de longitud CJ. Ahora, el segmento [DK] es paralelo al segmento [AI].

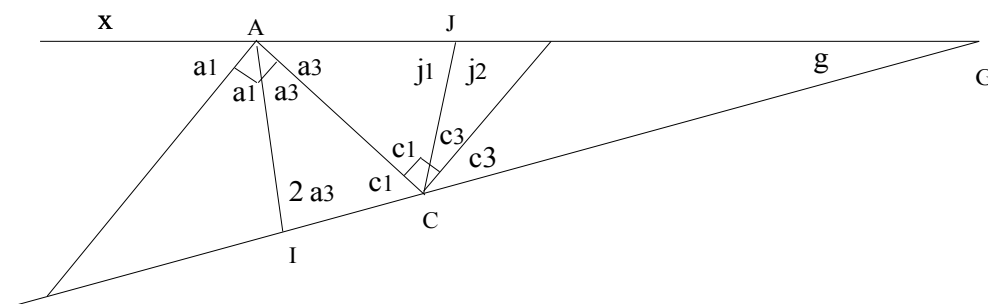


Por fin, preguntamos a los alumnos cuál debe ser la posición del primer pliegue [AB] para que los tres segmentos [AI], [JC] y [DK] sean paralelos.

Dejamos a los alumnos reflexionar y proponer soluciones:

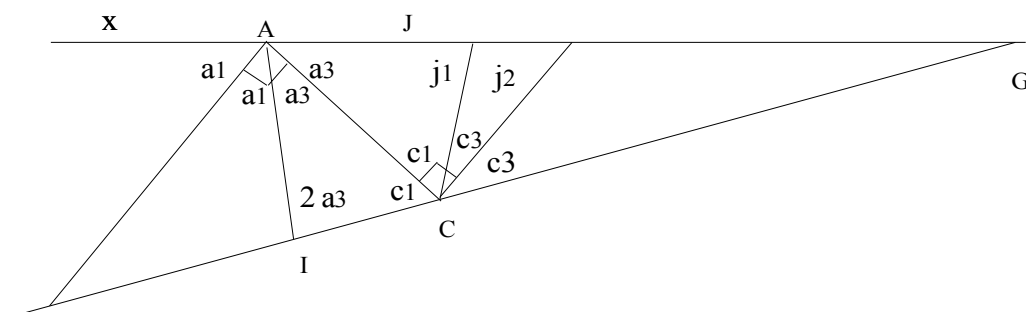
Observamos que [AI] y [DK] son todavía paralelos, entonces es suficiente que [AI] sea paralelo a [JC] por ejemplo. Para eso es suficiente que el ángulo $\widehat{AIC}$ sea igual al ángulo $\widehat{JCK}$

Observamos que, en la segunda figura [AI] y [JC] parecen “más paralelos” que en la primera (es decir que el ángulo formado por los dos segmentos es más agudo). Decimos que esto podría ser cuando el triángulo AGI es isósceles.



Damos a los alumnos la figura trazada con el ángulo $\widehat{xGI}$ y el segmento $[AI]$ tal que el triángulo AGI sea isósceles. Sabemos que la recta (AB) es la bisectriz del ángulo $\widehat{xAI}$. La trazamos y también la recta (AC) ortogonal a (AB) . Trazamos, con ayuda del transportador, el ángulo $\widehat{ACJ}$ igual al ángulo $\widehat{ICA}$. Debemos verificar que las rectas (AI) y (JC) sean paralelas.

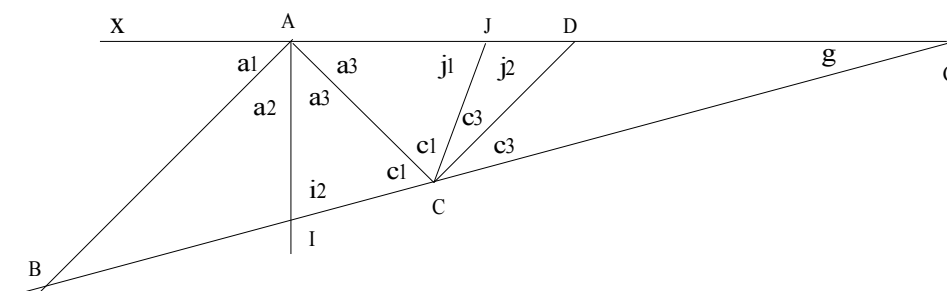
Les pedimos a los alumnos calcular las medidas de los ángulos de la figura, simplificando las notaciones para ver cuáles son los ángulos superponibles.



Calculamos la medida de c_1 en el triángulo AIC: $c_1 = 180 - 3a_3$. Entonces el ángulo $\widehat{ICJ}$ mide $2c_1$, es decir $360 - 6a_3$. En el triángulo AJC, la medida del ángulo j_1 es: $180 - a_3 - (180 - 3a_3) = 2a_3$. Esto es normal puesto que el cuadrilátero AICJ es una cometa.

¡Pero lo que deseamos, para que los dos segmentos $[AI]$ y $[JC]$ sean paralelos es: $j_2 = 2 a_3$! Nos parece que es necesario que $j_1 = j_2$, es decir que $[JC]$ sea ortogonal a (AG) .

Tratamos de trazar el segmento $[AI]$ ortogonal a la recta (AG) .



Trazamos sucesivamente los segmentos $[AC]$, $[CD]$ y $[CJ]$ y vemos que: $[CJ]$ no es paralelo a $[AI]$!

Para ayudarles solicitamos a los alumnos reflexionar sobre la cometa AICJ y el triángulo AGI.

En la cometa AICJ tenemos la igualdad: $j_1 = i_2$ y en el triángulo AGI, la igualdad (1): $2 a_3 + i_2 + g = 180$ grados.

Para que los segmentos $[AI]$ y $[JC]$ sean paralelos debemos tener la igualdad: $j_2 = 2 a_3$.

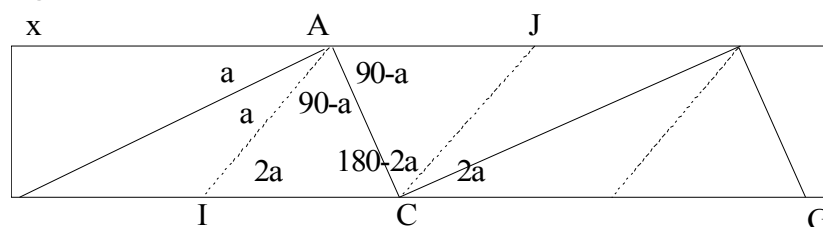
La igualdad (1) es: $2 a_3 + i_2 + g = 180$ grados, es decir

$j_2 + j_1 + g = 180$ grados. Ahora bien $j_2 + j_1 = 180$, de donde $g = 0$.

Concluimos que para que los segmentos $[AI]$ y $[JC]$ sean paralelos es necesario que las rectas (xG) y (BG) sean paralelas.

Hemos observado, en la actividad anterior, que, cuando las rectas son paralelas, los segmentos parecen paralelos.

Les pedimos a los alumnos mostrarlo, observando la figura y notando todas las igualdades de ángulos.



Siendo paralelos los bordes de la cinta, los ángulos $\widehat{xAI}$ y $\widehat{AIC}$ son ambos de medida $2a$. En el triángulo ACI, la medida del ángulo $\widehat{ACI}$ es:

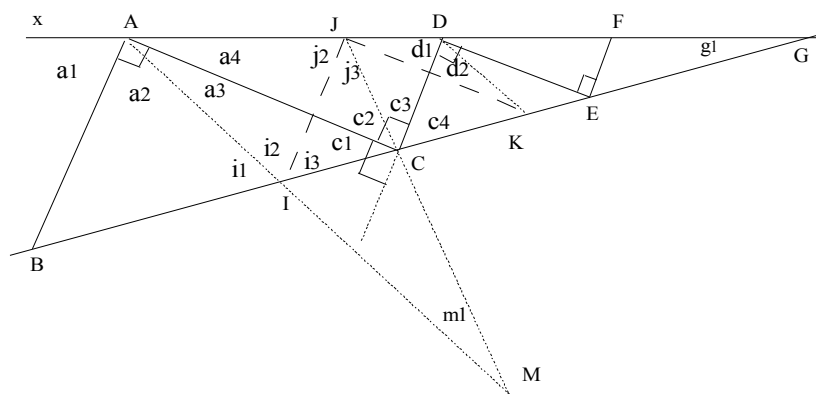
por R. Rodríguez Herrera y D. Salles-Legac

$180 - (2a + 90 - a) = 90 - a$. El triángulo ACI es isósceles en I. Hemos visto que el cuadrilátero AJCI es una cometa, entonces el ángulo $\widehat{ACJ}$ mide $(90 - a)$ y el ángulo $\widehat{JCG}$ mide $180 - (180 - 2a) = 2a$. Los segmentos [AI] y [JC] son paralelos y la cometa AJCI es un rombo.

Decimos ahora que la condición “**las rectas (xG) y (BG) son paralelas**” es una **condición necesaria y suficiente para que los segmentos [AI] y [JC] sean paralelos (1)**.

Comentario: Siendo bastante difícil el estudio de las condiciones necesarias y suficientes, tenemos aquí la posibilidad de ponerlas en evidencia con un estudio tanto físico como modelizado geoméricamente.

Ahora, observamos que la condición necesaria y suficiente (1) nos hace pensar que es posible que los ángulos formados por las rectas (AG), (BG) y (AI), (JC) sean de igual medida. Les pedimos a los alumnos calcular la medida de los ángulos g_1 y m_1 sobre la siguiente figura:



Hacemos reflexionar a los alumnos y proponer diferentes resultados.

El siguiente nos interesa:

En el triángulo AGI tenemos la igualdad: $g_1 = 180 - (2a_3 + i_2 + i_3)$ y en el triángulo JMA tenemos: $m_1 = 180 - (2a_3 + j_2 + j_3)$.

Pero siendo el cuadrilátero AJCI una cometa, tenemos $j_2 + j_3 = i_2 + i_3$.

Finalmente: $m_1 = g_1$.

Y, aquí, obtenemos una segunda demostración de la condición (1).

Preguntamos a los alumnos:

¿Cómo son los triángulos AGI y JMA?

Responden: Son semejantes porque sus ángulos son superponibles.

¿No son superponibles?

No, ¡se ve bien que no son superponibles!

Pero ¿cómo son los segmentos $[AI]$ y $[AJ]$?

Son de la misma longitud, entonces los triángulos AGI Y JMA son superponibles también.

¡Pero, en la figura, son diferentes!

Si y ¿qué debemos creer?

Debemos verificar nuestra demostración antes de concluir; si nuestra demostración es buena, la creeremos.

Observamos, sobre la figura, que pequeños errores de dibujo pueden introducir errores sobre las propiedades de la figura, y que **son estas propiedades las que permiten verificar si el dibujo las respeta.**

Comentario: estas actividades, que permiten al alumno poner en duda un resultado observado sobre una figura, son muy importantes para el aprendizaje, porque **son los errores los que hacen avanzar el conocimiento.**

Hay que haber **un trabajo de ir y venir** entre:

- la observación de la figura
- el raciocino matemático
- si es necesario el mejoramiento de la precisión de la figura
- la demostración de la propiedad ayudándose de la figura.

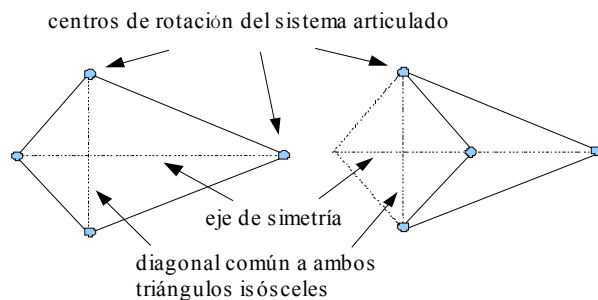
Este ir y venir es fundamental en el raciocino matemático.

Finalmente invitamos a los alumnos a observar el cuadrilátero $AGCM$ que es semejante a otros objetos que llamamos también “cometas” al lado de la playa.

En matemática, no se llaman cometas sino **deltoides** (porque son semejantes a las alas de algunos aviones).

Invitamos a los alumnos dibujar una cometa y un deltoide. Despues, observarlos, escribir sus propiedades y encontrar **lo que diferencia las cometas de los deltoides.**

Es muy interesante también realizar un sistema articulado con bandas de cartulina y roblones porque el deltoide es la forma cóncava de la cometa que es convexa. Es la ocasión de introducir o recordar las nociones de cuadrilatero cóncavo o convexo.



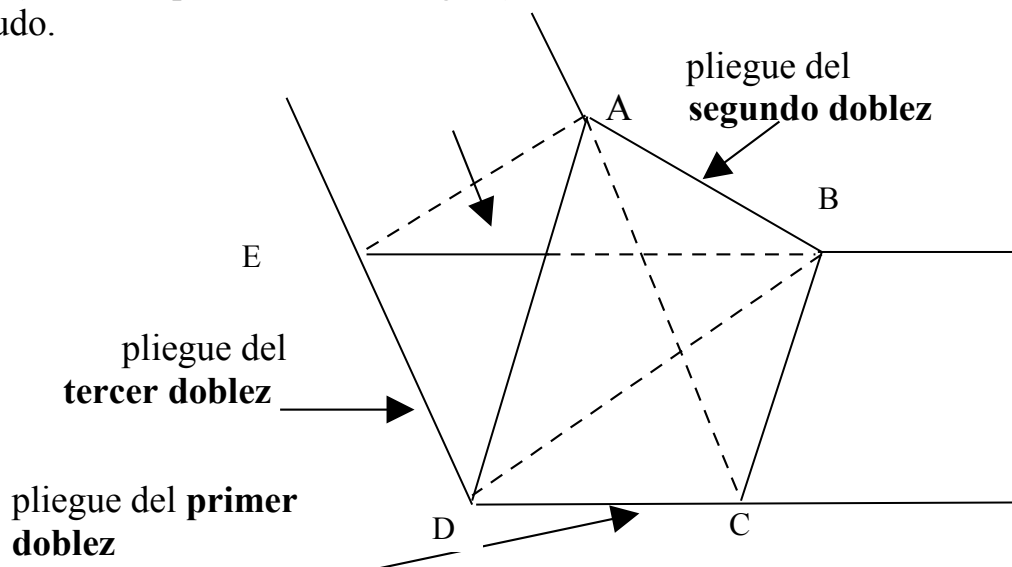
Cometa (convexa)

Deltoide (cóncavo)

Cometas	Deltoides
-Una diagonal mediatriz de la otra	-Una diagonal mediatriz de la otra
-Un eje de simetría ortogonal (la diagonal mediatriz)	-Un eje de simetría ortogonal (la diagonal mediatriz)
-Dos triángulos isósceles recostados sobre la otra diagonal	-Dos triángulos isósceles recostados sobre la otra diagonal
Preguntamos ¿Ahora qué hace la diferencia?	Preguntamos ¿Ahora qué hace la diferencia?
-Dos triángulos isósceles recostados de una y otra parte de la segunda diagonal	-Dos triángulos isósceles recostados del mismo lado de la segunda diagonal

Cuarta actividad (para todos los alumnos)

Esta vez les solicitamos tomar otra cinta de la misma forma que la de la segunda actividad y hacer con esta un nudo bien apretado, como se ve en la figura que se muestra abajo. Luego les ordenamos trazar las líneas de los bordes de la cinta que no se ven (las rectas punteadas en la figura). Las flechas indican la manera como se hace el nudo.



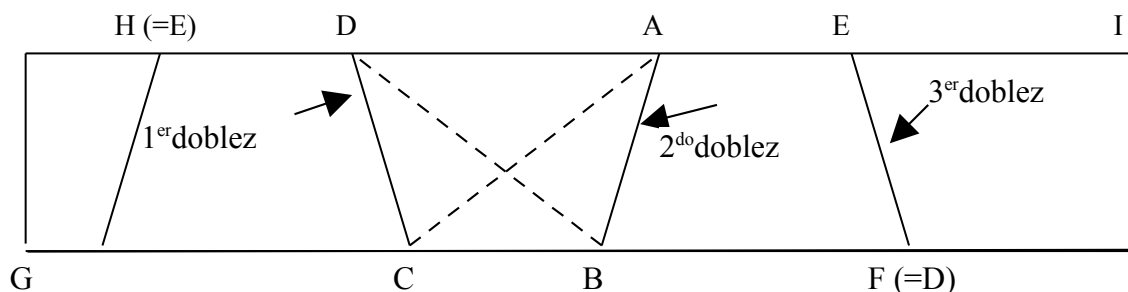
Ahora les preguntamos qué figura es ABCDE. Responden que es un pentágono y, además, que es regular.

Esta etapa puede ser la que termine las actividades con los mas jóvenes (alumnos de 8 a 10 años); no obstante se puede realizar una cuarta y última actividad con el grupo de 11 a 13 años.

Quinta actividad (para los alumnos de 11 a 13 años)

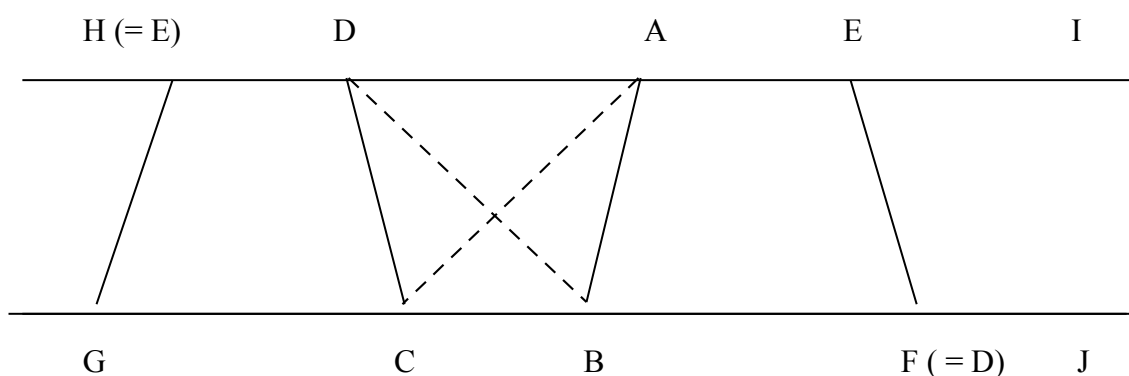
Continuando la anterior actividad con estos alumnos:

Ahora les proponemos abrir el nudo y buscar **todos los ángulos de la figura que sean superponibles**.



Observan que los bordes de la cinta son paralelos y que, por eso los ángulos: $\widehat{GCD}$ y $\widehat{CDA}$, $\widehat{CBA}$ y $\widehat{BAE}$, $\widehat{BFE}$ y $\widehat{FEI}$, $\widehat{BDA}$ y $\widehat{CBD}$, $\widehat{DAB}$ y $\widehat{ABF}$ son respectivamente superponibles.

Además a causa de los dobleces, los ángulos: $\widehat{DBA}$ y $\widehat{ABF}$, $\widehat{ACD}$ y $\widehat{DCG}$ son superponibles.



Los triángulos CAD y ABD son isósceles y, en consecuencia $DA = AC$ y $DB = DA$. Continúan los estudiantes: las diagonales [DB] y [AC] del trapecio ABCD son de igual longitud y en consecuencia el cuadrilátero es un trapecio isósceles; sus lados [DC] y [BA] son de igual longitud. Por las mismas razones: $AB = EF$. Además, los triángulos ABC y ABE son isósceles y en consecuencia: $AB = BC$ y $AB = AE$.

Los lados del pentágono AB, BC, CD, AE, DE son de la misma longitud. Además, los ángulos:

$\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{EAB}$, $\widehat{AED}$ ($D = F$), $\widehat{CDE}$ son superponibles.

Por lo tanto, el **pentágono ABCDE es regular**.

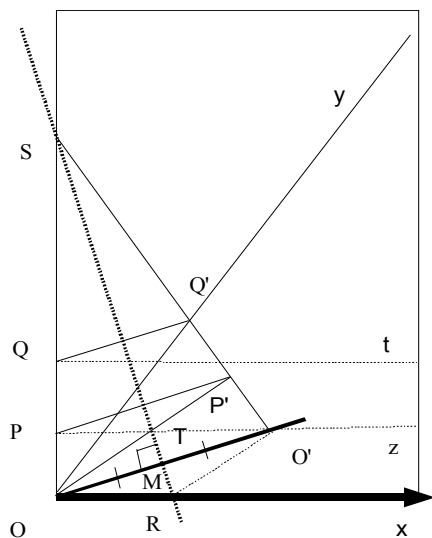
Sexta actividad: la trisección de un ángulo

Conociendo un ángulo trazado sobre en una hoja de papel, dividirlo en tres partes iguales (decimos: realizar su “trisección”).

Primero proponemos una actividad preliminar para el profesor y los alumnos de edad entre 14 y 16 años

Debemos justificar la propiedad que vamos a utilizar: es posible dividir un ángulo agudo en tres partes iguales con un doblez.

Tomamos una hoja, llamamos su borde inferior $[Ox)$



Conociendo un ángulo $\widehat{xOO'}$ definido por dos semirectas $[Ox)$ y $[OO')$, trazamos la mediatriz $[MS]$ de $[OO']$ que encuentra al borde más largo de la hoja en el punto S. Después, trazamos el segmento $[O'P]$ paralelo al borde más corto de la hoja. Llamamos P' el punto simétrico de P con respecto al eje (MS). Llamamos Q un punto del borde más largo de la hoja tal que P sea el punto medio de $[OQ]$. Trazamos la semirecta $[Qt)$ paralela a $[PO')$.

Llamamos Q' al punto simétrico de Q con respecto al eje (MS).

Hay que notar que el trapecio $PP'O'O$ es isósceles a causa de la simetría con respecto al eje (MS) y que el punto T, centro del trapecio, se encuentra sobre el eje de simetría.

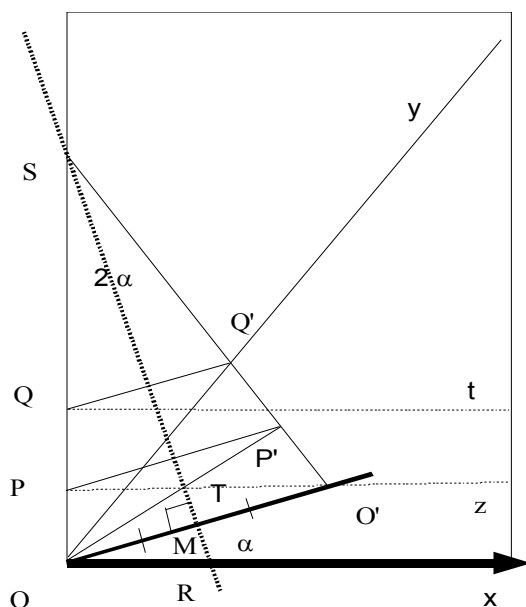
Los ángulos $\widehat{xOO'}$ y $\widehat{OO'P}$ son superponibles a causa del paralelismo de $[Ox)$ y $[PO')$. Como las diagonales del paralelogramo $ORO'T$ son perpendiculares, entonces es un rombo, **los ángulos $\widehat{xOO'}$ y $\widehat{O'OP'}$ son superponibles.** (1)

Los triángulos OPO' y $O'PO$ son superponibles porque son imágenes uno del otro a través la simetría de eje (MS). Sus ángulos $\widehat{OPO'}$ y $\widehat{O'PO}$ son superponibles y son rectos. Por simetría P' es el punto medio del segmento $[O'Q']$, de donde la recta $(P'O)$ es la mediatriz del segmento $[O'Q']$ y la bisectriz del ángulo $\widehat{O'OQ'}$. Los ángulos $\widehat{O'OP'}$ y $\widehat{P'OQ'}$ son superponibles. (2)

A causa de (1) y (2) podemos decir que:

$\widehat{xOO'} = \widehat{O'OP'} = \widehat{P'OQ'}$. La medida de $\widehat{xOQ'}$ es tres veces la de $\widehat{xOO'}$.

Ejercicio: Denotamos por α la medida del ángulo $\widehat{xOO'}$. ¿Cuál es la medida del ángulo $\widehat{OSO'}$? Hay que dejar reflexionar a los alumnos, para lo que les proponemos escribir en la figura las medidas de todos los ángulos que puedan calcular.



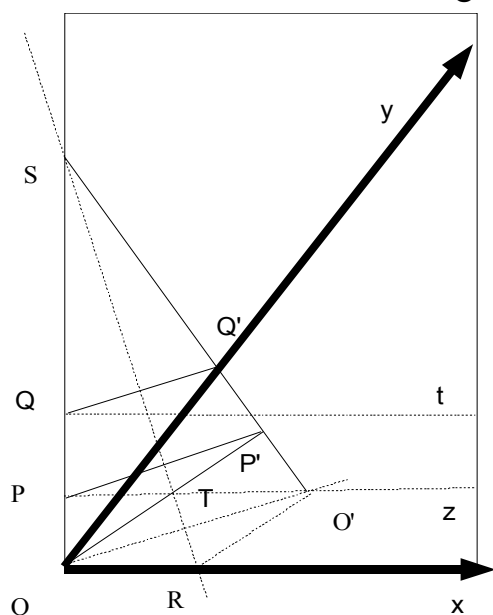
Una respuesta:

Observamos que el triángulo SOM es rectángulo en M, entonces la medida del ángulo $\widehat{MOS}$ es $(90 - \alpha)$ grados y la medida del ángulo $\widehat{OSM}$ es:

$$180 - 90 - (90 - \alpha) = \alpha.$$

El triángulo OSO' es isósceles, la mediatriz $[MS]$ de $[OO']$ es también la bisectriz del ángulo $\widehat{OSO'}$; la medida del ángulo $\widehat{OSO'}$ es 2α .

Ya que hacer una simetría con un doblez es fácil, vamos a utilizar esta propiedad para hacer la trisección de un ángulo con un doblez.



Construcción: el ángulo $\widehat{xOy}$ que debemos dividir en tres partes iguales está dibujado en la parte baja de la hoja: $[Ox)$ está en el borde inferior de la hoja. Trazamos dos líneas rectas $[Pz)$ y $[Qt)$ paralelas al borde $[Ox)$ y tales que $OP = PQ$.

Hacemos un doblez en la hoja tal que el punto Q sea llevado a $[Oy)$ (en Q') y el punto O a $[Pz)$ (en O').

Ahora abrimos el doblez; la línea recta (SR) es el pliegue.

El ángulo $\widehat{O'Ox}$ es la tercera parte del ángulo $\widehat{xOy}$.

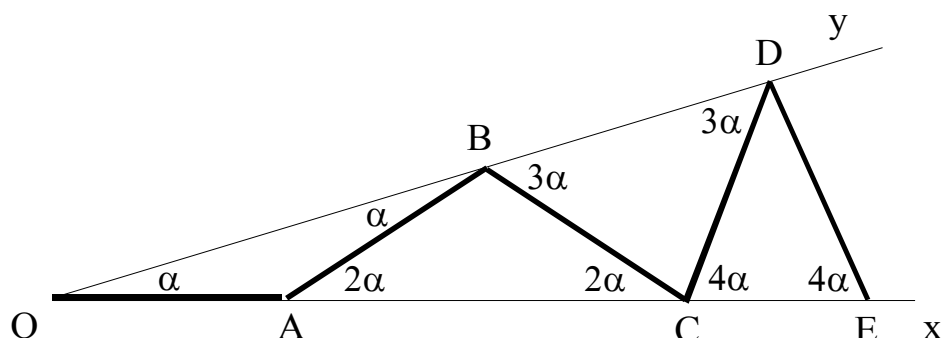
¿Porqué? A causa del dobléz, hay una simetría de eje [SR) tal que [SR) es la mediatriz de [QQ'], [PP'] y [OO']. Los segmentos [QQ'], [PP'] y [OO'] son paralelos y $Q'P' = P'O'$.

Los triángulos SQQ', SPP', SOO' son isósceles. El cuadrilátero OPP'O' es un trapecio isósceles, sus diagonales se encuentran en T que está situado en el eje de simetría (el pliegue). El cuadrilátero ORO'T es un rombo y [OO') es la bisectriz del ángulo $\widehat{ROT}$.

El segmento [OP'] es perpendicular al segmento [P'O'], P' es el punto medio de [O'Q']. El triángulo OO'Q' es isósceles y [OP') es la bisectriz del ángulo $\widehat{O'OQ'}$. Los ángulos $\widehat{xOO'}$, $\widehat{O'OP'}$ y $\widehat{P'OQ'}$ son superponibles, los segmentos [OO'] y [OP'] hacen la trisección del ángulo $\widehat{xOy}$.

§ 10.1 Hacer una trisección con un sistema articulado (nivel: 12 a 15 años)

Primera actividad de observación



Observamos un ángulo $\widehat{xOy}$ de medida α (en grados). Trazamos en la semirecta [Ox) un segmento [OA] de medida a. Con el compás, trazamos un segmento [AB], con el punto B en [Oy), de medida a ($=AB$) y, después, un segmento [BC], con C en [Ox) de medida a. Deseamos calcular las medidas de los diferentes ángulos de la figura. Observamos que el triángulo OAB es isósceles y que la medida del ángulo $\widehat{xAB}$ es (en grados): $180 - (180 - 2\alpha) = 2\alpha$.

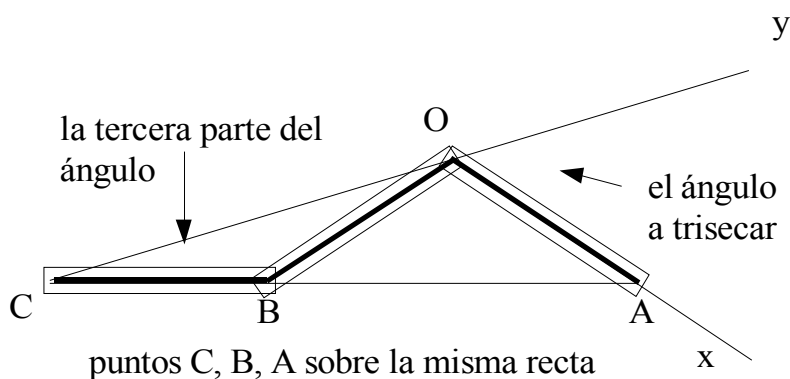
Trazamos otro segmento [CD] con el punto D en [Oy) de medida a.

El triángulo ABC es isósceles, la medida del ángulo $\widehat{ABC}$ es $180 - 4\alpha$. La medida del ángulo $\widehat{CBx}$ es $180 - (\alpha + 180 - 4\alpha) = 3\alpha$. El triángulo BCD es isósceles, la medida del ángulo $\widehat{BCD}$ es $180 - 6\alpha$, la medida del ángulo $\widehat{xCD}$ es: $180 - (180 - 6\alpha) - 2\alpha = 4\alpha$. Vemos que de esta manera, **es posible trazar sucesivamente los ángulos de medidas 2α , 3α , 4α , etc.**

Segunda actividad de construcción

Si tenemos un sistema articulado cuyos puntos puedan adaptarse en los lados de un ángulo, será posible obtener una trisección de este ángulo.

Si tenemos un metro articulado de carpintero podemos utilizarlo para hacer una trisección:

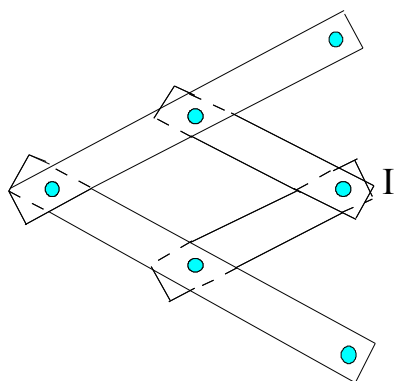


Abrimos el metro de tal manera que la primera pierna [OA] del metro esté en el borde inferior [Ox] del ángulo $\widehat{xOy}$ (de medida β) a trisecar y el primer ángulo del metro (el eje O de la primera pierna [OA] con la segunda [OB]) esté en el borde superior [Oy] del ángulo. Si además llamamos [CB] la tercera pierna del metro, los puntos C, B, A deben estar en la misma recta que A.

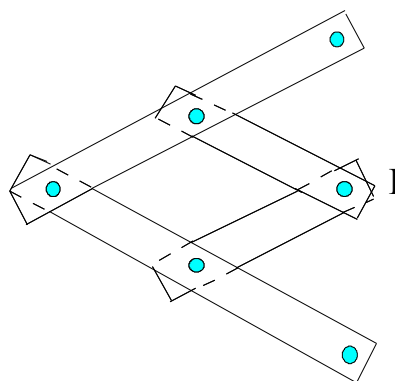
El ángulo $\widehat{BCO}$ es la tercera parte α del ángulo $\widehat{xOy}$ de medida β .

§ 10.2 Hacer un trisección con dos bisectores (nivel: 12 a 14 años de edad)

Preguntamos a los alumnos: ¿Es posible trisecar un ángulo con dos bisectores? Les damos dos bisectores para que reflexionen.



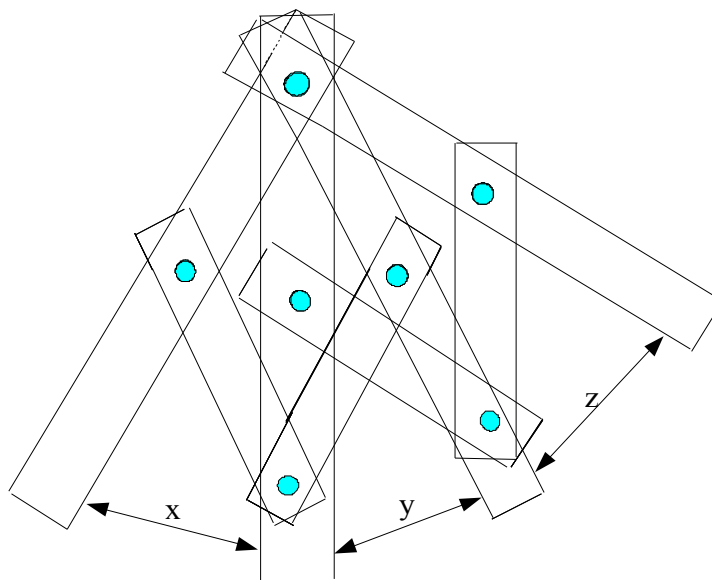
Primer bisector



Segundo bisector

Proponemos a los alumnos colocar el centro de rotación del primer bisector sobre el centro de rotación del segundo.

Vemos que, si ponemos la rama inferior del segundo bisector en el punto I del primero y la rama superior de éste en el punto I del segundo, haciendo sucesivamente dos bisecciones, los tres ángulos de medida x , y , z son superponibles.



Una pregunta para los mayores: ¿Si cambiamos la longitud de las pequeñas ramas del primer bisector podemos aún hacer un trisector?

Solicitamos a los alumnos intentarlo y demostrar que es posible.

§ 11 Clasificar los cuadriláteros con ayuda de un sistema articulado: “la casa de los cuadriláteros” (nivel: 11 a 13 años de edad)

Es muy importante para los alumnos conocer bien las diferentes clasificaciones de los cuadriláteros. El uso de sistemas articulados es de gran ayuda para hacerlo.

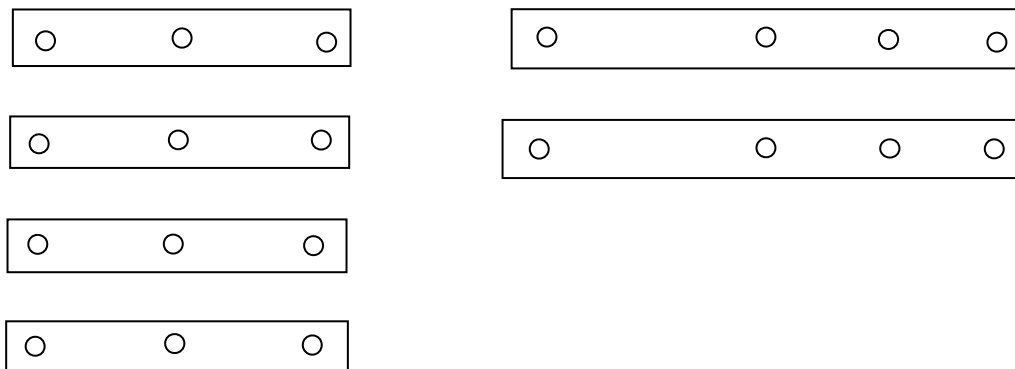
Preguntamos a los alumnos citar cuáles son las propiedades que permiten clasificar los cuadriláteros, a lo que nos responden que ello depende de:

- Las medidas respectivas de los lados adyacentes o opuestos;
- El paralelismo de los lados opuestos;
- Las medidas respectivas de los ángulos adyacentes u opuestos;
- Las posiciones relativas de las diagonales, sus medidas y ángulos.

Les decimos que se pueden representar los diferentes casos con un sistema articulado.

Proponemos a los alumnos utilizar bandas de cartulina o de cartón que podemos construir siguiendo el siguiente modelo:

Cortamos cuatro pequeñas bandas de igual y dos más grandes también de igual longitud entre ellas, con agujeros en sus extremidades, en sus puntos medios y en la cuarta parte de las grandes.



PRIMER PASO Clasificando los cuadriláteros según las propiedades de sus lados

En primer lugar les proponemos construir cuadriláteros con cuatros lados de igual longitud y les preguntamos ¿Cuáles son los cuadriláteros que podemos encontrar?

Respuesta: un cuadrado si sus ángulos son rectos y un rombo si no.

Observamos que podemos aplastar estos cuadriláteros.

En segundo lugar construimos un cuadrilátero con dos pequeñas bandas de la misma longitud y dos otras grandes también de igual longitud.

Observamos que hay dos maneras construir el cuadrilátero: las dos pequeñas bandas son adyacentes u opuestas.

- Si las dos pequeñas bandas (y también las dos grandes) son adyacentes, obtenemos una cometa isósceles (si el cuadrilátero es convexo) o un deltoides (si el cuadrilátero es cóncavo).

- Si las pequeñas bandas son opuestas, obtenemos un rectángulo si los ángulos son rectos y un paralelogramo si no.

Todos estos cuadriláteros se pueden aplastar.

En tercer lugar construimos un cuadrilátero con tres pequeñas bandas y una grande.

Obtenemos un trapecio isósceles si dos ángulos adyacentes son superponibles o si dos lados opuestos son paralelos. Podemos aplastarlo solo si la medida de la banda grande es tres veces la de la pequeña.

SEGUNDO PASO clasificando los cuadriláteros según las propiedades de sus diagonales

Proponemos a los alumnos representar con las bandas las diagonales de los cuadriláteros.

Primero: cuando las dos bandas son de misma longitud, se encuentran en sus puntos medios. Si las diagonales son ortogonales tenemos un cuadrado, si no un rectángulo.

Segundo: diagonales de misma longitud, ortogonales que se encuentran en el medio de una diagonal, entonces tenemos una cometa isósceles.

Tercero: diagonales de longitudes diferentes, ortogonales que se encuentran en el medio de una diagonal, ahora tenemos nuevamente una cometa isósceles.

Cuarto: diagonales distintas, no ortogonales que se encuentran en el medio de una de ellas, entonces tenemos una cometa no isósceles.

Quinto: diagonales distintas que se encuentran en sus puntos medios, entonces tenemos un paralelogramo.

Sexto: diagonales de longitudes diferentes ortogonales que se encuentran en sus medios, entonces tenemos un rombo.

TERCER PASO clasificación de los cuadriláteros según las medidas de sus ángulos

Proponemos a los alumnos observar la medida de los ángulos formados por los lados del cuadrángulo.

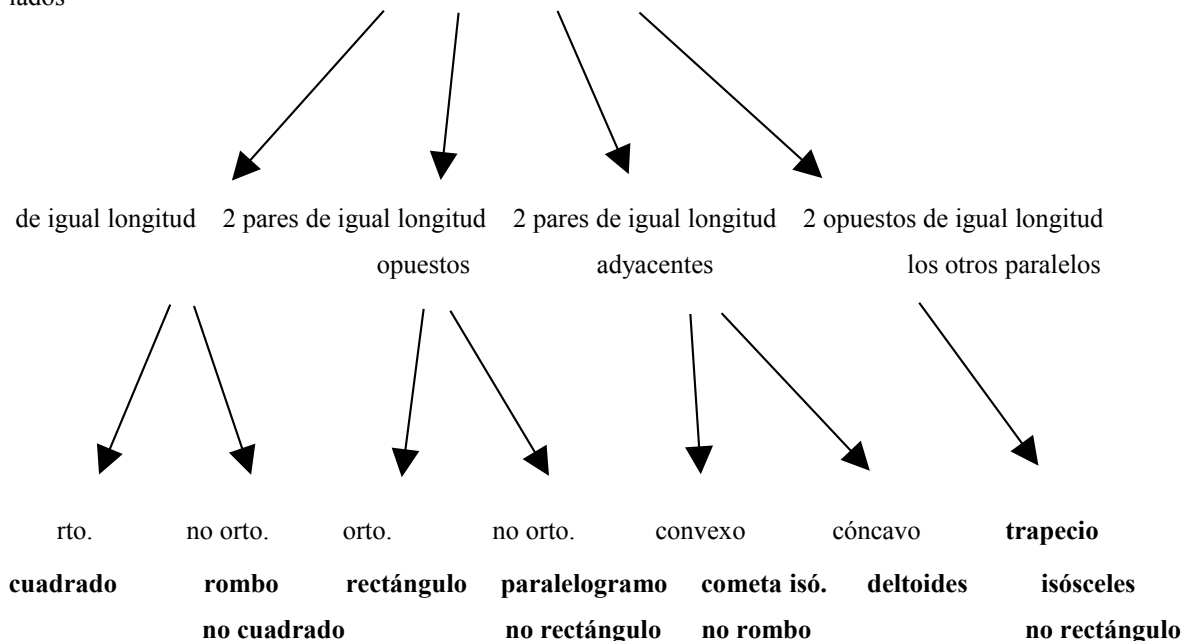
Cuatro ángulos superponibles: tenemos un cuadrado si los lados son de igual longitud y un rectángulo si no.

Ángulos opuestos superponibles dos a dos: un rombo si los lados son de misma longitud y un paralelogramo si no.

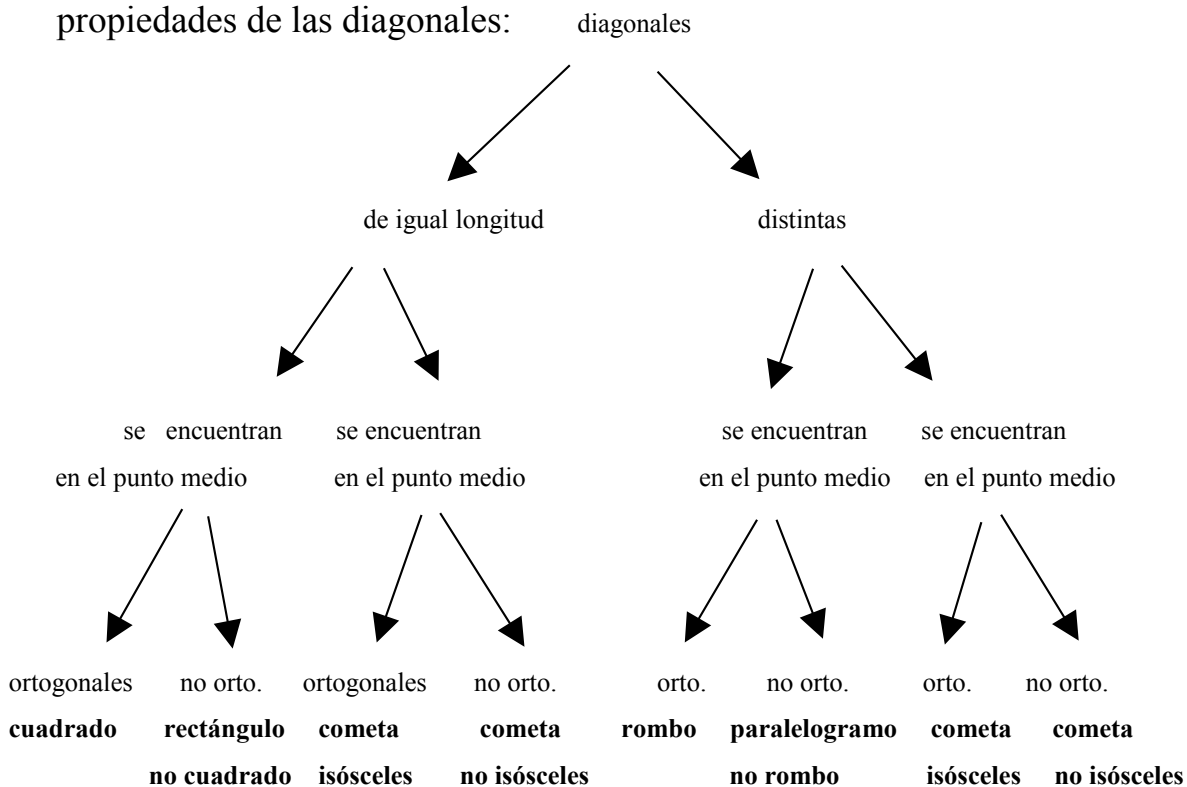
Ángulos adyacentes superponibles dos a dos: un trapecio isósceles.

CUARTO PASO Representación de la clasificación con ayuda de un árbol (nivel: 13 a 15 años)

Proponemos a los alumnos dibujar un árbol según el siguiente ejemplo, hecho con ayuda del docente (clasificación según las propiedades de los lados):



Después, los alumnos **continúan sin la ayuda del docente** según las propiedades de las diagonales:



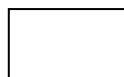
Con los mayores es interesante continuar la clasificación según el número de ejes de simetría o ejes de rotación, si es posible, sin ayudarse de las bandas para invitar al alumno a construir una imagen mental del cuadrilátero.

Nos parece que es más fácil comenzar por el número más grande de ejes.

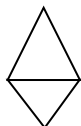
Cuatro ejes de simetría: el cuadrado



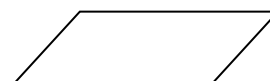
Dos ejes de simetría: el rectángulo, el rombo



Un (sólo) eje de simetría: la cometa isósceles, el deltoides, el trapecio isósceles



Un (solo) centro de simetría: el paralelogramo



QUINTO PASO Recapitulación

Al final de la actividad, podemos mostrarles a los alumnos las figuras más abajo y las de la página siguiente y preguntarles, por ejemplo, cuáles son los cuadriláteros que:

- Son paralelogramos (respuestas: Fig. 1; 2; 5; 6; 8; 9; 10; 11);
- Son rectángulos (respuestas: Fig. 2; 6; 8; 9).

Esto con el fin de evitar un error frecuente de los alumnos relativo a la inclusión de los conjuntos de figuras geométricas: los alumnos dicen, por ejemplo, que un cuadrado no es un rombo o que un rombo no es un paralelogramo.

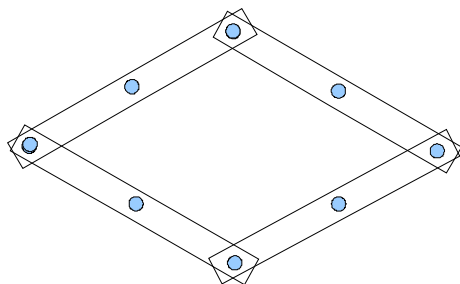


Fig.1

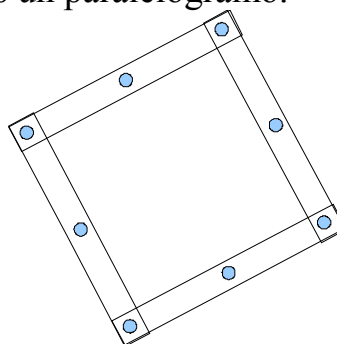


Fig.2

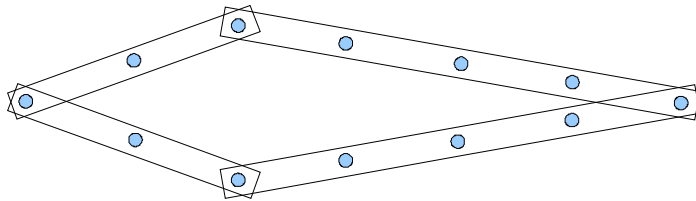


Fig.3

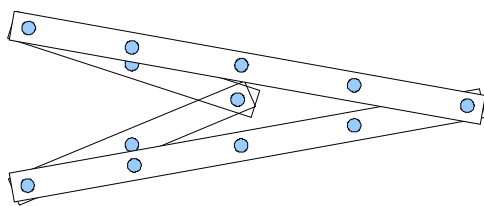


Fig.4

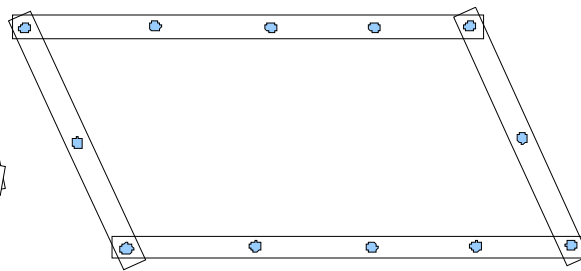


Fig.5

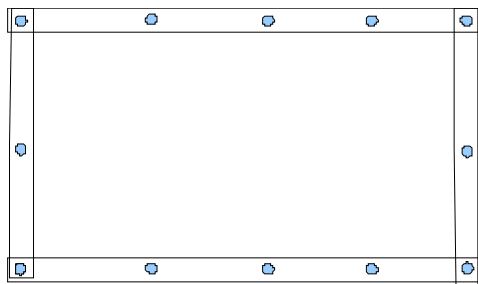


Fig.6

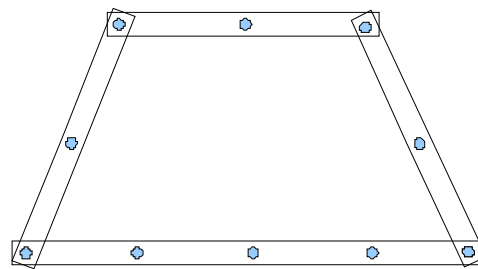


Fig.7

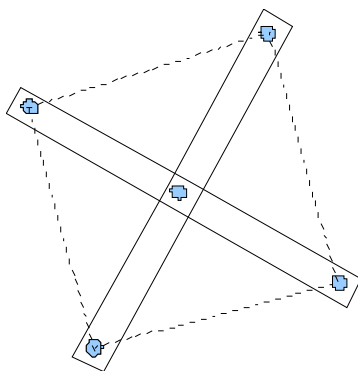


Fig.8

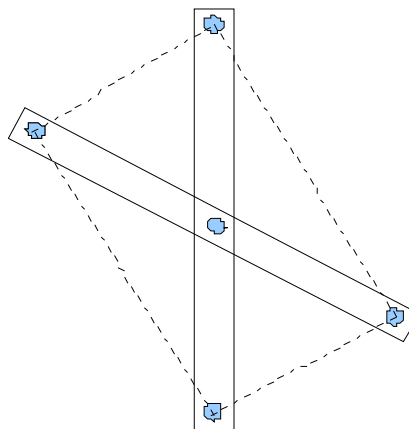


Fig.9

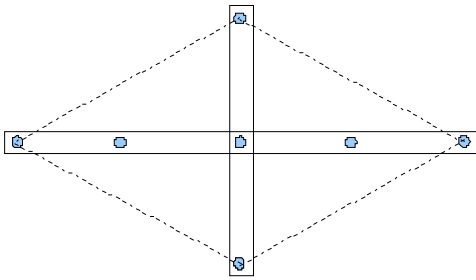


Fig.10

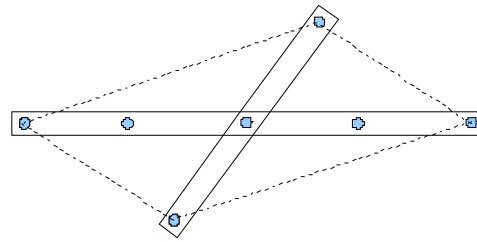


Fig.11

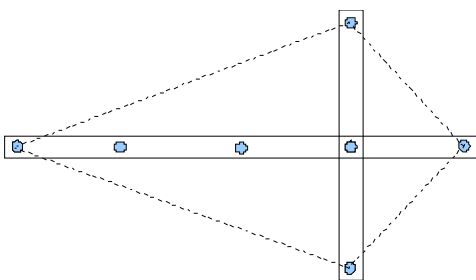


Fig.12

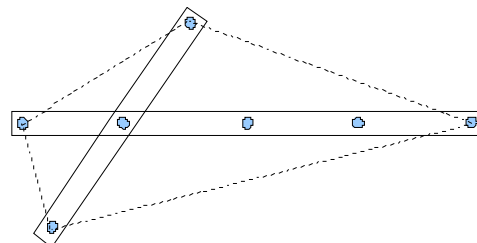
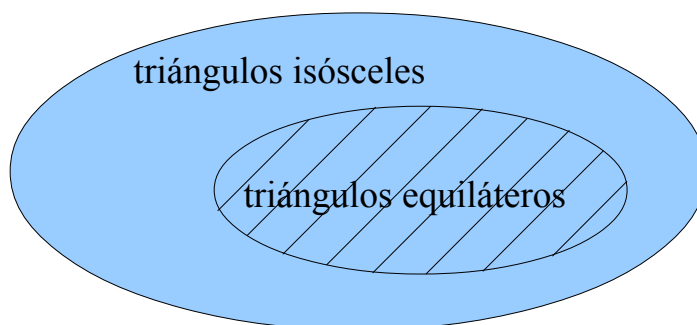


Fig.13

SEXTO PASO Clasificación con los diagramas de VENN (nivel: 12 a 14 años de edad)

Es interesante proseguir, con el fin de devolverles la memoria a los alumnos, la representación de los conjuntos por diagramas de Venn. Presentamos, en el capítulo 15 de nuestro libro "Del dibujo percibido a la figura construida" (en francés : "Du dessin perçu à la figure construite", ver la bibliografía) ejemplos de esta técnica muy demostrativa para razonar sobre las figuras geométricas.

Recordemos que podemos presentar los conjuntos de objetos matemáticos por una línea curva cerrada (por ejemplo el conjunto de los triángulos isósceles) y la inclusión de un conjunto en otro (por ejemplo la inclusión del conjunto de los triángulos equiláteros en el de los triángulos isósceles) por una segunda línea curva cerrada dentro de la primera.



Esta representación por **diagramas de VENN** es un ejercicio muy bueno para recordar las propiedades respectivas de los cuadriláteros. Podrá, por ejemplo, ser objeto de un trabajo de reflexión en casa para incitar a los alumnos a que se esfuercen en sus representaciones y así hacerlo inteligible para otros alumnos.

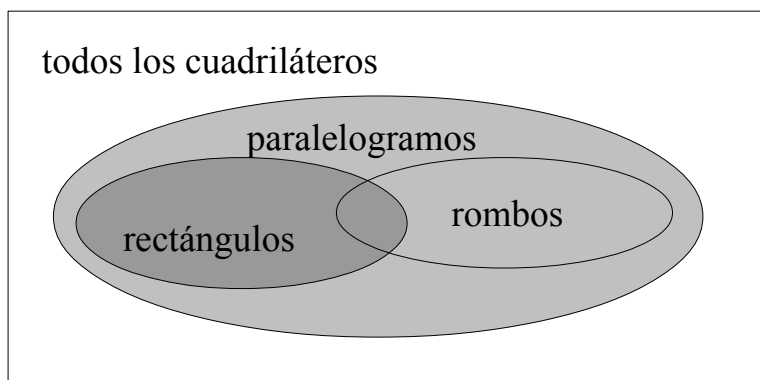
Primero proponemos estudiar los siguientes conjuntos:

Paralelogramos, rectángulos, rombos y cuadrados.

Estos conjuntos de cuadriláteros particulares están incluidos en el universo general de los cuadriláteros, por lo que dibujamos un gran rectángulo que represente este universo.

Observamos juntos, en primer lugar, que los rectángulos y los rombos son paralelogramos particulares pero que existen rombos que no son rectángulos, dibujamos pues dos líneas cerradas que encierran superficies que representen ambos conjuntos pero sin que ninguna de ellas contenga a la otra.

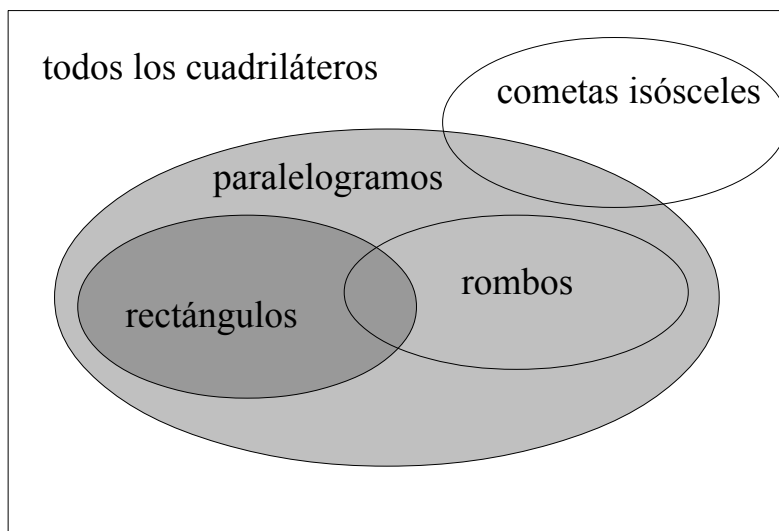
Preguntamos los alumnos: ¿si el conjunto de los rectángulos tiene una intersección no vacía con el conjunto de los rombos, cuál conjunto de cuadriláteros representa esta intersección?



Dicen los alumnos que los rombos tienen cuatro lados de misma longitud y los rectángulos tienen cuatro ángulos superponibles, entonces los cuadriláteros que tienen ambas propiedades son los cuadrados.

Continuamos pidiéndoles colocar el conjunto de las cometas isósceles.

Observan que una cometa no necesariamente tiene sus lados opuestos paralelos pues este conjunto puede, posiblemente, encontrar al de los paralelogramos pero no está incluido en el. Proponen el siguiente dibujo: **¿es exacto?**



Les pedimos, como anteriormente, caracterizar la intersección del conjunto de los paralelogramos con el conjunto de las cometas isósceles.

Preguntamos cuáles son las propiedades de los paralelogramos:

- Los lados opuestos son de igual longitud dos a dos

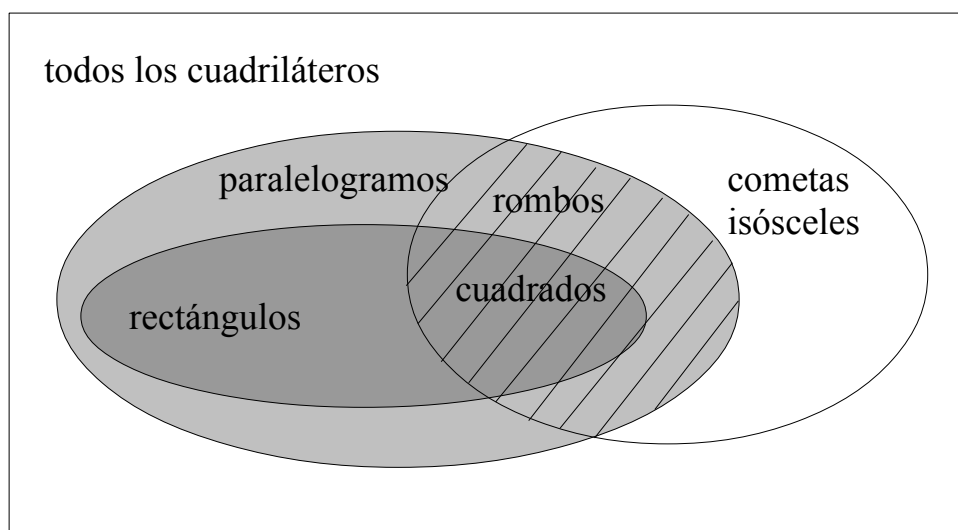
Y de las cometas isósceles:

- Los lados adyacentes son de igual longitud dos a dos.

—

Los cuadriláteros que pertenecen a la intersección de ambos conjuntos (paralelogramos y cometas) deben pues tener sus cuatro lados de igual longitud; son pues rombos.

Sobre nuestra figura comprobamos que el conjunto de los rombos no está incluido en esta intersección, les pedimos entonces a los alumnos transformar la figura con el fin de que tome en consideración este resultado.



Observando la figura les pedimos a los alumnos escribir las propiedades de las intersecciones de los conjuntos, siguiendo el modelo:

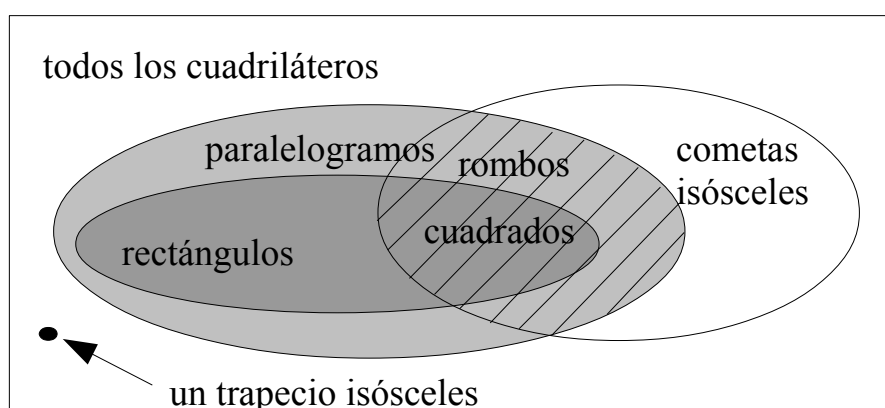
$$\{\text{paralelogramos}\} \cap \{\text{cometas isósceles}\} = \{\text{rombos}\}.$$

Ahora nos proponen:

$$\{\text{rectángulos}\} \cap \{\text{cometas isósceles}\} = \{\text{cuadrados}\}$$

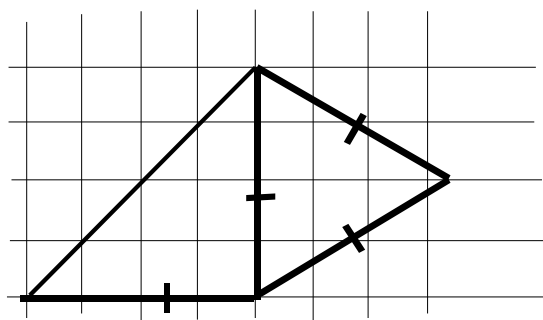
Les pedimos entonces: ¿conocen ustedes un cuadrilátero interesante que no aparezca en ninguno de estos conjuntos?

Observamos juntos los árboles construidos anteriormente (cuarto paso) y observamos que el trapecio isósceles no aparece en ninguno de los conjuntos de nuestra figura; aumentamos pues un elemento (un punto) en el universo de los cuadriláteros que representa un trapecio isósceles que no es un paralelogramo, ni una cometa isósceles.



§ 12.1 Construir hexágonos con trozos de rompecabezas (nivel: 12 a 14 años de edad)

Mostramos a los alumnos el siguiente dibujo, al que llamamos una figura “ideal” para precisar que es una figura que representa **un objeto matemático con propiedades indicadas por un código, y que podemos utilizar estas propiedades para reflexionar**. La figura está dibujada en un papel con trama cuadriculada (puede ser la hoja de su cuaderno de matemática).



Hacemos reflexionar a los alumnos sobre las propiedades de la figura:

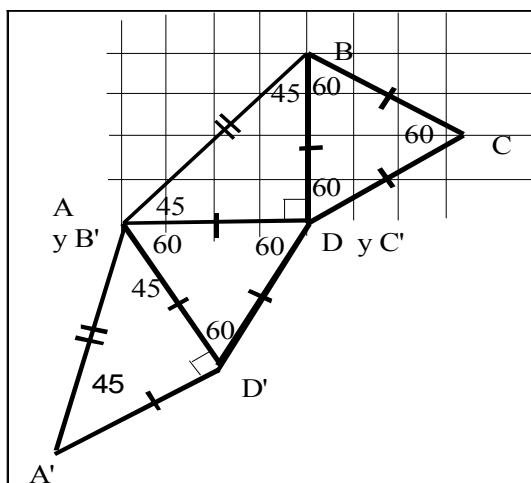
Constatamos que hay, en la figura, un triángulo rectángulo isósceles y un triángulo equilátero.

Ahora les pedimos dibujar, sobre una hoja de cartulina, dos de estos elementos y cortarlos para hacer un rompecabezas.

Después, les solicitamos poner las dos piezas una al lado de la otra (yuxtapuestas), para construir hexágonos diferentes, **sin dar vuelta a las piezas**.

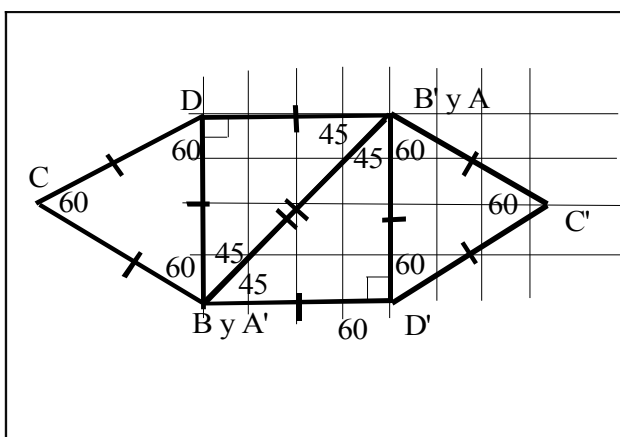
Por cada ejemplo de hexágono que es encontrado por un alumno, le pedimos estudiarlo y enunciar sus propiedades con la colaboración de sus compañeros.

	Primer hexágono Primero escribimos, con la clase, las medidas de los ángulos en grados en la figura. Además escribimos las igualdades de medida de los lados de los triángulos. Preguntamos cuál es la medida de los ángulos: $\widehat{ABC}$, $\widehat{B'AB}$, $\widehat{A'DC}$ (el agudo y el obtuso) y $\widehat{A'B'C'}$. Las respuestas son: 105, 105, 60 y 300, 105.
--	---



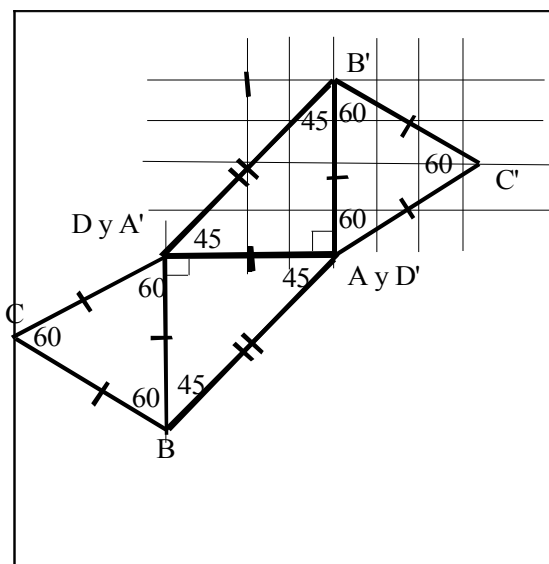
Segundo hexágono

Ahora preguntamos: ¿Cuál es la naturaleza del cuadrilátero ABCD'? Es un trapecio isósceles porque los ángulos contiguos $\widehat{D'AB}$ y $\widehat{ABC}$ son superponibles (de medida 105 grados) y sus lados $[AD']$ y $[BC]$ son de igual longitud. Además, el cuadrilátero ABCD' es convexo.



Tercer hexágono

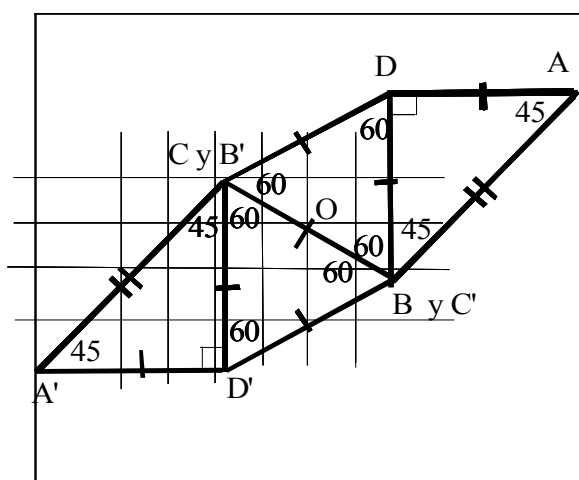
Preguntamos: ¿Cuál es el tipo del cuadrilátero AD'BD'? Es un cuadrado porque sus cuatro lados son de igual medida y sus ángulos miden 90 grados. Se observa que esta figura es utilizada para pavimentar las casas. Se le conoce como "canilla".



Cuarto hexágono

Preguntamos: ¿Cuál es la naturaleza del cuadrilátero ABDB'?

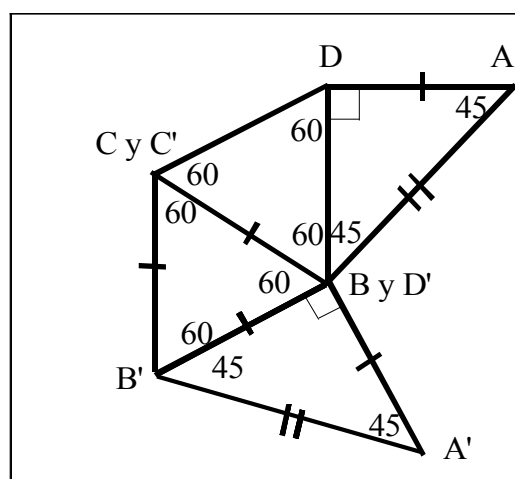
Es un paralelogramo, porque sus lados $[BD]$ y $[AB']$ son de igual medida y sus lados $[DB']$ y $[BA]$ también. Además, sus ángulos opuestos son de igual medida. Preguntamos si existen, en este paralelogramo y en el anterior, ejes de simetría y también, centro de simetría (pueden reflexionar con las piezas de rompecabeza).



Quinto hexágono

Les pedimos a los alumnos la naturaleza del cuadrilátero $CDBD'$: es un rombo porque sus cuatro lados son de igual medida. Como antes, preguntamos si existe un eje de simetría y un centro de rotación: el centro O del rombo es un centro para toda la figura: una rotación de 180 grados hace coincidir los puntos A y A' .

Preguntamos si el eje (AA') es un eje de simetría. La respuesta es NO porque, por ejemplo, la imagen de C no es D' .

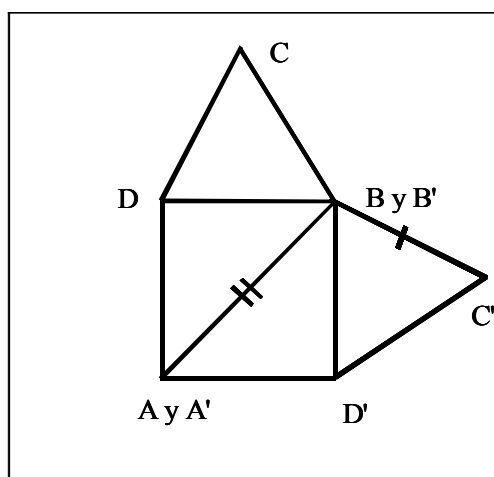


Sexto hexágono

Preguntamos aquí cuál es la naturaleza del cuadrilátero $CDBB'$: es un rombo porque sus cuatro lados son de igual medida.

¿Hay un centro de rotación?

El centro de rotación es el punto de intersección de las diagonales, para una rotación de 180° , que es una simetría central.



¿Séptimo hexágono?

Algunos alumnos nos presentaron esta figura. Ella no respeta la condición de no voltear las piezas del rompecabezas.

Pese a ello, es interesante preguntarse sobre la naturaleza del cuadrilátero $BD'AD$. Es un cuadrado ya que tiene los cuatro lados de igual longitud y dos de sus ángulos opuestos rectos.

§ 12.2 Empedrar el plano con trozos de rompecabezas (nivel: 12 a 14 años de edad)

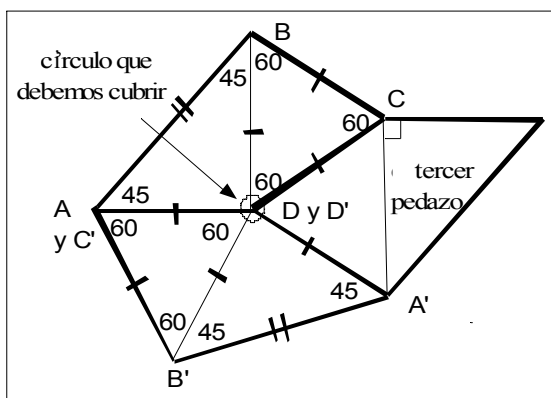
Vamos a utilizar las piezas de rompecabezas de la actividad anterior para observar si se puede empedrar el plano con ellos, y de ser posible, de cuántas maneras.

Para simplificar el problema, trazamos un pequeño círculo en la página y les preguntamos:

¿De cuántas maneras se puede empedrar el plano con las piezas para que el círculo no se vea?

Decimos a los alumnos que las piezas deben estar bien juntas y los lados conjuntos de igual longitud.

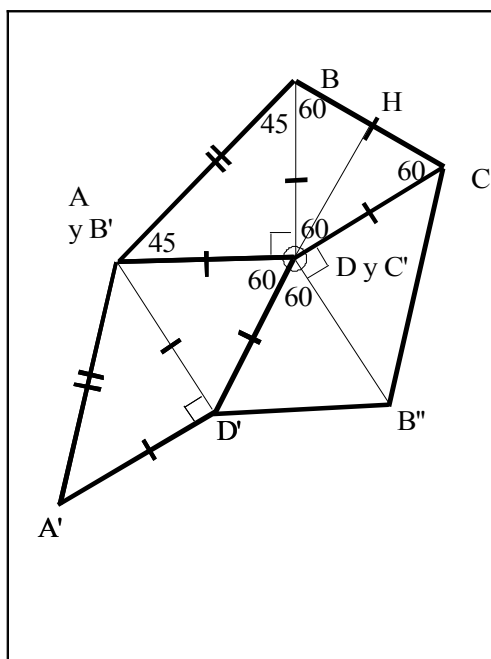
Podemos utilizar las figuras y las piezas anteriores para reflexionar:



Con el primer hexágono

Observamos la figura y nos preguntamos si se puede colocar una pieza dentro del “agujero” $\widehat{ADC}$. Exigimos a los alumnos no utilizar una nueva pieza, sino más bien reflexionar en la figura.

Notamos que los lados DA' y DC son de igual longitud y que podremos poner la extremidad en forma de triángulo equilátero si el ángulo $\widehat{ADC}$ es de 60 grados de medida, que es el caso. Este empedrado es el único posible por la medida del ángulo.



Con el segundo hexágono

Para cubrir el pequeño círculo, debemos encontrar una pieza con ángulo de igual medida que la del ángulo $\widehat{D'DC}$, que calculamos:

$$360 - (60 + 90 + 60) = 150 \text{ (en grados).}$$

Vemos que uno de los ángulos de las piezas es 150 grados de medida y que podemos ponerlo para cubrir el círculo.

Preguntamos ahora ¿Cuáles son las propiedades del polígono $ABCB''D'$?

Respuesta: es un pentágono con un eje de simetría: la línea recta $(D'D)$ que encuentra a $[BC]$ en H . El segmento $[DH]$ es la mediatriz de $[BC]$ (¡Hay que mostrarlo!)

	Con el tercer hexágono Es bien conocido que podemos empedrar el plano con las canillas, como en la figura. Adicionamos las medidas de los ángulos: $45+150+60+105 = 360.$ No hay otro empedrado posible para cubrir el círculo a causa de la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo.
--	---

	Con el cuarto hexágono Ponemos una tercera pieza y preguntamos si es posible poner una cuarta para terminar. Calculamos la medida del ángulo necesario: $360-(45+90+60+60)=105.$ Concluimos que es posible con una cuarta pieza. También en este caso, es la única solución. ¡El empedrado es el mismo que el de la canilla!
--	--

Ahora vemos que parece que el polígono que hemos construido tiene un eje de simetría y verificamos que no, ya que los puntos B1, C3 y C2 no están en la misma recta (¿Por qué?).

	Con el quinto hexágono: Este hexágono se parece un poco a la canilla, y tiene un centro de simetría O en la figura. Podemos poner las piezas 3 y 4, y es la única posibilidad a causa de la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo.
--	--

	Con el sexto hexágono Calculamos la medida del agujero A'BA: $360 - (90 + 60 + 60 + 45) = 105 \text{ (en grados).}$ Tomamos una tercera pieza: el ángulo es correcto pero los lados no coinciden. Ahora preguntamos a los alumnos si se pueden utilizar dos piezas, porque estos tienen ángulos de medida 60 y 45 en sus extremidades.
--	---

	Se puede hacer y es la única manera de hacerlo. Ahora les preguntamos a los alumnos si están seguros de haber estudiado todas las posibilidades.
--	--

Ahora, les pedimos a los alumnos **continuar sus investigaciones para saber si hemos encontrado todas las soluciones**. Notamos que, para empedrar el plano y ocultar el pequeño círculo, hay que anotar la medida de todos los ángulos de las piezas y verificar que adicionándolos se obtienen 360 grados.

Los cuatro ángulos de las piezas son de medida: 45, 60, 105, 150 (en grados). Nos preguntamos cómo debemos juntar las piezas para obtener un ángulo de 360 grados de medida.

Observamos en primer lugar cuáles son los ángulos que pueden adicionarse, respetando la medida de los lados y ayudándose del estudio anterior (colocamos las piezas en el sentido trigonométrico):

(150 y 150); (150 y 105); (150 y 60); (150 y 45); (105 y 60); (105 y 45); (60 y 150); (60 y 60); (60 y 45); (45 y 150); (45 y 105).

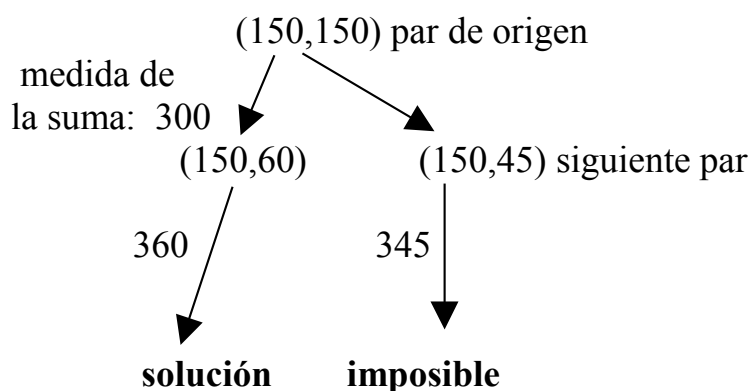
¿Qué debemos utilizar para completar el empedrado?

Analizamos los pares anteriores. Por ejemplo, en el caso del par (150, 60), podemos poner, al lado de la pieza, una pieza (60,45).

La suma de las tres piezas es:

$150 + 60 + 45 = 255$, debemos tener $360 - 255 = 105$, entonces tenemos el par (45,105) y listo.

Proponemos ahora a los alumnos construir árboles siguiendo el siguiente ejemplo:



También es posible escribir los pares sucesivos con sus sumas:

1ra solución (en la figura): $(150,150) + (150,60) = 360$

$(150,150) + (150,45)$ imposible

2da solución: $(150,105) + (105,60) + (60,45) = 360$

$(150,105) + (105,45)$ imposible

$(150,60) + (60,60) + (60,45)$ imposible

$(150,60) + (60,45)$ imposible

$(150,45) + (45,150)$ imposible

3ra solución: $(150,45) + (45,105) + (105,60) = 360$

$(105,60) + (60,60) + (60,60) + (60,45)$ imposible

4ta solución: $(105,45) + (45,150) + (150,60) = 360$

$(60,150) + (150,150) = 360$. Observamos que es la misma solución que la primera

$(60,150) + (150,60)$ imposible

5ta solución: $(60,60) \times 6 = 360$ ¡No hemos estudiado este caso! (ver la figura en la siguiente página)

$(60,45) + (45,105) + (105,60)$ imposible

$(45,150) + (150,150)$ imposible

6ta solución: $(45,150) + (150,105) + (105,60) = 360$

$(45,150) + (150,60) + (60,60)$ imposible

7ma solución: $(45,105) + (105,60) + (60,150) = 360$.

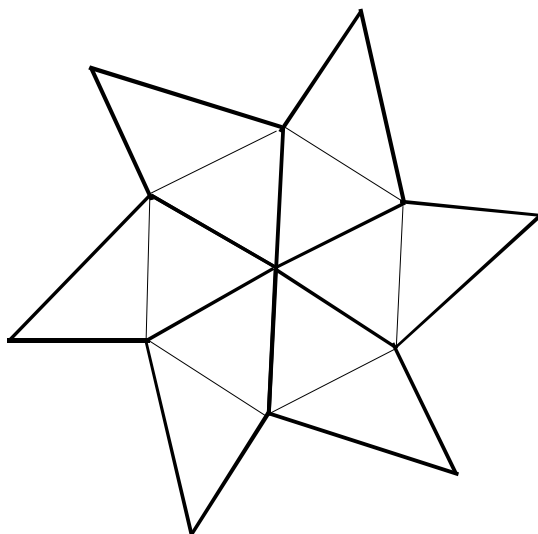
Les preguntamos a los alumnos: ¿es buena la 4ta solución? Debemos estar seguros de que la última pieza tiene su borde exterior de igual medida que el de la primera (para poder enlazarse). Vemos que esta solución no es buena.

Verificamos todas las soluciones.

Después nos preguntamos si todas las soluciones son distintas.

Observamos que la 6ta es la misma que la 4ta (salvo una rotación). Además la 7ma es la misma que la 3ra.

Concluimos que hay cinco soluciones, las cuatro que hemos encontrado y la siguiente, encontrada reflexionando:



Hemos estudiado sólo las piezas colocadas en el sentido trigonométrico porque, de esta manera, obtenemos todas las soluciones.

A propósito de este tipo de actividad, deseamos insistir sobre la necesidad de reflexionar con métodos adecuados; aquí hemos utilizado **métodos combinatorios**. Hemos, sucesivamente:

- Ordenado los pares en orden decreciente;
- Para cada par, observado los pares posibles (por la medida de los lados) que suman de 360 grados;
- Verificado que el tercer lado coincida con el primero.

Este estudio serio nos ha permitido encontrar una solución adicional.

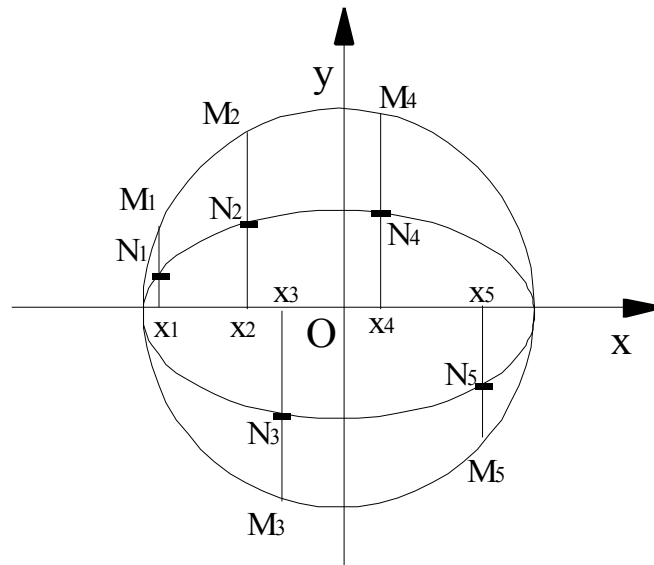
Comentario: proponemos distintas actividades con este tipo de rompecabezas en nuestro libro (en Francés): “Del dibujo percibido a la figura construida” (capítulos 1.14 y 2.14, ver la bibliografía).

§ 13 Construir una elipse a partir de un círculo (nivel: 12 a 14 años de edad)

Para esta actividad, el profesor debe recordar a los alumnos la propiedad analítica de los círculos: si tenemos un círculo de centro O , de radio R y un sistema de ejes ortogonales (Ox, Oy) , todo punto $M(x, y)$ del círculo satisface la siguiente igualdad: $x^2 + y^2 = R^2$.

Deseamos introducir la noción de elipse utilizando una de sus propiedades:

Una elipse es un círculo aplastado. Proponemos a los alumnos trazar un círculo de radio R y dos ejes perpendiculares pasando por su centro O .



En unos puntos del círculo trazamos rectas paralelas al eje (Oy) que encuentran al círculo en los puntos: M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 . Marcamos los puntos medios N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 de los segmentos $[x_1M_1], [x_2M_2], [x_3M_3], [x_4M_4], [x_5M_5]$.

Preguntamos ahora: ¿Cuál es la curva que pasa por los puntos medios de los segmentos?

Se responde: ¡Es una elipse! (Para los jóvenes pasamos a la siguiente actividad)

Decimos a los mayores: ¡Hay que demostrarlo!

Vamos a denotar por y_1 la medida del segmento $[x_1M_1]$ y por z_1 la medida del segmento $[x_1N_1]$. Utilizando el teorema de Pitágoras, podemos escribir:

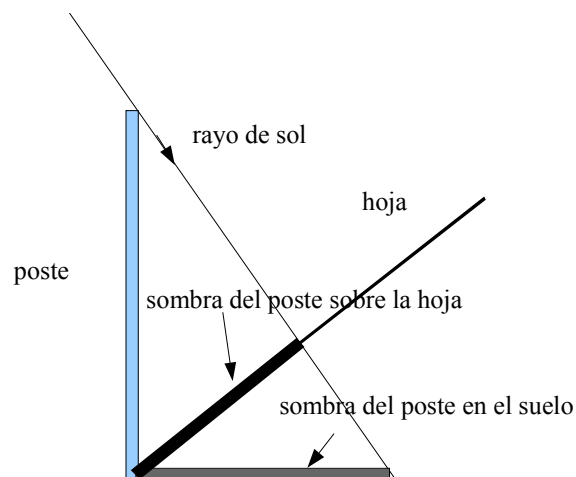
$y_1^2 + x_1^2 = R^2$. Entonces, ya que $y_1^2 = 4z_1^2$, tenemos:

$4z_1^2 + x_1^2 = R^2$. Es la ecuación de la elipse.

Con todos los alumnos:

Ahora vamos a ver cómo hacer para realizar la transformación de un círculo.

Por ejemplo observamos **un poste y un rayo de sol**:



La sombra del poste es menor que la altura del poste: decimos que hemos hecho una “afinidad”. Si ponemos una hoja como en la figura, la sombra será más pequeña. Concluimos que podemos cambiar la longitud de la sombra cambiando la pendiente de la hoja. Es decir, **podemos cambiar la relación de afinidad según la posición del plano donde se haga la proyección.**

Ahora preguntamos a los alumnos:

¿Podemos saber cuál es la **relación entre la longitud del poste y la de su sombra?**

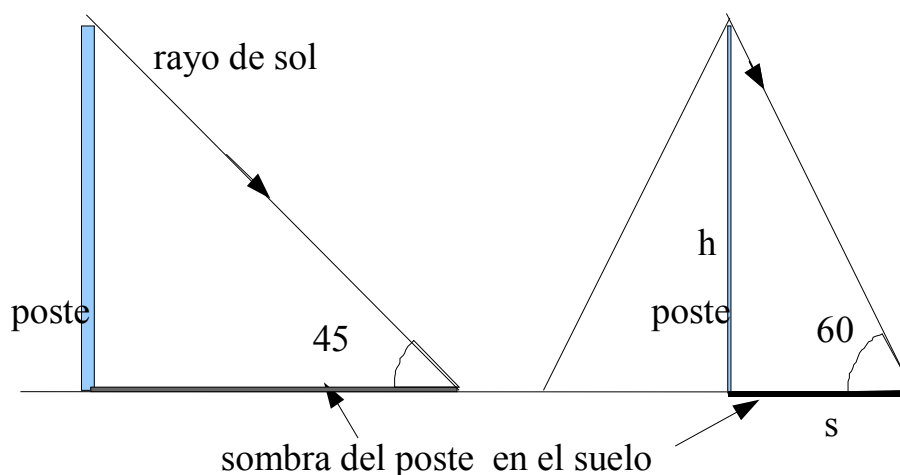
Primer ejemplo: si el ángulo de los rayos del sol con el suelo es de medida 45 grados; responden que la longitud de la sombra es la misma que la del poste.

Preguntamos: ¿Porqué? Responden que el triángulo formado por el poste, la sombra y el rayo es isósceles y rectángulo, de modo que las medidas de la sombra y del poste son de la misma longitud.

Segundo ejemplo (para los mayores): el ángulo formado por los rayos del sol con el suelo mide 60 grados; responden que no se ve directamente cuál es la medida y que debemos reflexionar sobre una figura.

Tenemos aquí una etapa importante del paso de los problemas experimentables a la reflexión geométrica: **los alumnos sienten la necesidad de reflexionar con una figura matemática.**

Les decimos: para reflexionar en una figura hay que suponer que el ancho del poste es muy pequeño.



Observamos las figuras, vemos que el triángulo formado por el poste, la sombra y el rayo de sol es la mitad de un triángulo equilátero cuyo lado mide el doble de la medida s de la sombra. Calculamos la medida h de la altura del triángulo con el teorema de Pitágoras.

$$s^2 + h^2 = 4s^2. \text{ Obtenemos } 3s^2 = h^2 \text{ y } s = \frac{h}{\sqrt{3}}.$$

Si los alumnos conocen las líneas trigonométricas, les preguntamos: ¿Porqué? Responden que la longitud de la sombra es la medida del poste multiplicada por el coseno del ángulo formado por la hoja y el suelo.

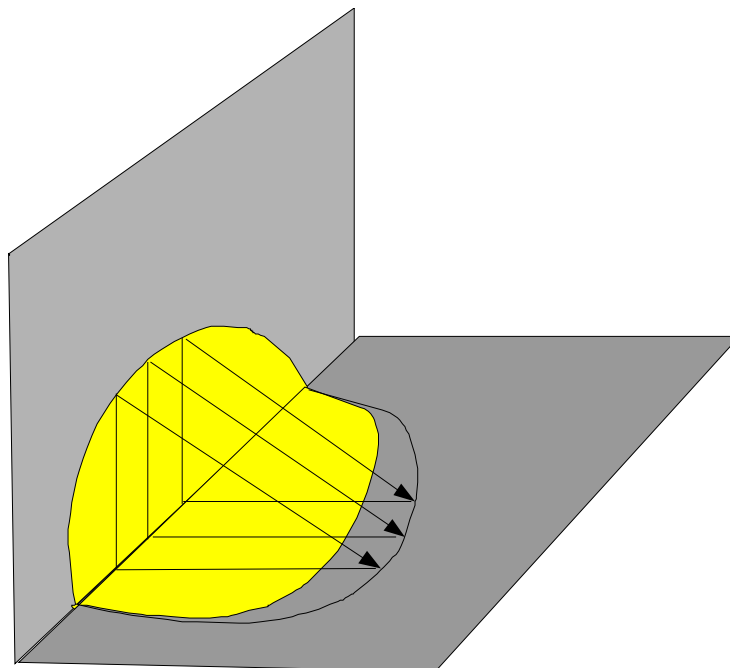
$$\text{Tenemos } \tan(45) = 1 \text{ y } \tan(60) = \sqrt{3}.$$

Continuando con todos los alumnos:

Ahora, vamos a trazar un círculo en una cartulina y cortarlo para obtener una ventana redonda.

Hacemos un pliegue en la cartulina para que la mitad del círculo sea vertical y la otra parte sea horizontal.

Ahora ponemos la cartulina sobre la mesa de tal manera que la luz entre por detrás de la cartulina. Si es posible, es mejor **utilizar los rayos del sol porque son paralelos**.



Observamos la sombra de la cartulina vertical sobre la horizontal.

Solicitamos a todos los alumnos de la clase notar cuál es la forma de su sombra.

Vemos que la **forma de la sombra depende de la posición de la luz respecto de la hoja vertical (figura en la siguiente página)**.

Cuando la cartulina vertical está bajo la luz, el círculo de la sombra se vuelve una línea recta: el círculo está completamente aplastado.

Cuando la medida del ángulo de la luz con la hoja vertical varía, las imágenes cambian y se transforman en una elipse, un círculo aplastado.

Ahora proponemos a los alumnos reflexionar directamente con una figura y, según la posición de la luz, predecir la forma de la sombra.

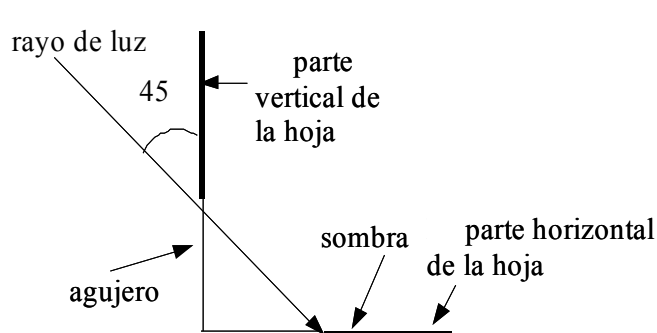


Figura 1

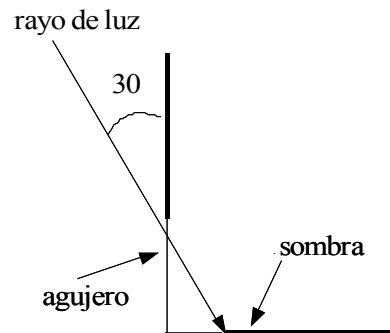


Figura 2

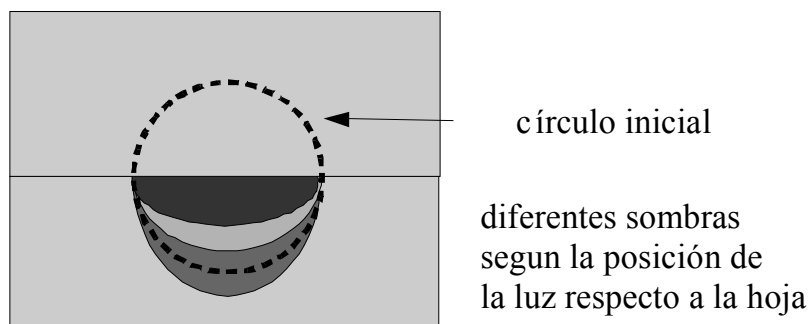
Vemos que, cuando el rayo y la hoja vertical forman un ángulo de 45 grados (figura 1), la forma de la imagen del círculo es la misma que la del círculo de origen.

Decimos que la figura fue conservada: la imagen es un semicírculo.

Cuando el ángulo entre el rayo y la hoja vertical es de 30 grados (figura 2), el radio de la imagen es menor que el del círculo inicial.

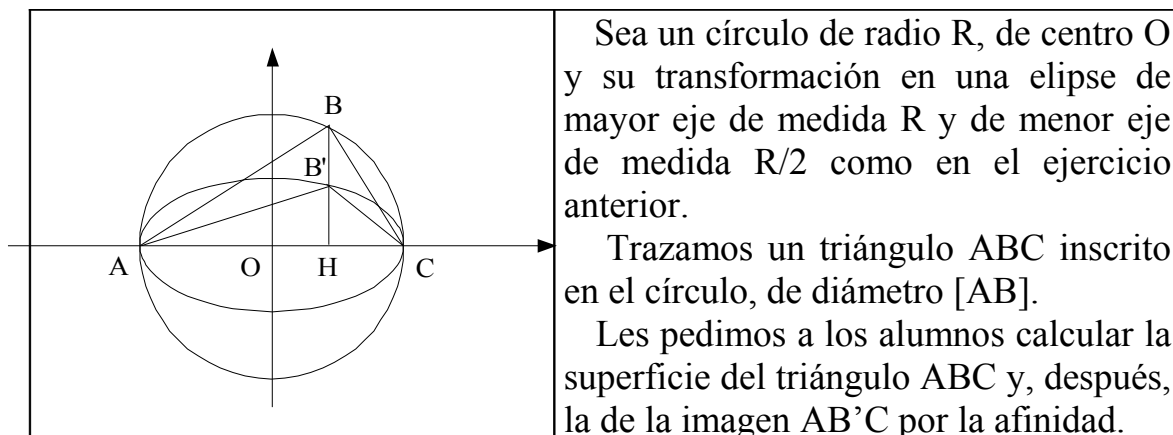
Decimos que el círculo fue aplastado, entonces la forma de la imagen es una semielipse.

Trazamos en la pizarra algunas formas de sombras que pueden encontrarse:



Ahora, vamos a estudiar cómo se transforman las figuras trazadas en un círculo mediante una afinidad.

Trazamos un ejemplo de transformación de un círculo en una elipse.



Observamos que los dos triángulos tienen el mismo eje de altura y que $HB' = HB/2$ (ver la construcción de la elipse “a mano”).

Se concluye que la superficie del triángulo $AB'C$ es la mitad de la del triángulo ABC .

Preguntamos a los alumnos grandes: ¿Piensan ustedes que es posible obtener una elipse como la imagen de un círculo por una afinidad?

Responden que sí; decimos que:

“la operación inversa de una afinidad es una afinidad”.

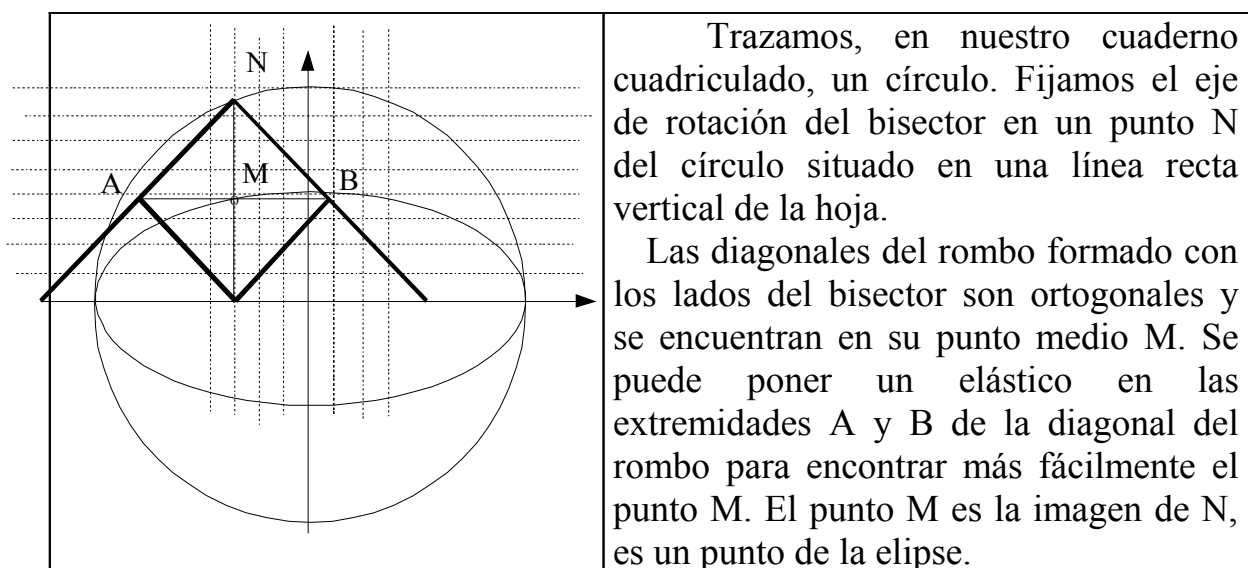
Preguntamos a los alumnos:

¿Piensan ustedes que se puede construir un sistema articulado para trazar “a mano” una elipse conociendo el círculo de diámetro de medida igual al mayor eje de la elipse y dos veces la medida del menor?

Reflexionamos sobre la pizarra: recordamos que es el caso estudiado antes.

Necesitamos construir un sistema que determine el punto medio de un segmento.

Pensamos en el bisector construido en la segunda actividad del 7mo párrafo.



Comentario: Les hemos presentado dos maneras de introducir la noción de elipse: aplastando un círculo u observando la sombra de un círculo. Las dos son la representación de la misma operación matemática: la afinidad ortogonal. Pensamos que es necesario introducir nociones matemáticas de varias maneras para que se forme un psicomorfismo entre las representaciones físicas y las nociones matemáticas.

La acción de “aplastar” un círculo no es una acción bien definida en matemática. Para utilizarla con las acciones directamente experimentables, se podrá utilizar, por ejemplo, un vaso de plástico.

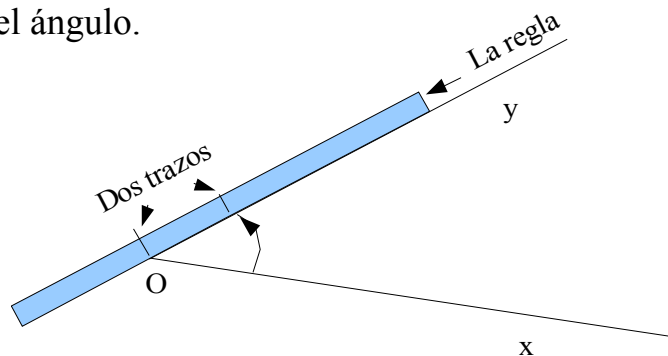
§ 14 Hacer geometría sin utilizar compás ni escuadra (nivel: 12 a 15 años de edad)

§ 14.1 Trazar la bisectriz de un ángulo

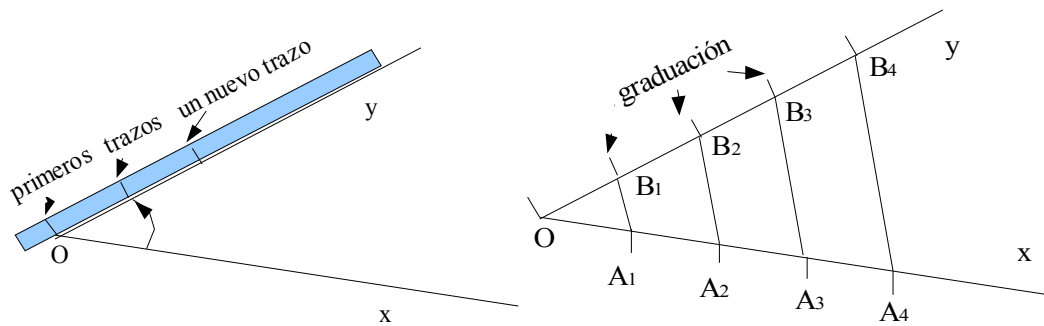
Ahora, proponemos a los alumnos construir la bisectriz de un ángulo sin utilizar el compás: dado un ángulo $\widehat{xOy}$ agudo, es posible construir su bisectriz utilizando sólo una regla donde se pueden trazar dos pequeños trazos para representar la medida de un segmento.

Ejercicio preparatorio:

Dado un ángulo $\widehat{xOy}$ agudo, hacer, con la regla, una graduación desde O sobre los dos lados del ángulo.



Después, deslizamos la regla de tal manera que el trazo de la izquierda coincida con el de la derecha:



De esta manera hacemos en los dos lados del ángulo una graduación por **translación**.

Ahora les pedimos trazar los segmentos $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, $[A_3B_3]$, $[A_4B_4]$.

Preguntamos: ¿Cómo son los cuatro segmentos? Nos responden:

¡Son paralelos! Si, bueno, y ¿Porqué?

Podemos aplicar el teorema de Tales.

Bien y ¿Cómo son sus medidas? La de $[A_2B_2]$ es dos veces la de $[A_1B_1]$, la de $[A_3B_3]$ es tres veces la de $[A_1B_1]$, etc.

Preguntamos si es posible utilizar estas medidas para encontrar la construcción de la bisectriz. Si tienen dificultad les ayudamos un poco:

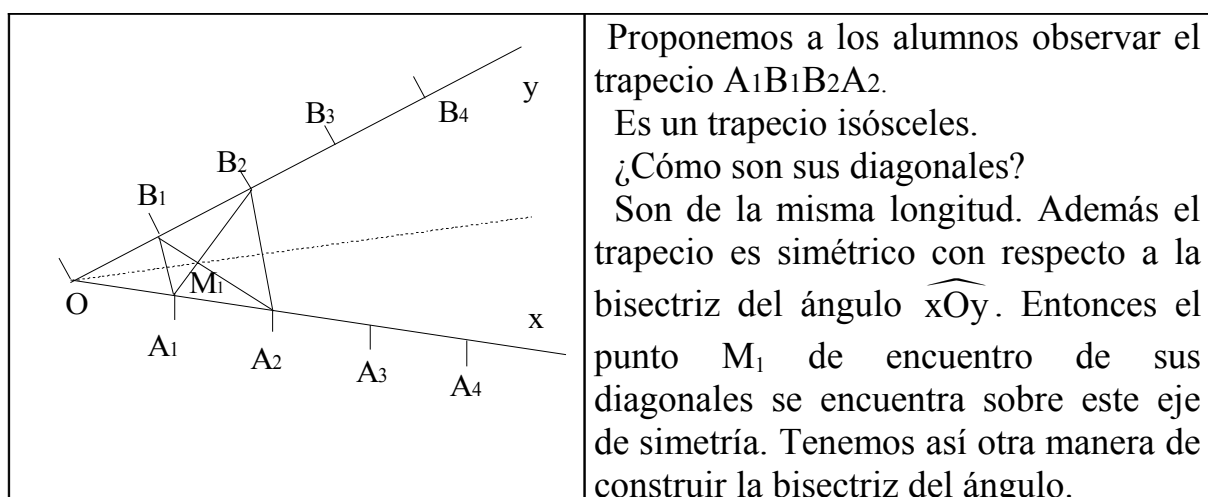
	Ahora, si volvemos a llevar, con dos trazos en la regla, la longitud de $[A_1B_1]$ sobre $[A_2B_2]$ ¿dónde está la extremidad N_2 de la imagen de $[A_1B_1]$? N_1 es el punto medio de $[A_1B_1]$. ¡Si, muy bien! ¿Cuál es la naturaleza del triángulo A_2OB_2? Es isósceles. ¿Y la del cuadrilátero $A_1B_1B_2N_2$? Es un paralelogramo porque tiene dos lados opuestos paralelos y de igual medida.
--	---

¿Cuál es la naturaleza de la recta (ON_2) ?

Es la mediatriz del segmento $[A_2B_2]$, entonces es la bisectriz del ángulo $\widehat{xOy}$.

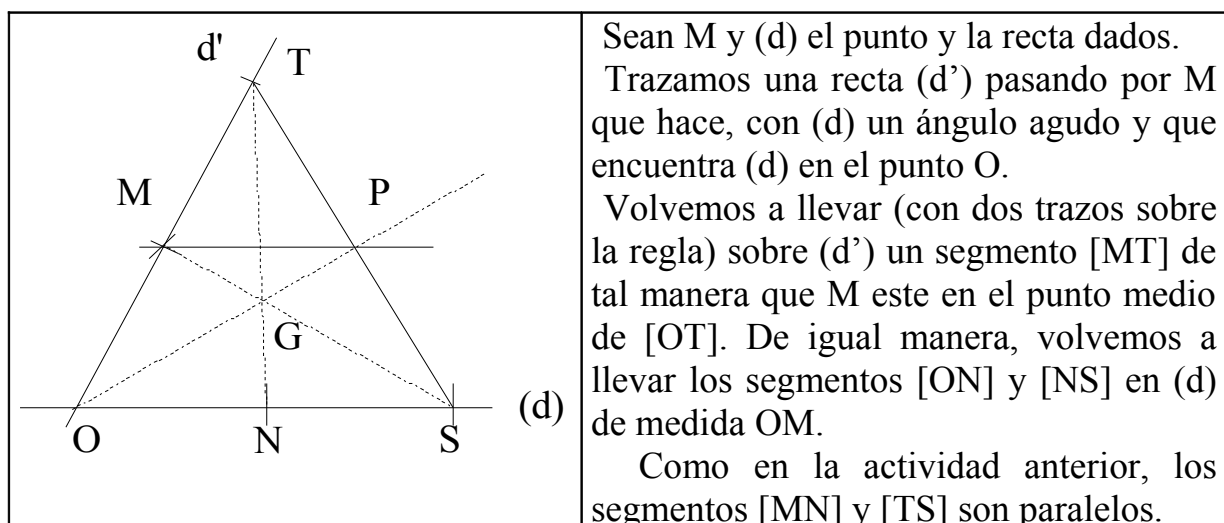
Vemos ahora cómo construir la bisectriz de un ángulo sin utilizar el compás.

Preguntamos a los mayores si es posible construir la mediatriz de otra manera, sin utilizar el compás. Vamos a utilizar la graduación anterior.



§ 14.2 Trazar dos rectas paralelas

Es muy fácil, utilizando la actividad anterior, trazar dos rectas paralelas, pero si lo que deseamos es trazar una recta pasando por un punto dado ¿Cómo hacerlo?



Ahora observamos el triángulo OTS , los segmentos $[TN]$ y $[SM]$ son las medianas relativas a los vértices T y S .

¿Si trazamos dichos segmentos, qué encontramos?

El centro de gravedad G del triángulo.

¿Y cuál es el punto P de encuentro de la recta (OG) con $[TS]$?

Es el punto medio de $[TS]$. Ahora bien ¿Cómo es la recta (MP) con respecto a (OS) ?

Es paralela. Hemos construido una recta paralela a una recta dada y pasando por un punto dado.

Comentario: Utilizando una restricción sobre los instrumentos, podemos observar de distinta manera las figuras tradicionales de la geometría.

§ 14.3 Trazar dos rectas ortogonales

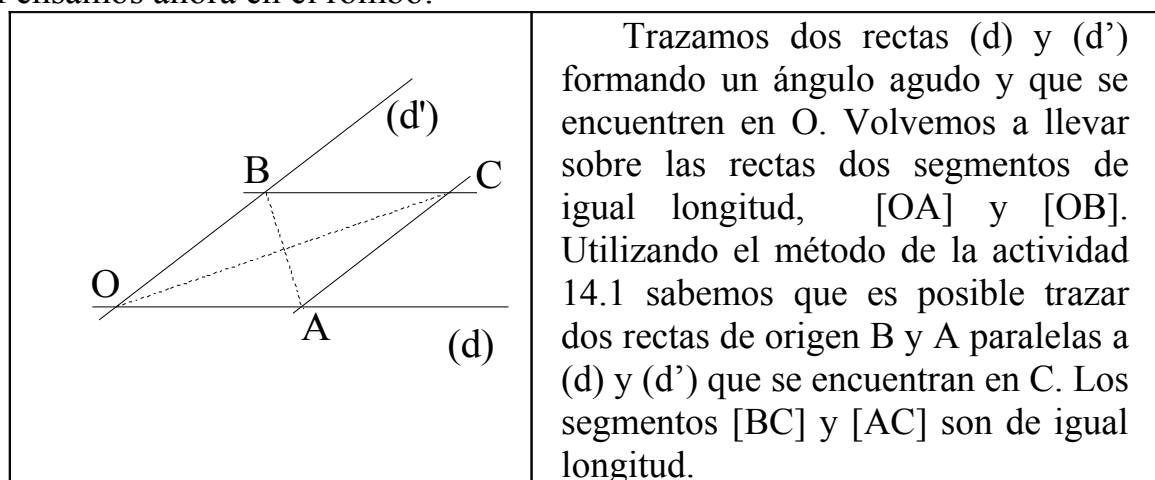
Queremos utilizar una propiedad de los rombos:

Las diagonales de un rombo son ortogonales.

Preguntamos a los alumnos: ¿Es posible construir dos rectas ortogonales sin utilizar el compás o la escuadra? Para esto vamos a utilizar las propiedades de unos cuadriláteros: los que tienen sus diagonales ortogonales ¿Cuáles son?

Escribimos la lista de esos cuadriláteros: el cuadrado; el rectángulo y el rombo. Los dos primeros no nos ayudan porque tienen sus lados ortogonales.

Pensamos ahora en el rombo:

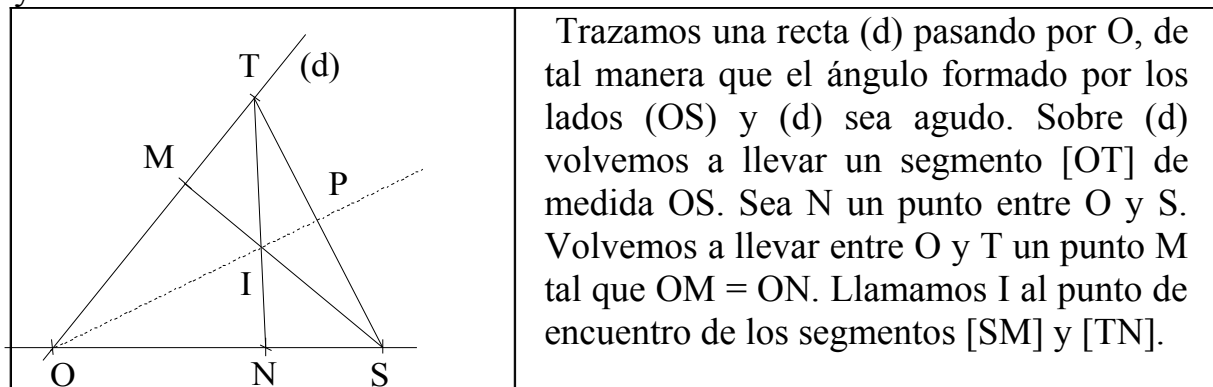


El cuadrilátero $OBAC$ es un rombo, de modo que sus diagonales (OC) y (AB) son ortogonales.

§ 14.4 Trazar dos rectas ortogonales pasando por dos puntos dados

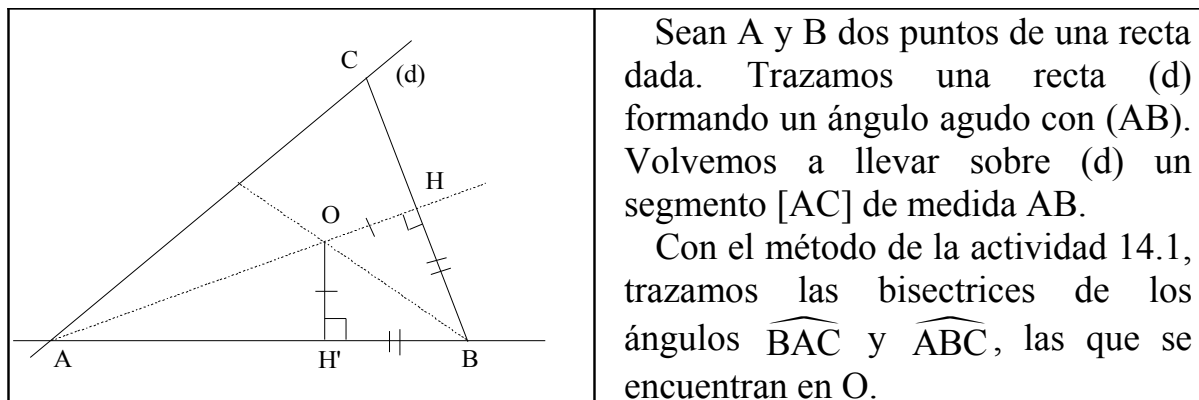
Vamos a utilizar una construcción inspirada de aquella de la actividad 14.1.

Sea dado un segmento $[OS]$, queremos trazar dos rectas ortogonales pasando por O y S .



La recta (OI) es un eje de simetría para el triángulo isósceles OST , ortogonal a la recta (TS) .

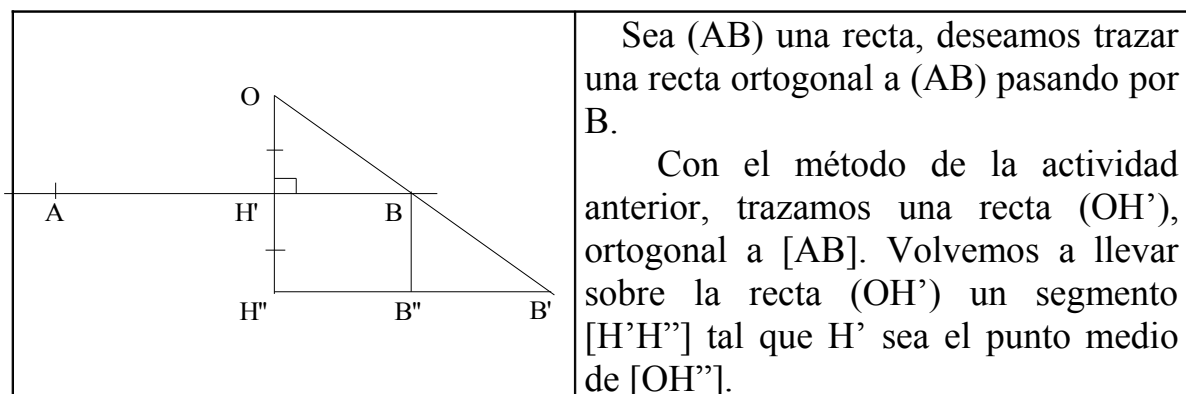
§ 14.5 Trazar una recta ortogonal a una recta dada (segundo método)



El triángulo ABC es isósceles, de vértice principal A, entonces la bisectriz [AH] es también su altura. El triángulo OHB es rectángulo.

Volvemos a llevar sobre [AB] un segmento [H'B] de longitud BH. Los triángulos OH'B y OHB son superponibles, de manera que [OH'] y [AB] son ortogonales.

§ 14.6 Trazar una recta ortogonal a una recta dada y pasando por un punto dado de la recta



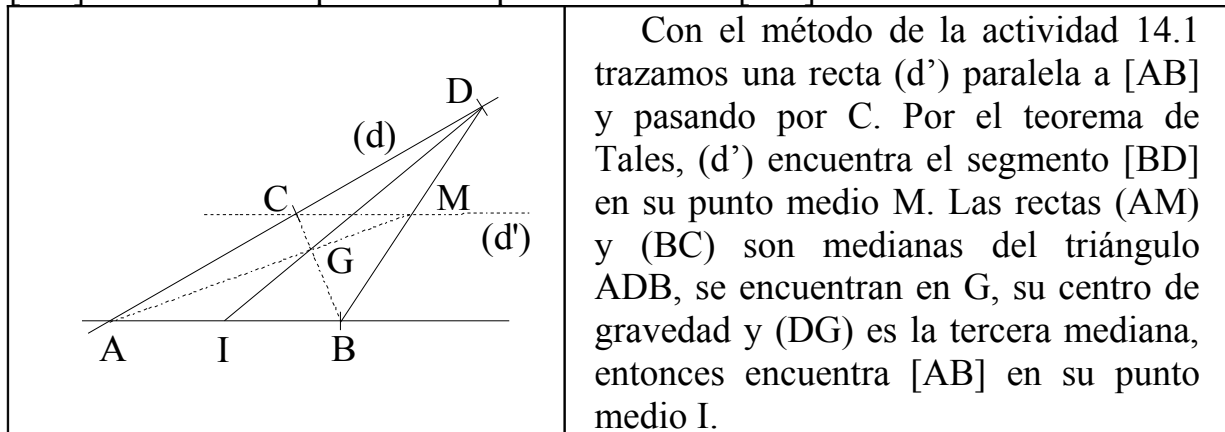
Volvemos a llevar sobre la recta (OB) un segmento [BB'] tal que B sea el punto medio de [OB']. Por el teorema de Tales, el segmento [H'B'] es paralelo a [H'B], de donde los segmentos [OH''] y [H'B'] son ortogonales. Vvolvemos a llevar sobre [H'B'] un segmento [H'B''] de la medida de [H'B]; por el teorema de Tales, [BB''] es paralelo a [OH''], de donde (AB) y [BB''] son ortogonales.

§ 14.7 Trazar el punto medio de un segmento

En esta actividad, deseamos recordar a los alumnos una propiedad importante de los triángulos:

Las medianas de un triángulo se encuentran en su centro de gravedad.

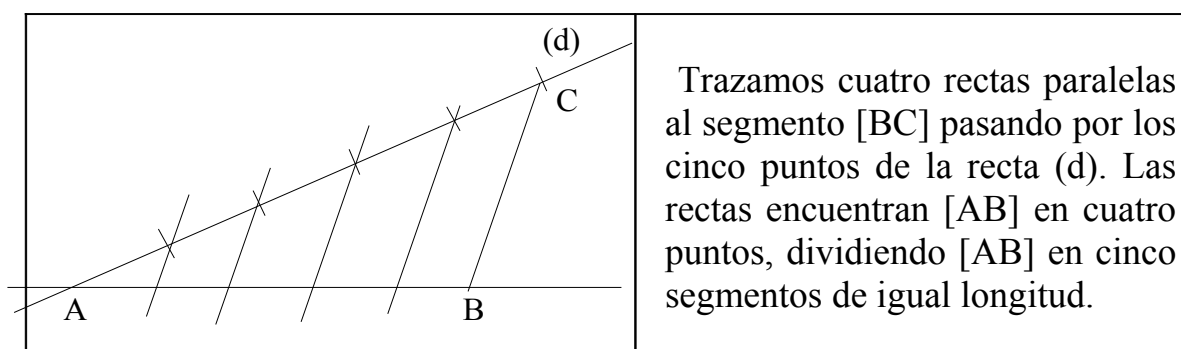
Sea un segmento dado $[AB]$, trazamos una recta (d) tal que el ángulo formado por $[AB]$ con (d) sea agudo. Volvemos a llevar sobre (d) dos segmentos $[AC]$ y $[CD]$ de tal manera que C sea el punto medio de $[AD]$.



§ 14.8 Dividir un segmento en n partes de igual longitud

Utilizando de nuevo el teorema de Tales, vamos a dividir un segmento en partes de igual longitud, por ejemplo cinco.

Dado un segmento $[AB]$, trazamos una recta (d) donde volvemos a llevar cinco segmentos de la misma longitud formando un segmento $[AC]$.



§ 15 Efectuar operaciones aritméticas con geometría sin utilizar el compás (nivel: 13 a 15 años de edad)

Ahora nos proponemos estudiar otro tipo de problema.

Preguntamos a los alumnos:

¿Es posible hacer operaciones aritméticas (adición, sustracción, etc.) de segmentos sin conocer sus longitudes?

Es un problema interesante porque los alumnos están acostumbrados a separar las diferentes partes de la matemática. Por ejemplo dicen:

¡Soy bueno en cálculo pero no me gusta la geometría!

Es importante mostrarles que todas las partes de la matemática se ayudan para resolver los problemas. Por ejemplo, los grandes matemáticos son personas que tienen una gran cultura matemática y que así pueden observar los problemas de **diferentes puntos de vista**.

Aquí vamos a hacer aritmética con geometría.

Les decimos a los alumnos: tenemos dos segmentos y deseamos adicionarlos, ¿Cómo hacer?

Es muy fácil: los ponemos extremo con extremo, obteniendo un segmento cuya longitud es la suma de las dos longitudes.

Les decimos:

¿Es importante de poner uno a la izquierda y el otro a la recta o el contrario?

Lo hacemos con dos piezas de cinta.

¡No! Obtenemos la misma longitud.

Se dice: la adición es una operación **conmutativa**.

¿Ahora cómo hacer una sustracción?

Ponemos el extremo de una cinta en el de la otra:

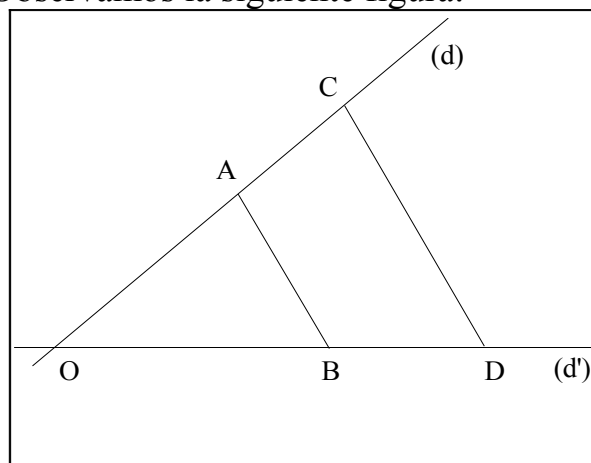
Obtenemos la sustracción de la pequeña a la grande.

¡Si! Pero si hacemos lo contrario: ¿la pequeña menos la grande?

No es posible, porque una **longitud es siempre positiva**, además decimos que la **sustracción no es conmutativa**.

Ahora tratamos de hacer una multiplicación, para lo que ayudamos un poco a los alumnos con una actividad preliminar.

Observamos la siguiente figura:



Hemos trazado dos rectas (d) y (d') formando un ángulo agudo y dos segmentos paralelos [AB] y [CD].

Utilizamos el teorema de Tales, obteniendo la igualdad:

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \quad \text{que se escribe también:}$$

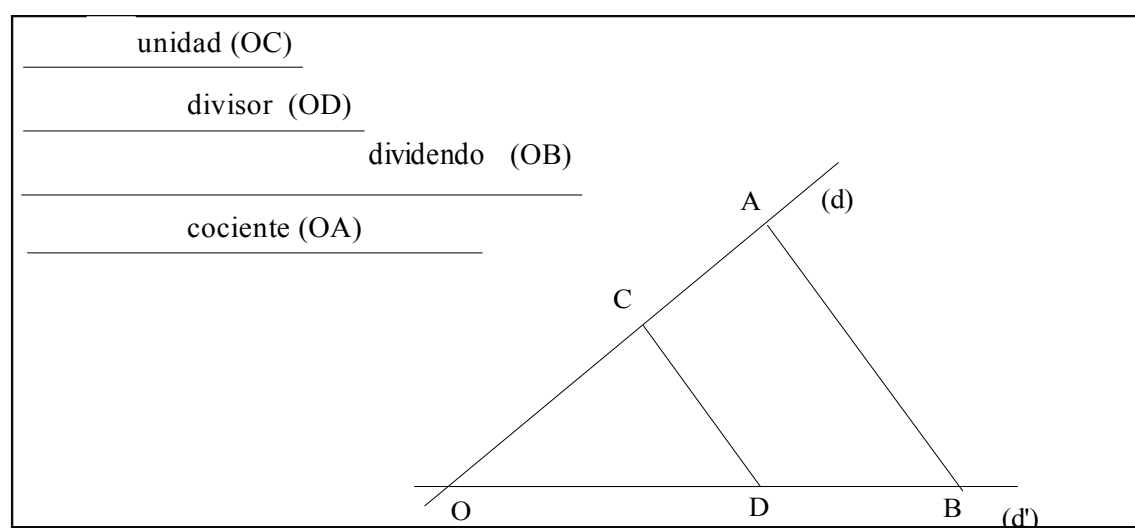
$OA = (OB \cdot OC) / OD$. Vemos que, si la longitud de OD es 1, OA es el producto de OB y OC.

Vamos a utilizar esta propiedad para hacer multiplicaciones y divisiones: si tenemos dos longitudes de medida OB y OC, volvemos a llevar sobre dos rectas (d) y (d') las longitudes y la longitud unidad OD (por ejemplo 10 cm).

Vemos que la medida del producto depende de la unidad de longitud.

Ahora preguntamos a los alumnos: ¿Es posible utilizar el mismo método para hacer una división?

Les damos tres longitudes: las dos a dividir y la unidad. Les solicitamos hacer la división geométrica.



Es interesante verificar la operación con las medidas, porque es un buen ejemplo **de cambio de escala**.

En centímetros, la medida de la unidad de nuestro ejemplo es 3,5; la del divisor es 4,5; la del dividiendo es 7,3. Preguntamos a los alumnos: ¿cómo verificar si nuestra construcción es buena? La división de 7,3 por 4,5 es 1,62. Hemos encontrado un cociente de medida en centímetros: 5,8.

Reflexionando con los alumnos:

Para saber cuál es la medida del divisor relativo a la unidad OC dividimos 4,5 por 3,5, obteniendo: 1,29. La medida del dividiendo es: $7,3/3,5 = 2,09$.

Calculamos el cociente: $2,09/1,29 = 1,62$ lo que nos da, en centímetros, $1,62 \times 3,5 = 5,67$.

§ 16 Buscar cuales son los polígonos regulares que pueden ser construidos sin utilizar el compás ni el transportador (nivel: 13 a 15 años)

Les proponemos ahora una larga actividad que permite revisar propiedades interesantes de los polígonos inscritos en un círculo y definiciones y propiedades de los números radicales (es decir los que son raíces de un número entero, tales como $\sqrt{2}$ o $\sqrt{5}$).

Estos problemas tienen un gran interés histórico y muestran cómo se obtienen progresos de la ciencia por caminos distintos. Ahora les presentamos una actividad preparatoria con el compás.

Definiciones

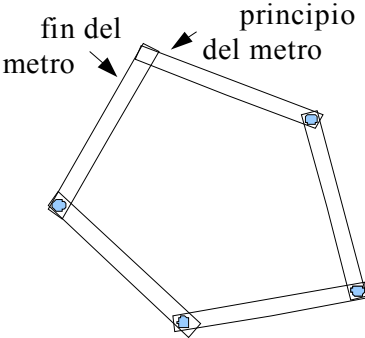
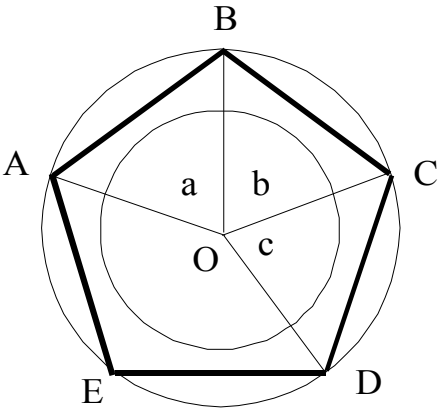
Un polígono es regular si todos sus lados son de igual longitud y todos sus ángulos son de igual medida.

Un polígono es convexo si todos sus vértices están en el mismo semiplano determinado por uno de sus lados.

Un polígono es estrellado si sus lados se cruzan.

§ 16.1 Construir un pentágono regular con el metro de carpintero

Primero preguntamos a los alumnos: ¿Qué son los pentágonos regulares? ¿Son polígonos que tienen cinco lados de igual longitud!

	Les mostramos un metro articulado de carpintero que tiene cinco (o más) cintas de 20 centímetros de longitud y con el que podemos hacer un pentágono. Les preguntamos: ¿es el pentágono regular? ¡No! ¿Qué debemos hacer para que sea regular? Los ángulos interiores del pentágono deben ser superponibles. Vamos a hacer un pentágono regular con ayuda de un círculo.
	Trazamos un primer círculo, pero resulta demasiado pequeño, así que lo agrandamos poco a poco para que podamos poner los vértices del pentágono sobre él. Preguntamos: ¿Ahora, estamos seguros de que el pentágono es regular? ¡Hay que probarlo! Llamamos O al centro del círculo y recordamos que si tenemos cuerdas [AB], [BC], [CD], etc. de igual longitud, los ángulos al centro a, b, c, etc. correspondientes son superponibles. Entonces los cinco ángulos al centro del pentágono son superponibles (de medida $360/5 = 72$ (en grados) y éste es regular.

Preguntamos ahora: ¿Podemos probar que el pentágono es regular de otra manera?

-¡Sí! Con la igualdad de los ángulos de los vértices $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CDE}$, $\widehat{CEA}$, $\widehat{EAB}$.

Primero preguntamos:

¿Cuáles son las características de un polígono regular?

Respuesta:

Sus lados son de la misma longitud, pero ello no es suficiente como lo hemos visto en el ejemplo del metro de carpintero. Debemos adicionar:

Los ángulos en los vértices son de igual medida.

Vemos que, si los vértices están sobre un círculo de centro O, los ángulos en los vértices son superponibles. Por ejemplo, observamos el triángulo ABO, es isósceles de ángulo $\widehat{AOB}$ de medida $360/5 = 72$ en grados como lo hemos visto antes. Entonces sus ángulos superponibles son de medida $(180 - 72)/2$. De la misma manera, todos los ángulos superponibles de los cinco triángulos isósceles son de medida 54 (en grados). Entonces los ángulos del pentágono son superponibles y de medida 108 (en grados) y el pentágono es regular.

Solicitamos a los alumnos concluir con condiciones necesarias y suficientes para que un polígono sea regular:

Un polígono es regular si y solo si:

Sus lados son de la misma longitud y sus vértices están sobre un círculo

o

Sus lados son de la misma longitud y sus ángulos son de igual medida

o

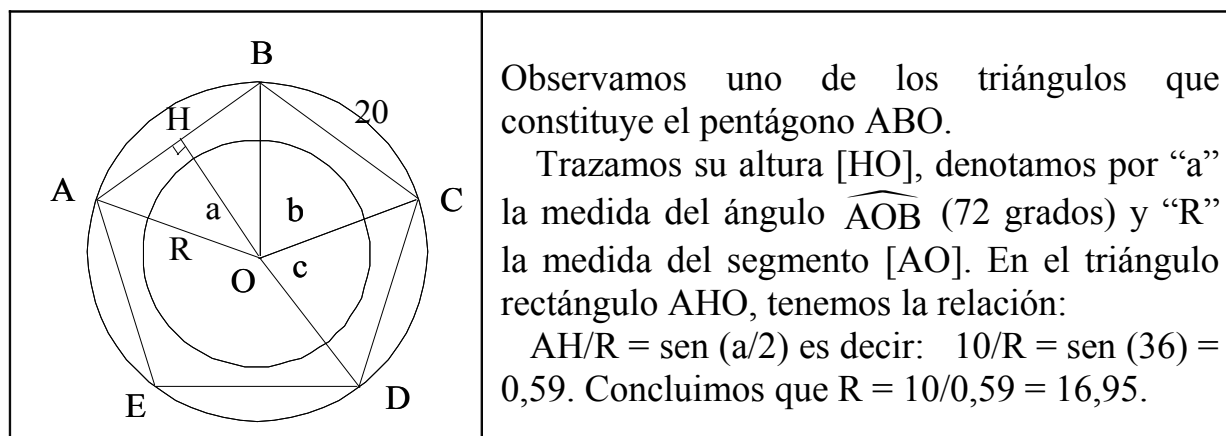
Sus lados son de la misma longitud y sus **ángulos al centro son de igual medida**

o

Los triángulos que le constituyen son superponibles.

Ahora se plantea una pregunta natural: ¿Cuál debe ser el diámetro del círculo para que la medida de los lados del pentágono sea 20 cm?

Vamos a reflexionar sobre una figura:



Hay una otra solución, más precisa, para construir el pentágono sin utilizar el compás. Esta solución requiere de una actividad preliminar que damos en seguida.

§ 16.2 Construir un rectángulo de oro sin utilizar el compás (nivel: 13 a 15 años de edad)

Las actividades utilizando el número de oro nos parecen muy interesantes porque permiten revisar propiedades de los números algebraicos y, además, evocar las técnicas de construcción de los edificadores de catedrales.

Les pedimos a los alumnos buscar, en casa o en la biblioteca, cuál es el número de oro y cual fue su uso.

Leemos en el diccionario:

“El número de oro es $(\sqrt{5}+1)/2$, es decir cerca de 1,618, que es considerado como una proporción particularmente estética”.

Se dice que un rectángulo es de oro si el cociente entre su ancho y altura es el nombre de oro.

Les decimos que este número es aún utilizado por los arquitectos para los dibujos de casas y que se encuentra, por ejemplo, en el templo griego del Partenón cuya fachada es un rectángulo de oro.

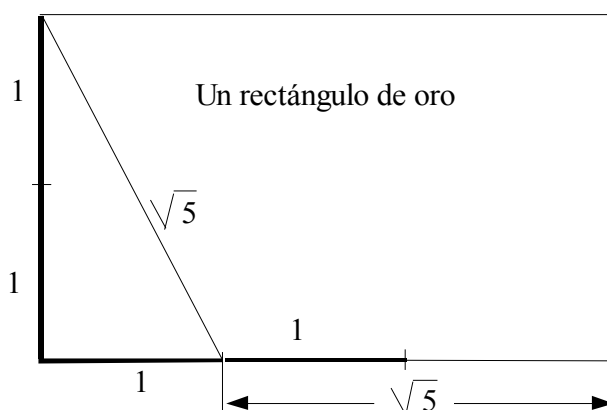
Solicitamos a los alumnos tratar de construir un rectángulo de oro sin utilizar el compás.

Recordamos que, utilizando el teorema de Pitágoras, es posible construir los radicales, así que les pedimos construir en primer lugar $\sqrt{2}$.

Hemos visto, en la actividad 14.6 que podemos construir una recta ortogonal a una recta dada y pasando por un punto dado de ella, sin utilizar el compás.

Trazamos entonces un segmento de longitud 1 y, después, un segmento perpendicular pasando por una de sus extremidades.

Obtenemos un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa es de longitud $\sqrt{2}$. Para obtener $\sqrt{5}$, observamos que $5 = 1 + 4$ y construimos un triángulo rectángulo con lados de longitud 1 y 2.



Ahora, es muy fácil construir el número de oro y, después, un rectángulo de oro. Vamos a estudiar la propiedad de los pentágonos con respecto al número de oro.

§ 16.3 Mostrar que las diagonales del pentágono regular de lados de medida 1 poseen la medida del número de oro (nivel: 13 a 15 años de edad)

Observamos un pentágono regular de lado de medida 1:

	Observamos el trapecio isósceles ABCD cuyas diagonales se encuentran en U. Los triángulos AUD y BUC son semejantes, entonces tenemos: $\frac{AU}{UC} = \frac{AD}{BC} \quad (1).$ Los cuatro lados del cuadrilátero AEDU son paralelos y sus lados [AE] y [ED] son de medida 1, de forma que AEDU es un rombo y $AU = ED$. Utilizando la ecuación (1) y $BC = ED = AU$, obtenemos: $UC = \frac{1}{AD}$.
--	---

El triángulo ADC es isósceles, entonces $AD = AC$.

Tenemos: $AD = AC = AU + UC = 1 + \frac{1}{AD}$ Además $AD^2 = AD + 1$.

Denotamos por x la longitud (positiva) de [AD]; x es la raíz positiva de la ecuación: $x^2 - x - 1 = 0$, es decir el número de oro: $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

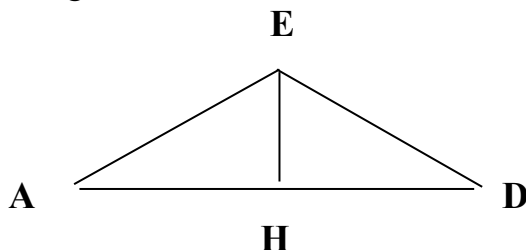
Concluimos:

La medida de las diagonales de un pentágono regular de lados de medida 1 es el número de oro, al que denotamos por φ .

Esta propiedad nos permitirá construir un pentágono sin utilizar el compás.

16.4 Construir un pentágono sin utilizar el compás (nivel: 13 a 15 años)

Observamos el triángulo AED de la anterior actividad y trazamos su altura [EH].



Utilizando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo AHE, calculamos la altura EH. Tenemos: $AH^2 + HE^2 = 1$.

Entonces $HE^2 = 1 - (\varphi/2)^2$ es decir:

$$HE = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Preguntamos a los estudiantes:

¿Es posible construir un segmento de tal medida sin utilizar el compás?

Reflexionando con los estudiantes:

Hemos visto que es posible construir los radicales de un número entero sin utilizar el compás.

Además, utilizando el teorema de Pitágoras, **podemos construir algunos radicales de la forma:**

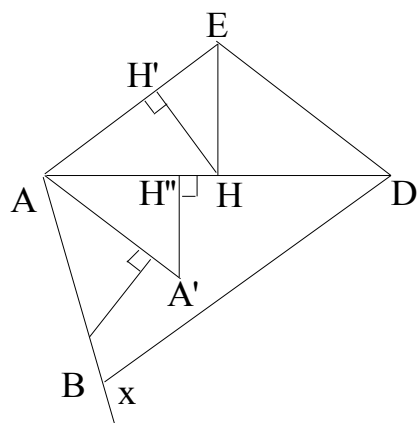
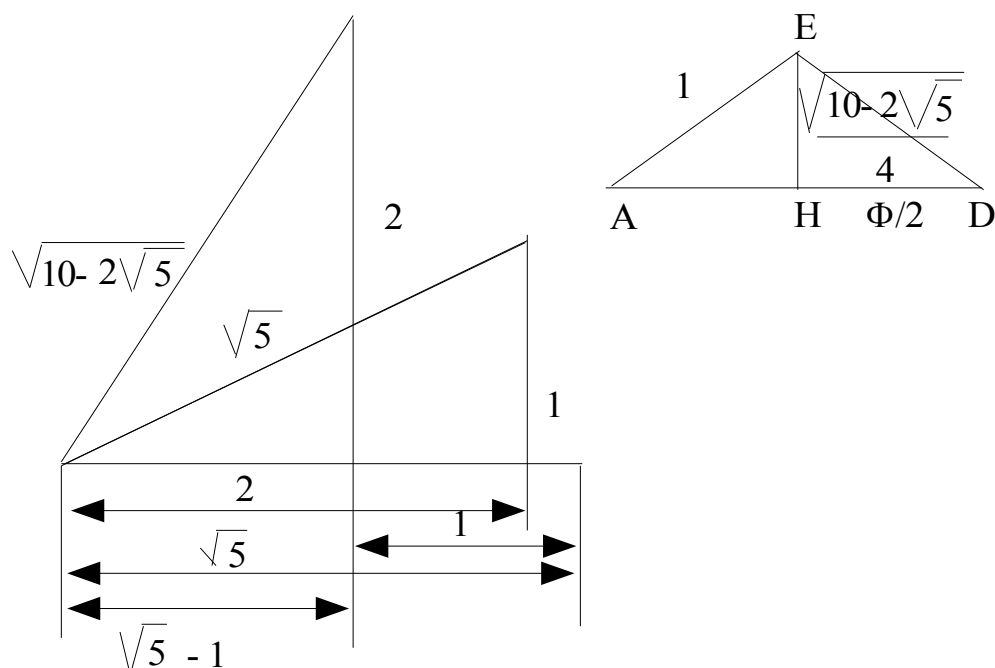
$\sqrt{a^2 + b^2}$ donde a y b son números constructibles sin compás.

Si podemos escribir HE en esta forma, podremos construirle.

Notamos que el elemento $\sqrt{5}$ será útil para nosotros; escribimos por ejemplo:
 $a = \sqrt{5} - 1$.

$$\text{Ahora } a^2 = 5 - 2\sqrt{5} + 1 \text{ y } \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2 + 2^2}.$$

Estos resultados nos permiten construir el pentágono sin utilizar el compás:



Hemos dibujado el triángulo AED que nos da tres vértices: A, E, D del pentágono.

Ahora, si queremos construir todo el pentágono sin utilizar el compás, podemos volver a llevar tres veces el ángulo $\widehat{EAD}$ con el siguiente método:

Trazamos la altura $[HH']$ del triángulo AHE.

Volvemos a llevar la longitud AH' sobre el segmento $[AD]$, obtenemos H'' y, después la longitud HH' sobre la recta ortogonal a $[AD]$ pasando por H'' . Obtenemos el segmento $[H''A']$.

El triángulo $AA'H''$ es igual al triángulo AHH' , entonces el ángulo $\widehat{H''AA'}$ es igual al ángulo $\widehat{EAD}$.

Prosiguiendo con esta construcción, obtenemos tres veces el ángulo $\widehat{EAD}$, es decir el ángulo $\widehat{EAx}$ de medida de $36 \times 3 = 108$ (en grados). Volvemos a llevar sobre la semirecta $[Ax)$ un segmento $[AB]$ de medida 1, obteniendo un nuevo vértice B del pentágono. Continuando así, podemos construir el pentágono.

Los cálculos anteriores nos permiten escribir la expresión algebraica del seno y coseno del ángulo de 36 grados (o $\pi/5$ radianes):

$$\sin 36 = AH = \left(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \right) / 4 \quad (\text{con la calculadora: } 0,59 \text{ (al centésimo)})$$

$$\cos 36 = CH = \Phi/2 = (1 + \sqrt{5})/4 \quad (\text{con la calculadora: } 0,81)$$

$$\tan 36 = \sin 36 / \cos 36 = 4 \left(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \right) / (1 + \sqrt{5}) \quad (= 0,73 \text{ con la calculadora})$$

Es interesante hacer calcular a los estudiantes las líneas trigonométricas que se deducen de estos resultados, utilizando las fórmulas trigonométricas.

Recordamos las fórmulas:

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a ; \cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a.$$

Obtenemos:

$$\sin 72 = 2 \left(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \right) / 4 \cdot (1 + \sqrt{5}) / 4 =$$

$$= \left(\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \right) \left(\sqrt{(1 + \sqrt{5})^2} \right) / 8$$

$$= \left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right) / 4 \quad (\text{con la calculadora: } 0,95 \text{ (al centésimo)}).$$

$$\cos 2a = 1 - 2 \left(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \right)^2 / 16 = (\sqrt{5} - 1) / 4 \quad (= 0,31 \text{ (al centésimo)}).$$

$$\tan 72 = \left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right) / (\sqrt{5} - 1) = \left(\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \right) \quad (= 3,08).$$

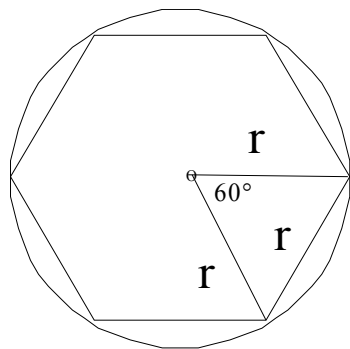
§ 16.5 Construir un heptágono con una cinta de papel (nivel: 13 a 16 años de edad)

De la misma manera que hemos construido un pentágono con una cinta de papel en el capítulo 8, deseamos observar si se puede construir un **heptágono**.

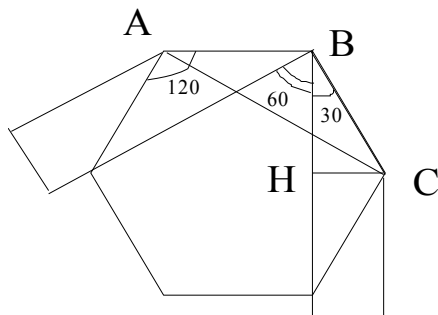
Sabemos que, al contrario del pentágono, el heptágono no se puede construir con la regla y el compás. Pero vamos a ver que es posible construirlo con una cinta, como el pentágono, utilizando el transportador.

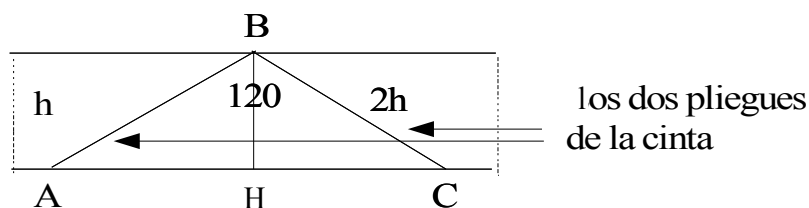
Primera actividad

En primer lugar, les pedimos a los alumnos si se puede construir un **hexágono con una cinta de papel**. Es el momento de recordar cómo se dibuja un hexágono regular con el compás:

	Para construir un hexágono regular inscrito dentro de un círculo de radio r, es suficiente trasladar, con el compás, seis veces la longitud del radio sobre el círculo. Preguntamos a los alumnos: ¿Porqué? Observamos que los seis triángulos que forman el hexágono son isósceles y de ángulo al centro de medida 60°, de modo que son equiláteros.
---	---

Ahora tomamos la cinta y la ponemos sobre el círculo para obtener, con dos dobleces, un ángulo de medida 120° . Les pedimos a los alumnos escribir todas las medidas que puedan encontrar en la figura:

	Observamos que si, por ejemplo, trazamos la altura $[CH]$ de la cinta en el triángulo BHC, su medida es la mitad de la del lado $[BC]$. Entonces, con una cinta de altura h, se puede hacer un hexágono de lado de medida $2h$. Es posible, utilizando el compás, volver a llevar sobre la cinta de altura h un segmento de longitud $2h$, como en el siguiente dibujo.
--	---



Preguntamos a los mayores:

¿Saben ustedes cuál es la línea trigonométrica que corresponde a la razón: $BH/BC = h/2h = 1/2$?

Dicen que $\cos(60^\circ) = 1/2$ y que el triángulo BHC es la mitad de un triángulo equilátero.

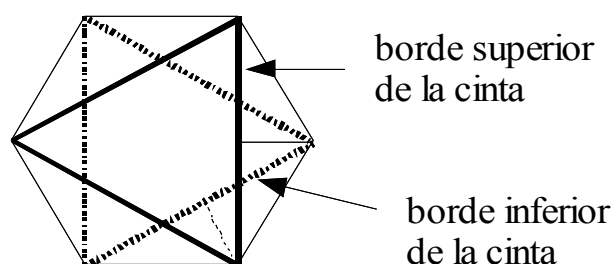
Les pedimos continuar la construcción del hexágono y les preguntamos:

¿Cuál es la longitud necesaria para construir todo el hexágono con la cinta?

Les hacemos construir y reflexionar con los objetos.

	Observamos que el borde inferior de la cinta (dibujado en grueso) es utilizado tres veces, cada vez para formar una diagonal del hexágono. Preguntamos: ¿Cuál es la medida de cada diagonal? Observamos que el triángulo BCH es la mitad de un triángulo equilátero de lado de medida $2h$ y de altura $\frac{2h\sqrt{3}}{2} = h\sqrt{3}$.
--	---

Entonces la longitud de cinta necesaria para construir un hexágono regular de lado de medida $2h$ es $6h\sqrt{3}$. Ahora, les pedimos a los alumnos verificar eso con su cinta. Observamos que los dos **bordes de la cinta forman un hexágono estrellado**. Veremos que, en el caso del heptágono, de un cierto punto de vista, es un solo borde de la cinta el que forma una estrella.



Segunda actividad

Hacemos la misma observación y construcción en el caso del pentágono. Solicitamos a los alumnos construir un heptágono regular ayudándose de un círculo trazado con el compás y de un transportador.

	Observamos que para trazar un heptágono dentro de un círculo con un transportador, debemos trazar un ángulo de $360/7 = 51,4$ grados al centro del círculo (al décimo de aproximación). Si queremos hacer un heptágono con una cinta que vamos a doblar es necesario conocer la medida del ángulo exterior del heptágono.
--	--

Observamos que los triángulos que lo forman son isósceles, de ángulo en los vértices de medida 51,4 grados; entonces la medida de los otros ángulos es:

$(180 - 51,4) / 2 = 64,3$ grados. Los ángulos exteriores del heptágono son de medida $64,3 \times 2 = 128,6$ grados.

Si deseamos doblar la cinta para obtener un heptágono, debemos construir ángulos de medida 128,6 grados con el transportador, pero si queremos utilizar solamente la regla ¿Cómo podemos hacer?

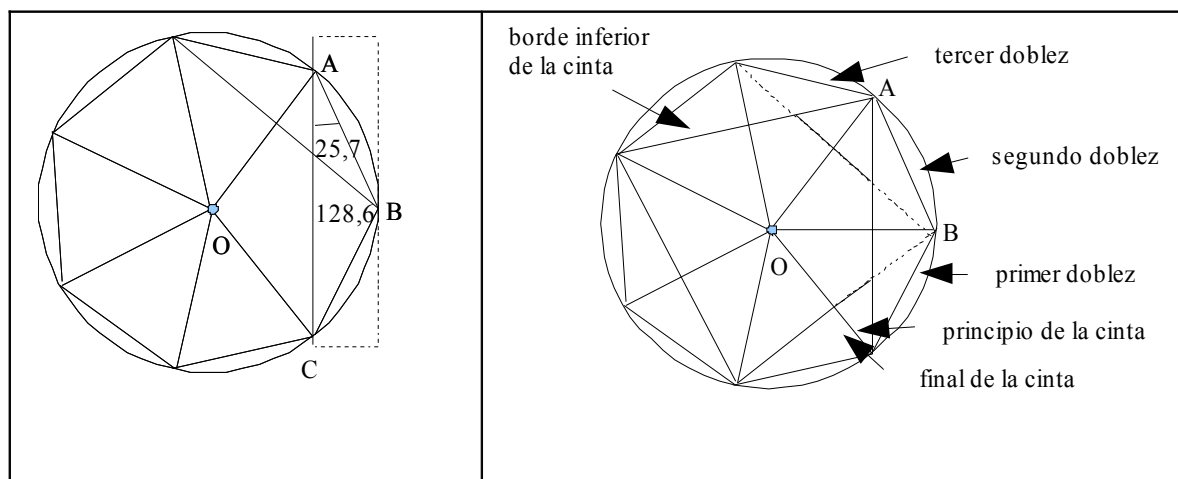
Vamos a hacerlo en la siguiente actividad que utiliza trigonometría:

Si deseamos, por ejemplo, hacer el heptágono con una cinta de altura BH' ¿cuál será la medida del lado $[AB]$?

Observamos que, en el triángulo ABH' , tenemos la igualdad:

$H'B/AB = \cos(64,3) = 0,43$; entonces $AB = H'B/0,43$.

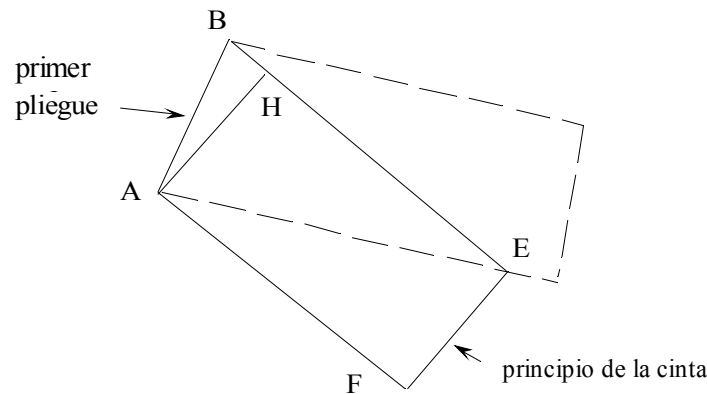
Por ejemplo, si la altura de la cinta es 2cm, la medida del lado del heptágono es: 4,6 cm. Les pedimos a los alumnos trazar sobre la cinta, con el compás, dos longitudes de 4,6cm y verificar que obtenemos, doblando dos veces la cinta, un ángulo de medida 128,6 grados. Después solicitamos a los alumnos terminar la construcción del heptágono con la cinta:



Observamos al terminar la construcción del heptágono, que la cinta se ha volteado. Si pegamos el principio y el final de la cinta obtenemos **una cinta de Möbius, es decir una cinta que tiene un solo lado.**

Ahora preguntamos si se puede, con una cinta, construir un **heptágono regular estrellado** como lo hemos hecho con el pentágono.

Les dejamos reflexionar para que encuentren la siguiente construcción:

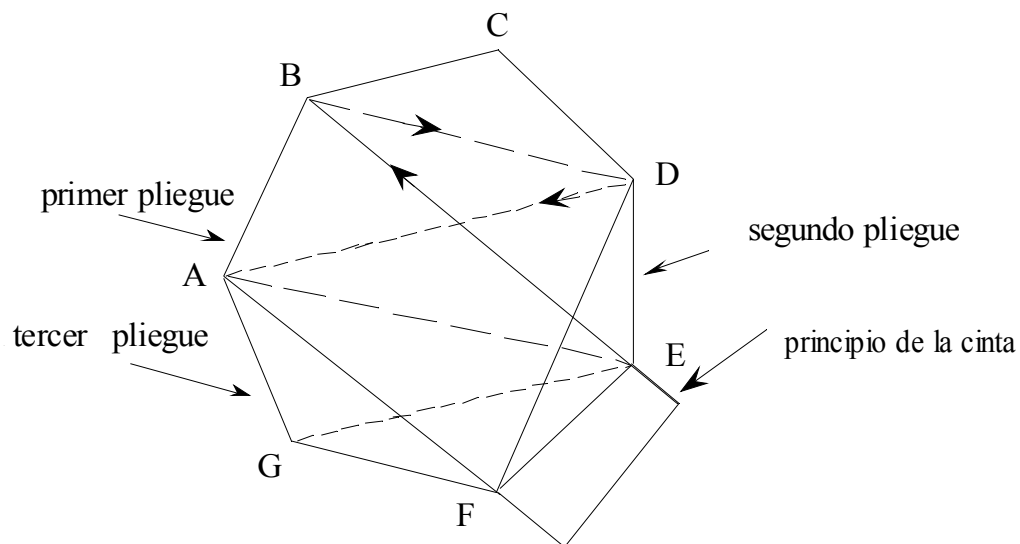


Les preguntamos los alumnos ¿cuál es la longitud de los segmentos [EB] y [AE] que sirven a hacer el primer pliegue?

Son dos grandes diagonales del heptágono (las pequeñas son, por ejemplo: [AF] y [BD]). Podemos calcularlas cuando la altura AH de la cinta es 2 cm, en el triángulo AEH por ejemplo.

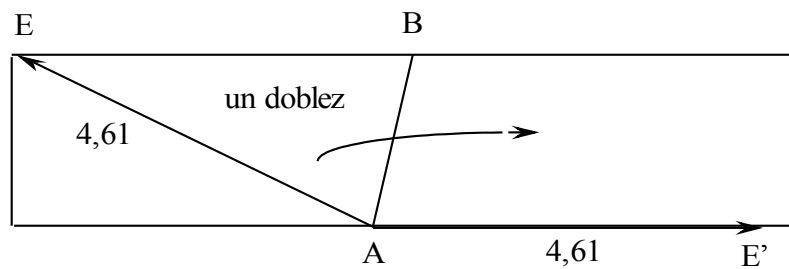
Sabemos que, siendo el heptágono regular, el ángulo $\widehat{BOA}$ es de medida 51,4 grados y la medida del ángulo $\widehat{BEA}$ es la mitad, es decir 25,7 grados. En el triángulo AEH, tenemos: $AH/EA = \text{sen}(25,7)$.

Obtenemos entonces: $EA = AH/\text{sen}(25,7) = 4,61$.

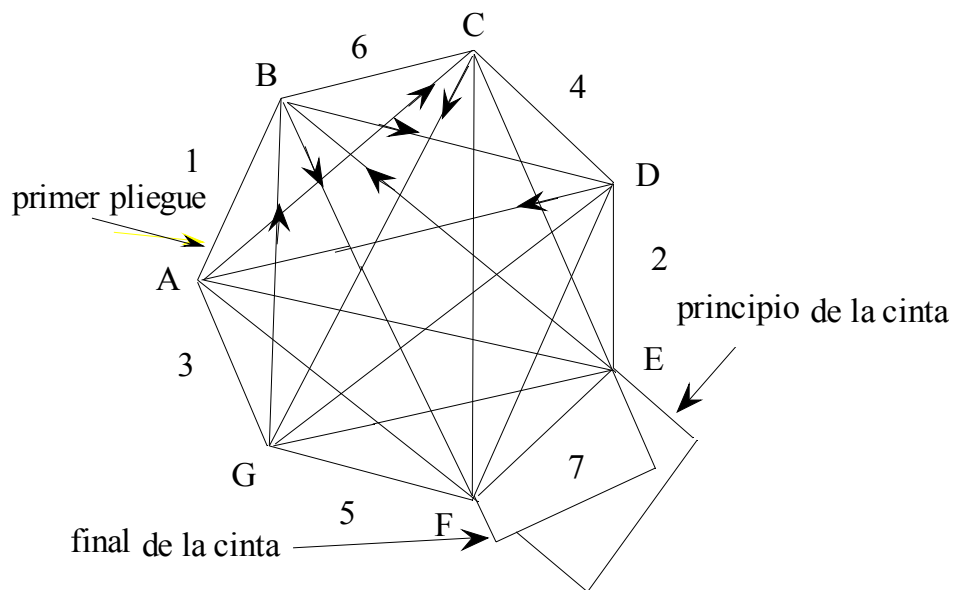


Ahora solicitamos a los alumnos tomar una cinta de altura 2 cm y trazar un segmento [AE'] de longitud 4,6 en su borde superior. Después les pedimos doblarla de tal manera que el punto E' quede sobre el borde inferior en el punto E.

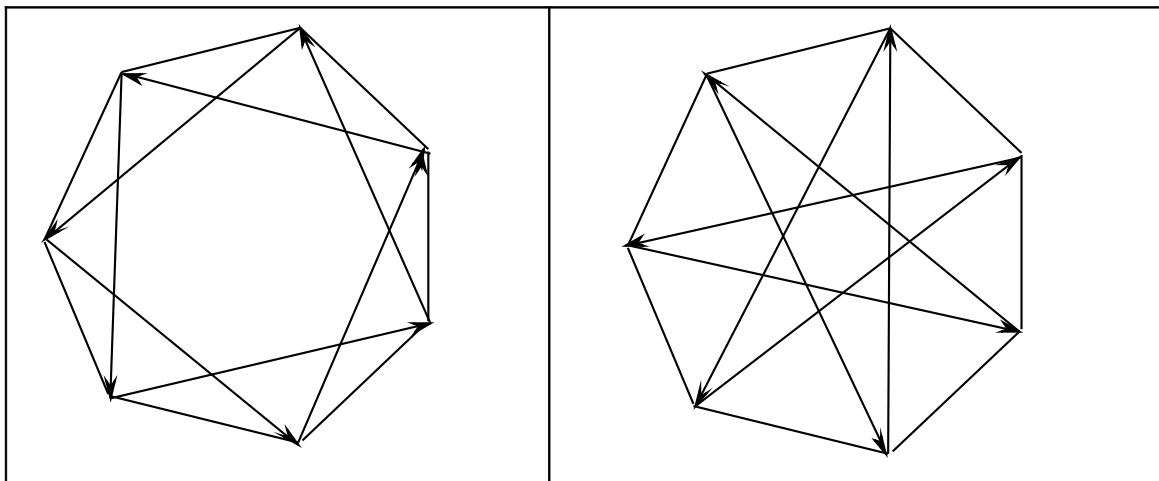
Obtenemos el pliegue [AB].



Después les pedimos verificar, con el transportador, la medida del ángulo EAB, que debe ser $(180 - 25,7) / 2 = 77,2$ grados.



Les pedimos ahora terminar la construcción del heptágono y, después, dibujar un “lindo” heptágono estrellado.



Vemos que, con todas las rectas utilizadas en nuestra construcción, se pueden dibujar **dos heptágonos estrellados con un solo trazo (sin levantar el lápiz).**

Preguntamos:

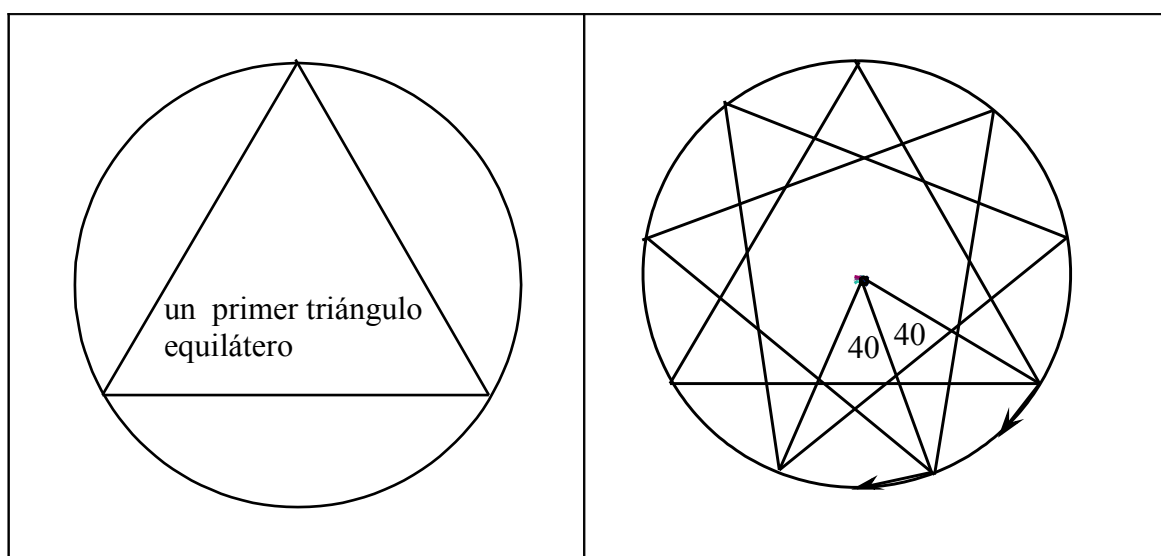
¿Saben porqué se puede trazar el heptágono estrellado sin levantar el lápiz?

Les pedimos observar los casos del hexágono y pentágono.

Dicen los alumnos:

¡Es porque el número de lados es impar!

Les solicitamos observar el caso del eneágono regular (el polígono regular con nueve lados), ayudándose de un círculo y de un triángulo equilátero, y después del transportador.



Primero trazamos un triángulo equilátero, y dos otros superponibles que cortamos.

Vamos a construir el eneágono con los tres triángulos superpuestos.

Preguntamos: ¿Qué rotación damos a los dos triángulos cortados para obtener el polígono estrellado?

Responden que es una rotación de $360/9 = 40$ grados. Lo hacen.

¡Si, bien! Y ahora:

¿Piensan que el polígono se puede trazar sin levantar el lápiz?

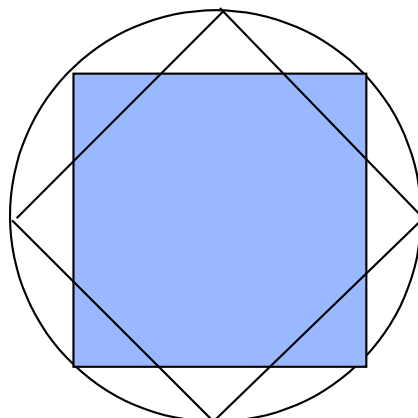
¡No, porque hay que trazar tres triángulos equiláteros distintos!

¡Pero el número de lados es impar!

Observamos que 9 no es un número primo pero que 5 y 7 lo son.

Hacemos ahora una conjetura: **el número de lados de nuestro polígono debe ser primo para que podamos trazarlo sin levantar el lápiz.**

Solicitamos a los alumnos proponer un polígono regular que no pueda ser trazado sin levantar el lápiz. Un ejemplo es el octágono estrellado.



Comentario: aquí utilizamos varios resultados de geometría, álgebra y trigonometría para descubrir propiedades interesantes de los polígonos. Utilizamos varios métodos: construcción con el compás y el transportador, pliegues, recortes para instalar el psicomorfismo que permitirá tener una imagen mental de esas propiedades.

Conclusión: Hemos presentado una gran variedad de actividades en geometría que incitan a los alumnos a efectuar psicomorfismos entre acciones directamente experimentables con sus manos, sus instrumentos y acciones donde deben anticipar, fabricando en su mente formalizaciones con propiedades geométricas. Es en esta dialéctica de psicomorfismos que se interiorizan las propiedades matemáticas.

Enero del 2010, Marzo del 2013

Dra. Danielle Salles Legac salles@math.unicaen.fr

Dr. Ruben Rodriguez Herrera ruben.rodriquez@caen.iufm.fr

IREM y IUFM de Baja Normandía
Universidad de Caen

FRANCIA

Con la ayuda preciosa del Doctor Eladio Ocaña, Universida de Lima, Perú

BIBLIOGRAFÍA

BORCEUX Francis. *Invitation à la géométrie.* CIACO éditeur 1986

BOULE François. *Questions sur la géométrie et son enseignement.* Nathan éditeur 2001

BOURSIN Didier et LAROSE Valérie. *Pliages et mathématiques.* ACL les éditions du Kangourou 2000

CARREGA Jean Claude. *Théorie des corps, la règle et le compas.* Hermann éditeur 1981

DE LOURDES Maria, ESTEVEZ Bravo, MARTINEZ Jorge Luis del sol, VALDES ARTEAGA Eloy. *El dibujo geométrico en la resolución de problemas.* Revisita electrónica de didáctica de las matemáticas. Universidad Autónoma de Querétaro, Cuba

En ligne : www.uaq.mx/matematicas/redm

DOUADY Régine. *Jeux de cadres et dialectique outil-objet.* Recherches en didactique des mathématiques Vol. 7 Num. 2 p 5-31 Éditeur I.R.E.M. de Strasbourg (2005)

DUVAL Raymond. *Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements,* Annales de didactique et de sciences cognitives, V. 10. pp. 5-53. Éditeur I.R.E.M. de Strasbourg (2005)

Groupe évaluation Inspection Académique des Yvelines. *Evaluation diagnostique à l'entrée en 6^{ème}.* En ligne :

www.ac-versailles.fr/ia78/intra_ien/doc/eval6/Analyse_Eva_6eme_2006_MATH.pdf

LEHMAN Eric. *Mathématiques pour l'étudiant de première année Tomes 1 et 2.* Collection DIA Université, Belin 1984

MEHL Serge. *Trapèzes et moyenne harmonique.* En ligne :

http://seger.mehl.free.fr/anx/trapez_harmo.html

RODRIGUEZ HERRERA Ruben. *La géométrie sans cercle dans la formation de la pensée géométrique.* En ligne :

www.math.unicaen.fr/irem/internat/documents.htm

RODRIGUEZ HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle. *Du dessin perçu à la figure construite.* Ellipses éditeur 2005

SALLES-LEGAC Danielle, RODRIGUEZ HERRERA Ruben. *Calcular, plegar y demostrar propiedades geométricas de los triángulos y cuadriláteros clásicos.* I.R.E.M. de Basse-Normandie France, éditeur 2011

SALLES-LEGAC Danielle. *Historias de cometas y otros cuadriláteros (con fichas para los alumnos).* I.R.E.M. de Basse-Normandie France (Bilingüe) éditeur 2009

SALLES-LEGAC Danielle. *Les géométries des pliages.* Le miroir des maths n°5 revue publiée par l'I.R.E.M. de Basse-Normandie 2009, Gratuite en el sitio IREM :

www.math.unicaen.fr/irem/sommaire.html

VINCENT Robert. *Géométrie du nombre d'or.* Chalagam éditeur 2004

WELLS David. *Dictionnaire Penguin des curiosités géométriques.* Eyrolles éditeur 1997.