

Un approfondissement pour l'Accompagnement Personnalisé en TS

Approximation de $n!$ et formule de Stirling¹

Introduction

Dans cette étude élémentaire, d'un sujet très connu, abordable avec les connaissances du programme d'un bac scientifique (cf. Sujet bac C Centres étrangers 1994)² ou traité couramment au niveau L1/2, il s'agit d'illustrer la mise en œuvre d'idées et de méthodes mathématiques intéressantes en soi, qui peuvent être réinvesties dans d'autres problèmes. Nous nous proposons d'obtenir une information quantitative (déduite d'une vision géométrique des valeurs en jeu et exprimée avec les fonctions disponibles en TS) sur la croissance de la suite factorielle et le résultat asymptotique dû à A. De Moivre et J. Stirling (vers 1730)³.

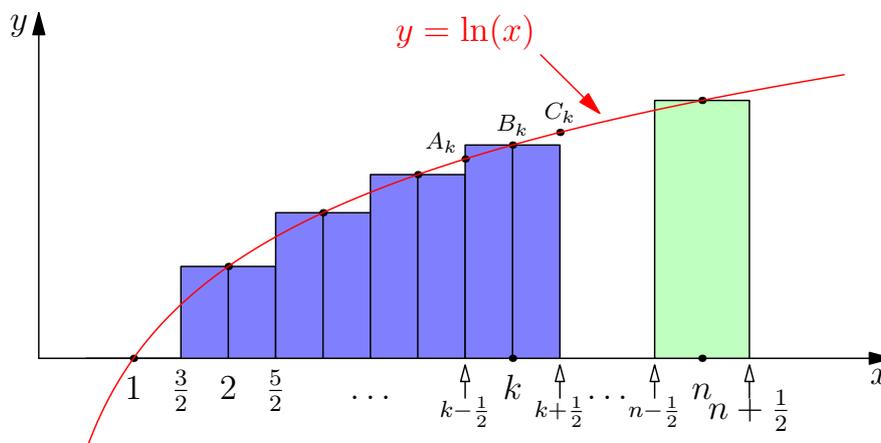
Les deux idées D'une part, utiliser deux propriétés fondamentales de la fonction logarithme népérien : La fonction \ln aplatit les fortes variations et transforme

les produits en somme. En effet le quotient $\frac{(n+1)!}{n!}$ tend vers plus l'infini, ce qui montre que la croissance de $n!$ est plus rapide que toute suite géométrique. D'où l'idée de s'intéresser à la suite $u_n = \ln(n!)$ dont le rapport de deux termes consécutifs tend vers 1.

D'autre part, nous pouvons écrire $u_n = \sum_{k=1}^n \ln(k) = \sum_{k=2}^n \ln(k)$, d'où l'idée de l'interprétation de cette somme comme approximation d'une intégrale que nous saurons expliciter.

Prérequis Les fonctions logarithme népérien et exponentielle, les bases du calcul intégral, les théorèmes de convergence des suites réelles (existence de la limite pour les suites croissantes majorées, obtention de limite par encadrement.)

L'intégrale I_n approximant $\ln(n!)$



Pour évaluer la somme $\sum_{k=2}^n \ln(k)$, nous introduisons un repère orthonormé dans le plan et interprétons (voir figure ci-dessus) ses termes comme des mesures d'aires de rectangles de même largeur 1 (en abscisse) et de hauteurs $\ln(k)$ (en ordonnée). Pour la suite de ce travail, nous considérons vis-à-vis de ce repère, la courbe \mathcal{C} représentative de la fonction \ln , les points

$A_k (k - \frac{1}{2}, \ln(k - \frac{1}{2})) ; B_k (k, \ln(k)) ; C_k (k + \frac{1}{2}, \ln(k + \frac{1}{2}))$ et le domaine Δ constitué des points :

$\{M(x, y) \mid \frac{3}{2} \leq x \leq n + \frac{1}{2} \text{ et } 0 \leq y \leq \ln(x)\}$.
Nous approximations la somme u_n par l'aire de Δ qui est égale à $\int_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(t)dt$, que nous désignons par I_n .

¹Cet article n'est pas une "activité clé en main" à proposer sans accompagnement, mais seulement une suggestion fondée sur le programme 2013, que chaque professeur pourra exploiter à sa guise.

²<http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/CentresetrangersCjuin1994.pdf>

³Les lecteurs intéressés pourront consulter un article approfondi de D. Lanier et D. Trotoux, animateurs de l'IREM de Basse-Normandie, sur les questions auxquelles A. De Moivre et J. Stirling ont apporté leur réponses, ainsi que sur les méthodes mises en œuvre pour trouver des développements en séries de $\ln(n!)$. Le document est disponible à cette adresse [http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire des maths/pdf/Formule de Stirling.pdf](http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/pdf/Formule%20de%20Stirling.pdf)

Majoration de l'erreur $u_n - I_n$

D'après la relation de Chasles, nous avons :

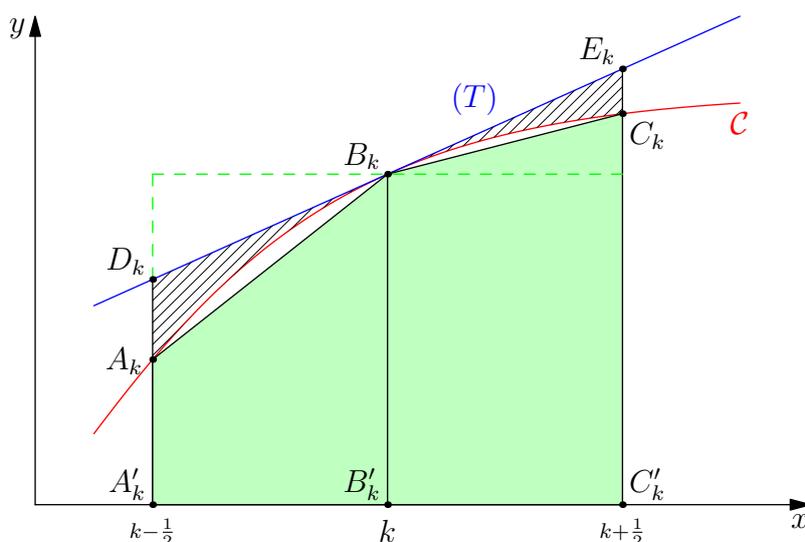
$$u_n - I_n = \sum_{k=2}^n a_k \text{ où } a_k = \ln(k) - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(t) dt.$$

Introduisons les points $A'_k(k - \frac{1}{2}, 0)$, $B'_k(k, 0)$, $C'_k(k + \frac{1}{2}, 0)$, la tangente (T) à C en B_k dont une équation est $y = \ln(k) + \frac{1}{k}(x - k)$, puis les points D_k (resp. E_k) d'intersection entre (T) et $(A_k A'_k)$ (resp. $(B_k B'_k)$). Leurs coordonnées sont : $(k - \frac{1}{2}, \ln(k) - \frac{1}{2k})$

pour D_k , (resp. $(k + \frac{1}{2}, \ln(k) + \frac{1}{2k})$ pour E_k).

Le rectangle "milieu" construit sur le segment $[A'_k C'_k]$ de hauteur $[B'_k B_k]$ a même aire que le trapèze $A'_k D_k E_k C'_k$ (voir figure ci-dessous). Cette aire vaut $\ln(k)$.

L'aire de la partie hachurée Θ_k (comprise entre C et (T)) a pour valeur a_k .



D'une part, d'après la concavité de la fonction \ln^4 , tout arc de C est situé sous la tangente (T) .

D'autre part, tout arc de C est situé au dessus de la corde joignant ses extrémités. Ici, $B_k \widehat{C}_k$ est au dessus de $[B_k C_k]$ et $A_k \widehat{B}_k$ au dessus de $[A_k B_k]$. Il s'ensuit que la partie hachurée est incluse dans la réunion des domaines triangulaires $\text{Tr}1_k(A_k B_k D_k)$ et $\text{Tr}2_k(B_k C_k E_k)$.

Il en découle :

$$0 \leq a_k \leq \frac{1}{4} \left(\ln(k) + \frac{1}{2k} - \ln(k + \frac{1}{2}) \right) + \frac{1}{4} \left(\ln(k) - \frac{1}{2k} - \ln(k - \frac{1}{2}) \right) \text{ soit en simplifiant, } 0 \leq a_k \leq \frac{1}{4} \ln \left(\frac{k^2}{k^2 - \frac{1}{4}} \right).$$

Selon la propriété⁶ $\ln(1+x) \leq x$ si $x > -1$, puisque $\frac{k^2}{k^2 - \frac{1}{4}} = \frac{4k^2}{4k^2 - 1} = 1 + \frac{1}{4k^2 - 1}$, nous concluons que

$$a_k \leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{4k^2 - 1}. \text{ De plus, } \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right). \text{ De cela, nous déduisons :}$$

$$\text{Pour tout } k \geq 2, \quad 0 \leq a_k \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right), \text{ d'où par sommation, } 0 \leq \sum_{k=2}^n a_k \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right).$$

Le télescopage des termes consécutifs entraîne $\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}$, ce qui nous conduit à l'encadrement suivant de $u_n - I_n$:

⁴Cette notion ne figurant pas au programme de TS, on peut justifier ce point en invoquant, par exemple la décroissance la fonction dérivée sur \mathbb{R}^+ ou par l'étude de variations de fonctions auxiliaires.

⁵ $\lambda(S)$ est la mesure de l'aire de la partie S .

⁶Cette inégalité aussi liée à la concavité de la fonction \ln , peut être facilement établie en TS.

Formule asymptotique pour $n!$

Nous allons maintenant établir l'existence d'une constante K telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n + \frac{1}{2})^{(n + \frac{1}{2})} e^{-n}}{n!} = K$.

Nous reprenons les inégalités obtenues précédemment pour la suite a_k :

$$\text{Pour tout } k \geq 2, \quad 0 \leq a_k \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right).$$

Posons $V_n = \sum_{k=2}^n a_k$. Cette suite est croissante ($V_{n+1} - V_n = a_{n+1}$ qui est positif). En reprenant l'encadrement de a_k rappelé, nous déduisons comme précédemment que $V_n \leq \frac{1}{24}$.

D'où la convergence de V_n vers V , tel que $V \leq \frac{1}{24}$.

Majorons alors la suite $V - V_n$: pour $p \geq n$, $V_p - V_n = \sum_{k=n+1}^p a_k$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} (V_p - V_n) = V - V_n$

$$\sum_{k=n+1}^p a_k \leq \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2p+1} \right) \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2n+1} \right)$$

puis par passage à la limite ($p \rightarrow +\infty$) on obtient : $0 \leq V - V_n \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2n+1} \right)$.

Or, $V_n = u_n - I_n = \ln(n!) - (n + \frac{1}{2}) \ln(n + \frac{1}{2}) + n - 1 + \frac{3}{2} \ln(\frac{3}{2})$. D'où :

$$0 \leq V - \ln(n!) + (n + \frac{1}{2}) \ln(n + \frac{1}{2}) - n + 1 - \frac{3}{2} \ln(\frac{3}{2}) \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2n+1} \right)$$

$$0 \leq \ln \left(\frac{(n + \frac{1}{2})^{(n + \frac{1}{2})} e^{-n}}{n!} \right) + V + 1 - \frac{3}{2} \ln(\frac{3}{2}) \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2n+1} \right)$$

On en déduit alors en faisant tendre $n \rightarrow +\infty$ que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n + \frac{1}{2})^{(n + \frac{1}{2})} e^{-n}}{n!} = K \quad \text{où } K = e^{\frac{3}{2} \ln(\frac{3}{2}) - V - 1}$$

Ce n'est pas la formule de Stirling habituelle, mais nous la retrouvons en remarquant que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n + \frac{1}{2})^{(n + \frac{1}{2})}}{n^{(n + \frac{1}{2})}} = e^{\frac{1}{2}} \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n = e^{\frac{1}{2}} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n + \frac{1}{2}}{n} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Il s'ensuit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{(n + \frac{1}{2})} e^{-n}}{n!} = K' \quad \text{où } K' = e^{\frac{3}{2} \ln(\frac{3}{2}) - V - \frac{3}{2}} \quad (K' = \frac{K}{\sqrt{e}})$$

La constante K' peut être déterminée indirectement par la méthode⁷ des intégrales de Wallis.

Considérons la suite J_m définie pour $m \in \mathbb{N}$ par $J_m = \int_0^1 (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} dt$.

En dérivant la fonction $f(t) = -\frac{t}{2} \times \frac{(1 - t^2)^{\frac{m+2}{2}}}{\frac{m+2}{2}}$ nous obtenons :

$$f'(t) = \left(-\frac{t}{2} \right) (-2t(1 - t^2)^{\frac{m}{2}}) - \frac{1}{2} \frac{(1 - t^2)^{\frac{m+2}{2}}}{\frac{m+2}{2}}$$

$$f'(t) = t^2(1 - t^2)^{\frac{m}{2}} - \frac{1}{2} \frac{(1 - t^2)^{\frac{m+2}{2}}}{\frac{m+2}{2}}$$

$$f'(t) = (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} - (1 - t^2)^{\frac{m}{2} + 1} - \frac{1}{2} \frac{(1 - t^2)^{\frac{m+2}{2}}}{\frac{m+2}{2}}.$$

Nous évaluons alors $\int_0^1 f'(t) dt$ de deux façons.

Comme $f(0) = f(1) = 0$:

$$0 = \int_0^1 (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} dt - \left(1 + \frac{1}{m+2} \right) \int_0^1 (1 - t^2)^{\frac{m+2}{2}} dt,$$

⁷méthode que l'on peut mettre à la portée du programme de TS en simulant la formule d'intégration par parties pour obtenir la relation de récurrence entre les intégrales. Dans l'article de W. Feller cité dans la bibliographie, l'expression de $\ln(K')$ est obtenue directement comme valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{\sin \pi t}{\pi}\right) dt$, qui vaut $-\frac{1}{2} \ln(2\pi)$. La justification de ce résultat passe par l'identité $t \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{k^2} \right) = \frac{\sin \pi t}{\pi}$ qui n'est pas à la portée du programme de TS.

ce qui donne $\frac{m+3}{m+2}J_{m+2} = J_m$.

Avec $J_0 = 1$ et $J_1 = \frac{\pi}{4}$ (aire du quart du disque unité),⁸

la relation de récurrence $(m+3)J_{m+2} = (m+2)J_m$

conduit à $J_{2m} = \frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m+1)!}$ pour $m \in \mathbb{N}$

et $J_{2m-1} = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \frac{\pi}{2}$ pour $m \in \mathbb{N}^*$.

D'après la positivité de l'intégration,

pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $0 < J_{2m} \leq J_{2m-1} \leq J_{2m-2}$

d'où : $1 \leq \frac{J_{2m-1}}{J_{2m}} \leq \frac{J_{2m-2}}{J_{2m-1}}$

Ayant $\frac{J_{2m-2}}{J_{2m}} = \frac{2m+1}{2m}$, nous obtenons par enca-

drement $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{J_{2m-1}}{J_{2m}} = 1$. En utilisant les expressions de J_{2m} , de J_{2m-1} et la substitution de $n!$ par $\frac{n^{(n+\frac{1}{2})}e^{-n}}{K'}$ nous déduisons $K'^2 = \frac{1}{2\pi}$.

Nous pouvons donc conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2\pi n} \frac{n^n e^{-n}}{n!} = 1$. Une approximation de $n!$ est alors $S_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

Cette dernière est d'autant plus précise⁹ que n est grand. Nous notons $\varepsilon_n = \frac{n! - S_n}{n!}$ l'erreur relative commise.

Illustrons comme précédemment l'approximation obtenue :

n	1	2	3	4	5	6
S_n	0.922137	1.919004	5.836209	23.506175	118.019167	710.078184
$n!$	1	2	6	24	120	720
ε_n	0.077862	0.040497	0.027298	0.020576	0.016506	0.013780

n	7	8	9	50	100
S_n	4980.395831	39902.3954527	359536.872842	$3.03634459394 \cdot 10^{64}$	$9.32484762527 \cdot 10^{157}$
$n!$	5040	40320	362880	$50! = 30414093! \dots /0000$	$100! = 9332621544! \dots /0000$
ε_n	0.011826	0.010357	0.009212	0.001665	0.000832

L'observation des valeurs obtenues nous suggère de produire une preuve de la minoration de $n!$ par S_n . Nous nous proposons donc d'examiner la suite $w_n = n! n^{-(n+\frac{1}{2})} e^n$. C'est l'objet de la section suivante.

Un deuxième encadrement de $n!$

Nous allons, indépendamment de la preuve précédente, établir de nouveau grâce à un encadrement lié à des aires de trapèzes, que la suite $w_n = n! n^{-(n+\frac{1}{2})} e^n$ converge vers une limite finie C . C vaut $\sqrt{2\pi}$ d'après la

méthode des intégrales de Wallis. Nous présentons en la simplifiant, une approche figurant dans la fin de l'article de H. Robbins¹⁰ (cf. bibliographie) attribuée à Cesàro.

$$\text{Nous avons } \ln \left(\frac{w_n}{w_{n+1}} \right) = \ln \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^{(n+\frac{1}{2})} \right] - 1 = \frac{2n+1}{2} (\ln(n+1) - \ln(n)) - 1.$$

Nous cherchons maintenant à encadrer $(\ln(n+1) - \ln(n))$ pour en déduire notre preuve de la minoration de $n!$ par S_n .

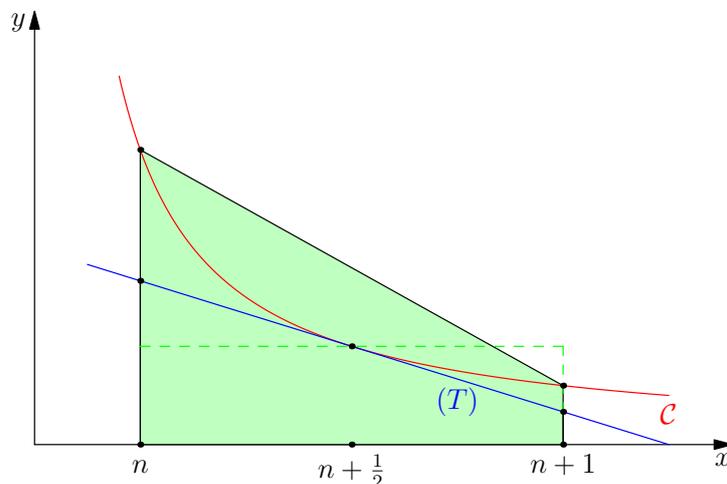
⁸La fonction intégrée sur $[0,1]$ est $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ dont la courbe est le quart de cercle d'équation $y^2 + x^2 = 1; x \geq 0; y \geq 0$

⁹L'erreur relative tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, ce qui n'était pas le cas pour la suite m_n obtenue dans un premier temps. S_n semble cependant être une approximation par défaut, moins précise que m_n pour les petites valeurs de n .

¹⁰Herbert Robbins y a établi l'encadrement $w_n = C e^{r_n}$ où $\frac{1}{12n+1} \leq r_n \leq \frac{1}{12n}$, en utilisant le développement en série de $\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$, puis une majoration et une minoration par des séries géométriques.

L'encadrement de $(\ln(n+1) - \ln(n))$ qui correspond à l'aire du domaine limité par la courbe de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$, l'axe (Ox) , et les droites verticales d'abscisse n et $n+1$ découle de la convexité de la fonction :

le trapèze tangent au point milieu d'abscisse $n + \frac{1}{2}$ (d'aire égale à celle du rectangle "milieu") est inclus dans le domaine, alors que le trapèze construit avec la corde d'extrémités $(n, \frac{1}{n})(n+1, \frac{1}{n+1})$ le contient.



$$\text{Donc } \frac{1}{2n+1} \leq (\ln(n+1) - \ln(n)) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \text{ ou encore } \frac{2}{2n+1} \leq (\ln(n+1) - \ln(n)) \leq \frac{2n+1}{2n(n+1)}.$$

$$\text{Nous obtenons alors } 0 \leq \ln \left(\frac{w_n}{w_{n+1}} \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

En introduisant la suite $t_n = w_n e^{-\frac{1}{4n}}$, il s'ensuit que $\ln \left(\frac{t_n}{t_{n+1}} \right) \leq 0$, donc la suite (t_n) est croissante.

De façon analogue, $0 \leq \ln \left(\frac{w_n}{w_{n+1}} \right)$ entraîne que la suite (w_n) décroît. Comme pour tout n , $t_n \leq w_n$, leur convergence découle du théorème sur les suites monotones bornées.

Dès lors $\lim_{n \rightarrow \infty} (w_n - t_n) = 0$. Les deux suites convergent donc vers la même limite C . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n \leq C \leq w_n$. Cela permet d'obtenir des approximations de C avec une précision arbitraire. Par exemple avec $w_1 = e$ et $t_1 = e^{\frac{3}{4}}$, on trouve $2,117 \leq C \leq 2,719$. Enfin sachant que d'après l'étude de la section précédente, $C = \sqrt{2\pi}$, nous pouvons conclure que :

$$\left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} \leq n! \leq \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} e^{\frac{1}{4n}}$$

Conclusion

Cette étude nous a permis de trouver une approximation de $n!$ dans une première approche intuitive, basée sur une interprétation géométrique de la valeur de la suite $\ln(n!)$, puis au delà, d'obtenir un encadrement

final asymptotiquement convergent. Ce dernier encadrement ouvre alors la porte à une preuve assez élémentaire, quoique difficile pour le niveau TS, du théorème de De Moivre-Laplace.

Bibliographie

- E. Lesigne**, 2001, *Pile ou Face, Une introduction aux théorèmes limites du Calcul des Probabilités*. Ed. Ellipses.
D. Lanier & D. Trotoux, 1998, *La formule de Stirling in Analyse et démarche analytique*, IREM de Reims, p. 231-286.
H. Robbins, 1955, *A remark on Stirling's formula*. Amer. Math. Monthly, 62 : p. 26-29.
R. Johnsonbaugh, 1981, *The trapezoid rule, Stirling's formula, and Euler's constant*. Amer. Math. Monthly, 88 : p. 696-698.
W. Feller, 1967, *A direct proof of Stirling's formula*. Amer. Math. Monthly, 74 : p. 1223-1225.
W. Feller, 1968, *Correction to : A direct proof of Stirling's formula*. Amer. Math. Monthly, 75 : p. 518.
D. Dominici, Feb 2006, *Variations on a Theme by James Stirling*. arXiv :math/0603007v1 [math.CA].