

Sur le vice et les vertus... de l'induction Le problème dit "du cercle de Moser"

Avant-propos en forme d'avertissement au lecteur

Cet article a pour origine un couple de conférences prononcées au Théâtre du Rond-Point à Paris en 2011 – année consacrée aux Monstres, au Rond-Point –, dans le cadre d'un cycle de l'université populaire de Caen/Basse-Normandie "décentralisée"¹. Le cycle et son thème ont donné lieu à publication, aux éditions Autrement, d'un l'ouvrage collectif² dans lequel l'article rédigé pour rendre compte de 3h de conférences très illustrées, et intitulé "Quand la raison vacille : démon(s)trer l'incongru" se compose de deux volets :

1°) j'y traite de la question des monstres et de leur représentation dans les ouvrages "scientifiques" à figures avant l'ère moderne et à la Renaissance, et j'y tente de mettre en évidence que la "monstration" relève d'un double mouvement de la pensée rationnelle et de la pensée analogique, puis

2°) j'y pose la question des monstres en mathématiques – laquelle s'est d'ailleurs souvent contentée de "montrer" : le mot existe dans la littérature ancienne –, et de l'outil forgé par les géomètres, pour "dé-montrer" les objets nouveaux de cette science, souvent apparus

comme incongrus de prime abord, en démontrant qu'ils s'avèrent moins étranges qu'il n'y paraît, par exemple en en donnant une représentation en accord avec l'édifice antérieurement établi.

Dans ce contexte, il fut question, en particulier, de définir ce qu'est la pensée déductive par opposition avec l'induction, qui n'est au fond qu'une étape de la pensée heuristique et de ce que les Anciens nommaient l'analyse. En effet le "raisonnement par induction" nécessite la méfiance lorsque la recherche de la vérité se content de l'évidence des cas particuliers s'agissant d'une assertion qui porte sur un grand nombre, et surtout un nombre infini d'occurrences : le passage du particulier à l'universel, suppose démonstration, et c'est même là que commencent les mathématiques pour certains auteurs. Cette partie de l'exposé n'ayant donné lieu qu'à quelques lignes dans l'article, une note renvoie à ce développement que l'on peut trouver, outre dans la présente livraison du Miroir, sur le site de l'IREM de Basse-Normandie et sur le site de l'upcbn.

De l'induction

Qu'est-ce que l'induction, par "opposition" à la déduction, qui préside au raisonnement euclidien ? Un exemple bien connu des mathématiciens permet de comprendre la chose : ils l'ont "inventé" comme une sorte de contre-exemple à une idée reçue, qui est que lorsque l'on connaît une suite (finie) de données numériques, ou plutôt quand on en connaît un nombre "assez grand" pour en tirer une loi générale qui semble vouloir se poursuivre "indéfiniment", on pourrait conclure à la "vérité" de cette loi pour le "phénomène observé".

On trouve cela parfois dans des magazines qui nous proposent, souvent l'été sur la plage, de tester nos capacités logiques : « Si je vous dis, 1, 2, 4, 8, 16, saurez-vous me dire le terme de cette suite de nombres, qui s'ensuit logiquement ? ». LA – j'insiste sur LA – réponse qui vient à l'esprit, est – d'aucuns diront "tout naturellement" – est : 32 (auquel succéderait 64, etc.).

Or il s'avère, dans cet exemple, que nous sommes "victimes" d'un fait acquis, ou plutôt d'un automatisme de pensée lié quasi-ataviquement au fait que la duplication – le fait de multiplier par 2 – est l'un des premiers opérateurs "naturels" pour rendre compte de la croissance, en l'occurrence d'une croissance multiplicative.

À tel point que l'histoire du sage jouant aux échecs avec son souverain et demandant pour récompense d'une victoire éventuelle tout le riz que l'on pourrait mettre sur l'échiquier en commençant par un grain sur la première des $8 \times 8 = 64$ cases, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, et ainsi de suite, EN MULTIPLIANT PAR DEUX LE NOMBRE DE GRAINS D'UNE CASE À LA SUIVANTE, est connue de toute antiquité dans un grand nombre de civilisations. Deux ou trois millénaires avant notre ère, les Babyloniens (voire peut-être les Sumeriens), savaient "sommer" le nombre de grains de riz ainsi obtenus, puisqu'ils connaissaient la formule, que nous écrivons de nos jours : $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$ (avec 64 termes), ce que nous écrivons, avec la notation exponentielle (c'est-à-dire avec des exposants) :

$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1$, ce qui, par parenthèse, représente entre 460 et 600 milliards de tonnes de riz (non cuit...) si l'on suppose qu'un gramme de riz contient entre 30 et 40 grains, selon l'espèce.

Il faut cependant mettre l'accent dans cette histoire de jeu d'échecs, sur le fait que le mode de reproduction des termes de la suite est imposé (en lettres capitales, ci-dessus, pour souligner l'importance d'une telle règle

¹ Le 27 janvier 2011 : Quand la raison vacille I – Les monstres côté jardins, et le 17 mars 2011 : Quand la raison vacille II – Démon(s)trer l'incongru.

² Collectif (upcbn, Michel Onfray, dir.). Le canari du nazi. Essais sur la monstruosité. Paris : Autrement, 2012.

dite “de récurrence” ou “d’hérédité”) : c’est la duplication d’un terme à l’autre. Si une telle règle n’est pas explicitée, le test de votre magazine devient en fait sans objet : n’importe quel nombre peut faire suite à 1, 2, 4, 8, 16, et il y a, en toute rigueur, une infinité de réponses possibles, même si l’on se cantonne à une suite de nombres entiers.

Le contre exemple le plus frappant, consiste à décider que le “bon” nombre serait – au hasard – ... 31 ; ce qui, bien sûr, ne préjuge, en rien de plus que précédemment dès lors que la règle n’est toujours pas énoncée, de celui qui s’en suivrait (62 ?, 63 ? ou bien 61 ?).

Le lecteur trouvera ici, un développement de nature mathématique lui permettant d’approfondir cette question cruciale. Il y verra qu’en tout état de cause, induire n’est pas démontrer. Le géomètre est souvent amené à chercher la solution d’un problème que l’on peut exprimer en ces termes : « quelle est la loi générale éventuelle d’un phénomène observé, dont je n’ai pu dénombrer qu’un nombre fini de valeurs numériques lors d’un processus dont la variabilité relève de l’incrémentement par une unité ? ». Pour parvenir à ses fins, le dit géomètre procède le plus souvent par inductions successives, et ne sacrifie à la rigueur qu’au moment de faire la preuve que la suite qu’il a construite, – c’est-à-dire dont il a donné les premiers termes (un seul suffit, à ce stade) et la loi d’engendrement ou d’hérédité, qu’il connaît ou qu’il a obtenue par “analyse”, est la réponse au problème posé, ou même, s’il s’agit d’un phénomène observé dont on ne connaît pas la loi, qu’il existe un modèle, arithmétique ou géométrique, de cette situation qui produit la suite et qu’elle est en adéquation avec le problème posé. C’est en somme la preuve que dans la pratique et n’en déplaise à ceux qui en tiennent pour l’exposé synthétique qu’Euclide a rendu nécessaire a posteriori pour ordonner les connaissances acquises³, les problèmes ont précédé les théorèmes : les problèmes ont été posés et sont restés “ouverts” avant qu’on en trouve la solution.

Notons, pour en finir avec l’idée que l’atavisme de la duplication serait “naturel”, que l’exemple donné ici et précisé plus loin fait usage de figures où des lignes joignent des points d’une circonférence et que ces figures de réseaux ressemblent “assez” au type de “cartes” tressées de roseaux ou de joncs par certaines tribus de navigateurs sur radeaux de l’océan pacifique, “assez” en toute hypothèse pour imaginer une fiction qui ferait de ce problème un très vieux problème d’une autre civilisation dont les premières traces mathématiques se-

raient la suite 1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, etc., que nous venons d’évoquer et que ce qu’on appelle le « cercle de Moser » tente de réifier à grands traits.

Pour simplifier ce premier développement, qui montre qu’il y a loin de l’intuition à la preuve, retenons que la démarche du mathématicien est semi-erratique : il se laisse volontiers aller à l’induction, mais sous contrôle : il sait qu’elle est trompeuse et connaît ses fallacies ; et lorsque l’analyse d’un problème le conduit à une voie plausible, il ne parle pas de théorème, mais de “conjecture”, qu’il va falloir confirmer (ou infirmer). Parfois c’est la communauté, attentive à la rigueur d’une preuve, et donc au faux-pas éventuel (le paralogisme), qui relève une erreur de raisonnement et renvoie le découvreur à ses chères études. Et on a pu voir les plus grands noms de la mathématique, cent fois sur le métier remettre leur ouvrage avant de trouver la voie, de corriger l’erreur, mais aussi parfois de se trouver dans l’impasse ; on a même vu des entêtés persister dans l’erreur sans comprendre la justesse des objections émises, ni même parfois qu’on ait pu oser les émettre...

Il ne sera pas dit que cet aperçu sera dénué de toute monstration de ce qu’est une dé-monstration, et nous allons entrer dans un exercice de style dont le mathématicien a le secret lorsqu’il se fait pédagogue : il invente des “exceptions” comme le grammairien, des “faux-amis” comme le linguiste, des monstres comme le logicien qui veut lutter contre le “bon sens”, le “sens commun” ou le “préjugé”, des “contre-exemples” pour éviter les généralisations abusives ; ici le géomètre se nomme W. O. J. Moser⁴, et il nous a concocté un objet inattendu qu’il va s’agir de démontrer.

Il se trouve en effet qu’une construction de nature géométrique et assez élémentaire produit une suite dont les premiers termes sont : 1, 2, 4, 8, 16, 31.

Prenons une courbe fermée, par exemple un cercle (ce qui ne change rien au résultat du processus engagé, dès lors que l’on n’y accepte pas de points doubles : le lacet se referme sans entrelacs). Plaçons des points sur la circonférence et joignons les deux par deux de toutes les façons possibles, par des lignes que nous supposerons droites pour l’instant : ces “cordes” délimitent à l’intérieur du cercle un certain nombre de “régions” que nous aimerions dénombrer : il est bien entendu que le géomètre souffre de ce genre de TOC, que lui suggère sa longue pratique de voir des problèmes partout, contrairement à d’aucuns qui prétendent avoir réponse à tout.

³ S’il faut louer les vertus de l’exposé hypothético-déductif du dit Euclide, nécessaire à un moment donné de l’histoire, il faut souligner qu’il n’a pas manqué de proposer, par exemple dans ses *Données*, des problèmes à résoudre à l’aide de la kyrielle de théorèmes qu’il énonce et établit, et de problèmes-clés qu’il résout dans ses *Éléments*.

⁴ Il s’agit du mathématicien William Oscar Jules Moser (1927-2009), frère cadet de Leo Moser (1921-1970) mathématicien lui aussi, duquel il dit qu’il lui doit son intérêt pour cette discipline et le donne pour son “premier mentor”. Leo Moser avait d’ailleurs écrit un article sur les dangers de l’induction : “On the danger of induction” (1949). Le problème du “cercle de [W.] Moser” se trouve dans la seconde de ses propres publications, rédigée en collaboration avec Leroy M. Kelly : “On the number of ordinary lines determined by n points”, et date de 1958. Cette communication fut remarquée par A. Dirac, qui écrivit : « Cet article intéressera certainement une large catégorie de lecteurs, en raison de la généralité et de l’importance des problèmes considérés, mais aussi de la nature élémentaire et de la grande ingéniosité des méthodes utilisées ».

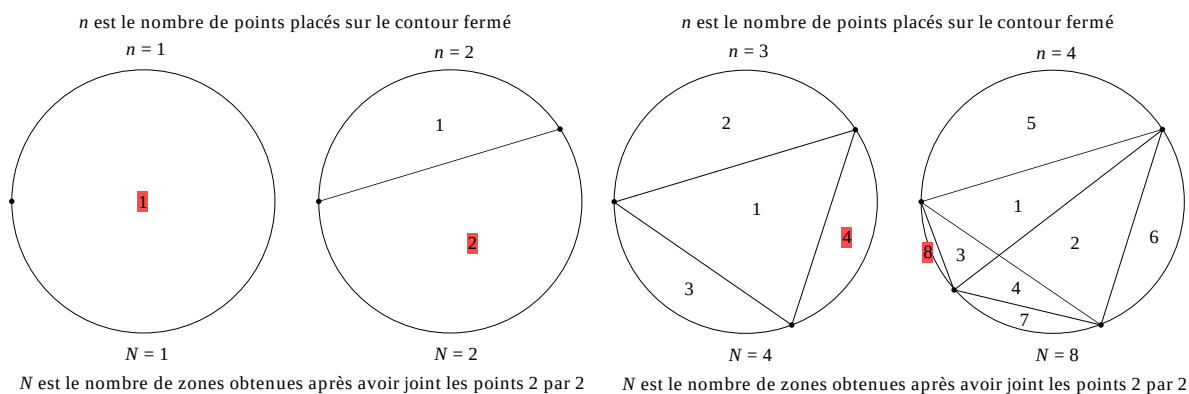
Sur le nombre de lignes quelconques déterminées par n points...

Il est "naturel" – selon René, notre philosophe national qui a (ré)inventé l'analyse des Anciens, au point de parler de sa Géométrie (1637) comme d'une Nouvelle Analyse – d'aller du plus simple au plus complexe ; si je place un point sur le cercle – ce que nous appellerons le rang 1 –, ne pouvant tracer aucune ligne de ce point vers d'autres qui n'existent pas, le cercle ne contient qu'une région : son disque intérieur ; nous dirons qu'au rang 1, le premier terme de la suite que nous construisons est 1.

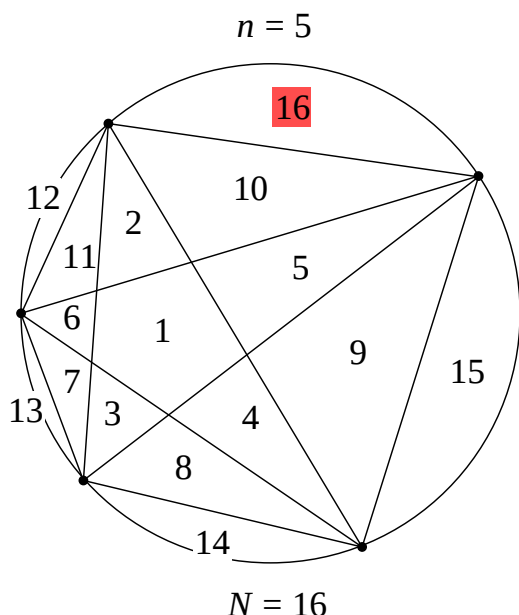
Si je place deux points, une seule corde pourra être tracée, délimitant deux régions ; au rang 2, le second terme de la suite est 2 ; avec trois points, ce sont trois cordes que l'on trace et quatre régions que l'on délimite (l'intérieur du triangle et les trois segments de cercles –

segmenter veut dire découper des morceaux – délimités par ses trois côtés avec les arcs de cercle qu'ils sous-tendent) : au rang 3, le nombre requis est 4.

Quelques tracés vous convaincront sans problème qu'au rang 4, le quadrilatère obtenu (un carré, par exemple) et ses deux diagonales déterminent 4 segments hors du carré et quatre triangles à l'intérieur : ce qui fera 8 régions pour le nombre requis ; passons au pentagone, ou plutôt au pentacle, cette figure intégrant les cinq lignes joignant deux points non consécutifs en plus de ses côtés, dessinant ainsi une étoile à cinq branches de mêmes sommets que le pentagone : un numérotage exhaustif des régions obtenues permet d'affirmer que leur nombre est 16.



n est le nombre de points placés sur le contour fermé



Récapitulons :

$n =$	$N =$
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	?
...	...
n	$N = f(n) ?$

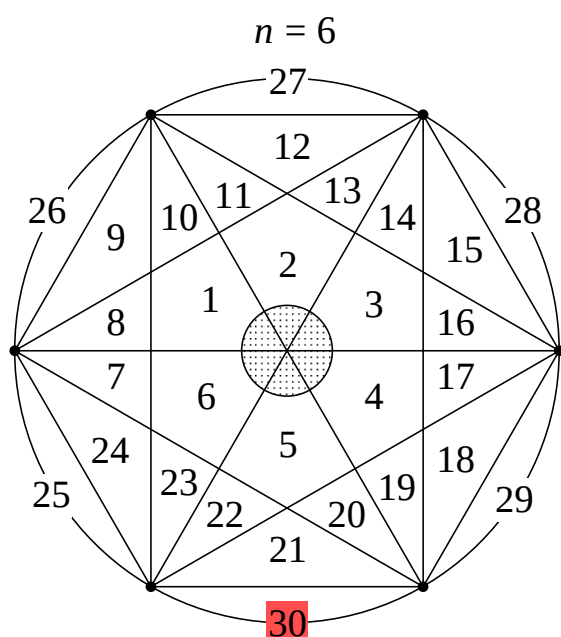
N est le nombre de zones obtenues après avoir joint les points 2 par 2 ; on induirait volontiers, après récapitulation, que N est une puissance de 2

C'est alors que les choses se gâtent un peu. Si la facilité vous a poussé à dessiner des polygones régu-

liers, vous dessinerez un hexagone régulier, formé de six triangles équilatéraux, ayant pour sommet commun

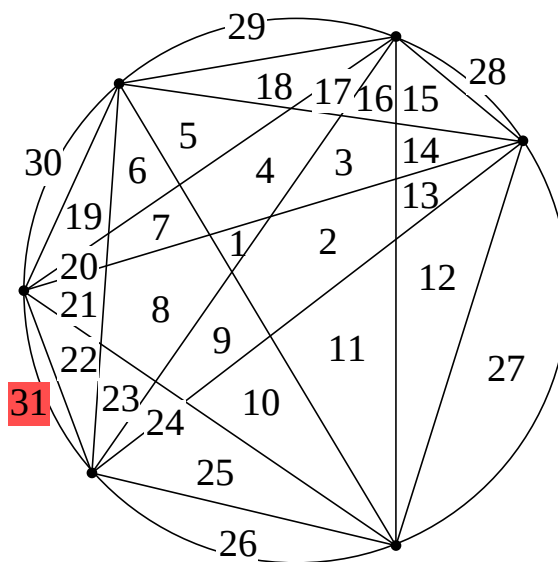
le centre du cercle, et complété de 6 lignes joignant deux points non consécutifs et non diamétralement opposés : ces lignes couperont les six triangles équilatéraux en

quatre parties, qui feront ainsi 24 régions intérieures à l'hexagone, qui ajoutées aux 6 segments de cercle extérieurs, donneront ... 30 régions.



$N = 30$!!!!!

$n = 6$, sous la condition (C)



N (maximal) = 31 !!!!!

On remarque que si l'on dispose les points régulièrement, certaines lignes de jonction se coupent par trois, ce qui diminue le nombre N de zones d'une unité (une zone se trouvant réduite à un point). Serait-ce l'explication de notre déconvenue ? Essayons l'irrégularité et posons la condition (C) : aucune ligne de jonction ne doit passer par un point d'intersection de deux autres ; au besoin, on tracera des lignes courbes pour éviter un tel accident...

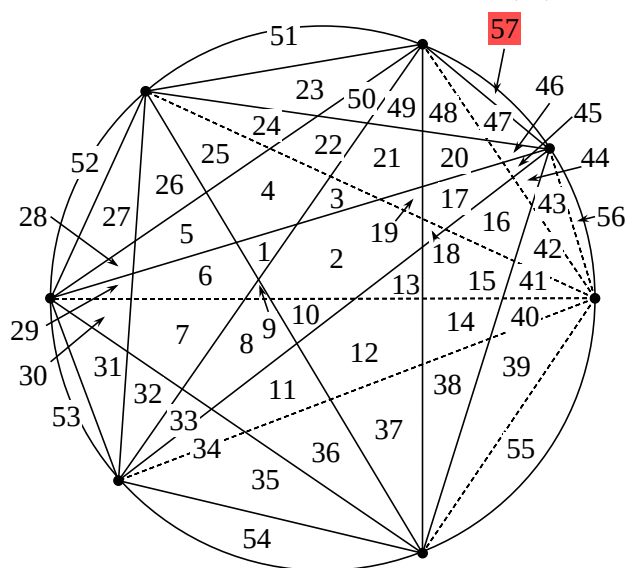
À vouloir simplifier la question par l'usage des polygones réguliers, et à défaut d'avoir précisé les conditions du régionnement, nous venons de passer à côté du nombre requis. Car à y regarder de plus près, au rang 6, nous sommes tombés, pour la première fois, sur une région fantôme, qui peut y être ou ne pas y être : en effet, trois des lignes tracées se rencontrent en un point, le centre du cercle, au lieu de se croiser "au hasard", preuve que notre problème est mal posé, si tant est que notre objectif est de "trouver" 32 puisque telle est notre intuition initiale. Tel que nous l'avons abordé, nous aurions dû dire : disposant des points sur un cercle de façon à former un polygone régulier, combien de régions obtiendrons-nous en les joignant 2 par 2 ? Mais si nous voulons que le "certain nombre de régions" requis soit "maximal", il faut alors ajouter la clause suivante, que nous nommerons (C1) : disposant des points de façon que trois lignes les joignant ne se coupent jamais en un même point ; ou encore : si une ligne droite joignant deux points passe en un point d'intersection de deux autres, il faut l'incurver – éventuellement localement pour éviter le passage par ce point de concours préexistant – pour qu'elle détermine une, et une seule région supplémentaire, non réduite à un point ; alors, au

rang 6, le nombre de régions augmente d'une unité, et vaut 31, mais pas plus, puisqu'incurvant l'un des diamètres de la figure précédente, la ligne courbe obtenue coupera deux autres diamètres pour former un petit triangle supplémentaire : comptez et recomptez, c'est bien 31 et non 32.

Mais alors, qu'en est-il de l'heptagone, régulier ou non, dès lors que la clause (C1) est entendue ? C'est là que le géomètre rompt le pacte euclidien : pour trouver une éventuelle formule répondant à la question – à savoir, une expression générale qui donnerait le nombre maximal N de régions lorsque l'on a disposé n points sur le cercle sous la clause (C1) – l'homme de l'art va tenter de "deviner" le suivant connaissant les précédents, avec l'arrière-pensée implicite que cette formule est accessible puisque le mode de construction semble obéir à une loi de croissance dont le récurrence est sensible : chaque fois qu'une droite rencontre un segment de droite d'un réseau, il va doubler les deux régions dont ce segment est une frontière. Notons que le mathématicien préférera noter ce nombre N sous la forme "fonctionnelle" $f(n)$ ou "indicielle" u_n , puisque la valeur de N change au fil des valeurs successives de l'entier n .

Et pour $n = 7$? Trouverait-on $N = 63$? ou 2 fois 31 moins 1, soit 61 ?

$n = 7$, sous la condition (C)



63 ? 61 ? Que nenni !
 N (maximal) = 57 !!!!!

Récapitulons :

$n =$	$N =$	$\Delta_1 N =$	$\Delta_2 N =$	$\Delta_3 N =$
1	1			
2	2	1		
3	4	2	1	1
4	8	4	2	2
5	16	8	4	3
6	31	15	7	4
7	57	26	11	5 ?
8	99 ?	42 ?	16 ?	
...	...			
n	$N = ?$			

Il y a un accès direct à la solution par cette façon de raisonner, que nous ne développerons pas immédiatement, préférant une voie d'induction pure, qui consiste à se dire que le développement d'une suite de nombres peut être "mesuré" par les écarts entre ses termes. Par exemple, la suite dite "des puissances de 2", à savoir $20 = 1, 21 = 2, 22 = 4, 23 = 8, 24 = 16, 25 = 32, 26 = 64$, etc. obtenue par duplication, est telle que les différences entre deux termes consécutifs suivent la même loi : $2 - 1 = 1, 4 - 2 = 2, 8 - 4 = 4, 16 - 8 = 8, 32 - 16 = 16$, etc. C'est une propriété bien connue des suites géométriques (on dit aussi des lois exponentielles) que leurs différences finies sont aussi géométriques (au même titre, et c'est important de le noter pour rendre sensible le passage des différences finies aux différences infiniment petites qui est l'une des intuitions majeures du Grand Siècle, que les dérivées ou différentielles des fonctions exponentielles sont elles-mêmes exponentielles).

Le réflexe du géomètre est donc de calculer les différences finies "premières" :

$\Delta_1[f(2) - f(1)] = 2 - 1 = 1, \Delta_1[f(3) - f(2)] = 4 - 2 = 2, \Delta_1[f(4) - f(3)] = 8 - 4 = 4, \Delta_1[f(5) - f(4)] = 16 - 8 = 8, \Delta_1[f(6) - f(5)] = 31 - 16 = 15$, etc. (si tant est que l'on ait déterminé la suite des valeurs au delà de $n = 6$) ;

puis ne voyant pas de régularité suffisante dans la suite 1, 2, 4, 8, 15, ... ?, d'en calculer les différences finies (dites secondes pour la suite initiale) :

$\Delta_2[3, 1] = [f(3) - f(2)] - [f(2) - f(1)] = f(3) - 2f(2) + f(1) = 2 - 1 = 1, \Delta_2[4, 2] = [f(4) - f(3)] - [f(3) - f(2)] = f(4) - 2f(3) + f(2) =$

$4 - 2 = 2, \Delta_2[5, 3] = [f(5) - f(4)] - [f(4) - f(3)] = f(5) - 2f(4) + f(3) = 8 - 4 = 4, \Delta_2[6, 4] = [f(6) - f(5)] - [f(5) - f(4)] = f(6) - 2f(5) + f(4) = 15 - 8 = 7$, etc. ;

et, sans barguigner, de réitérer, pour obtenir les différences troisièmes :

$\Delta_3[4, 1] = \Delta_2[4, 2] - \Delta_2[3, 1] = 2 - 1 = 1, \Delta_3[5, 2] = \Delta_2[5, 3] - \Delta_2[4, 2] = 4 - 2 = 2, \Delta_3[6, 3] = \Delta_2[6, 4] - \Delta_2[5, 3] = 7 - 4 = 3$, etc.

et découvrir alors, devant ses yeux émerveillés le début de la suite 1, 2, 3, des nombres entiers naturels, la plus simple des suites arithmétiques, dont les différences finies sont constantes : "émerveillés ? oui mais pas ébahis, car une suite de trois nombres dont on induit une loi générale sans précaution, c'est peut-être trop beau pour être "vrai", c'est-à-dire "général" dans le contexte. Une longue pratique met alors la puce à l'oreille à l'homme de l'art : si la suite des différences troisièmes se poursuit selon une loi arithmétique, il sait que la formule sera polynomiale de degré 4 : en effet, ce qui se passe pour les différences finies ressortit à ce qui se passe pour les différentielles ou dérivées : de même que la dérivée n -ième d'une fonction polynomiale de degré n est constante, ou encore que sa dérivée $(n - 1)$ -ième est arithmétique et que sa dérivée $(n + 1)$ -ième est nulle, les différences finies d'ordre n des valeurs prises par un polynôme de degré n pour des valeurs de sa variable en progression arithmétique sont égales entre elles. Une analogie peu orthodoxe - d'où les guillemets qui encadrent les points délicats de cette analogie, ceux qui ne supportent pas la simple monstration, et suppose-

raient de la démonstration – mais assez prégnante pour être soulignée ici, consiste à remarquer que le développement en série infinie⁵ de la fonction exponentielle, en fait un polynôme “de degré infini”, dont la dérivée terme à terme “jusqu’à l’infini” se trouve “être le même” développement que celui de l’exponentielle, ce qui se traduit par le résultat – connu⁶ pour l’exponentielle de base e – que la fonction $f(x) = e^x$ est sa propre dérivée.

Pour que cette façon de subodorer (le géomètre fait feu de tous les sens) la formule cherchée n’apparaisse pas comme un tour de passe-passe – d’autant que l’induction ne prouve en rien que c’est la bonne –, je dois à la vérité de préciser que l’homme de l’art d’un autre temps aurait très probablement compté sur pièces les nombres requis aux rangs 7 et 8 : il aurait trouvé, avec du temps et du soin, qu’au rang sept, 57 est le nombre de régions, et au rang huit, 99. Fort de cela, la suite des premières différences s’allonge : 1, 2, 4, 8, 15, 26, 42 ; celle des différences secondes aussi : 1, 2, 4, 7, 11, 16 ; ce qui donne 1, 2, 3, 4, 5 pour différences troisièmes. Ce qui aurait renforcé sa conviction d’être proche du but... tout en n’ayant toujours rien prouvé !

Resterait alors à ce géomètre, qui aurait retenu la leçon de Gabriel Cramer (1704-1752) et de ses formules pour résoudre les systèmes de n équations à n inconnues, à dire que, le polynôme cherché, de la forme $a + bn + cn^2 + dn^3 + en^4$ ayant cinq coefficients inconnus (changement de registre, changement de requis... : a, b, c, d, e sont les nouvelles inconnues), il lui suffirait de résoudre le système :

$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 4, f(4) = 8, f(5) = 16$, sans même faire usage de $f(6) = 31$, – ce qui ne manque pas de sel, puisque c’est cette valeur qui nous a détourné de l’emblématique progression géométrique des puissances de 2 –, pour trouver la formule (toujours hypothétique) donnant les nombres requis pour toute valeur de n . Autrement dit, dans le domaine fini des fonctions polynomiales, la suite 1, 2, 4, 8, 16, ... se poursuivrait en quelque sorte “plus naturellement” par 31 que par 32... ce qui n’est pas le moins surprenant.

Le système s’écrit (avec un e “inconnu” qui n’a pas la signification numérique de base du logarithme népérien : c’est un art bien connu, voire pervers, du calculateur algébriste pour se piéger lui-même) :

$$\begin{array}{rcccccc} a & + & b & + & c & + & d & + & e & = & 1 \\ a & + & 2b & + & 4c & + & 8d & + & 16e & = & 2 \\ a & + & 3b & + & 9c & + & 27d & + & 81e & = & 4 \\ a & + & 4b & + & 16c & + & 64d & + & 256e & = & 8 \\ a & + & 5b & + & 25c & + & 125d & + & 625e & = & 16 \end{array}$$

On résout ce système linéaire “par les méthodes habituelles” : par combinaisons d’équations, par la méthode dite “du pivot de Gauss”, par la méthode des déterminants, qui généralise l’emploi des formules de Cramer

(méthode praticable pour n “petit” car elle nécessite, en principe, le calcul de $n + 1$ déterminants), ou, pour qui a entendu parler des déterminants de Vandermonde⁷, par une méthode propre à ce genre de systèmes, liés aux valeurs des diverses puissances d’une variable d’un polynôme, systèmes dont les coefficients sont alors des progressions géométriques.

En l’espèce, l’un quelconque de ces modes de résolution donne : $a = 1, b = -3/4, c = 23/24, d = -1/4, e = 1/24$, ce qui conduit à cette formule :

$$f(n) = \frac{(24 - 18n + 23n^2 - 6n^3 + n^4)}{24}.$$

Reste à montrer que cette formule répond bien au problème. Car jusque là, tout n’est que “conjectures”, et chaque un (qui, prévenu en vaut deux) se doute maintenant que celles-ci constituent un lieu où l’on se perd facilement... L’induction a permis au géomètre d’espérer que le phénomène étudié ait une solution formulable et de mettre en évidence une formule qui lui permettrait peut-être de “prévoir” (d’anticiper sur la connaissance) d’autres résultats par voie de calcul direct, à savoir par application d’une formule ; la construction, poursuivie aux rangs suivants, confirmera ces résultats comme avérés, ce qui renforcera sa conviction que sa “conjecture” est assez bien vue : c’est-à-dire qu’avant d’aller plus loin, sauf s’il est sûr des calculs qui l’ont mené à la formule, il vérifiera qu’avec elle, $f(6) = 31$, que $f(7) = 57$ et que $f(8) = 99$, résultats qui correspondent aux valeurs dénombrées sur les figures ad hoc ; peut-être même, s’il est prudent, calculera-t-il $f(9)$, et, le trouvant égal à 163, comptera-t-il les régions déterminées dans la configuration à 9 points sur le cercle : si ces calculs et dénombrements venaient à le décevoir, ils infirmeraient cette conjecture, ce qui réduirait ses efforts à néant. Notons, pour l’ironie de la chose, que s’il allait jusqu’au rang 10, il aurait un moment d’émoi, puisqu’il trouverait 256, qui est... une puissance de 2, à savoir : $28 = 256$, mais qui n’est pas le “ $29 = 512$ ” qui résulterait de la conjecture $f(n) = 2n - 1$, que l’on aurait induite de $f(6) = 32 = 25$ et qui nous donnerait $f(10) = 29 = 512$!

La démonstration (une preuve obtenue par déduction) reste cependant à faire ; la connaissance d’une formule potentiellement efficace ne suffit pas : l’universalité de son efficacité ou encore sa valeur de vérité, doit être prouvée en toute généralité et non pas seulement éprouvée par quelques cas particuliers, si nombreux soient-ils : c’est-à-dire vérifiée quelle que soit la valeur de n , ou encore “jusqu’à l’infini”. Et c’est là la partie “rigoureuse” requise depuis la période des mathématiques hellénistiques, pour ce qui est de l’Europe.

Plusieurs voies sont possibles, parmi lesquelles deux viennent à l’esprit immédiatement ; 1°) une preuve directe : le processus de construction des régions permet

⁵ Le développement en question s’écrit : $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$.

⁶ Autrement dit : $\frac{d}{dx}(e^x) = 0 + 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{nx^{n-1}}{n \times (n-1)!} + \dots = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots = e^x$.

⁷ Ces systèmes, leurs déterminants et matrices, sont dits de Vandermonde. Une matrice de Vandermonde est de la forme générale : $\begin{bmatrix} \alpha_i^{j-1} \end{bmatrix}_{(1 \leq i \leq \nu, 1 \leq j \leq \nu)}$. Et son déterminant vaut : $\prod_{1 \leq i < j \leq \nu} (\alpha_j - \alpha_i)$.

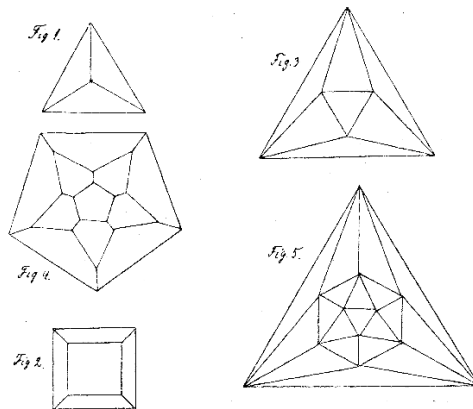
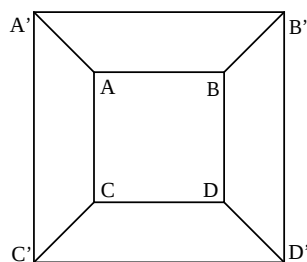
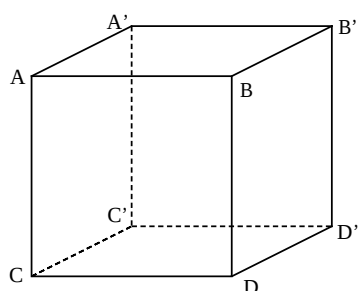
leur dénombrement par un comptage rationnel, puis la construction et la vérification de la dite formule ; 2°) une démonstration dite "par récurrence", mode supérieur de l'induction, dont le principe a été élaboré par Blaise Pascal (1623-1662) dans son traité du Triangle arithmétique (1654) qui porte son nom : le fameux Triangle de Pascal⁸.

1°) La preuve "directe", qui ne suppose pas nécessairement tout le travail qui précède puisqu'elle va conduire à la formule sans en connaître la forme a priori, consiste en ceci : n est le nombre de points situés sur le contour (le donné) ; $R(n)$ est le nombre de régions (le requis). On utilisera en outre : $C(n)$, le nombre de cordes supposées rectilignes tracées pour former le réseau sous la clause (CI) ; $P(n)$, le nombre total de points du réseau, à savoir les n points de la circonférence, plus les points "intérieurs" obtenus par intersection de deux cordes issues de 4 points distincts du contour ; $L(n)$, le nombre de "lignes élémentaires" du réseau, c'est-à-dire, 1°), des segments rectilignes de cordes, reliant deux des points "consécutifs" du réseau, à savoir : ne comportant aucun autre point intérieur entre leurs extrémités, parmi lesquels, 2°), les cordes-segments reliant deux points consécutifs du contour déterminant les régions mixtilignes de la carte, mais aussi 3°) les arcs de cercles (curvilignes) reliant deux points consécutifs du contour et formant ces mêmes zones mixtilignes avec les

cordes-segments du type 2. On peut définir tout point intérieur du réseau comme étant le point d'aboutissement de quatre lignes élémentaires du premier type.

Une formule générale, établie par Euler (elle porte son nom) et concernant initialement les polyèdres (Descartes l'avait formulée dans un texte consacré aux corps solides, et elle ne sera démontrée rigoureusement que par Cauchy au XIX^{ème} siècle), nous dit que les nombres A d'arêtes, F de faces, S de sommets d'un polyèdre, vérifient : $F - A + S = 2$. Transposée, par le même Euler, pour les cartes planes et leur réseau de frontières (celui de notre problème par exemple)⁹, on obtient $F = R(n) + 1$ (car l'extérieur de la courbe fermée représente une "face" du polyèdre dont la carte est une représentation plane : la face "arrière" d'un cube, par exemple, comme on le voit sur la figure suivante), $A = L(n)$ et $S = P(n)$, et cela donne : $R(n) + 1 - L(n) + P(n) = 2$, soit encore : $R(n) = L(n) - P(n) + 1$.

À gauche : figure d'un cube obtenue par projection "ou par aplatissement" : chacune des 5 zones intérieures au cercle représente l'une des cinq faces ABCD, ABB'A', BCC'B', CDD'C' et DAA'D' du cube, et l'étendue hors du cercle représente sa face arrière, A'B'C'D'. À droite : le même traitement appliqué aux cinq polyèdres réguliers, ou corps platoniciens, qui font l'objet de l'attention de Descartes, puis de la démonstration d'Euler, complétée par Cauchy.



Calculons $P(n)$:

Chaque choix de quatre points de la circonférence définit de façon unique un point d'intersection de deux cordes (les diagonales du quadrilatère complet que l'on obtient en joignant les quatre points deux à deux). A contrario, tout point d'intersection de deux cordes, que nous avons appelé "point intérieur" correspond à un ensemble unique de quatre points, c'est-à-dire qu'il n'est

pas situé sur trois cordes, selon la clause (CI) pour définir le problème sans ambiguïté.

En sorte que nous trouvons un nombre total de points intérieurs du réseau égal au nombre de choix de 4 points parmi n , ce qui s'appelle une combinaison ; celle-ci se note $\binom{n}{4}$, et vaut :

$$\binom{n}{4} = (n!) / [(4!) \times (n - 4)!]$$

où $n!$ est la notation de la "factorielle de n ", c'est-à-

⁸ Pascal n'a "fait que" (excusez du peu...) formuler des propriétés des coefficients du développement du binôme, connues en Europe dès la Renaissance, et "son" Triangle... est connu, par exemple des Chinois, depuis belle lurette.

⁹ Le cas des polyèdres entre dans la question plus générale des graphes et de leurs nœuds de la manière suivante : on "aplatit" le polyèdre dans un plan, par une projection classique bien choisie ou par une autre déformation (nommée homéomorphisme) qui ne conduit pas à confondre, dans la représentation produite, deux sommets (devenus des nœuds) et n'introduit pas de nœuds supplémentaires apparents par intersection des apparences des arêtes, devenues des liens rectilignes ou curvilignes entre les nœuds. Ces questions ont produit ce que l'on appelle aujourd'hui la théorie des graphes.

dire du produit de tous les nombres entiers de 1 à n .

En simplifiant ce rapport par $(n-4)!$, on obtient :

$$\binom{n}{4} = [n(n-1)(n-2)(n-3)]/(4!).$$

Et comme $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$,

$$\binom{n}{4} = [n(n-1)(n-2)(n-3)]/24.$$

Et par conséquent, en ajoutant les points de la circonférence :

$$P(n) = n + \binom{n}{4} = n + [n(n-1)(n-2)(n-3)]/24.$$

D'autre part, de chacun des n points de la circonférence partent $(n-1)$ cordes donc autant de lignes élémentaires rectilignes s'arrêtant à la corde qui joint les deux points du dit contour qui encadrent chacun des points de ce même contour, ce qui en fait $n(n-1)$. On notera qu'il faudrait diviser par 2 le nombre $n(n-1)$ pour connaître le nombre $C(n)$ des cordes puisqu'en dénombrant ainsi la totalité des cordes du réseau, chaque corde a été comptée deux fois ; $n(n-1)/2$ est en fait la combinaison qui exprime le choix de 2 points parmi n , ce qui fait bien $\binom{n}{2}$ cordes ; mais qu'en revanche, pour les lignes élémentaires, il en va différemment : n de ces cordes produisent une seule ligne élémentaire, ce sont les côtés du polygone convexe, mais les autres cordes, dont le nombre est égal à $[n(n-1)/2] - n = n(n-3)/2$, produisent deux lignes élémentaires qui joignent un point du contour et un point intérieur. Il y aura donc $n(n-3)$ lignes élémentaires joignant un point du contour et un point intérieur.

De chacun des points "intérieurs" partent 4 segments, ce qui en fait $4 \times \binom{n}{4}$ parmi eux, sont comptés deux fois les segments reliant deux points intérieurs, et ne sont comptés qu'une fois les segments reliant un point intérieur et un point du contour ; si donc on ajoute les segments élémentaires joignant un point intérieur et un point du contour calculé précédemment et deux fois le nombre des côtés du polygone, toutes les lignes rectilignes élémentaires seront comptées deux fois dans la somme suivante :

$4 \times \binom{n}{4} + n(n-3) + 2n = 4 \times \binom{n}{4} + n(n-1)$, qu'il faut diviser par 2 pour avoir la somme de lignes élémentaires ; on obtient : $2 \times \binom{n}{4} + \binom{n}{2}$.

En ajoutant enfin les n lignes élémentaires que constituent les arcs de cercle reliant deux points consécutifs de la circonférence, on obtient le nombre total de "lignes élémentaires", $L(n)$:

$$L(n) = 2 \times \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + n.$$

Reportant dans la formule d'Euler, on obtient :

¹⁰ Il s'agit de l'acronyme de la phrase : Ce qu'il fallait démontrer ; dans le latin savant des premiers temps : Q. E. D. (Quod erat demonstrandum). Le latin comme langue scientifique a perduré jusqu'au XIX^{ème} siècle et au-delà : c'était la langue véhiculaire et académique de l'Europe savante, et les soutenances de thèse, par exemple, se sont faites en latin en Allemagne, quelle que soit la discipline, jusqu'au début du XX^{ème} siècle.

¹¹ Ce qui signifie : "id est" c'est-à-dire... "c'est-à-dire".

¹² Les valeurs données par cette formule pour $n = 1$ à 41 sont successivement : 1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, 99, 163, 256, 386, 562, 794, 1093, 1471, 1941, 2517, 3214, 4048, 5036, 6196, 7547, 9109, 10903, 12951, 15276, 17902, 20854, 24158, 27841, 31931, 36457, 41449, 46938, 52956, 59536, 66712, 74519, 82993, 92171, 102091. Au rang $n = 1000$: $f(n) = 41417624251$.

¹³ Faisant $a = b = 1$ dans les développements ci-dessous de $(a+b)$, $(a+b)^2$, etc., $(a+b)^n$, on fait "abstraction" de ce qui s'y trouve entre parenthèses et qui vaut 1, et on obtient :

$1(a) + 1(b) = 2$; $1(a^2) + 2(ab) + 1(b^2) = 4$; $1(a^3) + 3(a^2b) + 3(ab^2) + 1(b^3) = 8$; ... ; et plus généralement : $(a+b)^n = 2^n$.

¹⁴ L'appellation "binôme de Newton" tient au mérite suivant, bien réel et qu'il partage avec John Wallis, William Brouncker et Nicolas Mercator : il a étendu le développement des polynômes, aux puissances fractionnaires et négatives, dans le cadre nouveau des développements illimités des expressions algébriques comportant des fractions et des racines n -ièmes.

$$R(n) = L(n) - P(n) + 1 = \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + n - n - \binom{n}{4} + 1 = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1.$$

Avec $\binom{n}{4} = [n(n-1)(n-2)(n-3)]/24$, et

$\binom{n}{2} = n(n-1)/2$, on obtient :

$$R(n) = [n(n-1)(n-2)(n-3)]/24 + n(n-1)/2 + 1 = [n(n-1)(n-2)(n-3) + 12n(n-1) + 24]/24 = (n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)/24. \text{ C. Q. F. D.}$$

C. Q. F. D.¹⁰ On notera qu'ici, s'agissant d'un problème de construction (d'une formule), on aurait plutôt écrit : C. Q. F. F., i. e.¹¹ : Ce qu'il fallait faire, mention finale des problèmes résolus, C. Q. F. D. étant la mention finale des théorèmes. Ce problème devient un théorème dès lors que l'on énoncerait la chose ainsi :

Le nombre N de régions découpées sous la clause (CI) [qui rend ce nombre maximal] dans un cercle par les cordes joignant n points de sa circonférence, 2 par 2, est égal à¹² :

$$\frac{(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)}{24}.$$

Il convient de remarquer que la formule, écrite avec les combinaisons, explique la confusion des premiers termes de cette suite de valeurs d'un polynôme précis avec ceux de la progression géométrique de raison 2 et de premier terme 1 ; en effet, on sait (et sinon, on n'en meurt pas), depuis Pascal (au moins...), que : $\binom{n}{4} = \binom{n-1}{4} + \binom{n-1}{3}$, que de même $\binom{n}{2} = \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1}$, et que $\binom{n-1}{0} = 1$.

Donc $R(n) = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1$ peut s'écrire :

$$R(n) = \binom{n-1}{4} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0}.$$

Par conséquent, $R(1) = \binom{0}{0} = 1$,

$$R(2) = \binom{1}{1} + \binom{1}{0} = 1 + 1 = 2,$$

$$R(3) = \binom{2}{2} + \binom{2}{1} + \binom{2}{0} = 1 + 2 + 1 = 4,$$

$$R(4) = \binom{3}{3} + \binom{3}{2} + \binom{3}{1} + \binom{3}{0} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8,$$

$$R(5) = \binom{4}{4} + \binom{4}{3} + \binom{4}{2} + \binom{4}{1} + \binom{4}{0} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16,$$

ce qui résulte d'une propriété bien connue¹³ – et repérée par Pascal – des "coefficients du développement du binôme $(a+b)^n$ – dit un peu abusivement de Newton¹⁴ –, à savoir : La somme des coefficients binomiaux de $(a+b)^n$ est égale à 2^n . À ceci près qu'ici, les choses s'arrêtent au rang 6 : en effet :

$$R(6) = \binom{5}{5} + \binom{5}{4} + \binom{5}{3} + \binom{5}{2} + \binom{5}{1} + \binom{5}{0} = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31,$$

car "il manque" $\binom{5}{5} = 1$, pour faire 32,

$$R(7) = \binom{6}{6} + \binom{6}{5} + \binom{6}{4} + \binom{6}{3} + \binom{6}{2} + \binom{6}{1} + \binom{6}{0} = 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 57,$$

car "il manque" $\binom{6}{6} + \binom{6}{5} = 1 + 6 = 7$ pour faire 64, et ainsi de suite.

Avec cette formule, qu'elle soit combinatoire ou polynomiale, on a maintenant un énoncé synthétique (à partir d'un problème qu'il a fallu auparavant résoudre pour le formuler); l'énoncé est devenu purement formel, et devient réutilisable puisqu'établi sans contestation possible. Il reste que la part la plus exaltante du travail a consisté à chercher la formule soit par induction à valider, soit par dénombrement direct des éléments au rang n et usage de récurrences implicites parce qu'unaniment reconnues comme vérités établies. La leçon est peut-être à retenir pour que la plaisir de faire des mathématiques demeure : le moment de la recherche – et donc des problèmes – est sans doute le plus motivant, quelles que soient les épines qui bordent la voie. Celui de l'application des théorèmes fera de notre discipline une belle au bois dormant pour le plus grand nombre; et qui se soucie, de nos jours, d'aller embrasser une belle endormie dans un roncier?

Dernière remarque, avant que d'aborder une autre forme de démonstration : cette preuve peut faire accroire que l'on a esquivé l'infini : que nenni ! On l'a escamoté, en usant d'un théorème (la relation de Descartes-Euler) énoncé sans démonstration... puisqu'elle est avérée depuis des lustres; il y a toujours nécessité à passer du particulier au général dans une étape de la preuve, à ceci près que cette étape se cache ici dans un énoncé sans démonstration mais universellement admis et qui relève, lui, de processus à l'infini pour sa généralisation. En outre, la connaissance de formules telles que celles permettant le calcul des combinaisons ou $\binom{n}{4}$ même $\binom{n}{2}$ relève de preuves faites par récurrence (c'est l'un des objets dont traite Pascal dans le traité évoqué supra). L'enchaînement des raisons, en mathématiques, relève aussi d'une histoire à l'œuvre.

Il existe des voies bien plus rapides que celles que nous avons empruntées, pour démontrer la conjecture; notre propos n'était pas d'optimiser "notre" démonstration – ah ! la concision et/ou la simplicité tant appréciées d'un argumentaire – ou d'esthétiser – ah ! l'élégance et/ou la beauté tant vantée de certaines démonstrations –, mais plutôt d'indiquer "les voies" de la découverte, et d'éviter la synthèse qui ne rend pas compte de l'élaboration de ces voies, ni du long, voire erratique, procès de leur production. Certes la simplicité et la concision, voire la beauté, d'une démonstration sont à estimer et à rechercher, ne serait-ce que "pour le plaisir"; mais y a-t-il plaisir intellectuel sans compréhension ou révélation du sens de l'intellection et de ses objets? Il n'est sans doute pas indifférent que l'on puisse parler de plai-

sir des sens et du plaisir du sens.

2°) La démonstration par récurrence de la conjecture sur la formule $R(n)$, induite préalablement, consisterait à supposer que cette formule $R(n)$ soit vraie pour les n premiers rangs pour un entier n fini quelconque, comme elle l'est jusqu'au rang 7 (8 ou 9), et à démontrer qu'elle est "héréditaire" : c'est-à-dire que l'introduction d'un $(n+1)$ -ième point sur la circonférence conduit à fabriquer un nombre de régions supplémentaire qui s'avère être exactement la différence entre :

$$R(n+1) = \frac{[(n+1)^4 - 6(n+1)^3 + 23(n+1)^2 - 18(n+1) + 24]}{24}$$

et

$$R(n) = \frac{[n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24]}{24}$$

c'est-à-dire :

$$R(n+1) - R(n) = \frac{[n(n^2 - 3n + 8)]}{6}.$$

Il n'était pas écrit que vous sortiriez de cet article sans pensum(s) :

1°) Mais de quelles voies rapides, simples ou tout simplement belles, nous parle-t-on en cette occurrence?

Cherchez donc ces voies royales; vous en trouverez même sur la toile, qui ne sont d'ailleurs pas toutes exemptes de défauts. Il n'y a rien à gagner : le plaisir n'a pas de prix...

2°) Et comment achever la démonstration par la récurrence esquissée à l'instant?

À vous de jouer pour compter les régions apparues d'une étape quelconque à la suivante... Rien à perdre, si vous comptez bien...

3°) Question(s) ouverte(s) – pour ma part, du moins – : peut-on imaginer un problème "élémentaire" qui conduirait à une suite commençant par : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 63... On aura compris que la réponse est oui, quant à trouver un polynôme produisant ces nombres comme sept premiers termes, mais que la construction d'un problème connaissant une telle réponse (une formule polynomiale) voire même connaissant une série finie relevant d'une formule inconnue, relève de voies inductives ou intuitives autrement plus "problématiques" que le très joli exemple du cercle de Moser, croisé très probablement par son auteur lors de l'exploration, dans le domaine de la combinatoire, du nombre de nœuds d'un réseau. Pendant que vous y serez, pourquoi ne pas vous interroger sur le problème général :

a) de quel polynôme $P(x)$ les nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ..., $2(n-1)$, $2n-1$ constituent-ils les $n+1$ valeurs obtenues pour les entiers x de 0 à n ?

b) peut-on imaginer un problème...?

À suivre dans un prochain numéro : quelques solutions synthétiques du problème de Moser.

Bibliographie sommaire des ouvrages consultés visible en page 3, sous l'éditorial.

(N.B. Le prochain article proposera une bibliographie plus complète, avec des articles, des ouvrages et des URL pour aller plus loin.)

Jean-Pierre Le Goff,

IREM de Basse-Normandie & université populaire de Caen Basse-Normandie, Caen, septembre 2012.