À la rencontre de la croix et du pentagone célestes (I)
Activités de découverte pour les élèves de troisième et du lycée

Résumé : nous vous présentons de nouveaux résultats et activités autour d'un très ancien sujet : le "**Nombre d'Or**". Quand nous étudions les différentes constructions des "Rectangles d'or", il est intéressant d'observer la succession de leurs diagonales. Les figures montrent l'existence d'un pentagone non régulier mais réellement esthétique auquel nous nous sommes intéressés, ainsi que certaines croix formées par les diagonales de rectangles d'or successifs. Nous les avons appelés : "**Pentagone Céleste**" et "**Croix Céleste**" en référence à la Croix du Sud, visible dans le ciel de l'hémisphère Sud où est né l'un de nous : Ruben Rodriguez. Nous calculons les valeurs algébriques exactes (avec des radicaux) des lignes trigonométriques des angles des pentagones célestes ainsi que la mesure de leurs côtés. Nous prouvons que les branches des « Croix Célestes » ont beaucoup de propriétés des suites de Fibonacci généralisées. Nous proposons ainsi des activités de niveaux variés qui peuvent être présentées tant aux élèves du lycée qu'aux élèves-professeurs de l'Université.

Abstract : we present below new results and activities about a very ancient subject : the Golden Number. When constructions of Golden Rectangles are studied, it is natural to observe the succession of their diagonals. The figures show the existence of an exciting pentagon, not regular but really esthetic. We have named it "the Celestial Pentagon" in memory of the South Cross visible in the sky of the south hemisphere where Ruben Rodriguez is born. It is well known that many connections between Fibonacci sequences and the succession of the Golden Rectangles exist. We give the exact algebraical measure of the trigonometric lines of the angles of the celestial pentagon, then we prove that the branches of what we call the "Celestial Cross" have many fine properties similar to the Fibonacci sequences ones. These activities are of different levels of difficulty and can be presented to future teachers as well as to seventeen years old students.

Resumen : les presentamos nuevos resultados y actividades alrededor de un muy antiguo tema; el "Numero de Oro". Cuando estudiamos diferentes construcciones del rectángulo de oro es natural de observar la sucesión de sus diagonales. Las figuras muestran un muy interesante pentágono que no es regular pero realmente estético y nos interesó, y, también la Cruz que forman las diagonales de dos Rectángulos de Oro sucesivos. Lo hemos llamado el "Pentágono Celeste" recuerdo a la Cruz del Sur que se vé en el cielo del sur-hemisferio donde nací Ruben Rodriguez. Es bien conocido que hay muchas conexiones entre las series de Fibonacci y las sucesiones de los rectángulos de oro. Calculamos el valor algébrico de las lineas trigonométricas de los ángulos de los pentágonos celestes y de sus lados. Probamos que las ramas de lo que llamamos la "Cruz Celeste" tienen muchas propiedades de las series de Fibonacci. Estas diferentes actividades son de dificultades variadas, entonces pueden ser propuestas a los estudiantes hasta el final del liceo superior, y también a los estudiantes profesores de la Universidad.

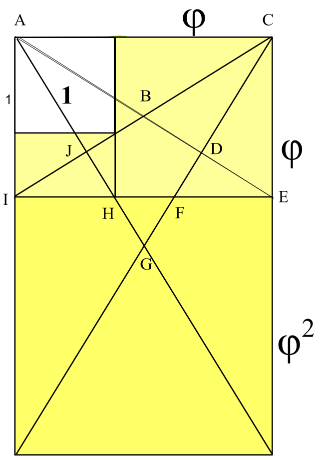
I – INTRODUCTION

Le nombre d'or et ses acolytes : rectangle d'or, pentagone régulier et autres suites de Fibonacci n'ont pas fini de vider les encriers comme le montrent par exemple les quatre articles « Activités autour du nombre d'or » mis en ligne récemment par l'un de nous à la demande du rectorat de l'académie de Caen.[1] Dans cet article nous vous présentons des thèmes d'activités autour de propriétés découvertes par Ruben Rodriguez-Herrera à cette occasion en espérant qu'ils amusent les élèves et inspirent le professeur.

Cet article sera suivi d'un second de Jean-Pierre Le Goff présentant un aspect historique et surtout heuristique de ce « nouvel être géométrique ».

Nous vous montrons donc dans ces deux articles comment des aspects remarquables d'une notion peuvent passer inaperçus pendant... plus de 2000 ans !

Rappelons tout d'abord comment on trace de façon itérative des rectangles d'or pour construire une « spirale rectangulaire ».



Il suffit tout d'abord d'adjoindre au premier rectangle d'or (en jaune pâle) de côtés 1 et φ^{-1} un carré de côté 1. On obtient un rectangle d'or de côtés de mesures 1 et φ, car $\varphi^{-1} = \varphi - 1$, ensuite un rectangle de côtés φ et φ^2 ; en effet, à cause de l'équation caractéristique de φ, on a : $\boxed{\varphi^2 = \varphi + 1}$.

Nous avons ainsi dessiné les trois premiers rectangles d'or afin qu'apparaisse le début de la spirale rectangulaire formée par les diagonales des carrés successifs. Il est intéressant de remarquer que ces diagonales mesurent respectivement :

$\sqrt{2}$; $\sqrt{2}\varphi$; $\sqrt{2}\varphi^2$.

Qu'en est-il des diagonales des rectangles d'or ?

[1] Autour du nombre d'or, site de l'IREM de Basse-Normandie, section Relations internationales.

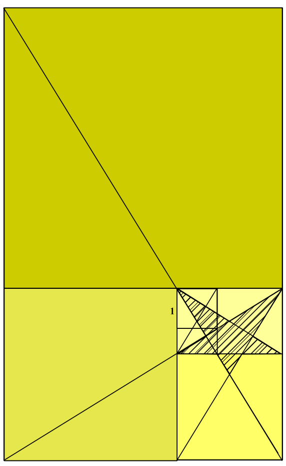
Le nombre d'or n'en finit pas d'exercer sa fascination tant chez les mathématiciens que les philosophes et les architectes, parfois d'ailleurs de façon peu crédible. Nous nous contenterons ici de vous proposer quelques remarques et calculs à propos d'un pentagone non régulier mais très particulier que nous appellerons « pentagone céleste » qui apparaît naturellement lorsque l'on effectue des constructions de rectangles d'or. Ce pentagone est créé (voir figure ci-dessus) lorsque l'on trace de façon itérative des rectangles d'or pour construire une « spirale rectangulaire ».

Supposons que nous sachions construire un rectangle d'or de côtés de mesure 1 et φ où φ désigne le nombre d'or : $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Les nombreuses méthodes à la règle et au compas, par pliages, etc. sont bien connues, voyez par exemple les articles cités plus haut.

Il est facile de construire à partir d'un rectangle d'or de côtés de mesure 1 et φ, le rectangle d'or « suivant » de côtés de mesures φ et φ^2. Rappelons l'équation vérifiée par φ :

$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ dont on déduit $\varphi^{-1} = \varphi - 1$

Dans la figure suivante nous avons fait apparaître un rectangle d'or supplémentaire et hachuré un pentagone non régulier formé par les diagonales successives des rectangles d'or. Certaines de celles-ci sont portées par une même droite à cause de la proportionnalité des côtés successifs des rectangles d'or (voyez les articles déjà cités).



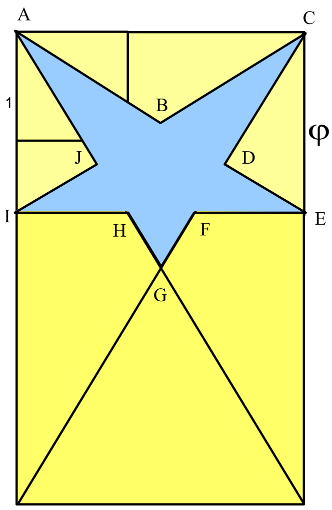


Figure générale montrant les diagonales portées par une même droite, cette propriété pourra être prouvée en classe avec l'aide du professeur. Le carré noté 1 est le premier carré, de côté 1, qui permet de construire le rectangle d'or de côtés 1 et φ.

Figure agrandie : le pentagone étoilé céleste a pour sommets ACEGI et pour contour : ABCDEFGHIJA.

De nombreux calculs de niveaux variés peuvent être effectués sur ce pentagone, nous vous proposons pour un niveau « plus facile » le calcul de ses angles, puis un autre « plus difficile » le calcul des lignes trigonométriques de ces angles sous forme algébrique (i.e. avec des radicaux) ensuite le calcul de ses côtés puis le calcul de son ellipse circonscrite. Le professeur pourra ainsi juger de ce « jusqu'où les élèves pourront aller » selon leur niveau et il est conseillé de proposer les activités en travail par sous-groupes. Pour les plus grands nous introduirons la notion de « Croix Céleste » et nous étudierons ses rapports avec le nombre d'or.

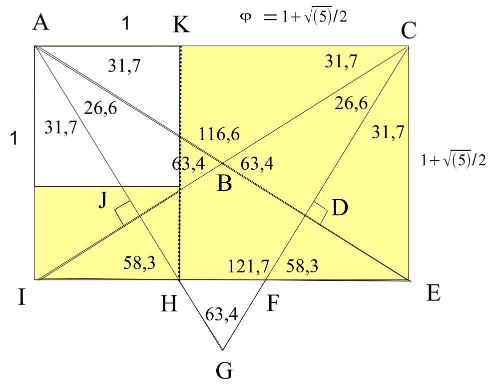
II – Calcul des mesures des angles du pentagone étoilé céleste (difficulté moyenne)

La figure suivante présente quelques propriétés observables et calculables de ce pentagone étoilé céleste.

Nous pouvons demander aux élèves de vérifier si la calculatrice donne ces résultats au dixième de degré près. La perpendicularité de certaines diagonales des rectangles d'or successifs nous permet de proposer **une construction simple du pentagone étoilé céleste (difficulté moyenne)** :

- Construire par pliages ou à la règle et au compas un rectangle d'or ACEI ;
- Tracer ses deux diagonales [IC] et [AE] qui se rencontrent en B ;
- Mener par A et C les droites perpendiculaires à ces deux diagonales qui se rencontrent en G ;

Alors **le pentagone étoilé ABCEFGHIJ est céleste**.



Par définition du nombre d'or les triangles qui forment les rectangles d'or successifs ont leurs côtés proportionnels et certaines diagonales ont même support. Les triangles AIH, HKA, CEF, IEC, IAC sont donc semblables et **les diagonales [AG] et [IC] sont orthogonales ainsi que [CG] et [AE]**. Nous reviendrons dans les paragraphes suivants sur cette propriété remarquable.
Nous en déduisons les valeurs des angles :

- les angles $\widehat{\mathrm{IAH}}$, $\widehat{\mathrm{EAC}}$, $\widehat{\mathrm{ACI}}$, $\widehat{\mathrm{FCE}}$, $\widehat{\mathrm{GAI}}$, $\widehat{\mathrm{GCE}}$ sont égaux et ont pour mesure 31,7° au dixième de degré près
- les angles $\widehat{\mathrm{AHE}}$ et $\widehat{\mathrm{FCI}}$ sont égaux et ont pour mesure $90 - 2(31,7) = 26,6$; l'angle dans le triangle ABC a pour mesure : $180 - 2(31,7) = 116,6$
- l'angle $\widehat{\mathrm{GAC}}$, a pour mesure 31,7+ 26,6 = 58,3 donc l'angle $\widehat{\mathrm{AGC}}$ dans le triangle AGC a pour mesure : 180 – 2(58,3) = 63,4°.

III – Calcul des lignes trigonométriques exactes des angles du pentagone étoilé céleste pour les élèves du lycée

Calculons tout d'abord les longueurs des diagonales du rectangles d'or AKHI.

Nous avons : $\quad \mathrm{AH}^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1 = \left(\dfrac{6+2\sqrt{5}}{2}\right) + 1 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,9$

Donc, dans le triangle rectangle AIH nous avons :

$$\begin{aligned}
\sin^2\ 31,7 &= \frac{1}{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{5+\sqrt{5}} = \frac{2(5-\sqrt{5})}{10} \text{ et } \sin\ 31,7 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \\
\cos^2\ 31,7 &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{20} = \frac{10+2\sqrt{5}}{20} = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \text{ et} \\
\cos\ 31,7 &= \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}. \\
\tan^2\ 31,7 &= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times \sqrt{\frac{10}{5+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})^2}{20}} = \frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{20}(5-\sqrt{5})}{20} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ et} \\
\tan\ 31,7 &= \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.
\end{aligned}$$

Les angles de 31,7° et 58,3° étant complémentaires, le sinus de l'un est respectivement le cosinus de l'autre, la tangente de l'un est la cotangente de l'autre.

L'angle de 63,4° est double de 31,7°, appliquons la formule de duplication des sinus et cosinus :

$$\begin{aligned}
\sin 2a &= 2\sin a \cos a \Rightarrow \sin 63,4 = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} = \frac{2\sqrt{20}}{\sqrt{100}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \\
\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \Rightarrow \cos 63,4 = \frac{5+\sqrt{5}}{10} - \frac{5-\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ et } \tan 63,4 = \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5}{\sqrt{5}} = 2.
\end{aligned}$$

Nous remarquons que la tangente de l'angle de 63,4° est un nombre entier, pouvons-nous retrouver ce résultat à l'aide de la tangente d'un angle double d'un angle donné ?

On a : $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a} \Rightarrow \tan 63,4 = \dfrac{2\varphi^{-1}}{1-\varphi^{-2}}$ rappelons que $\varphi^2 =_m c+1$ donc $\dfrac{\varphi}{\varphi^2-1} = 1$

Multiplions cette expression par φ^{-2} on obtient : $\dfrac{\varphi^{-1}}{1-\varphi^{-2}} = 1$, donc $\tan 63,4 = 2$.

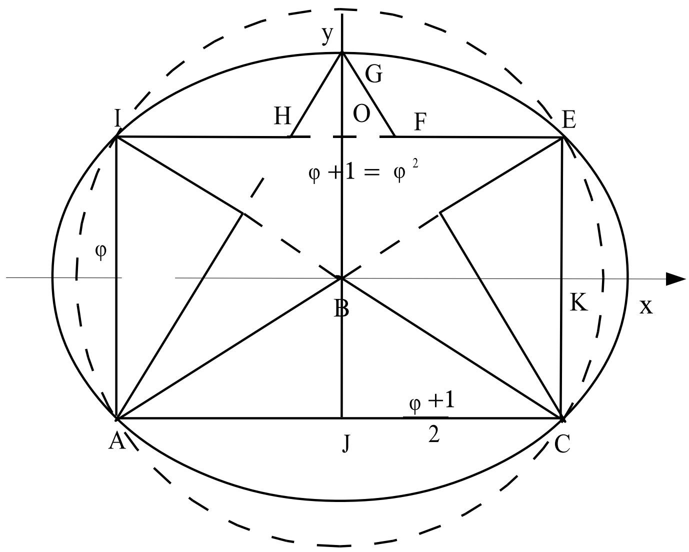
L'angle de 116,6° étant supplémentaire de celui de 63,4° nous en déduisons facilement ses lignes trigonométriques.

Angle en degrés	Sinus	Cosinus	Tangente
31,7	$\dfrac{5-\sqrt{5}}{10} \simeq 0,53$	$\dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \simeq 0,85$	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi^{-1}$
58,3	$\dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \simeq 0,85$	$\dfrac{5-\sqrt{5}}{10} \simeq 0,53$	$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$
63,4	$\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \simeq 0,89$	$\dfrac{\sqrt{5}}{5} \simeq 0,45$	$\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \times \dfrac{5}{\sqrt{5}} = 2$
116,6	$\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \simeq 0,89$	$-\dfrac{\sqrt{5}}{5} \simeq -0,45$	-2

IV – Calcul de l'équation de l'ellipse circonscrite au pentagone céleste pour le lycée

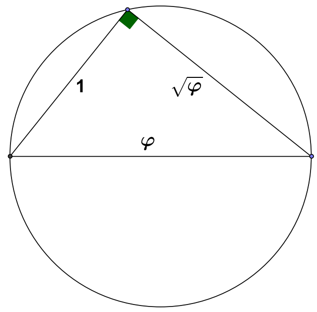
Le pentagone étoilé céleste étant construit à partir du rectangle ACEI auquel on a adjoint un triangle isocèle HFG, il admet une ellipse circonscrite d'équation assez aisée à calculer, nous proposons donc ce calcul aux élèves du familiarisés avec la notion d'ellipse.

Intuitivement le rectangle ACEI admet un cercle (tracé en pointillés) circonscrit, de centre B point de concours des diagonales du rectangle. Ce cercle peut être « aplati » verticalement selon l'axe [By) afin de passer par le point G, on obtient alors l'ellipse circonscrite au pentagone.



Nous avons placé nos axes selon les axes orthogonaux passant par le centre du rectangle d'or de côtés φ et φ^2 donc l'équation générale de l'ellipse est de la forme : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Le demi grand axe est a et le demi petit axe est $b = \mathrm{BG} = \dfrac{\varphi+1}{2} = \dfrac{\varphi^2}{2}$; L'ellipse passe par E de coordonnées : $x = \dfrac{\varphi^2}{2}$ et $y = \dfrac{\varphi}{2}$ donc $\dfrac{\varphi^2}{4a^2} + \dfrac{4\varphi^2}{4\varphi^4} = 1$ soit $\dfrac{\varphi^2}{4a^2} = \dfrac{\varphi^2-1}{\varphi^2} = \dfrac{1}{\varphi}$. On a donc $4a^2 = \varphi^5$ et l'équation de l'ellipse est $\boxed{\dfrac{4x^2}{\varphi^5} + \dfrac{4y^2}{\varphi^4} = 1}$. Donc le demi grand axe a vaut $\dfrac{\sqrt{\varphi^5}}{2} = b\sqrt{\varphi}$. L'aplatissement du cercle de centre B et de rayon $\dfrac{\sqrt{\varphi^5}}{2}$ pour obtenir l'ellipse est donc : $\sqrt{\varphi}$.

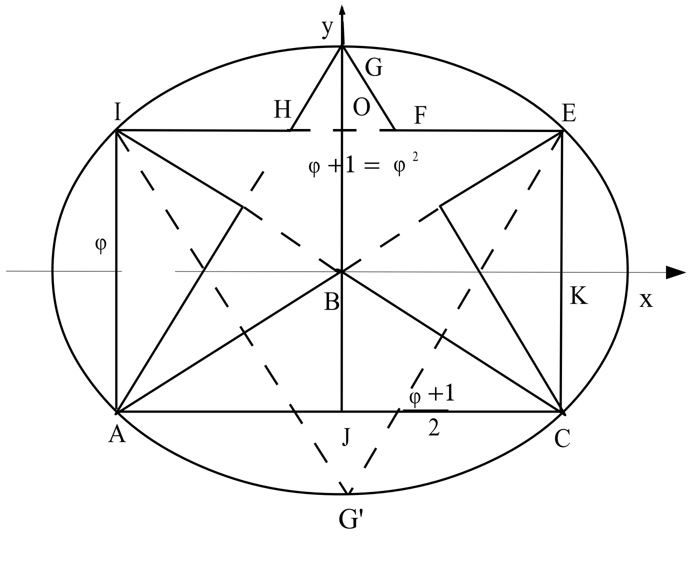
Les deux foyers de l'ellipse ont pour abscisses c et $-c$ avec $c^2 = a^2 - b^2 = \dfrac{\varphi^5}{4} - \dfrac{\varphi^4}{4} = \dfrac{\varphi^3}{4}\left(\varphi^2 - \varphi\right) = \dfrac{\varphi^3}{4}$ et il vient $c = \dfrac{\varphi\sqrt{\varphi}}{2}$.



Remarque : Nous voyons apparaître ici la longueur $\sqrt{\varphi}$ et, bien sûr nous posons une question, récurrente dans nos activités : cette longueur est-elle constructible à la règle et au compas ?
La réponse est « oui » comme le montre la figure ci-contre, à condition toutefois que l'on définisse une longueur unité.
Nous construisons un cercle de diamètre φ, nous reportons à partir de l'extrémité de celui-ci une corde de longueur 1 alors le troisième côté du triangle rectangle ainsi défini a pour longueur : $\sqrt{\varphi^2 - 1} = \sqrt{\varphi}$

Pour les élèves **moins familiarisés avec la notion d'ellipse** nous pouvons proposer une autre approche « intuitive » (nous mettons ce mot entre guillemets car chacun sait que l'intuition mathématique ne se développe qu'avec une longue pratique, nous devrions peut-être utiliser le mot « imagée ») du problème précédent. Nous proposerons ensuite un **calcul détaillé à partir de l'équation générale de l'ellipse, toujours pour les plus grands**.

Une autre façon d'aborder la recherche de l'équation de l'ellipse circonscrite peut consister à construire, comme cela est fréquent en géométrie un **complément de figure** qui va nous aider dans le raisonnement. En effet, chaque personne travaillant sur le pentagone céleste remarque que son enveloppe convexe ACEGI ressemble à une maison avec un toit. Le pentagone céleste est entouré du rectangle ACEI auquel on ajoute un triangle AGF. Ce petit triangle ôte la symétrie du rectangle, ce qui est gênant lorsque l'on recherche l'équation de l'ellipse. Nous proposons donc de compléter le pentagone en traçant le triangle IG'E symétrique du triangle AGC. **Nous obtenons maintenant un hexagone non régulier mais admettant deux axes de symétrie [Bx) et [By).** Par un effet de symétrie de la figure l'ellipse circonscrite au pentagone céleste sera aussi circonscrite à l'hexagone.



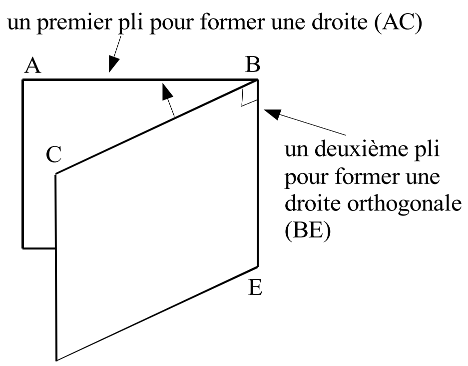
L'équation générale de l'ellipse est de la forme : $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. Nous remarquons tout d'abord que la figure est maintenant symétrique par rapport aux deux axes. Donc y est invariant lorsque l'on transforme x en $-x$ et x est invariant lorsque l'on transforme y en $-y$: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$; faisons $x \to -x$: $ax^2 - bxy + cy^2 - dx + ey + f = 0$. Par addition membre à membre, il vient : $2ax^2 + 2cy^2 + 2ey + 2f = 0$ d'où $ax^2 + cy^2 + ey + f = 0$. Alors $y \to -y$ donne : $ax^2 + cy^2 - ey + f = 0$; Par différence membre à membre, il vient : $e = 0$. L'équation simplifiée de l'ellipse est $ax^2 + cy^2 + f = 0$.

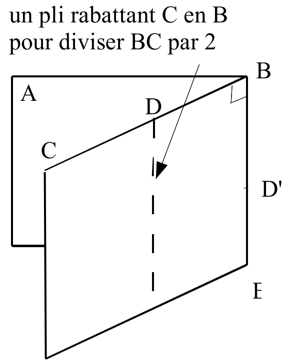
Écrivons que l'ellipse recherchée passe par le point G de coordonnées (0, (φ+1) / 2) : $c[(\varphi + 1)/2]^2 + f = 0$. Donc $f = -c[(\varphi + 1)/2]^2$.

Écrivons que l'ellipse recherchée passe par le point E de coordonnées $((\varphi+1)/2), \varphi/2)$.
$(a/4)(\varphi+1)^2 + (c/4)\varphi^2 = (c/4)(\varphi+1)^2$; ou encore $(a/4)\varphi^4 + (c/4)\varphi^2 = (c/4)\varphi^4$; simplifions cette expression par $\varphi^2/4$; il vient $a\varphi^2 + c = c\varphi^2$ donc $a\varphi^2 = c(\varphi^2 - 1) = c\varphi$ et $c = a\varphi$.
L'équation de l'ellipse devient $ax^2 + a\varphi y^2 = a\varphi^5/4$ puis en simplifiant par ($a \neq 0$), $4x^2 + 4\varphi y^2 = \varphi^5$. Soit encore $\frac{4x^2}{\varphi^5} + \frac{4y^2}{\varphi^4} = 1$, ce que nous avions calculé dans le paragraphe précédent.
Les calculs du paragraphe III nous permettent d'obtenir une construction très simple par pliage de l'angle de 63,4° qui est donc **l'angle aigu formé par les diagonales de tous les rectangles d'or.**

V – Construction par pliage des rectangles d'or dont la longueur des diagonales est connue, variante à la règle et au compas pour la classe de seconde

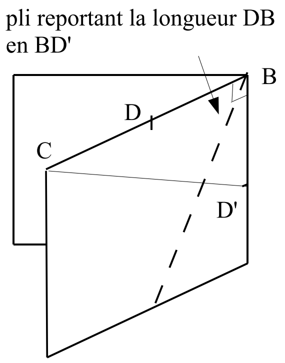
Nous proposons aux élèves de construire par la technique habituelle deux plis perpendiculaires :

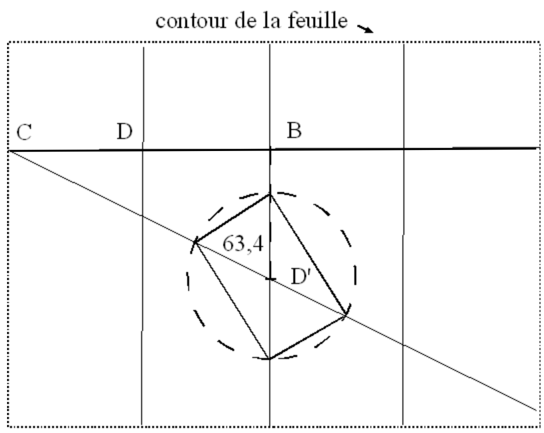




Nous reportons ensuite la longueur DB le long de [BE] à partir de B par le pli en pointillés.

Alors l'angle a pour mesure 63,4°, nous demandons aux élèves de vérifier leur construction avec le rapporteur. Ensuite nous leur demandons d'ouvrir la feuille et de marquer la droite (CD') par un pli. Nous demandons alors aux élèves de montrer que tout cercle centré en D' rencontre les droites (CD') et (D'B) aux sommets d'un rectangle d'or.

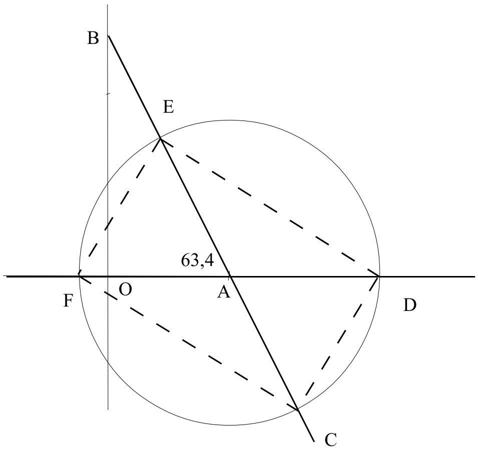




Il est possible d'effectuer cette construction à la règle et au compas en demandant aux élèves de construire un rectangle d'or dont la mesure des diagonales est imposée ; voici une suggestion de texte pour les classes de seconde, pour le calcul effectif de la tangente de l'angle 63,4° que nous avons exposé plus haut. Nous le proposerons aussi aux classes de première et terminale.

Exercice (difficulté moyenne)
Construire un rectangle d'or avec votre construction préférée : pliage ou règle et compas.
Vérifier avec la calculatrice que l'angle formé par les diagonales du rectangle d'or mesure 63,4° au dixième de degré près.
Vérifier avec la calculatrice que la tangente de l'angle de 63,4° est 2 au dixième près, en déduire une construction

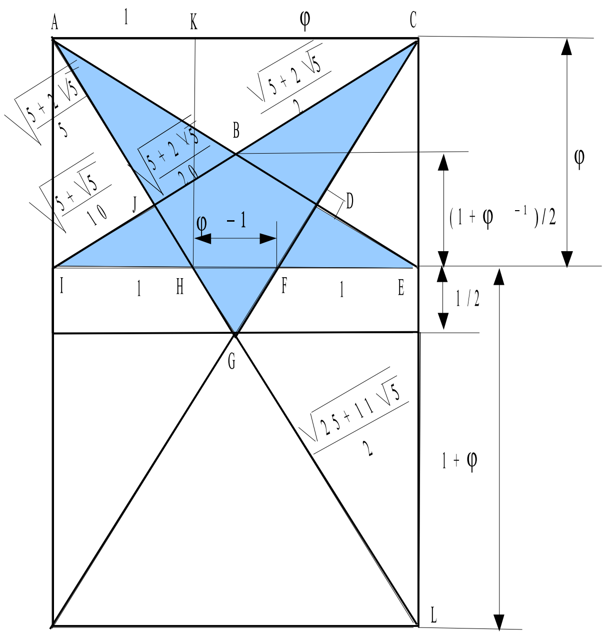
simple d'un tel angle à la règle graduée et à l'équerre. On suppose connue la longueur des diagonales d'un rectangle d'or, par exemple 10 cm, construire ce rectangle d'or à l'aide du compas.



Solution
Construction de l'angle de 63,4° : tracer deux droites orthogonales qui se croisent en O, reporter à partir de O, sur l'une une longueur par exemple 4 cm d'extrémité A, sur l'autre la longueur double soit 8 cm d'extrémité B, alors l'angle $\widehat{\text{OAB}}$ mesure 63,4°, le vérifier avec le rapporteur. Tracer le cercle de centre A et de diamètre 10 cm qui rencontre la droite (OA) en D et F et la droite (AB) en C et E alors le rectangle CDEF est le rectangle d'or recherché.

V – Calcul des mesures des côtés et hauteurs du pentagone étoilé céleste pour le lycée

Pour commencer le travail nous effectuons des calculs pour obtenir les longueurs des différentes branches du pentagone céleste en fonction de φ. Nous calculons tout d'abord la diagonale [IC] du rectangle d'or ACEI de côtés φet φ+1 puis la demi diagonale BC.



$\text{IC}^2 = \varphi^2 + (\varphi + 1)^2 = 2\varphi^2 + 2\varphi + 1$ or $\varphi^2 = \varphi + 1$ donc $\text{IC}^2 = 3 + 4\varphi$ et $\text{IC} = \sqrt{3+4\varphi}$ et $\text{BC} = \dfrac{\sqrt{3+4\varphi}}{2}$. Nous avons remarqué que le triangle AJB égal au triangle CDB est rectangle, notons a le petit côté de l'angle droit, alors le grand côté de l'angle droit mesure 2a (calcul du paragraphe précédent). Dans le triangle AJB nous avons donc : $a^2 + (2a)^2 = \dfrac{3+4\varphi}{4}$ d'où $a^2 = \dfrac{3+4\varphi}{20}$ puis $a = \sqrt{\dfrac{3+4\varphi}{20}}$.

IJ = IB - JB $= \dfrac{\sqrt{3+4\varphi}}{2} - \sqrt{\dfrac{3+4\varphi}{20}}$

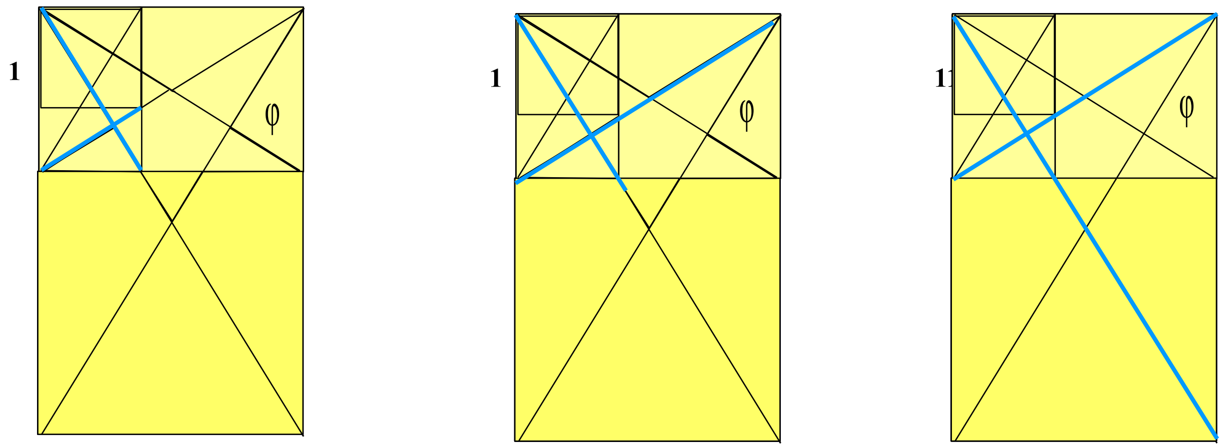
$\text{IJ} = \dfrac{(\sqrt{3+4\varphi})(5-\sqrt{5})}{10}$

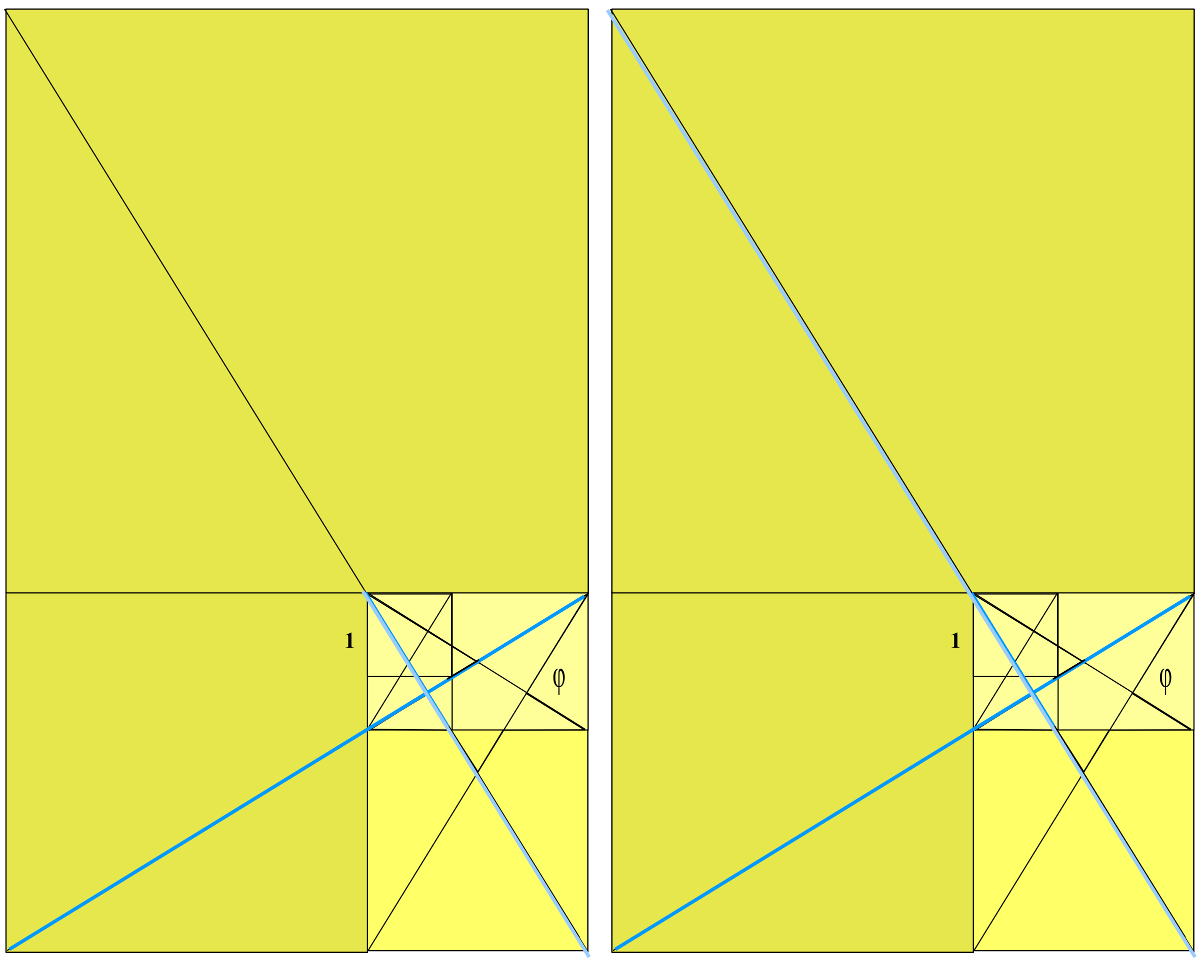
Le point G étant l'intersection des diagonales du grand rectangle d'or ACLM de côtés $1+\varphi$ et $1+2\varphi$, la hauteur du triangle isocèle HGF est $\dfrac{(1+2\varphi)}{2} - \varphi = \dfrac{1}{2}$. La hauteur du triangle isocèle HBF est $\dfrac{(1+\varphi^{-1})}{2} = \dfrac{\varphi}{2}$, sa base HF mesure $1 + \varphi - 2 = \varphi - 1$.

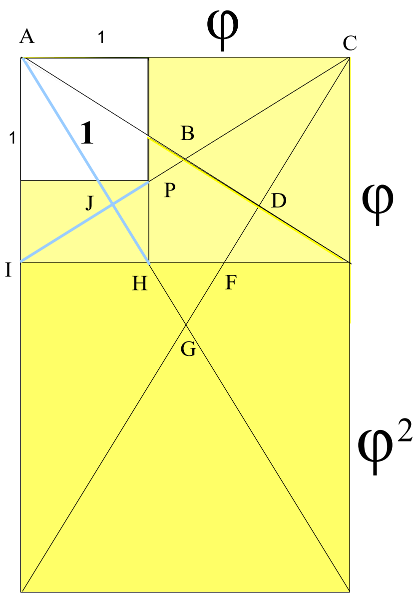
Pour terminer nous vous proposons de calculer les valeurs algébriques que nous avons indiquées sur la figure. Nous revenons sur ces valeurs par raisonnement géométrique dans le paragraphe suivant à propos des propriétés de la croix céleste.

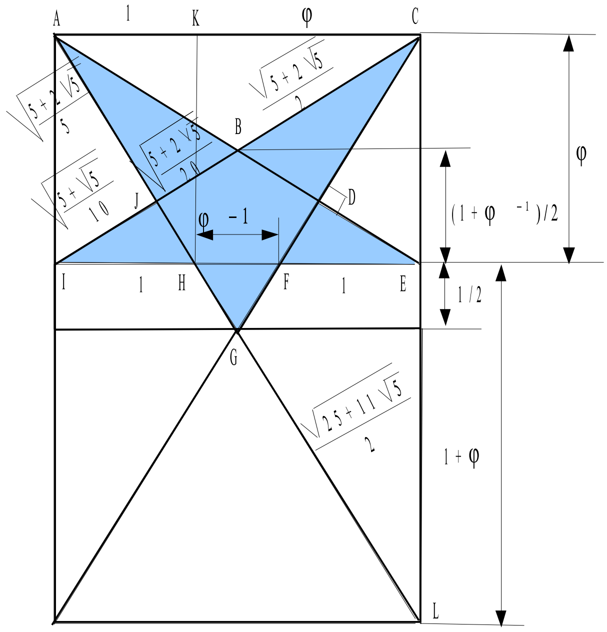
VI – Définition de la croix céleste et étude de ses propriétés (*découvertes par l'un d'entre nous : Ruben Rodriguez Herrera)*

Nous vous avons fait remarquer que les triangles CDB et AJB sont rectangles, il en est de même, bien sûr dans les constructions successives des rectangles d'or dont les côtés sont tous respectivement proportionnels. Nous mettons en évidence dans les figures suivantes les « **croix célestes » formées par deux branches orthogonales de deux rectangles d'or successifs** dont nous allons calculer les propriétés.









Observons les branches de la première croix céleste : [JP] ; [JH] ; [IJ] ; [JA]. Ce sont les petits côtés de triangles rectangles d'hypoténuses, φ^{-1}, 1, φ en croissant. Ils sont semblables par la propriété des rectangles d'or, leurs angles correspondants sont donc égaux, la tangente de l'angle de mesure 58,3° au dixième de degré près est φ. Les calculs du paragraphe précédent sont assez ingrats aussi nous allons vous proposer un raisonnement géométrique qui vous démontrera une fois de plus combien la géométrie euclidienne peut être élégante. Appelons a la mesure du plus petit côté JP du plus petit triangle rectangle HJP. L'autre côté JH a donc pour mesure $a\varphi$. Le triangle suivant, d'hypoténuse 1 a pour côtés JH et JI, ce dernier de mesure $a\varphi^2$. Pour des raisons similaires le côté JA du triangle suivant mesure $a\varphi^3$.
Récapitulons : JP = a ; JH = $a\varphi$; JI = $a\varphi^2$; JA = $a\varphi^3$.
Nous constatons que JI = JH + JP à cause de la propriété de φ : φ^2=φ+1 ainsi que : JA = JH + JI.
Plus généralement :

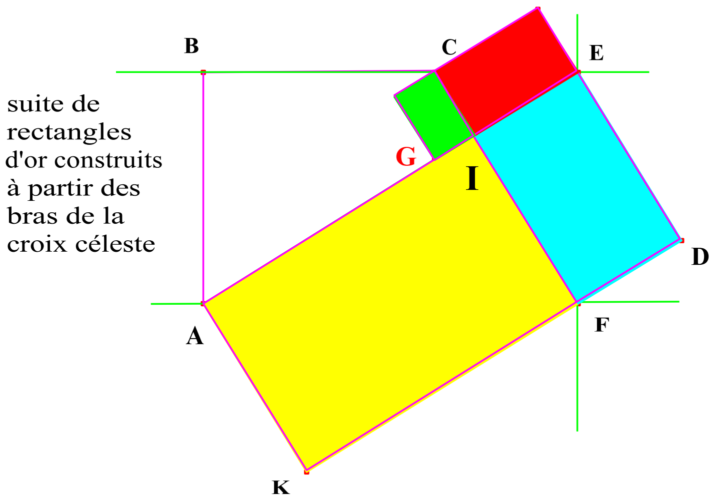
Propriété 1 - Les mesures des branches successives distinctes des croix célestes forment une suite géométrique de raison φ.

VII - Suite des rectangles d'or construits à partir des bras de la croix céleste pour le lycée

Nous vous proposons cette suite d'activités qui peuvent paraître à certains lecteurs avertis « élémentaires » car leurs résultats sont « un peu » prévisibles. Ces activités étant, a priori destinées aux élèves de troisième du collège et de lycée elles pourront être proposées avec profit nous semble-t-il aux élèves professeurs de l'université.
Nous vous rappelons que, pour que les élèves construisent bien leurs psychomorphismes[2] autour d'une notion, il est nécessaire d'aborder celle-ci suivant des directions différentes afin de renforcer et préciser leur image mentale.

Puisque la suite des bras des croix célestes est géométrique de raison φ il est intéressant d'observer les rectangles d'or successifs construits sur ces bras. Remarquons qu'il a deux façons de construire la suite des croix célestes, puisque, dans le pentagone céleste, deux couples de côtés se coupent à angle droit. Pour simplifier nous choisissons de **construire les croix célestes successives autour du point I des figures précédentes**.

[2]Pour la notion de « Psychomorphisme » on pourra consulter les articles en ligne sur le site de l'IREM de Basse-Normandie par Ruben RODRIGUEZ HERRERA, voir la bibliographie.



Dans la suite de quatre rectangles de la figure ci-dessus on peut observer la suite formée par les périmètres et la suite formée par les aires et regarder si elles sont : une suite arithmétique, une suite géométrique ?

Si l'on prolonge la suite des croix célestes de façon décroissante ou croissante on observe que le point I est commun et **que les rectangles de la suite qui ont deux rangs d'écart** sont homothétiques dans une homothétie de centre I et de rapport $-\varphi^2$, (si l'on va dans le sens croissant) ou $-1/\varphi^2$, (si on va dans le sens décroissant). En fait cette homothétie à la propriété de laisser tous les rectangles d'or de « **la suite céleste** », globalement invariants.

Supposons la suite croissante. En effet par exemple IA/IE = $-\varphi^2$, ceci prouve que l'aire d'un rectangle est égale à φ^4 fois l'aire du rectangle de la suite céleste qui est placé deux rangs avant.

Calculons l'aire d'un rectangle par rapport à l'aire du précédent :
Par exemple, l'aire de AIFK est égale à :
AI $\times$ IF = φ IF ^{2} et l'aire de EIFL est :
IF $\times$ IE = IF $\times$ IF/φ = IF^2(φ -1)
Donc le rapport de la plus petite aire à la plus grande est : (IF ^{2}(φ -1)) / (φ IF ^{2}) = 1-1/φ = (φ -1)/φ = 1 / φ^2
Donc le rapport des aires, dans le sens croissant, est φ^2.

Propriété 2 - La suite des aires des rectangles de la « suite céleste » dans le sens croissant est géométrique de raison φ^2.

La suite des périmètres des rectangles de la suite céleste vérifie, par exemple :
Périmètre de AIFK est (AI+IF) $\times$ 2 = (φ IF + IF) $\times$ 2 = (φ+1) IF $\times$ 2
Périmètre de EIFL est (IF+IE) $\times$ 2 = (IF + IF/ φ) $\times$ 2 = (1+1/ φ) $\times$ 2 IF = $\varphi\times$ 2 IF
Et le rapport des périmètres est :
((φ +1) IF $\times$ 2) / (φ $\times$ 2 IF) = 1+ 1/φ = φ. On a donc

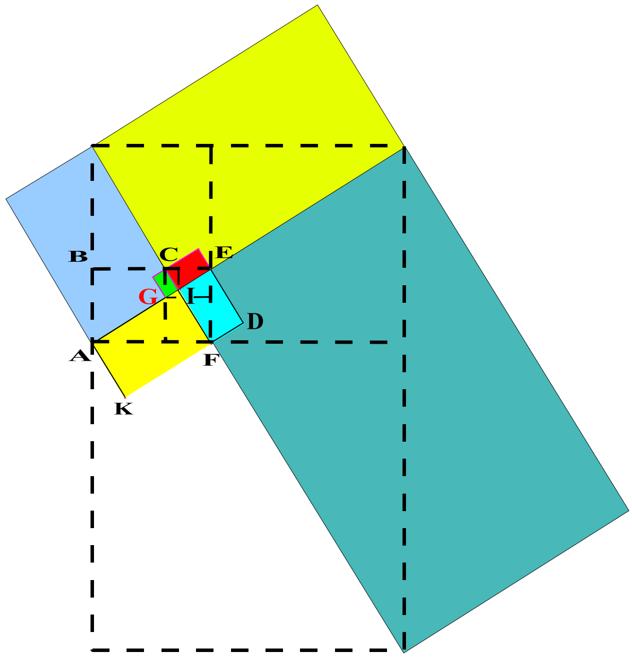
Propriété 3 - La suite des périmètres des rectangles de la « suite céleste », est une suite géométrique de raison φ(dans le sens croissant).

Nous proposons maintenant de **poursuivre la construction de la suite des rectangles célestes**, ce qui consolidera cette notion et ses rapports avec la spirale des rectangles d'or que nous avons dessinée en traits noirs sur la figure ci-dessous.

Nous demandons de calculer explicitement le plus simplement possible les premiers termes de la suite des côtés des rectangles célestes, rappelons que, dans le paragraphe VI nous avons calculé la valeur algébrique de la longueur d'une des branches de croix céleste IJ, la suivante a pour longueur :
$\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \varphi$; la suivante $\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \varphi^2$; puis
$\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \varphi^3 = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}} \times (\varphi+1)\varphi =$
$\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}} \times (2\varphi+1)$

On poursuit facilement en utilisant la propriété démontrée précédemment : les branches successives des croix célestes forment une suite qui est géométrique de raison φ. Il est donc aisé d'en déduire la suite numérique en fonction de φ des aires des rectangles d'or de la « suite céleste » :
$\dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \times \varphi$; la suivante $\dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \times \varphi^2$;
puis plus généralement $\dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \times \varphi^n$.

Nous observons que contrairement à la suite des rectangles d'or qui complètent à chaque étape un rectangle parfait (voyez les traits noirs en gras), lorsque l'on ajoute un rectangle céleste, il se superpose à l'un des précédents mais ne complète pas un grand rectangle. Soulignons que la construction des rectangles célestes demande de la réflexion et de la minutie, ce qui est très favorable à l'apprentissage.



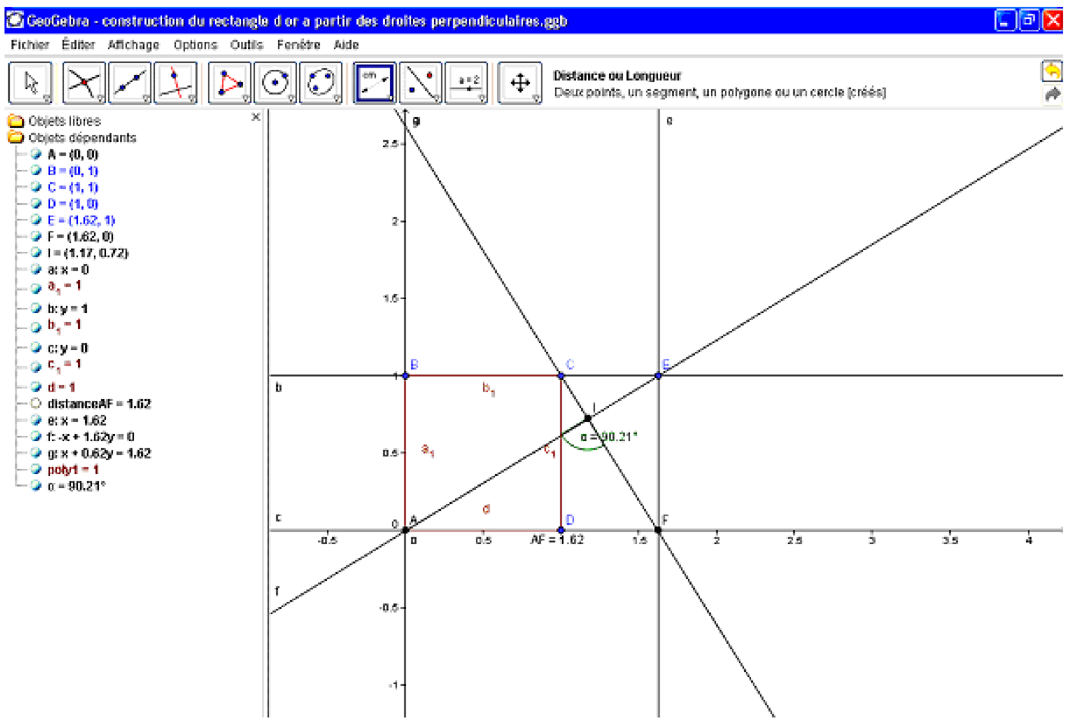
VIII - Une construction du rectangle d'or et la croix céleste à l'aide de GEOGEBRA

1) On trace un carré ABCD de côtés de longueur 1, (avec la fonction distance du logiciel), puis on lui adjoint un rectangle extérieur CDFE, tel que le point F soit sur la droite (AD) et le point E sur la droite (BC)

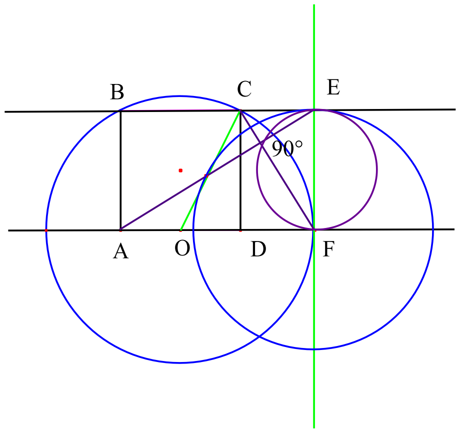
2) On trace les droites (AE) et (CF) qui se coupent en I, puis on fait mesurer par le logiciel l'un des angles en I

3) On déplace le point F, (toujours sur la droite (AD) et on s'arrête quand l'angle en I est de 90° avec la meilleure précision possible.

4) Avec la fonction distance du logiciel on constate que la distance AF est une approximation du nombre d'or, c'est-à-dire 1,62 au centième près.



Justification de la construction



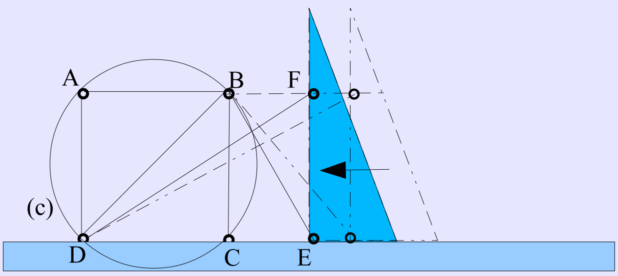
Puisque, par construction, les segments [AE] et [CF] sont orthogonaux, les triangles AEF et CFE sont semblables ainsi que les rectangles ABEF et CEFD.
On a donc la proportion suivante :
(AD + DF)/ AB = CD/DF.
Choisissons la longueur du côté du carré ABCD pour unité de mesure : AD=1 ; on a : (1+DF)/1 = 1/DF.
Posons DF = x où x est un réel positif. On a l'équation dans R+* :
$(1 + x) = 1/x$. Équivalente à $x^2 + x - 1 = 0$ dont la solution est $x = (-1 + \sqrt{5})/2 = \varphi^{-1}$.
Le rectangle ABEF est d'or.

Propriété 4 - Si l'on prolonge deux côtés opposés d'un carré ABCD par un rectangle CDEF, pour que CDEF soit un rectangle d'or, il suffit que les diagonales respectives [AE] et [CF] des rectangles ABEF et CDEF soient orthogonales.

Réalisation sous forme de bricolage pour le collège : Matériel – une planche de contre-plaqué, quelques pointes, une règle plate, une équerre, un compas des bracelets élastiques (par groupes d'au moins trois élèves).

Commentaire : comme dans toutes ces expériences de construction géométrique, nous sommes confrontés au problème de l'approximation : épaisseur des traits, diamètre des pointes, positionnement incertain de la règle plate, incertitude de la position de l'intersection des deux élastiques sur le cercle qui peuvent troubler l'élève.

une planche de contreplaqué ou feuille de carton fort
un carré ABCD figuré par quatre pointes ou punaises
le cercle (c) circonscrit au carré tracé sur la planche



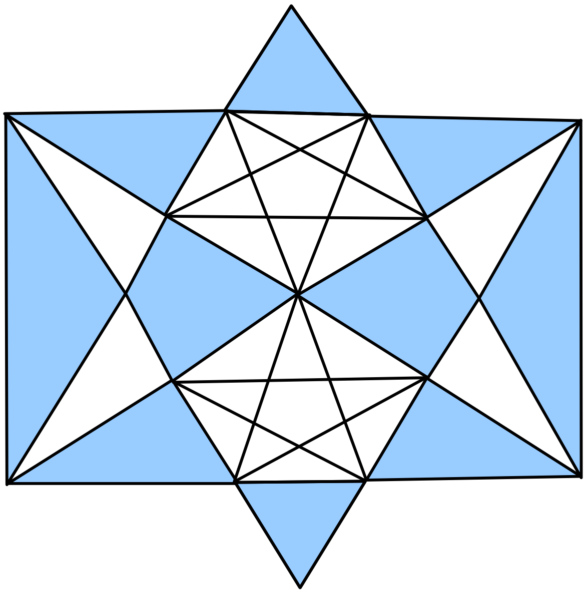
une règle plate appuyée sous les pointes C et D
une équerre glisse le long de la règle plate,
deux pointes E et F sur l'équerre espacées du côté du carré, E au sommet de l'angle droit
deux élastiques fixées aux extrémités de la diagonale [DB]
du carré et aux deux pointes E et F de l'équerre
on ajuste l'équerre pour que les deux élastiques se croisent
sur le cercle, alors les **rectangles AFED et BFEC sont d'or**.

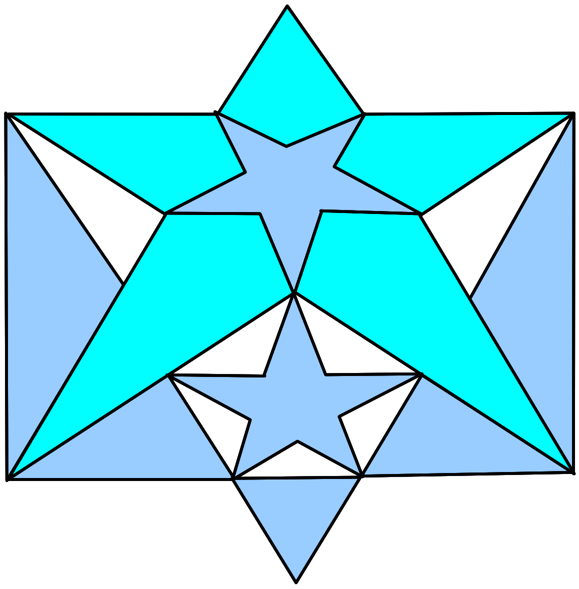
Il est donc bon de souligner aux élèves qu'une fois de plus ce n'est pas parce que « cela marche » que nous sommes satisfaits, il est possible que notre « petit rectangle d'or » ne donne pas une très bonne approximation de φ - 1 (si nous supposons le carré de côté unitaire) mais il s'agit de réaliser physiquement une investigation mathématique, nous faisons un travail d'ingénieur, qui devra par exemple, affiner ses ajustements pour répondre à des normes de précision.

Nous faisons ici le travail réciproque du précédent où nous constations que Geogebra nous délivrait une mesure de φ acceptable et ensuite, nous justifions la validité de la construction.

Dans la vie industrielle il est plus fréquent de réfléchir à une technique, puis de la réaliser au mieux, mais, à l'école, il ne faut pas priver l'élève de la devinette : « Pourquoi ça marche ? »

Pour terminer nous vous proposons une mosaïque construite à partir de l'hexagone introduit dans le calcul de l'ellipse circonscrite au pentagone céleste au paragraphe IV. Cette mosaïque fait apparaître deux nouveaux pentagones, qui semblent des pentagones réguliers vus dans une autre perspective, aussi nous proposons à votre sagacité le petit problème suivant : existe-t-il une transformation simple ayant pour objet le pentagone céleste et pour image ce nouveau petit pentagone ? Nous vous proposons de commencer par étudier la croissance des côtés du petit pentagone en utilisant les calculs et propriétés démontrés précédemment.





Pour poursuivre l'étude de ces curieux objets géométriques nous vous invitons à lire dans un prochain « Miroir des Maths » l'article suivant de Jean-Pierre Le Goff : « À la rencontre du pentagone céleste (II) » qui vous emmènera dans le monde fascinant de la perspective . . .

Bibliographie

Rodriguez Herrera Ruben *Activités variées autour du nombre d'or pour la classe de troisième*, quatre articles en ligne sur le site de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie Caen http ://www.math.unicaen.fr/irem/
Rodriguez Herrera Ruben - Salles-Legac Danielle *« Les symétriseurs »* in Le miroir des mathématiques (n°6) Décembre 2010.Caen, I.R.E.M. de Basse-Normandie et en ligne http ://www.math.unicaen.fr/irem/
Rodriguez Herrera Ruben *L'enseignement des fractions basé sur la loi de la correspondance morphique ("psychomorphisme") de deux systèmes dans la formation des connaissances*, en ligne sur le site de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie page "Relations internationales" http ://www.math.unicaen.fr/irem/
Salles-Legac Danielle et l'équipe de géométrie de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie *Activités variées de constructions géométriques de la parabole, prolongements à l'ellipse* (en espagnol et en français). Caen, I.R.E.M. de Basse-Normandie 2011.
Salles-Legac Danielle et l'équipe de géométrie de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie *Découvrir et démontrer en géométrie avec des pièces de puzzle* (en espagnol et en français). Caen, I.R.E.M. de Basse-Normandie 2011.
Salles-Legac Danielle et l'équipe de géométrie de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie *Symétrique axial d'un point et déplacement d'un segment par pliage* Le miroir des mathématiques (n°10) novembre 2012.Caen, I.R.E.M. de Basse-Normandie et en ligne http ://www.math.unicaen.fr/irem/

Membres de l'équipe Géométrie de l'IREM de Basse-Normandie :
Anne-Marie Bock, Éric Lehman, Olivier Longuet, Ruben Rodriguez, Danielle Salles.